Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Carlos Adriano da Costa Gomes

Sobre Hipersuperfícies Tipo-Espaço Completas com Curvatura Média Constante no Espaço de Lorentz-Minkowski

Teresina

2014

Carlos Adriano da Costa Gomes

Dissertação de Mestrado:

Sobre Hipersuperfícies Tipo-Espaço Completas com Curvatura Média Constante no Espaço de Lorentz-Minkowski

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino

Teresina
2014

Sobre Hipersuperfícies Tipo-Espaço Completas com Curvatura Média Constante no Espaço de Lorentz-Minkowski

Carlos Adriano da Costa Gomes

Dissertação submetida à Comissão de Pós-gradução em Matemática da Universidade Federal do Piauí, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

____

Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino (Orientador).

Universidade Federal do Piauí (UFPI)

____

Dr. Barnabé Pessoa Lima

Universidade Federal do Piauí (UFPI)

____

Dr. Abdênago Alves de Barros

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Teresina - 2014

Costa Gomes, Carlos Adriano da.

xxxx Sobre Hipersuperfícies Tipo-Espaço Completas com Curvatura Média Constante no Espaço de Lorentz-Minkowski/Carlos Adriano da Costa Gomes. - 2014

folhas.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, 2014.

Orientador: Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino

1.Geometria

CDD

Dedico este trabalho ao meu querido tio Ernestro Gomes e ao meu amigo Marcelo Nava. (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela saúde e paz. Agradeço também a todas as pessoas que de forma direta ou indiretamente me auxiliaram nesta caminhada. Em particular,

A meu pai Pedro Gomes e minha mãe Lenilda da Costa, por todo apoio e assistência (amo vocês);

Aos meus irmãos: Fernando Gomes e Maria Fernanda pela dedicação, compreensão e ajuda para a concretização desse meu objetivo;

Aos meus primos: Marcelo e sua esposa Suzane, Marcos, Mônica, Renata, Roberta, Eduarda, Rodrigo, Jair, Fernando Fernandes, Nara Keila, Kaic e a todos os outros por compor essa nova geração da família Gomes;

Aos Tios: Ernestro Gomes (*in memoriam*) e sua esposa Antônia, Maria Gomes, Judite, Renato, Elzanira, Augusto, Antônio José, Bianor, Janete, Maria Gecina e seu esposo Raimundo e a todos que sempre acreditaram em mim;

Aos meus avós maternos: Antônia Mocinha e José Fernandes pela perseverança, e os avós paternos: Adilina e José Gomes (*in memoriam*);

Às madrinhas: Maria José (batismo) e Maria Antônia (Eucaristia) pelo incentivo e confiança;

Aos conterrâneos: Antônio Gomes (flamenguista), sua esposa Vera Lúcia e sua família, João Gomes, Francisco e sua esposa Lêda, Francisco e sua esposa Alice, Antônio e sua esposa Rosa, Nonato Araújo, Claudete e Aracy pela confiança;

Aos amigos de Presidente Dutra: Fabiano Rodrigues, Evandro, Rogério, Leonardo, Fagner, Fabrício e sua esposa Lusimayra, Fernando e sua esposa Kássia, Antônio Marques, Ariocélio, Ariston, Arionildo, Raimundo, Lorival (*in memoriam*) e sua esposa Zilda, Alef, Thiago e sua esposa Kelly, Hyrla, Beatriz, Adriano, Roberto, Paulo, Carlos Nielton, Karine, Francivan, Kairo, Alessandra e a todos os outros pela força e esperança;

Aos amigos Gilson do Nascimento, Sandoel Vieira, Rui Marques e Alexandre Lima pelo imensurável apoio, sem vocês eu não teria chegado aqui!;

Aos amigos de graduação: Lucas, Jordan, Vitaliano, Bruno, Mariane, Aline, Atécio, Lays, Daguivan, Igor, André e todos os outros da turma Planolândia, obrigado por existirem;

Aos demais amigos de mestrado: Weslay, Ramon, Lucas Vidal, Emerson, Samara, Sérgio, Joel, Renata, Thiago e Leonardo;

Aos amigos de Teresina: Rodolfo, Janaciara, Janáira, Ana Caroline pela força, incentivo e credibilidade;

À minha namorada Edna Borges, pela paciência e por está ao meu lado nesta conquista;

Aos professores do Colégio João Martins e do Colégio Padre Anchieta pela base educacional que me proporcionou crescer;

Aos servidores da Eletronorte/Ma, em particular: Paulo Sérgio, Igor e Iara por me acolherem;

Aos professores de Graduação e Mestrado, em particular: Newton Luiz, Paulo Alexandre, João Benício, espelharei-me em vocês como exemplos de cidadãos e profissionais;

Ao professor, Cícero Pedro de Aquino, pela orientação, paciência e compreensão para a realização deste trabalho;

Aos professores, Abdênago Alves de Barros e Barnabé Pessoa Lima, por comporem a banca e contribuirem para a conclusão deste trabalho;

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"Agradeço todas as dificuldades que enfrentei, não fosse por elas, eu não teria saído do lugar. As facilidades nos impedem de caminhar. Mesmo as críticas nos auxiliam muito.".

Chico Xavier.

Resumo

Esta dissertação foi baseada no artigo *On the curvatures of bounded complete spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space* de Aledo e Alías publicado no periódico *Manuscripta Math.* vol. 101 no ano 2000. Neste trabalho, os objetos de estudo são hipersuperfícies tipo-espaço completas isometricamente imersas no espaço de Lorentz-Minkowski. Na primeira parte do trabalho, abordaremos o caso em que estas hipersuperfícies possuem curvatura média constante e possuem uma restrição geométrica de estar limitada entre dois hiperplanos tipo-espaço paralelos ou, num segundo caso, entre dois espaços hiperbólicos concêntricos. Na segunda parte do trabalho, apresentamos algumas estimativas para a curvatura de Ricci de tais hipersuperfícies, bem como para as suas curvaturas de ordem superior.

Palavras-chave: Espaço de Lorentz-Minkowski; Hipersuperfícies Tipo-Espaço; Curvaturas de Ordem Superior; Curvatura de Ricci.

Abstract

This dissertation was based on the paper *On the curvatures of bounded complete spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space* due to Aledo and Alías, published in the journal *Manuscripta Math.* vol. 101 in 2000. In this paper, the objects of our study are complete spacelike hypersurface isometrically immersed in Lorentz-Minkowski space. In the first part of the paper, we will approach the case in which these hypersurfaces have constant mean curvature and have a geometric constraint of being limited between two parallel spacelike hyperplanes or, in a second case, between two concentric hyperbolic spaces. In the second part of the paper we present some estimates for the Ricci curvature of these hypersurfaces, as well as their higher order curvatures.

Keywords: Lorentz-Minkowski Space; Spacelike Hypersurfaces; Curvatures of Higher Order; Ricci Curvature.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No decorrer dos anos, o estudo das hipersuperfícies tipo-espaço imersas em numa forma espacial Lorentziana vem despertando imenso interesse, tanto no aspecto matemático quanto no físico. Do ponto de vista físico, esse interesse é justificado pelo tratamento de diversos problemas em relatividade. Do ponto de vista matemático o interesse reside no estudo da rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço imersas em tal espaço ambiente. Particularmente, quando o espaço ambiente é o espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ podemos citar o trabalho de Cheng e Yau [7] no qual os autores estabeleceram o seguinte resultado

Teorema 1.1. *As únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média nula no espaço de Lorentz-Minkowski são os hiperplanos tipo-espaço.*

Aqui, nossos objetos de estudo são as hipersuperfícies tipo-espaço isometricamente imersas no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$. Neste trabalho, faremos um estudo da rigidez de tais hipersuperfícies estabelecendo uma condição geométrica apropriada e um controle sobre a curvatura média. Além disso, vamos exibir algumas estimativas para suas curvaturas de ordem superior. Nossa principal referência é o artigo *On the curvatures of bounded complete spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space*, devido a Aledo e Alías [3].

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2, estabelecemos a notação e os pré-requisitos necessários à abordagem dos problemas tratados neste trabalho. No capítulo 3, abordaremos sobre as curvaturas de hipersuperfícies tipo-espaço isometricamente imersas em $\mathbb{L}^{n+1}$, no qual podemos citar os principais resultados:

Teorema 1.2. *As únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média* *constante isometricamente imersas no espaço de Lorentz-Minkowski* $\mathbb{L}^{n+1}$ *que são limitadas por dois hiperplanos tipo-espaço paralelos são os hiperplanos tipo-espaço.*

Teorema 1.3. *As únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante isometricamente imersas no espaço de Lorentz-Minkowski* $\mathbb{L}^{n+1}$ *que são limitadas por dois espaços hiperbólicos concêntricos são os espaços hiperbólicos.*

Supondo um controle geométrico apropriado sobre a hipersuperfície tipo-espaço M^n temos os seguintes resultados.

Proposição 1.1. *Seja* $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa isometricamente imersa em* $\mathbb{L}^{n+1}$ *com curvatura seccional limitada inferiormente. Assuma que* M^n *está orientada pela sua aplicação de Gauss* N *na direção futuro. Então,*

(i) Se M^n *está limitada por um espaço hiperbólico superior centrado em* $a \in \mathbb{L}^{n+1}$*, então para* $j = 1, \ldots, n$

$$\sup H_j \geqslant \frac{1}{r^j},$$

onde $\sup\langle \psi - a, \psi - a\rangle = -r^2$*;*

(ii) Se M^n *está limitada por um espaço hiperbólico inferior centrado em* $a \in \mathbb{L}^{n+1}$*, então*

se j *é ímpar*

$$\inf H_j \leqslant -\frac{1}{r^j},$$

e se j *é par*

$$\sup H_j \geqslant \frac{1}{r^j},$$

onde $\sup\langle \psi - a, \psi - a\rangle = -r^2$.

Proposição 1.2. *Seja* $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura seccional limitada inferiormente isometricamente imersa em* $\mathbb{L}^{n+1}$*. Se* M^n *está limitada por algum espaço hiperbólico centrado em* $a \in \mathbb{L}^{n+1}$*, então*

$$\inf \mathrm{Ric} = \inf_{p \in M^n} \mathrm{Ric}_p(v, v) \leqslant -\frac{(n-1)}{r^2},$$

para todo $v \in T_pM^n$*,* $|v| = 1$*, onde* $\sup\,\langle \psi - a, \psi - a\rangle = -r^2$.

Capítulo 2

Noções preliminares

Neste capítulo estabeleceremos a notação a ser usada e recordaremos alguns conceitos e fatos básicos, necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Sendo assim, a prova de alguns resultados não será feita, mas em todo o texto ficará clara a referência para obter tais demonstrações.

2.1 Métricas Riemannianas, conexões e curvaturas

Definição 2.1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável* M^n *é uma correspondência que associa a cada ponto* $p \in M^n$ *um produto interno* $\langle , \rangle_p$ *no espaço tangente* T_pM^n*, que varia diferencialmente no seguinte sentido, se* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n$ *é um sistema local de coordenadas em torno de* $p \in M^n$*, com* $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q \in \varphi(U)$*, então*

$$g_{ij}(q) = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_q \right\rangle_q$$

é uma função diferenciável em $\varphi(U)$*.*

Proposição 2.1. *A definição de métrica não depende da escolha do sistema local de coordenadas, ou seja, a diferenciabilidade das funções* g_{ij} *não depende da escolha do sistema local de coordenadas.*

Observação 2.1. **(a)** *Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par* X, Y *de campos de vetores diferenciáveis em um aberto* V *de* M^n*, a função* $\langle X, Y\rangle$ *é diferenciável em V;*

(b) *As funções* g_{ij} *são chamadas coeficientes da métrica Riemanniana no sistema local de coordenadas* $\varphi : U \subset M^n \to V \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 2.2. *Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.*

Usando-se partição da unidade é possível provar que

Teorema 2.1. *Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.*

Definição 2.3. *Sejam* (M^n, g_M) *e* (N^n, g_N) *variedades Riemannianas de dimensão* n. *Um difeomorfismo* $f : M^n \to N^n$ *é chamado uma isometria se*

$$g_M\big(u,v\big)_p = g_N\big(df_p(u), df_p(v)\big)_{f(p)}, \tag{2.1}$$

para todo $p \in M^n$, u,$v \in T_pM^n$.

Definição 2.4. *Sejam* M^n *e* N^n *variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável* $f : M^n \to N^n$ *é uma isometria local em* $p \in M^n$ *se existe uma vizinhança* $U \subset M^n$ *de* p *tal que* $f : U \to f(U)$ *é um difeomorfismo satisfazendo (2.1). Dizemos que a variedade Riemanniana* M^n *é localmente isométrica à variedade Riemanninana* N^n *se para todo* $p \in M^n$ *existe uma vizinhança* $U_p \subset M^n$ *de* p *e uma isometria local* $f : U \to f(U) \subset N^n$.

Exemplo 2.1. *Seja* $M^n = \mathbb{R}^n$ *com* $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ *identificado com* $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. *A métrica é dada por* $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. *Neste caso,* $\mathbb{R}^n$ *é chamado espaço Euclidiano de dimensão* n.

Definição 2.5. *Seja* M^n *uma variedade diferenciável. O fibrado tangente de* M^n *é o espaço* $TM^n = \{(p, v); p \in M^n, v \in T_pM^n\} = \displaystyle\bigsqcup_{p \in M^n} T_pM^n$, *onde* $\bigsqcup$ *é a união disjunta.* TM^n *possui estrutura de variedade diferenciável. Seja* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ *a estrutura diferenciável de* M^n. *Indicaremos por* $(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ *as coordenadas de* U_α *e por* $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ *o referencial local associado. Para cada* α, *defina*

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM^n,$$

por

$$\Phi_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha, u_1, \ldots, u_n) = \left(\varphi_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right).$$

Existe uma projeção natural de TM^n em M^n, $\pi : TM^n \longrightarrow M^n$, dada por $\pi(p, v) = p$ ou $\pi(v) = p$, $\forall v \in T_pM^n$. Assim $\pi^{-1}(p) = T_pM^n$, $\forall p \in M^n$.

Definição 2.6. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M^n *é uma aplicação,*

$$\begin{aligned} \nabla \ : \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades

(C_1) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$*;*

(C_2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$*;*

(C_3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$*,*

onde $X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f,\ g \in C^\infty(M^n)$*.*

Definição 2.7. *Uma conexão* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M^n *é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Definição 2.8. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M^n *é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*, onde* $[X, Y]$ *denota o colchete de Lie dos campos* X *e* Y*.*

Em um sistema coordenado (U, φ), se $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \tag{2.2}$$

O seguinte resultado é de fundamental importância na teoria de variedades Riemannianas. Sua prova pode ser encontrada em [8].

Teorema 2.2. (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana* M^n*, com métrica* $g = \langle , \rangle$*, existe uma única conexão afim* ∇ *em* M^n*, denominada conexão de Levi-Civita, ou conexão Riemanniana, satisfazendo às condições*

(a) ∇ *é simétrica;*

(b) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana* g.

Definição 2.9. *Sejam* M^n *uma variedade Riemanniana com métrica* $g = \langle , \rangle$, *conexão Riemanniana* ∇ *e, um sistema local de coordenadas* (U, φ). *Denominamos as funções* Γ_{ij}^k *definidas em* U *por* $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ *de coeficientes da conexão* ∇ *em* U *ou os símbolos de Christoffel da conexão. Um cálculo simples nos permite concluir que*

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\},$$

onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.

Como a matriz (g_{km}) admite inversa (g^{km}), teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\} g^{km}. \tag{2.3}$$

A equação (2.3) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij}. Assim, para o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, teremos $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Definição 2.10. *A curvatura* R *de uma variedade Riemanniana* M^n *é uma correspondência que associa a cada par* X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *uma aplicação* $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, *onde* ∇ *é a conexão Riemanniana de* M^n.

Observe que se $M^n = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Em termos de um sistema de coordenadas $(U, x_1, \ldots, x_n)$ em torno de $p \in M^n$. Seja $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Como $[X_i, X_j] = 0$, obteremos

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k.$$

E ainda, sendo $\nabla_{X_i} X_k = \sum_l \Gamma_{ik}^l X_l$ e $\nabla_{X_j} X_k = \sum_l \Gamma_{jk}^l X_l$, teremos

$$\begin{aligned}
R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k = \sum_l \nabla_{X_i} \Gamma_{jk}^l X_l - \sum_l \nabla_{X_j} \Gamma_{ik}^l X_l = \\
&= \sum_l \left[X_i(\Gamma_{jk}^l) X_l + \Gamma_{jk}^l \nabla_{X_i} X_l\right] - \sum_l \left[X_j(\Gamma_{ik}^l) X_l + \Gamma_{ik}^l \nabla_{X_j} X_l\right] = \\
&= \sum_l \left[X_i(\Gamma_{jk}^l) X_l + \Gamma_{jk}^l \sum_s \Gamma_{il}^s X_s - X_j(\Gamma_{ik}^l) X_l - \Gamma_{ik}^l \sum_s \Gamma_{jl}^s X_s\right] = \\
&= \sum_s \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma_{jk}^s) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_{ik}^s) + \sum_l \left(\Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s\right)\right] X_s.
\end{aligned}$$

Proposição 2.2. *A curvatura* R *de uma variedade Riemanniana satisfaz as seguintes propriedades*

(i) R *é* $C^\infty(M^n)$*-bilinear em* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$*, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

para todos f*,* $g \in C^\infty(M^n)$*,* X_1*,* X_2*,* Y_1*,* $Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) *Para todo par* X*,* $Y \in \mathfrak{X}(M)$*, o operador curvatura* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *é* $C^\infty(M^n)$*-linear, isto é,*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z,$$

para todos $f \in C^\infty(M^n)$*,* Z*,* $W \in \mathfrak{X}(M)$.

(iii) *Vale a Primeira Identidade de Bianchi.*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0. \tag{2.4}$$

(iv) *Para todo* X*,* Y*,* Z*,* $T \in \mathfrak{X}(M)$ *valem as seguintes propriedades de simetria*

(a) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0$

(b) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$

(c) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$

(d) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$.

Demonstração: Vide [8]. ∎

2.2 Imersão e mergulho

Definição 2.11. *Sejam* M^n*,* N^n *variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável (suave)* $f : M^n \longrightarrow N^n$ *é uma imersão se* $df_p : T_pM^n \longrightarrow T_{f(p)}N^n$ *é injetiva para todo* $p \in M^n$.

Definição 2.12. *Seja* $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$ *uma imersão. Se* N^n *tem uma estrutura Riemanniana,* f *induz uma estrutura Riemanniana em* M^n *por*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \ \forall u, v \in T_pM^n.$$

A métrica de M^n *é chamada então a métrica induzida por* f*, e* f *torna-se, então, uma imersão isométrica.*

Definição 2.13. *Sejam* M^n*,* N^n *variedades diferenciáveis e uma aplicação suave* $\phi : M^n \longrightarrow N^n$*. O par* (M^n, ϕ) *é uma subvariedade de* N^n *se* ϕ *for uma imersão injetiva. Equivalentemente, uma variedade diferenciável* M^n *é uma subvariedade de uma variedade diferenciável* N^n *desde que*

(i) M^n *é um subespaço topológico de* N^n*;*

(ii) *A aplicação inclusão* $i : M^n \longrightarrow N^n$ *é suave e em cada ponto* $p \in M^n$ *sua aplicação diferencial* di_p *é injetiva.*

Observação 2.2. *Seja* M^n *uma subvariedade de* N^n*. Então*

(a) *Se* $f : N^n \longrightarrow P$ *é uma aplicação suave* (P *variedade diferenciável), então a restrição de* $f\big|_{M^n}$ *de* f *em* M^n *é suave, pois* $f\big|_{M^n}$ *é exatamente* $f \circ i$ (ou $f \circ \phi$)*;*

(b) *Se* $i : M^n \subset N^n$ *é uma subvariedade de* N^n*, é usual identificar-se o espaço tangente* T_pM^n *como um subespaço de* T_pN^n *para cada* $p \in M^n$ $\big($*isto é,* $T_pM^n \approx di_p(T_pM^n)\big)$*;*

(c) *Se* $\phi : P \longrightarrow N^n$ *é uma aplicação suave* (P *variedade diferenciável), tal que* $\phi(P) \subset M^n$*, então a aplicação induzida* $\overline{\phi} : P \longrightarrow M^n$*, com* $\overline{\phi}(x) = \phi(x)\ \forall x \in P$*, é suave.*

Definição 2.14. *Sejam* M^n*,* N^n *variedades diferenciáveis. Uma aplicação suave* $\phi : M^n \longrightarrow N^n$ *é um mergulho se* ϕ *for uma imersão e* $\phi : M^n \longrightarrow \phi(M^n) \subset N^n$ *for um homeomorfismo sobre a imagem, munida da topologia subespaço. Portanto,* $\widetilde{\phi} : M^n \longrightarrow \phi(M^n)$*, com* $\widetilde{\phi}(p) = \phi(p)$*, é uma aplicação aberta sobre* $\phi(M^n)$*, munido com a topologia subespaço.*

Subvariedades e mergulhos estão intimamente relacionados, se M^n é uma subvariedade de N^n, então a aplicação inclusão $i : M^n \subset N^n$ é um mergulho.

Exemplo 2.2. *Dados* $m \leqslant n$ *inteiros positivos, o exemplo clássico de mergulho é a aplicação* $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *dada por* $f(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$.

Definição 2.15. *Sejam* M^n *uma subvariedade de uma variedade* N^n, *com* $X \in \mathfrak{X}(N)$. *Dizemos que* X *é um campo vetorial tangente a* M^n *quando* $X(p) \in T_pM^n, \forall p \in M^n$.

Proposição 2.3. *Sejam* M^n *uma subvariedade de uma variedade* N^n, *e* X, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ *são tangentes a* M^n . *Então*

(a) *a restrição* $X\big|_M^n$ *de* X *a* M^n *é um campo suave em* M^n, *isto é,* $X\big|_M^n \in \mathfrak{X}(M)$;

(b) *Além disso,* $[X, Y]$ *é tangente a* M^n *e* $[X, Y]\big|_{M^n} = \big[X\big|_{M^n}, Y\big|_{M^n}\big]$.

Demonstração: Vide [10]. ■

Lema 2.1. $T_{(p,q)}(M^n \times N^n)$ *é a soma direta dos seus subespaços* $T_{(p,q)}M^n$ *e* $T_{(p,q)}N^n$; *isto é cada elemento* $\upsilon \in T_{(p,q)}(M^n \times N^n)$ *tem uma única expressão como*

$$\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2, \quad onde \quad \upsilon_1 \in T_{(p,q)}M^n \quad e \quad \upsilon_2 \in T_{(p,q)}N^n.$$

Demonstração: Como $T_{(p,q)}M^n$ e $T_{(p,q)}N^n$ são subespaços vetoriais de $T_{(p,q)}(M^n \times N^n)$ e, $\dim\big(T_{(p,q)}(M^n \times N^n)\big) = \dim(T_{(p,q)}M^n) + \dim(T_{(p,q)}N^n) < \infty$, basta mostrar que $T_{(p,q)}M^n \cap T_{(p,q)}N^n = \{0\}$, $0 \in T_{(p,q)}(M^n \times N^n)$. De fato, $\pi\big|_{p \times N^n}$ é constante, logo $d\pi_{(p,q)}(T_{(p,q)}N^n) = 0$. Mas, $d\pi_{(p,q)}\Big|_{T_{(p,q)}M^n} = d({}_q\pi)_p$ é um isomorfismo em cada $(p, q) \in M^n \times q$. Daí, se existe $\upsilon \in T_{(p,q)}M^n \cap T_{(p,q)}N^n, \upsilon \neq 0$, por um lado $d\pi(\upsilon) = 0$, pois $\upsilon \in T_{(p,q)}N^n$ e por outro $d\pi(\upsilon) \neq 0$, pois $\upsilon \in T_{(p,q)}M^n$, o que é um absurdo. Logo, $T_{(p,q)}M^n \cap T_{(p,q)}N^n = \{0\}$, e portanto, $T_{(p,q)}(M^n \times N^n) = T_{(p,q)}M^n \oplus T_{(p,q)}N^n$. Além disso, poderíamos ter usado σ ao invés de π na demonstração, concluindo que $T_{(p,q)}M^n \subset \ker(d\sigma)$ e $T_{(p,q)}N^n \subset \ker(d\pi)$. Assim, dado $\upsilon \in T_{(p,q)}(M^n \times N^n)$, $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$, com $d\pi(\upsilon) = \upsilon_1$ e $d\sigma(\upsilon) = \upsilon_2$. ■

Segue do Lema (2.1) que podemos fazer a seguinte identificação $T_{(p,q)}(M^n \times N^n) = T_pM^n \oplus T_qN^n$. E ainda, seja $\nu \in T_{(p,q)}(M^n \times N^n)$, $\nu_1 = d\pi(\nu) \in T_pM^n$ e $\nu_2 = d\sigma(\nu) \in T_qN^n$. Se $f \in C^\infty\big((M^n \times N^n), \mathbb{R}\big)$, então

$$\nu(f) = \nu_1(f \circ {}_q\pi^{-1}) + \nu_2(f \circ {}_p\sigma^{-1}).$$

2.3 Operadores diferenciáveis

Definição 2.16. *Sejam* M^n *uma variedade diferenciável,* $p \in M^n$ *e* U *uma vizinhança de* p *onde é possível definir campos de vetores* $e_1, \ldots, e_n \in \mathfrak{X}(M)$*, de modo que em cada* $q \in U$*, os vetores* $\{e_i(q)\}_{i=1,\ldots,n}$ *formam uma base de* T_qM^n*. Diremos, neste caso, que* $\{e_i(q)\}_{i=1,\ldots,n}$ *é um referencial móvel em* U*. Se o conjunto de campos* $e_1, \ldots, e_n \in \mathfrak{X}(M)$ *são dois a dois ortonormais, então dizemos que* $\{e_i(q)\}_{i=1,\ldots,n}$ *é um referencial ortonormal em* M^n*.*

Definição 2.17. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. O gradiente de* f *é o campo vetorial suave* $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$*, definido sobre* M^n *por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \tag{2.5}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$*.*

É imediato, a partir da definição acima, que o gradiente de uma função suave é unicamente determinado por (2.5). A existência é assegurada pela Proposição a seguir.

Proposição 2.4. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um referencial ortonormal local em uma vizinhança aberta* $U \subset M^n$*. Então, em* U *temos*

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j, \tag{2.6}$$

e o segundo membro da igualdade acima independe do referencial escolhido. Além disso, quando $M^n = \mathbb{R}^n$ *podemos tomar, para* $1 \leqslant i \leqslant n$*,* $e_i = E_i$*, o* i*-ésimo campo canônico em* $\mathbb{R}^n$*. Desse modo,*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Portanto, nossa definição de gradiente de uma função concorda com a dada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral para funções suaves $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*.*

Demonstração: Vide [8]. ■

Proposição 2.5. *Se* $f, g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções diferenciáveis em* M^n*, então*

(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$*;*

(b) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração: Vide [8]. ∎

Proposição 2.6. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Dados* $p \in M^n$ *e* $v \in T_pM^n$*, seja* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M^n$ *uma curva suave tal que* $\alpha(0) = p$ *e* $\alpha'(0) = v$*. Então*

$$\langle \nabla f, v\rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} = v(f).$$

Demonstração: Vide [8]. ∎

Em um sistema local de coordenadas o campo gradiente pode ser reescrito da seguinte forma

Proposição 2.7. *Se* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave e* $U \subset M^n$ *é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$*, então o gradiente de* f *é dado por*

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Em particular, quando $M^n = \mathbb{R}^n$ *tem-se que* $g_{ij} = \delta_{ij}$ *são os coeficientes da métrica euclidiana e,*

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Demonstração: Temos que os campos coordenados $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ formam um referencial local em U. Assim, podemos escrever,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle = a_j g_{ji}$$

de maneira que,

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

onde $[g^{ij}]$ é a matriz inversa de $[g_{ij}]$. Portanto,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} g^{ji} \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

∎

Definição 2.18. *Seja* X *um campo vetorial suave em* M^n. *A divergência de* X *é a função suave* $\operatorname{div} : M^n :\longrightarrow \mathbb{R}$ *em* M^n *dada por*

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}\{v \longmapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_pM^n$ *e* tr *denota o traço do operador linear entre chaves.*

Dizemos que um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em um aberto $U \subset M^n$ é *geodésico* em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todos $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Proposição 2.8. *Seja* X *um campo suave em* M^n *e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta* $U \subset M^n$. *Se* $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ *em U, então*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle\big). \tag{2.7}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, *então temos em* p *que*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i).$$

Demonstração: Pela definição de divergência de um campo vetorial, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \big(e_i\langle X, e_i\rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle\big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(a_i) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle\big).\end{aligned}$$

O resto segue da definição de referencial geodésico. ∎

Observação 2.3. *Para* $M^n = \mathbb{R}^n$ *e* $1 \leqslant i \leqslant n$, *podemos considerar* $e_i = E_i$, *o i-ésimo campo canônico em* $\mathbb{R}^n$. *Como tais campos formam um referencial geodésico em cada ponto de* $\mathbb{R}^n$, *tem-se*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} E_i(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

a qual concorda com a definição dada usualmente nos cursos de Cálculo Diferencial.

Proposição 2.9. *Se* X, Y *são campos vetoriais suaves em* M^n *e* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave, então*

(a) $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$;

(b) $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div} X + \langle \nabla f, X\rangle$.

Demonstração: Vide [8]. ■

Para obter a expressão de $\mathrm{div}\, X$ em um sistema de coordenadas arbitrário, comecemos com o seguinte

Lema 2.2. *Seja X um campo vetorial suave sobre M^n e $U \subset M^n$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Se X for dado em U por $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, então a divergência de X é dado por*

$$\mathrm{div}\, X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i \Gamma_{ij}^{j}, \tag{2.8}$$

onde os Γ_{ij}^{k} são os símbolos de Cristoffel da métrica de M^n em U e $a_i \in C^\infty(M^n)$, $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Note primeiro que para cada operador linear, associado a cada $p \in M^n$, dado por

$$\begin{array}{rcl} S : T_pM^n & \longrightarrow & T_pM^n \\ v & \longmapsto & S(v) = (\nabla_v X)(p), \end{array}$$

sendo os campos coordenados $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ um referencial local em U, a i-ésima coluna da matriz do operador S é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X &= \sum_{j=1}^{n} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{j,l=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{l} \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{l} + \frac{\partial a_l}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}. \end{aligned}$$

Portanto, desde que o traço de um operador linear é o traço da matriz que o representa em qualquer base, segue que

$$\mathrm{div}\, X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i \Gamma_{ij}^{j}.$$

■

Definição 2.19. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana e $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O Laplaciano de f é a função $\Delta f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f). \tag{2.9}$$

Proposição 2.10. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um referencial ortonormal em um aberto* $U \subset M^n$. *Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)\big) \tag{2.10}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, *então temos em* p *que*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)).$$

Demonstração: Pela Proposição (2.10), temos que $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i$. Agora, segue da definição de Laplaciano de uma função e da Proposição (2.8) que,

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)\big).$$

∎

Observação 2.4. *Quando* $M^n = \mathbb{R}^n$, *a definição dada acima para o Laplaciano de uma função suave também está de acordo com a definição usual do Cálculo Diferencial e Integral para o Laplaciano de uma função suave* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. *De fato, neste caso podemos tomar* $e_i = E_i$, *os campos coordenados canônicos de* $\mathbb{R}^n$, *os quais formam um referencial geodésico em cada ponto de* $\mathbb{R}^n$. *Portanto, segue da Proposição anterior que*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} E_i\big(E_i(f)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Definição 2.20. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. O Hessiano de* f *em* $p \in M^n$ *é o operador linear* $\big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p : T_pM^n \longrightarrow T_pM^n$, *dado por*

$$\big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue das propriedades da conexão Riemanniana que se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer extensão de v em uma vizinhança de $p \in M^n$, então,

$$\big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p(v) = \big(\nabla_X \nabla f\big)(p).$$

Proposição 2.11. *Se* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave e* $p \in M^n$, *então* $\big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p : T_pM^n \longrightarrow T_pM^n$ *é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração: Vide [8]. ∎

Proposição 2.12. *Se* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave, então,*

$$\Delta f = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Hess}\ f\big). \tag{2.11}$$

Demonstração: Seja $U \subset M^n$ uma vizinhança de um ponto $p \in M^n$ onde está definido um referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p &= \langle \big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p(e_i), e_i\rangle \\
&= \langle \big(\nabla_{e_i}\nabla f\big), e_i\rangle_p \\
&= \mathrm{div}\big(\nabla f\big)(p) = \Delta f(p).
\end{aligned}$$

■

O resultado acima nos permite estabelecer uma fórmula simples para o Laplaciano de uma função suave $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ em termos dos símbolos de Christoffel associados a um sistema de coordenadas em M^n. Esse é o conteúdo do seguinte resultado.

Proposição 2.13. *Se* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave e* $U \subset M^n$ *é uma vizinhança coordenada, então temos em* U *que,*

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right).$$

Demonstração: Vide [8]. ■

2.4 Variedades semi-Riemannianas

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica $b = \langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é dita

(a) *Positiva definida*, quando $\langle v, v\rangle > 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$;

(b) *Negativa definida*, quando $\langle v, v\rangle < 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$;

(c) *Não − degenerada*, quando $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in V$ implica que $v = 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V, um subespaço W de V é dito não-degenerado se $b\,|_{W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ for não-degenerada.

O *índice* de uma forma bilinear simétrica b sobre V é a maior dimensão de um subespaço W de V tal que $b\,|_{W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ seja negativa definida.

Dada uma forma bilinear simétrica b sobre V e um subespaço W de V, definimos o complemento ortogonal $W^\perp$ de W em V por

$$W^\perp = \{v \in V;\ \langle v, w\rangle = 0\ ;\ \forall\, w \in\ W\}.$$

Lema 2.3. *Seja* b *uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita* V *e* W *um subespaço de* V*. Então*

(a) b *é não-degenerada se, e somente se, sua matriz com relação a uma base de* V *for invertível.*

(b) *Se* W *é não-degenerado, então* $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$ *e* $(W^\perp)^\perp = W$*.*

(c) W *é não-degenerado se, e somente se,* $V = W \oplus W^\perp$*. Em particular,* W *é não-degenerado se, e somente se,* $W^\perp$ *for não-degenerado.*

No que segue, supomos que $b = \langle\ ,\ \rangle$ é uma forma bilinear simétrica e não-degenerada sobre o espaço vetorial real V. Em relação a b, dizemos que $v \in V \setminus \{0\}$ é

(i) *tipo − tempo*, quando $\langle v, v\rangle < 0$;

(ii) *tipo − luz*, quando $\langle v, v\rangle = 0$;

(iii) *tipo − espaço*, quando $\langle v, v\rangle > 0$

Analogamente, define-se o que significa para um subespaço não-degenerado W de V ser tipo-tempo, tipo-luz, tipo-espaço. Se $v \in V \setminus \{0\}$ não for tipo-luz, define-se o *sinal* ε_v de v por

$$\varepsilon_v = \frac{\langle v, v\rangle}{|\langle v, v\rangle|}.$$

A *norma* de $v \in V$ é $|v| = \sqrt{\varepsilon_v \langle v, v\rangle}$ e v é dito *unitário* se $|v| = 1$. Temos que V admite uma base $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ ortonormal com relação a b, isto é, tal que $\langle e_i, e_j\rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$, onde ε_i denota o sinal de e_i. Desse modo, a expressão ortonormal de $v \in V$ com respeito a $\{e_i\}$ é dada por

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_v \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Definição 2.21. *Seja* V *um espaço vetorial no qual uma forma bilinear simétrica e não-degenerada* $b = \langle , \rangle$ *de índice 1 está definida, e* $\tau = \{u \in V; \langle u, u\rangle < 0\}$*. Para cada* $u \in \tau$*, definimos o cone tipo − tempo de* V *contendo* u *por* $C(u) = \{v \in \tau; \langle u, v\rangle < 0\}$*.*

De posse da definição anterior, temos o seguinte

Lema 2.4. *Sejam* $v, w \in \mathcal{T}$. *Então*

(a) *O subespaço* $\{v\}^{\perp}$ *é tipo-espaço e* $V = span\{v\} \oplus span\{v\}^{\perp}$. *Assim,* $\mathcal{T}$ *é a união disjunta de* $C(v)$ *e* $C(-v)$.

(b) $|\langle v, w\rangle| \geqslant |v|\,|w|$, *com igualdade se, e somente se,* v *e* w *forem colineares.*

(c) *Se* $v \in C(u)$ *para algum* $u \in \mathcal{T}$, *então* $w \in C(u) \Leftrightarrow \langle v, w\rangle < 0$. *Portanto,* $w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w)$.

Definição 2.22. *Um tensor métrico sobre uma variedade diferenciável* $\overline{M}^n$ *é um 2-tensor covariante e simétrico* $\overline{g}$ *sobre* $\overline{M}^n$, *tal que* $\overline{g}_p$ *é não-degenerada para todo* $p \in \overline{M^n}$. *Uma variedade semi-Riemanniana* $\overline{M}^n$ *é um par* $(\overline{M}^n, \overline{g})$, *onde* $\overline{M}^n$ *é uma variedade diferenciável e* $\overline{g} = \langle\ ,\ \rangle$ *é um tensor métrico de índice constante sobre* $\overline{M}^n$.

Como o índice de $\overline{g}$ é uma função semi-contínua inferiormente de $\overline{M}^n$ em $\mathbb{N}^{\ltimes}$, temos que ele é constante em toda componente conexa de $\overline{M}^n$. No que segue, por simplificação de notação, escreveremos $\overline{M}^n$ para o par $(\overline{M}^n, \overline{g})$, $\langle\ ,\ \rangle$ para o tensor métrico $\overline{g}$ de $\overline{M}^n$ e ν para seu índice.

Sempre que $p \in \overline{M}^n$ e $v, w \in T_p\overline{M}^n$ gerarem um subespaço 2-dimensional não-degenerado de $T_p\overline{M}^n$, segue que, $\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2 \neq 0$.

Definição 2.23. *Sejam* $\overline{M}^n$ *uma variedade semi- Riemanniana,* $p \in \overline{M}^n$ *e* $\sigma \subset T_p\overline{M}^n$ *um subespaço 2-dimensional não-degenerado de* $T_p\overline{M}^n$. *O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v, w)v,\ w\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2},$$

independe da base escolhida $\{v, w\}$ *de* σ *e é denominado curvatura seccional de* $\overline{M}^n$ *em* p *segundo* σ.

Definição 2.24. *A variedade semi-Riemanniana* $\overline{M}^n$ *tem curvatura seccional constante quando, para cada* p *em* $\overline{M}^n$, *os números* $K(\sigma)$ *da definição acima independem do subespaço 2-dimensional não-degenerado de* σ *de* $T_p\overline{M}^n$.

Observação 2.5. *Quando* $\dim(\overline{M}^n) \geqslant 3$ *e* $\overline{M}^n$ *tem curvatura seccional constante, temos pelo Teorema de Schur que o valor de* $K(\sigma)$ *também independe do ponto* $p \in \overline{M}^n$ *escolhido.*

Aproximando subespaços 2-dimensionais degenerados σ de $T_p\overline{M}^n$ através de subespaços não-degenerados, pode-se mostrar que o fato de $\overline{M}^n$ ter curvatura seccional constante determina seu tensor de curvatura $\overline{R}$. Mais precisamente, se $\overline{M}^n$ tiver curvatura seccional constante c, então

$$\overline{R}(X, Y)Z = c[\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X],$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Quando o índice ν de $\overline{M}^n$ é 0, $\overline{M}^n$ é simplesmente uma variedade Riemanniana; quando $\nu = 1$, $\overline{M}^n$ é denominada uma variedade de Lorentz (ou *espaço* $-$ *tempo*).

Definição 2.25. *Seja $\overline{M}^n$ uma variedade de Lorentz. Uma aplicação τ, que associa a cada $p \in \overline{M}^n$ um cone tipo-tempo τ_p em $T_p\overline{M}^n$, é suave qundo, para cada $p \in \overline{M}^n$, existem uma vizinhança aberta U de p e $V \in \mathfrak{X}(U)$, tais que $V(q) \in \tau_p$ para todo $q \in U$. Caso uma tal aplicação τ exista, diz-se que $\overline{M}^n$ é temporalmente orientável.*

Proposição 2.14. *Uma variedade de Lorentz $\overline{M}^n$ é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo vetorial tipo-tempo $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.*

Demonstração: Se existe um campo K de vetores tipo-tempo sobre $\overline{M}^n$, defina $\tau(p) = C(K(p))$. Reciprocamente, seja τ uma orientação temporal de $\overline{M}^n$. Como τ é diferenciável, cada ponto $p \in \overline{M}^n$ possui uma vizinhança U em $\overline{M}^n$ na qual está definido um campo de vetores tipo-tempo K_U, com $K_U(q) \in \tau(q)$, para cada $q \in U$. Seja agora $\{U_\alpha\}$ uma tal cobertura de $\overline{M}^n$, e $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade estritamente subordinada a $\{U_\alpha\}$. Então o campo

$$K = \sum_\alpha f_\alpha K_{U_\alpha},$$

está bem definido sobre $\overline{M}^n$, além disso, pelo Lema 2.4, temos que K é tipo-tempo. ■

De outro modo, o resultado acima nos diz que não importa se nos referimos à função suave τ ou ao campo vetorial tipo-tempo K. Assim, sempre que $\overline{M}^n$ for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação τ como acima, ou de um campo vetorial tipo-tempo K a ele correspondente, será denominada uma *orientação temporal* para $\overline{M}^n$.

Seja τ uma orientação temporal para $\overline{M}^n$, e $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Se $V(q) \in \tau_q(-V(q) \in \tau_q)$ para todo $q \in \overline{M}^n$, diz-se que V *aponta para o futuro* (*aponta para o passado*). Pelo item (c) do Lema 2.4, sendo K uma orientação temporal para $\overline{M}^n$, temos que um campo vetorial tipo-tempo V sobre $\overline{M}^n$ aponta para o futuro (passado) se, e somente se, $\langle V, K\rangle < 0$ ($\langle V, K\rangle > 0$).

2.5 Hipersuperfícies no espaço de Lorentz-Minkowski

Considere $\mathbb{L}^{n+1}$ espaço de Lorentz-Minkowski, isto é, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido do seguinte produto escalar

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i - u_{n+1}v_{n+1},$$

para todos $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Fixado $r > 0$, o espaço hiperbólico n-dimensional $\mathbb{H}^n(r)$ é definido como a seguinte hiperquádrica de $\mathbb{L}^{n+1}$ dada por

$$\mathbb{H}^n(r) = \{p \in \mathbb{L}^{n+1}\,;\ \langle p, p\rangle = -r^2\,;\ p_{n+1} \geqslant 1\}.$$

Uma imersão $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ de uma variedade diferenciável, n-dimensional e conexa M^n é dita uma hipersuperfície tipo-espaço se a métrica induzida em M^n pela imersão ψ for Riemanniana. Por simplicidade, também denotaremos por $\langle\ ,\ \rangle$ a métrica de M^n.

Proposição 2.15. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço isometricamente imersa no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$. Então M^n admite um campo vetorial normal unitário $N \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ de vetores tipo-tempo. Em particular, M^n é orientável.*

Demonstração: Fixe um campo $K \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$ que dá a orientação temporal de $\mathbb{L}^{n+1}$, e observe que, para todo $p \in M^n$, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\mathbb{L}^{n+1}$ é a união disjunta de $C(K(p))$ e $C(-K(p))$. Tome em cada $p \in M^n$, um vetor unitário $N(p) \in T_p(M^n)^{\perp}$. Desde que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$ se necessário, podemos supor que $N(p) \in C(K(p))$. Deste modo, definimos unicamente um campo vetorial normal unitário N sobre M^n, apontando para o futuro. Agora devemos mostrar que tal campo N é suave. Fixe, então, $p \in M^n$ e tome um referencial móvel $\{e_i\}$ sobre uma vizinhança aberta e conexa U de p em M^n. Então $\widetilde{N} = K - \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle e_i$ é suave e normal a M^n em U, com

$$\langle \widetilde{N}, \widetilde{N}\rangle = \langle \widetilde{N}, K\rangle = \langle K, K\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle^2.$$

Mas $\langle K, K\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle^2 - \langle K, N\rangle^2$, de modo que $\langle \widetilde{N}, \widetilde{N}\rangle = -\langle K, N\rangle^2 < 0$. Portanto, $\widetilde{N}(q) \in C(K(q))$ para cada $q \in U$, e $N = \dfrac{\widetilde{N}}{|N|}$ é um campo de vetores diferenciável em M^n.

■

2.5.1 Equações de estrutura

Seja agora $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$, uma hipersuperfície tipo-espaço no espaço de Lorentz-Minkowski. Em todo este trabalho, denotaremos, respectivamente, por ∇^0 e ∇ as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+1}$ e M^n. Então as fórmulas de Gauss e Weingarten para M^n em $\mathbb{L}^{n+1}$ são dadas, respectivamente por

$$\nabla^0_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y\rangle N \tag{2.12}$$

e

$$A(X) = -\nabla^0_X N, \tag{2.13}$$

para todos os campos de vetores tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, denota o operador de Weingarten de M^n com respeito a uma escolha de uma orientação temporal N para M^n. A curvatura média de M^n é a função diferenciável H definida por

$$H = -\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A).$$

Exemplo 2.3. *O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(r)$ é uma hipersuperfície tipo-espaço em $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura média constante. De fato, inicialmente observe que $\mathbb{H}^n(r) = f^{-1}(0)$, onde $f : \mathbb{L}^{n+1} \to \mathbb{R}$ é a função diferenciável definida por $f(x) = \langle x, x\rangle + r^2$. É imediato verificar que zero é um valor regular de f, donde segue que $\mathbb{H}^n(r)$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{L}^{n+1}$. Agora, dado $p \in \mathbb{H}^n(r)$, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{H}^n(r)$ uma curva suave tal que, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, onde $v \in T_p\mathbb{H}^n(r)$. Note que, para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tem-se que $\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle = -r^2$. Derivando esta última igualdade, obtemos $\langle \alpha(t), \alpha'(t)\rangle = 0$ e, em particular, fazendo $t = 0$, segue que $\langle p, v\rangle = 0$. Com isso, segue que os vetores posição e normal estão na mesma direção, para cada $p \in \mathbb{H}^n(r)$. Agora, observe que temos a seguinte decomposição em soma direta*

$$\mathbb{L}^{n+1} = T_p\mathbb{H}^n(r) \oplus (T_p\mathbb{H}^n(r))^{\perp} \tag{2.14}$$

para todo $p \in \mathbb{H}^n(r)$. Como $\mathbb{H}^n(r)$ é uma hipersuperfície e o produto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ tem índice 1 em $(T_p\mathbb{H}^n(r))^{\perp}$, concluimos de (2.14) que o índice de $\langle\ ,\ \rangle$ em $T_p\mathbb{H}^n(r)$ é zero. Portanto, $\mathbb{H}^n(r)$ é uma hipersuperfície tipo-espaço em $\mathbb{L}^{n+1}$. Observe que $N(p) = (1/r)\,p$, para todo $p \in \mathbb{H}^n(r)$ é um campo de vetores tipo-tempo unitários e normais a $\mathbb{H}^n(r)$ e, com isso, o operador de Weingarten de $\mathbb{H}^n(r)$ é dado por $AX = -(1/r)\,X$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H})$. Disto, concluímos que a curvatura média de $\mathbb{H}^n(r)$ é dada por $H = 1/r$ que é constante.

2.5.2 O tensor curvatura

Como em [10], o tensor curvatura R da hipersuperfície tipo-espaço M^n isometricamente imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$ é a aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z,$$

onde [,] denota o colchete de Lie e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Um fato bem conhecido estabelece que o tensor curvatura R de uma hipersuperfície tipo-espaço M^n imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$ pode ser descrito em termos do seu operador de Weingarten A pela chamada equação de Gauss

$$R(X, Y)Z = \langle AY, Z\rangle AX - \langle AX, Z\rangle AY, \tag{2.15}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Por outro lado, a equação de Codazzi de M^n é dada por

$$(\nabla_Y A)X = (\nabla_X A)Y, \tag{2.16}$$

onde $\nabla_X A$ denota a derivação covariante de A (cf. [10], Cap. 4).
Por definição, temos que a curvatura de Ricci de M^n é dada por

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle R(X, e_i)Y, e_i\rangle,$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortornormal local em M^n e $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i\rangle$. Além disso, denotando por A o operador de Weingarten de M^n, pela equação de Gauss (2.15), podemos reescrever a expressão anterior como

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = nH\langle AX, Y\rangle + \langle AX, AY\rangle, \tag{2.17}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde $H = -(1/n)\mathrm{tr}(A)$ é a curvatura média de M^n. De fato, da equação de Gauss (2.15) segue que

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \langle AY, Z\rangle AX - \langle AX, Z\rangle AY \\ &= \langle Ae_i, Y\rangle AX - \langle AX, Y\rangle Ae_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, e_i)Y, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle\langle Ae_i, Y\rangle AX, e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle\langle AX, Y\rangle Ae_i, e_i\rangle. \end{aligned}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}\langle\langle Ae_i, Y\rangle AX, e_i\rangle &= \langle\langle Ae_i, Y\rangle Ae_i, X\rangle\\ &= \langle\langle AY, e_i\rangle e_i, AX\rangle.\end{aligned}$$

Escrevendo $v = \sum_{i=1}^{n}\langle v, e_i\rangle e_i$, teremos

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\langle Ae_i, Y\rangle AX, e_i\rangle = \langle AY, AX\rangle.$$

Por outro lado, temos

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\langle AX, Y\rangle Ae_i, e_i\rangle = \langle AX, Y\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle Ae_i, e_i\rangle = nH\langle AX, Y\rangle.$$

Portanto, a curvatura de Ricci de M^n se expressa da seguinte maneira

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \langle AY, AX\rangle + nH\langle AX, Y\rangle$$

Observe que podemos escrever

$$nH\langle AX, X\rangle + |AX|^2 = \left|AX + \frac{nH}{2}X\right|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2.$$

Assim, da expressão acima concluímos que

$$\mathrm{Ric}(X, X) \geqslant -\frac{n^2H^2}{4}|X|^2, \tag{2.18}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação 2.6. *Quando a curvatura média* H *de uma hipersuperfície tipo-espaço* M^n *isometricamente imersa em* $\mathbb{L}^{n+1}$ *é limitada, concluímos da expressão em (2.18) que a curvatura de Ricci de* M^n *é limitada inferiormente.*

2.5.3 Curvaturas de ordem superior

Dada uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ isometricamente imersa no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, denotemos por A o operador de Weingarten de M^n em $\mathbb{L}^{n+1}$ relativo a escolha de uma orientação temporal N de M^n. Associados ao operador de Weingarten A existem n invariantes algébricos, os quais são as funções simétricas elementares S_j dos autovalores $k_1, \ldots, k_n$ de A dadas por

$$S_j = S_j(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{i_1<\ldots<i_j} k_{i_1}\ldots k_{i_j}, \tag{2.19}$$

para $1 \leqslant j \leqslant n$ e $S_0 = 1$.

Definiremos a j-ésima curvatura média H_j da hipersuperfície tipo-espaço M^n por meio da igualdade

$$\binom{n}{j} H_j = (-1)^j S_j(k_1, ..., k_n) = S_j(-k_1, ..., -k_n). \tag{2.20}$$

Observe que, quando $j = 1$ tem-se que $H_1 = -\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A) = H$ é a curvatura média de M^n. A escolha do sinal $(-1)^j$ em (2.20) é motivado pelo fato de que, definindo-se o vetor curvatura média por $\overrightarrow{H} = HN$, $H(p) > 0$ num ponto $p \in M^n$, se, e somente se, $\overrightarrow{H}(p)$ está na mesma orientação temporal de $N(p)$ (isto é, $\langle \overrightarrow{H}, N \rangle_p < 0$). Quando $j = 2$, temos que H_2 define uma quantidade geométrica a qual está relacionada com a curvatura escalar (intrínseca) S da hipersuperfície. Por exemplo, em $\mathbb{L}^{n+1}$ temos pela equação de Gauss que

$$S = n(1-n)H_2. \tag{2.21}$$

Por outro lado, quando $j = n$ a função $H_n = (-1)^n \cdot \det(A)$ define a curvatura Gauss-Kronecker da hipersuperfície tipo-espaço M^n.

2.5.4 A função altura

No que segue, seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço isometricamente imersa no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$. Para um vetor arbitrário fixo $a \in \mathbb{L}^{n+1}$, considere a função *altura* $u : M^n \to \mathbb{R}$ relativa a a que é definida por

$$u(p) = \langle \psi(p), a \rangle,$$

para todo $p \in M^n$. Observe que se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então da compatibilidade da métrica segue que

$$Xu = \langle \nabla^0_X \psi, a \rangle + \langle \psi, \nabla^0_X a \rangle = \langle X, a \rangle = \langle X, a^\top \rangle,$$

onde $a^\top$ é a projeção ortogonal de a sobre o fibrado tangente TM^n, isto é,

$$a^\top = a + \langle N, a \rangle N. \tag{2.22}$$

Portanto, da igualdade anterior concluímos que $\nabla u = a^\top$. Agora, observe que

$$0 = \nabla^0_X a = \nabla^0_X (a^\top - \langle N, a \rangle N) = \nabla^0_X a^\top - \nabla^0_X (\langle N, a \rangle N)$$

Logo, usando as equações de Gauss e Weingarten segue que

$$\nabla_X \nabla u = -\langle N, a \rangle AX, \tag{2.23}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, da expressão anterior temos que

$$\Delta u = nH\langle N, a\rangle, \tag{2.24}$$

onde $H = -(1/n)\mathrm{tr}(A)$ é a curvatura média de M^n.

2.5.5 Princípios do máximo generalizados

A demonstração dos principais resultados dessa dissertação foram obtidos como consequências de dois princípios do máximo generalizados para variedadades Riemannianas. O primeiro deles é devido a Omori [9] e estabelece o seguinte

Lema 2.5. *Seja M^n uma variedade Riemanianna completa com curvatura seccional limitada inferiormente e seja $u : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em M^n. Se u é limitada superiormente em M^n, então para cada $\varepsilon > 0$ existe um ponto $p_\varepsilon \in M^n$, tal que*

$$\sup u - \varepsilon < u(p_\varepsilon) \leqslant \sup u \ , \ |\nabla u(p_\varepsilon)| < \varepsilon \quad e \quad \mathrm{Hess}\, u(p_\varepsilon)(v, v) < \varepsilon,$$

para todo vetor tangente e unitário $v \in T_pM^n, |v| = 1$.

O segundo deles é o conhecido princípio do máximo devido a Omori [9] e Yau [12].

Lema 2.6. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente e seja $u : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave sobre M^n.*

(a) Se u é limitada superiormente em M^n, então $\forall\varepsilon > 0$ existe um ponto $p_\varepsilon \in M^n$ tal que

$$|\nabla u(p_\varepsilon)| < \varepsilon \ \ , \ \ \Delta u(p_\varepsilon) < \varepsilon \ \ , \ \ \sup u - \varepsilon < u(p_\varepsilon) \leqslant \sup u.$$

(b) Se u é limitada inferiormente em M^n, então $\forall\varepsilon > 0$, existe um ponto $q_\varepsilon \in M^n$ tal que

$$|\nabla u(q_\varepsilon)| < \varepsilon \ \ , \ \ \Delta u(q_\varepsilon) > -\varepsilon \ \ , \ \ \inf u \leqslant u(q_\varepsilon) < \inf u + \varepsilon.$$

Capítulo 3

Rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço em $\mathbb{L}^{n+1}$

Neste capítulo obteremos algumas estimativas para a curvatura média de hipersuperfícies tipo-espaço limitadas entre dois hiperplanos paralelos, entre dois espaços hiperbólicos concêntricos e limitada por um espaço hiperbólico, superior ou inferior.

3.1 Hipersuperfícies limitadas por dois hiperplanos

Nesta seção, apresentaremos dois resultados de rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço M^n isometricamente imersas no espaço de Lorentz-Mikowski $\mathbb{L}^{n+1}$ que possuem uma restrição geométrica apropriada. Com o intuito de provar o primeiro deles, provaremos a seguinte

Proposição 3.1. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ de uma hipersuperfície tipo-espaço completa isometricamente imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$, com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Assuma que M^n está orientada pela aplicação de Gauss na direção futuro, N. Se $\psi(M^n)$ está limitada entre dois hiperplanos tipo-espaço paralelos, então*

$$\inf H \leqslant 0 \leqslant \sup H.$$

Demonstração: Seja $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ um vetor unitário na direção futuro de modo que $\psi(M^n)$ está limitada entre dois hiperplanos tipo-espaço paralelos $\pi_1 = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}\,;\, \langle a, x\rangle = c_1\}$ e $\pi_2 = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}\,;\, \langle a, x\rangle = c_2\}$, onde c_1 e c_2 são constantes satisfazendo $c_1 \leqslant c_2$.

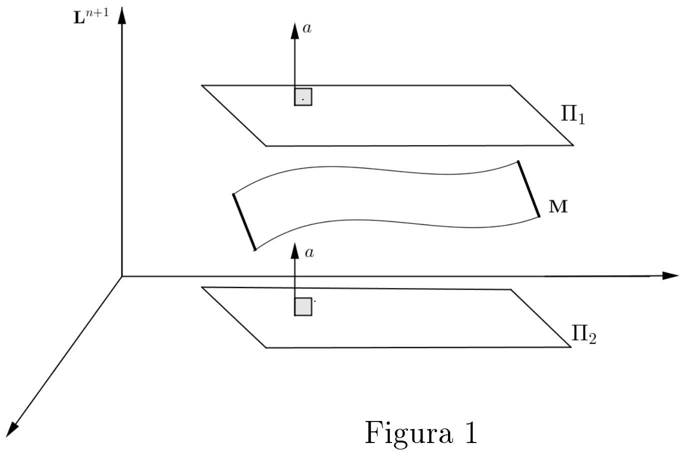


Figura 1

Defina a função diferenciável $u : M^n \to \mathbb{R}$ por $u(x) = \langle a, \psi(x)\rangle$. Note que u é limitada superior e inferiormente em M^n. Pelo Lema (2.6), tem-se $\forall\ \varepsilon > 0$ existem $p_\varepsilon, q_\varepsilon \in M^n$, tais que

$$\Delta u(p_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \Delta u(q_\varepsilon) > -\varepsilon. \tag{3.1}$$

Agora, usando a equação (2.24) teremos da expressão anterior que $nH(p_\varepsilon)\langle a, N(p_\varepsilon)\rangle < \varepsilon$ e $\Delta u(q_\varepsilon) = nH(q_\varepsilon)\langle a, N(q_\varepsilon)\rangle > -\varepsilon$. Note que $|\langle a, N\rangle| = -\langle a, N\rangle$. De fato, basta mostrar que $\langle a, N\rangle < 0$, pelo Lema (2.4) a e N estão na direção futuro, então são ambos vetores tipo-tempo e o cone temporal formado por a é o mesmo formado por N. Logo,

$$a \in C(a) = C(N) = \{v \in \tau; \langle v, N\rangle < 0\},$$

onde, $\tau = \{u \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle u, u\rangle < 0\}$, assim $\langle a, N\rangle < 0$. Agora pela desigualdade reversa de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|\langle a, N\rangle| \geqslant |a||N| \geqslant 1,$$

e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário temos

$$\sup H \geqslant H(p_\varepsilon) > -\frac{\varepsilon}{n|\langle a, N(p_\varepsilon)\rangle|} \geqslant -\frac{\varepsilon}{n} \tag{3.2}$$

e

$$\inf H \leqslant H(q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{n|\langle a, N(q_\varepsilon)\rangle|} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}, \tag{3.3}$$

fazendo $\varepsilon \to 0$ em (3.2) e (3.3), tem -se

$$\inf H \leqslant 0 \leqslant \sup H.$$

■

De posse das considerações anteriores, estamos em condições de enunciar e provar o primeiro resultado deste trabalho.

Teorema 3.1. *As únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante isometricamente imersas no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ que são limitadas por dois hiperplanos tipo-espaço paralelos são os hiperplanos tipo-espaço.*

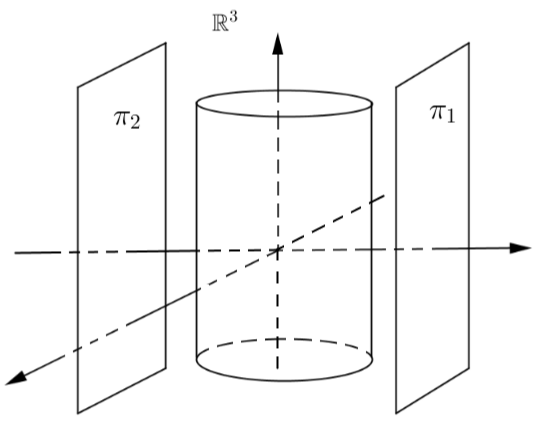
Demonstração: Seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa limitada por dois hiperplanos tipo-espaço paralelos em $\mathbb{L}^{n+1}$ determinados pelo vetor unitário tipo-tempo $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ possuindo curvatura média constante H. Como H é constante, temos por (2.18) que a curvatura de Ricci de M^n é limitada inferiormente. Por outro lado, a função altura correspondente $u = \langle \psi, a \rangle$ é uma função limitada em M^n. Assim pela Proposição (3.1), temos, usando novamente o fato de que H é constante, que

$$H = \inf H \leqslant 0 \leqslant \sup H = H.$$

Logo $H = 0$. Mas então, pelo Teorema 1.1 concluímos que M^n deve ser um hiperplano tipo-espaço, o que finaliza a prova do resultado.

■

Observação 3.1. *O Teorema* 3.1 *não vale em um ambiente Riemanniano. Para verificar isto, basta considerar em $\mathbb{R}^3$ um cilindro $C(0, r)$ de raio $r > 0$. Como sabemos, $C(0, r)$ possui curvatura média constante e está limitado por dois hiperplanos paralelos em $\mathbb{R}^3$.*



Cilindro em $\mathbb{R}^3$

Figura 2

3.2 Hipersuperfícies limitadas por dois espaços hiperbólicos

Nesta seção estudaremos a geometria de hipersuperfícies tipo-espaço que estão contidas na região limitada por dois espaços hiperbólicos concêntricos em $\mathbb{L}^{n+1}$. Dado um ponto $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ e um número positivo $r > 0$, denotaremos por $H^n_+(a,r)$ e $H^n_-(a,r)$ os conjuntos

$$H^n_+(a,r) = \{\ x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x-a, x-a\rangle = -r^2\ ;\ x_{n+1} - a_{n+1} \geqslant r > 0\ \}$$

e

$$H^n_-(a,r) = \{\ x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x-a, x-a\rangle = -r^2\ ;\ x_{n+1} - a_{n+1} \leqslant -r < 0\ \}.$$

Exemplo 3.1. *Tome* $a = 0$*,* $n = 2$*,* $r = 1$ *assim,*

$$\begin{cases} H^2_+(0,1) = \{x \in L^3; \langle x, x\rangle = -1, x_3 \geqslant 1\} \\ H^2_-(0,1) = \{x \in L^3; \langle x, x\rangle = -1, x_3 \leqslant -1\}. \end{cases}$$

Tomando $x = (x_1, x_2, x_3)$*, temos* $\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ *logo,* $x_3 = \pm\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$.

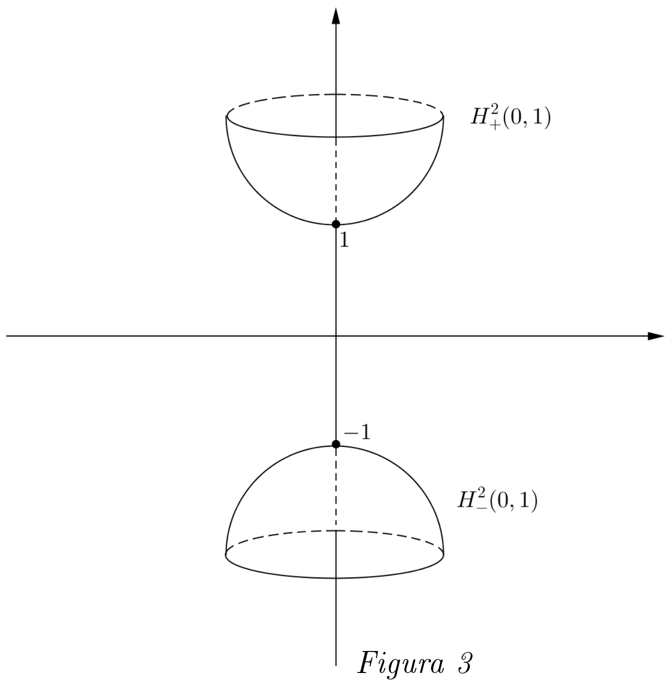


Figura 3

Vamos nos referir a $H^n_+(a,r)$, (respectivamente $H^n_-(a,r)$) como o espaço hiperbólico superior (inferior) de raio r centrado em a. Como se sabe, eles são todas as hipersuperfícies tipo-espaço umbílicas totalmente conexas em $\mathbb{L}^{n+1}$, além dos hiperplanos tipo-espaço. Suas aplicações de Gauss na direção futuro são dadas respectivamente por

$$N_+ = \frac{x-a}{r} \qquad \text{e} \qquad N_- = -\frac{x-a}{r}.$$

e seus correspondentes operadores de Weingarten são dados por $A_+(X) = -(1/r)\,X$ e $A_-(X) = (1/r)\,X$. Em particular, tais hipersuperfícies possuem curvatura média constante não-nula $h_+(r) = \dfrac{1}{r}$ e $h_-(r) = -\dfrac{1}{r}$, respectivamente. De fato, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H^n_+(a, r)$, uma curva diferenciável com $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = v$. Observe que

$$\langle \alpha(t) - a, \alpha(t) - a \rangle = -r^2, \tag{3.4}$$

onde $\alpha_{n+1}(t) - a_{n+1} \geqslant r > 0$.

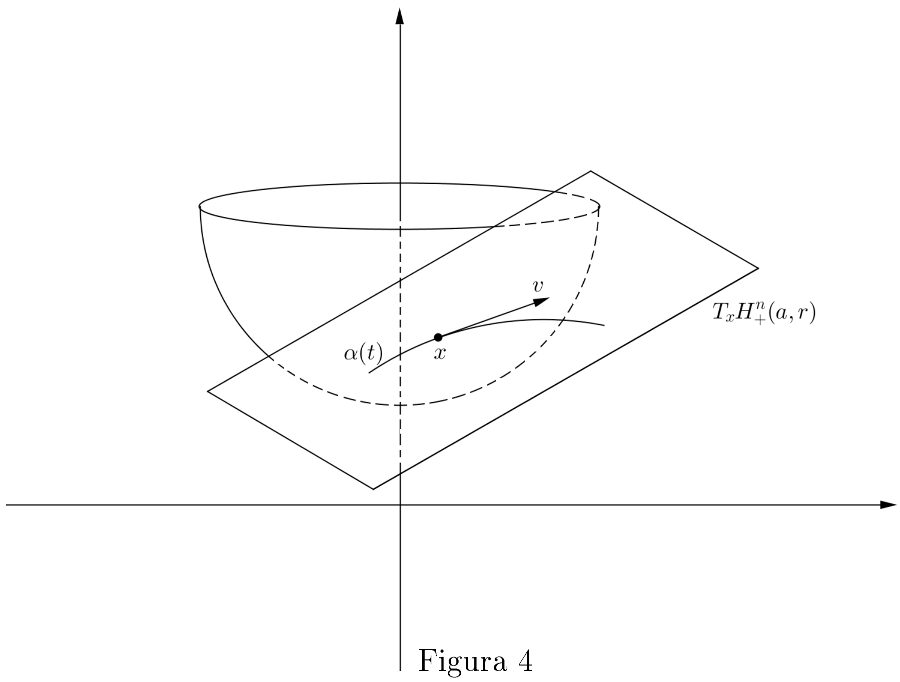


Figura 4

Assim, derivando ambos os lados da expressão em (3.4) obtemos que $\langle \alpha'(t), \alpha(t) - a \rangle = 0$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Fazendo $t = 0$, temos $\langle v, x - a \rangle = 0$. Logo, $(x - a) \perp v$, isto é, $(x - a)$ é normal a $T_xH^n_+(a, r)$. Assim podemos considerar o campo de vetores unitários e normais a $H^n_+(a, r)$ definido por

$$N_+(x) = \frac{x-a}{r},$$

onde $r = \sqrt{|\langle x - a, x - a \rangle|}$. Agora observe que

$$\langle N_+(x), e_{n+1} \rangle = -\frac{(x_{n+1} - a_{n+1})}{r} < 0,$$

o que nos permite concluir que $N_+(x)$ aponta para o futuro. Agora considere $p \in M^n$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sendo $v = X(p)$, temos por definição que

$$\nabla^0_v N(p) = \lim_{t\to 0} \frac{N(p+tv) - N(p)}{t}.$$

Mas então, usando a expressão que define $N_+(x)$, teremos da expressão acima que

$$\nabla^0_v N(p) = \frac{1}{r} v,$$

donde se conclui que o operador de Weingarten de $H^n_+(a,r)$ é dado por $A_+X = -(1/r)X$ enquanto sua curvatura média é dada por $h_+ = 1/r$. De forma similar, obtemos que $A_-X = (1/r)X$ e $h_- = -1/r$.

Definição 3.1. *Usando a notação anteriormente estabelecida, diremos que uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ está limitada entre dois espaços hiperbólicos superiores concêntricos centrados em um ponto $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ se*

$$\psi(M^n) \subset \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; -R^2 \leqslant \langle x-a, x-a\rangle \leqslant -r^2,\ \ x_{n+1} - a_{n+1} > 0\},$$

para certos números positivos $R \geqslant r$, e diremos que M^n está limitada entre dois espaços hiperbólicos inferiores centrados em um ponto $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ se

$$\psi(M^n) \subset \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; -R^2 \leqslant \langle x-a, x-a\rangle \leqslant -r^2,\ \ x_{n+1} - a_{n+1} < 0\}.$$

Com o intuito de provar o segundo resultado deste trabalho, provaremos a seguinte

Proposição 3.2. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa isometricamente imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$, com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Assuma que M^n está orientada pela aplicação de Gauss na direção futuro N. Se M^n está limitada por dois espaços hiperbólicos concêntricos superiores (respectivamente, inferiores) centrados em um ponto $a \in \mathbb{L}^{n+1}$, então*

$$\inf H \leqslant \frac{1}{R} \leqslant \frac{1}{r} \leqslant \sup H$$

(respectivamente),

$$\inf H \leqslant -\frac{1}{r} \leqslant -\frac{1}{R} \leqslant \sup H,$$

onde $R \geqslant r > 0$ são dois números positivos, tais que

$$\inf\langle \psi - a, \psi - a\rangle = -R^2 \qquad e \qquad \sup\langle \psi - a, \psi - a\rangle = -r^2.$$

Demonstração: Inicialmente observe que a aplicação diferenciável $u : M^n \to \mathbb{R}$ definida por $u = \langle \psi - a, \psi - a\rangle$ é limitada superior e inferiormente em M^n. Usando o Lema (2.6), para cada $\varepsilon > 0$, existem $p_\varepsilon, q_\varepsilon \in M^n$, tais que

$$|\nabla u(p_\varepsilon)| < \varepsilon \ , \ \Delta u(p_\varepsilon) < \varepsilon \ , \ \sup u - \varepsilon < u(p_\varepsilon) \leqslant \sup u, \tag{3.5}$$

onde $-r^2 - \varepsilon < u(p_\varepsilon) \leqslant -r^2$ e

$$|\nabla u(q_\varepsilon)| < \varepsilon \ , \ \Delta u(q_\varepsilon) > -\varepsilon \ , \ \inf u \leqslant u(q_\varepsilon) < \inf u + \varepsilon, \tag{3.6}$$

onde $-R^2 \leqslant u(q_\varepsilon) < -R^2 + \varepsilon$. Note que $\nabla u = 2(\psi - a)^T$. De fato, observamos inicialmente que $\psi - a = (\psi - a)^T + (\psi - a)^N$. Agora, note que podemos escrever

$$(\psi - a)^T = (\psi - a) + \langle \psi - a, N\rangle N.$$

Pela definição de gradiente, tem-se

$$\langle \nabla u, X\rangle \ = \ 2\langle \nabla_X(\psi - a), \psi - a\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, dado $p \in M^n$ considere $v = X(p)$, então usando a definição é imediato concluir que

$$\begin{aligned} \nabla_v(\psi - a)(p) &= \lim_{t\to 0} \frac{\psi(tv + p) - a - (\psi(p) - a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{tv + p - a - p + a}{t} = v. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Logo, da expressão anterior concluímos que $\nabla_X(\psi - a) = X$. Mas então teremos a igualdade $\langle \nabla u, X\rangle = \langle X, 2(\psi - a)\rangle$. Disso, segue que

$$\langle \nabla u, X\rangle = \langle X, 2(\psi - a)^N\rangle + \langle X, 2(\psi - a)^T\rangle = \langle X, 2(\psi - a)^T\rangle.$$

Portanto, $\nabla u = 2(\psi - a)^T$. Derivando a expressão anterior na direção do campo X iremos obter

$$\nabla^0_X \nabla u = 2\nabla^0_X(\psi - a)^T.$$

Usando que $(\psi - a)^T = \psi - a + \langle \psi - a, N\rangle N$ e usando as propriedades da conexão ∇^0 teremos

$$\begin{aligned} \nabla^0_X \nabla u &= 2\nabla^0_X(\psi - a) + 2\nabla^0_X\langle \psi - a, N\rangle N \\ &= 2X + 2\nabla^0_X\langle \psi - a, N\rangle N \\ &= 2X - 2\langle \psi - a, N\rangle AX - 2\langle \psi - a, AX\rangle N. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a fórmula de Gauss, tem-se

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla u - 2\langle AX, (\psi - a)^T\rangle N &= 2X - 2\langle \psi - a, N\rangle AX - 2\langle (\psi - a)^T \\
&+ (\psi - a)^N, AX\rangle N \\
&= 2X - 2\langle \psi - a, N\rangle AX - 2\langle (\psi - a)^T, AX\rangle N \\
&- 2\langle (\psi - a)^N, AX\rangle N \\
&= 2X - 2\langle \psi - a, N\rangle AX - 2\langle (\psi - a)^T, AX\rangle N.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_X \nabla u = 2X - 2\langle \psi - a, N\rangle AX, \tag{3.8}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, pela equação (3.8) concluímos que

$$\Delta u = 2n(1 + H\langle \psi - a, N\rangle).$$

Agora, pelas expressões em (3.5) e (3.6) segue que

$$1 + H(p_\varepsilon)\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N(p_\varepsilon)\rangle < \frac{\varepsilon}{2n} \tag{3.9}$$

e

$$1 + H(q_\varepsilon)\langle \psi(q_\varepsilon) - a, N(q_\varepsilon)\rangle > -\frac{\varepsilon}{2n}. \tag{3.10}$$

Agora observe que $|\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N(p_\varepsilon)\rangle| = -\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N(p_\varepsilon)\rangle$, de fato basta mostrar que $\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N(p_\varepsilon)\rangle < 0$. Pelo Lema (2.4), como $(\psi(p_\varepsilon) - a)$ e N estão na direção futuro, então ambos são vetores tipo-tempo, e o cone temporal formado por $(\psi(p_\varepsilon) - a)$ é o mesmo formado por N. Isto é,

$$(\psi(p_\varepsilon) - a) \in C(\psi(p_\varepsilon) - a) = C(N) = \{v \in \tau; \langle v, N\rangle < 0\},$$

onde $\tau = \{u \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle u, u\rangle < 0\}$, logo $\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N\rangle < 0$. Além disso, pela desigualdade reversa de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|\langle \psi - a, N\rangle| \geqslant |\psi - a||N| = |\psi - a|,$$

onde $|\psi - a| = \sqrt{|\langle \psi - a, \psi - a\rangle|} \geqslant \sqrt{r^2} = r$. Portanto,

$$|\langle \psi - a, N\rangle| = -\langle \psi - a, N\rangle \geqslant r. \tag{3.11}$$

De maneira análoga, se M^n está contida entre dois espaços hiperbólicos inferiores centrados em $a \in \mathbb{L}^{n+1}$, então para cada $p \in M^n$, $\psi(p) - a$ é um vetor na direção passado, e

$$|\langle \psi - a, N\rangle| = \langle \psi - a, N\rangle \geqslant r. \tag{3.12}$$

Agora, lembrando que $u = \langle \psi - a, \psi - a\rangle$, então

$$\begin{aligned} u &= \langle (\psi - a)^T + (\psi - a)^N, (\psi - a)^T + (\psi - a)^N\rangle \\ &= \langle \psi - a)^T, \psi - a)^T\rangle + \langle (\psi - a)^N, (\psi - a)^N\rangle \\ &= |(\psi - a)^T|^2 + \langle \langle \psi - a, N\rangle N, \langle \psi - a, N\rangle N\rangle \\ &= |(\psi - a)^T|^2 + \langle \psi - a, N\rangle^2 \langle N, N\rangle \\ &= |(\psi - a)^T|^2 - \langle \psi - a, N\rangle^2. \end{aligned}$$

Logo, $u = |(\psi - a)^T|^2 - \langle \psi - a, N\rangle^2$, mas $\nabla u = 2(\psi - a)^T$ obtemos, $(\psi - a)^T = \dfrac{\nabla u}{2}$. Assim, por um cálculo simples, temos que

$$|\langle \psi - a, N\rangle| = \sqrt{\frac{|\nabla u|^2}{4} - u}. \tag{3.13}$$

Agora, usando as expressões em (3.9) e (3.10) concluímos que

$$H(p_\varepsilon) > \frac{2n - \varepsilon}{2n|\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N(p_\varepsilon)\rangle|},$$

onde $0 < \varepsilon < 2n$. Note que

$$\begin{aligned} 2n|\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N(p_\varepsilon)\rangle| &= 2n\sqrt{\frac{|\nabla u(p_\varepsilon)|^2 - 4u(p_\varepsilon)}{4}} \\ &= n\sqrt{|\nabla u(p_\varepsilon)|^2 - 4u(p_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Pelo Lema (2.6), tem-se $2n|\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N(p_\varepsilon)\rangle| < n\sqrt{\varepsilon^2 - 4u(p_\varepsilon)}$. Logo,

$$\sup H \geqslant H(p_\varepsilon) > \frac{2n - \varepsilon}{2n|\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N(p_\varepsilon)\rangle|} \geqslant \frac{2n - \varepsilon}{n\sqrt{\varepsilon^2 - 4u(p_\varepsilon)}}. \tag{3.14}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (3.14), temos

$$\sup H \geqslant \frac{2n - \varepsilon}{n\sqrt{\varepsilon^2 - 4u(p_\varepsilon)}} \geqslant \frac{2n}{n\sqrt{-4u(p_\varepsilon)}}.$$

Portanto, $\sup H \geqslant \dfrac{1}{n\sqrt{-u(p_\varepsilon)}}$. Mas então, da expressão anterior obtemos que

$$\sup H \geqslant \frac{1}{r}. \tag{3.15}$$

De forma análoga, usando as expressões em (3.9) e (3.10) obtemos

$$H(q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon + 2n}{2n|\langle \psi(q_\varepsilon) - a, N(q_\varepsilon)\rangle|}.$$

Logo, é fácil notar que

$$\inf H \leqslant H(q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon + 2n}{2n|\langle \psi(q_\varepsilon) - a, N(q_\varepsilon)\rangle|} < \frac{2n + \varepsilon}{2n\sqrt{-4u(q_\varepsilon)}}. \tag{3.16}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (3.16), temos

$$\inf H < \frac{2n + \varepsilon}{2n\sqrt{-u(q_\varepsilon)}} < \frac{1}{\sqrt{-u(q_\varepsilon)}}.$$

Assim, da expressão anterior segue que

$$\inf H \leqslant \frac{1}{R}. \tag{3.17}$$

Finalmente, das expressões em (3.15) e (3.17) concluímos que

$$\inf H \leqslant \frac{1}{R} \leqslant \frac{1}{r} \leqslant \sup H.$$

■

De posse das considerações anteriores, estamos em condições de enunciar e provar o segundo resultado deste trabalho.

Teorema 3.2. *As únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante isometricamente imersas no espaço Lorentz-Minkoswski $\mathbb{L}^{n+1}$, que estão limitadas por dois espaços hiperbólicos concêntricos, são os espaços hiperbólicos.*

Demonstração: Seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa limitada por dois espaços hiperbólicos concêntricos em $\mathbb{L}^{n+1}$ determinados pelo vetor unitário tipo-tempo $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ possuindo curvatura média constante H. O fato da curvatura média H de M^n ser constante, implica por (2.18) que a curvatura de Ricci de M^n é limitada inferiormente. Por outro lado, a função $u = \langle \psi - a, \psi - a\rangle$ é uma função limitada em M^n. Assim pela Proposição (3.2), segue que $H \neq 0$ e $r = R = \frac{1}{|H|}$. Além disso, a função $\langle \psi - a, \psi - a\rangle$ é constante em M^n e igual a $-\frac{1}{H^2}$. Isso significa que M^n é um espaço hiperbólico de raio $\frac{1}{|H|}$ centrado em $a \in \mathbb{L}^{n+1}$, o que conclui a prova do Teorema. ■

3.3 Estimativas para as j-curvaturas de uma hipersuperfície tipo-espaço

Nesta seção, apresentaremos algumas estimativas para as curvaturas de ordem superior H_j de uma hipersuperfície M^n isometricamente imersa no espaço de Lorentz-Minkowski

$\mathbb{L}^{n+1}$ que possuem uma certa restrição geométrica. Para tanto, necessitamos da seguinte definição.

Definição 3.2. *Diremos que uma hipersuperfície tipo-espaço* $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ *é limitada por um espaço hiperbólico superior* $H^n_+(a, r)$ *centrado em um ponto* $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ *se,*

$$\psi(M^n) \subset \{x \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle x - a, x - a\rangle \leqslant -r^2, x_{n+1} - a_{n+1} > 0\},$$

para certo raio $r > 0$*, e diremos que* M^n *é limitada por um espaço hiperbólico inferior* $H^n_-(a, r)$ *centrado em um ponto* $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ *se,*

$$\psi(M^n) \subset \{x \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle x - a, x - a\rangle \leqslant -r^2, x_{n+1} - a_{n+1} < 0\}.$$

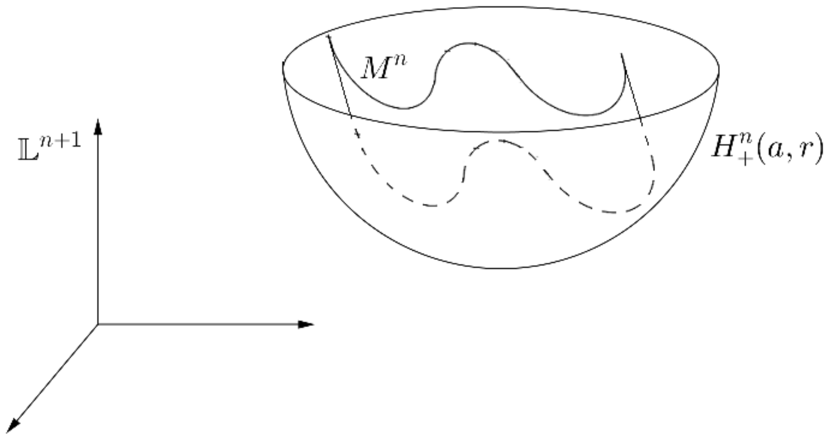


Figura 5. M^n *limitada por um espaço hiperbólico superior*

Os primeiros resultados desta seção dizem respeito a hipersuperfícies limitadas por um espaço hiperbólico e estabelecem o seguinte

Proposição 3.3. *Seja* $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa isometricamente imersa em* $\mathbb{L}^{n+1}$ *com curvatura seccional limitada inferiormente. Assuma que* M^n *está orientada pela sua aplicação de Gauss* N *na direção futura. Então,*

(i) Se M^n *está limitada por um espaço hiperbólico superior centrado em* $a \in \mathbb{L}^{n+1}$*, então para* $j = 1, \ldots, n$

$$\sup H_j \geqslant \frac{1}{r^j},$$

onde $\sup\langle\psi - a, \psi - a\rangle = -r^2$*;*

(ii) Se M^n *está limitada por um espaço hiperbólico inferior centrado em* $a \in \mathbb{L}^{n+1}$*, então*

se j *é ímpar*

$$\inf H_j \leqslant -\frac{1}{r^j},$$

e se j *é par*

$$\sup H_j \geqslant \frac{1}{r^j},$$

onde $\sup\langle \psi - a, \psi - a\rangle = -r^2$.

Demonstração: Suponha inicialmente que M^n está limitada por um espaço hiperbólico superior. Defina a aplição diferenciável $u : M^n \to \mathbb{R}$ pondo $u = \langle \psi - a, \psi - a\rangle$. Por hipótese, temos que $\langle \psi - a, \psi - a\rangle \leqslant -r^2$, logo pelo Lema (2.5), para cada $\varepsilon > 0$, existe $p_\varepsilon \in M^n$ tal que

(1) $|\nabla u(p_\varepsilon)| < \varepsilon$;

(2) $\mathsf{Hess}\, u(p_\varepsilon)(v, v) < \varepsilon, \ \forall v \in T_pM^n, \ |v| = 1$;

(3) $-r^2 - \varepsilon < u(p_\varepsilon) \leqslant -r^2$.

Seja $\{e_i = e_i(p_\varepsilon)\}_{i=1,\dots,n}$ uma base de vetores nas direções principais no ponto p_ε. Mas então, $A_{p_\varepsilon}(e_i) = k_i(p_\varepsilon)e_i$. Veja que

$$\mathsf{Hess}\, u(v, v) = 2\langle v, v\rangle - 2\langle \psi - a, N\rangle\langle Av, v\rangle.$$

Mas então, teremos

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hess}\, u(p_\varepsilon)(e_i, e_i) &= \langle \mathsf{Hess}\, u(p_\varepsilon)(e_i), e_i\rangle \\
&= \langle 2e_i - 2\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N(p_\varepsilon)\rangle A_{p_\varepsilon}(e_i), e_i\rangle \\
&= 2 - 2\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N(p_\varepsilon)\rangle k_i(p_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Como $|\langle \psi - a, N\rangle| = -\langle \psi - a, N\rangle \geqslant r$, para $\varepsilon < 2$, tem-se

$$k_i(p_\varepsilon) < \frac{\varepsilon - 2}{2|\langle \psi(p_\varepsilon) - a, N(p_\varepsilon)\rangle|} < 0.$$

Segue da equação (3.13) que

$$|\langle \psi - a, N\rangle| = \sqrt{\frac{|\nabla u|^2}{4} - u}.$$

Usando a condição (1), tem-se que

$$|\langle\psi(p_\varepsilon)-a, N(p_\varepsilon)\rangle| = \sqrt{\frac{|\nabla u|^2}{4} - u(p_\varepsilon)} \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - u(p_\varepsilon)}.$$

Logo,

$$k_i(p_\varepsilon) < \frac{\varepsilon - 2}{2|\langle\psi(p_\varepsilon)-a, N(p_\varepsilon)\rangle|} < \frac{\varepsilon-2}{\sqrt{\varepsilon^2 - 4u(p_\varepsilon)}} < 0.$$

Assim, da expressão acima concluimos que

$$k_i(p_\varepsilon) < \frac{\varepsilon-2}{\sqrt{\varepsilon^2 - 4u(p_\varepsilon)}} < 0.$$

Agora, usando as desigualdades acima estabelecidas, obtemos que

$$\begin{aligned}\binom{n}{j} H_j(p_\varepsilon) &= \sum_{i_1<\ldots<i_j} (-k_{i_1}(p_\varepsilon))\cdots(-k_{i_j}(p_\varepsilon)) \\ &> \sum_{i_1<\ldots<i_j} \left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-4u(p_\varepsilon)}}\right)\cdots\left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-4u(p_\varepsilon)}}\right) \\ &= \binom{n}{j}\left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-4u(p_\varepsilon)}}\right)^j.\end{aligned}$$

Portanto,

$$H_j(p_\varepsilon) > \left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-4u(p_\varepsilon)}}\right)^j.$$

Note que $\sup H_j \geqslant H_j(p_\varepsilon)$, mas então fazendo $\varepsilon \to 0$ temos $u(p_\varepsilon) \to -r^2$. Portanto,

$$\sup H_j \geqslant \frac{1}{r^j}.$$

No caso onde M^n está limitada por um espaço hiperbólico inferior centrado em $a \in \mathbb{L}^{n+1}$, analogamente, usando que $|\langle\psi - a, N\rangle| = \langle\psi - a, N\rangle \geqslant r$ (direção passado) em M^n, deduzimos que

$$k_i(p_\varepsilon) > \frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 4u_{p_\varepsilon}}} > 0$$

e

$$\sum_{i_1<\ldots<i_j} k_{i_1}(p_\varepsilon)\cdots k_{i_j}(p_\varepsilon) > \binom{n}{j}\left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-4u(p_\varepsilon)}}\right)^j.$$

Assim, se j é ímpar, tem-se

$$\inf H_j \leqslant H_j(p_\varepsilon) < \left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-4u(p_\varepsilon)}}\right)^j.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, tem-se

$$\inf H_j \leqslant -\frac{1}{r^j}.$$

Quando j é par temos

$$\sup H_j \geqslant H_j(p_\varepsilon) > \left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 4u(p_\varepsilon)}}\right)^j.$$

Agora, fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$\sup H_j \geqslant \frac{1}{r^j},$$

onde $\sup\langle \psi - a, \psi - a\rangle = -r^2$.

■

Corolário 3.1. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa isometricamente imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura seccional limitada inferiormente. Assuma que M^n está orientada pela sua aplicação de Gauss na direção-futuro. Se $H_j \leqslant 0$ para algum $j = 1, \ldots, n$, então M^n não está limitada por nenhum espaço hiperbólico superior.*

Demonstração: Suponha que M^n é limitada por um espaço hiperbólico superior. Então, pela Proposição (3.3), tem-se

$$\sup H_j \geqslant \frac{1}{r^j} > 0, \text{ para cada } j = 1, \ldots, n.$$

Mas por hipótese $H_j \leqslant 0$, para algum $j = 1, \ldots, n$, logo 0 é cota superior para H_j, com $\sup H_j > 0$. Contradição, pois o $\sup H_j$ é a menor das cotas superiores. ■

Corolário 3.2. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa isometricamente imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura seccional limitada inferiormente. Assuma que M^n está orientada pela sua aplicação de Gauss na direção-futuro. Se ou $H_j \geqslant 0$ para alguma ordem ímpar $j = 1, 3, \ldots$ ou $H_j \leqslant 0$ para alguma ordem par $j = 2, 4, \ldots$, então M^n não está limitada por nenhum espaço hiperbólico inferior.*

Demonstração: Suponha que M^n é limitada por algum espaço hiperbólico inferior. Então, pela Proposição (3.3), tem-se para cada j ímpar que

$$\inf H_j \leqslant -\frac{1}{r^j}.$$

Por outro lado, quando j é par, temos

$$\inf H_j \geqslant \frac{1}{r^j}.$$

Note que, se $H_i \geqslant 0$ para algum i ímpar, então $\inf\ H_i \leqslant -\dfrac{1}{r^i} < 0$. Contradição, pois 0 é cota inferior para H_i. De modo análogo, temos que se $H_i \leqslant 0$, para algum i par, então $\sup\ H_i \geqslant \dfrac{1}{r^i} > 0$. Contradição, pois zero é cota superior para H_i. ■

Observação 3.2. *Nos corolários acima, relembremos que se a ordem j é par, então H_j é intrínseca e não é necessário assumir que a orientação de M^n é precisamente dada pela sua aplicação de Gauss na direção-futuro.*

Como outra aplicação da Proposição (3.3) e tendo em conta a relação entre H_2 e S, apresentamos os seguintes resultados.

Corolário 3.3. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa isometricamente imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura seccional limitada inferiormente. Se M^n está limitada por um espaço hiperbólico centrado em $a \in \mathbb{L}^{n+1}$, então*

$$\inf\ S \leqslant -\frac{n(n-1)}{r^2},$$

onde $\sup \langle \psi - a, \psi - a \rangle = -r^2$.

Demonstração: Faremos a prova do caso em que M^n é limitada por um espaço hiperbólico superior. Para $j = 2$, tem-se

$$\sup\ H_2 \geqslant \frac{1}{r^2}.$$

Como $S = -n(n-1)H_2$, temos

$$\sup\ -\frac{S}{n(n-1)} \geqslant \frac{1}{r^2}.$$

Logo, das propriedades de supremo e ínfimo, segue que

$$\inf\ S \leqslant -\frac{n(n-1)}{r^2}.$$

■

Corolário 3.4. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa isometricamente imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura seccional limitada inferiormente. Se $S \geqslant 0$, então M^n não está limitada por nenhum espaço hiperbólico.*

Demonstração: Suponha que M^n é limitada por algum espaço hiperbólico, então pelo Corolário (3.3), tem-se que

$$\inf\ S \leqslant -\frac{n(n-1)}{r^2} < 0.$$

Mas observe que $S \geqslant 0$ implica que 0 é uma cota inferior para S, contradição. ∎

Mais ainda, sob as mesmas hipóteses do Corolário (3.4), podemos estimar a curvatura de Ricci de uma hiperuperfície tipo-espaço M^n em $\mathbb{L}^{n+1}$ como segue.

Proposição 3.4. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa isometricamente imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura seccional limitada inferiormente. Se M^n está limitada por um espaço hiperbólico centrado em $a \in \mathbb{L}^{n+1}$, então*

$$\inf \mathrm{Ric} = \inf_{p\in M^n} \mathrm{Ric}_p(v,v) \leqslant -\frac{(n-1)}{r^2},$$

para todo $v \in T_pM^n$, $|v| = 1$, onde $\sup\ \langle \psi - a, \psi - a\rangle = -r^2$.

Demonstração: Pela Proposição (3.3), tem-se, para $0 < \varepsilon < 2$,

$$k_i(p_\varepsilon) < \frac{-2+\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 4u(p_\varepsilon)}} < 0,$$

se M^n está limitada por um espaço hiperbólico superior. E temos que

$$k_i(p_\varepsilon) > \frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 4u(p_\varepsilon)}} > 0,$$

se M^n está limitada por um espaço hiperbólico inferior. Em ambos os casos, temos

$$k_i(p_\varepsilon)\cdot k_j(p_\varepsilon) > \frac{(2-\varepsilon)^2}{\varepsilon^2 - 4u(p_\varepsilon)} > 0. \tag{3.18}$$

Da equação (2.17) podemos escrever num ponto $p \in M^n$

$$\mathrm{Ric}_p(e_i, e_i) = -\mathrm{tr}(\ A)\langle Ae_i, e_i\rangle + \langle Ae_i, Ae_i\rangle$$

Assim, da expressão anterior segue imediatamente que

$$\mathrm{Ric}_p(e_i, e_i) = k_i^2(p_\varepsilon) - \sum_{j=1}^{n} k_j(p_\varepsilon)\cdot k_i(p_\varepsilon).$$

Disto e usando as desigualdades obtidas em (3.18), segue que

$$\mathrm{Ric}_p(e_i, e_i) < -(n-1)\frac{(2-\varepsilon)^2}{\varepsilon^2 - 4u(p_\varepsilon)}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos $u(p_\varepsilon) \to -r^2$. Logo, da expressão acima, segue que

$$\mathrm{Ric}_p(e_i, e_i) \leqslant -\frac{(n-1)}{r^2}.$$

Portanto, a estimativa anterior nos fornece

$$\inf \mathrm{Ric}_p(\nu, \nu) \leqslant \mathrm{Ric}_p(e_i, e_i) \leqslant -\frac{(n-1)}{r^2},$$

para todos $p \in M^n$, $\nu \in T_pM$ com $|\nu| = 1$. ■

A estimativa obtida no resultado anterior permite estabelecer o seguinte resultado.

Corolário 3.5. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa isometricamente imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura seccional limitada inferiormente. Se* Ric $\geqslant 0$, *então M^n não está limitada por nenhum espaço hiperbólico.*

Demonstração: Suponha que M^n é limitada por algum espaço hiperbólico, então pela Proposição (3.4), tem-se

$$\inf\ \mathrm{Ric}_p(\nu, \nu) \leqslant -\frac{(n-1)}{r^2} < 0,$$

uma contradição, pois Ric $\geqslant 0$. ■

Referências Bibliográficas

[1] CAMINHA, A. *On hypersurfaces into Riemannian spaces of constant sectional curvature*. Kodai Math. J., 29, 185-210, 2006.

[2] CAMINHA, A. *On spacelike hypersurface of constant sectional curvature lorentz manifolds*, J. of Geom. and Physics, 56, 1144-1174, 2006.

[3] ALEDO, J. A.; ALÍAS, L. J. *On the curvatures of bounded complete spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space*. Manuscripta Math., 101, 401-413, 2000.

[4] ALÍAS, L. J.; RIGOLI, M. *An introduction to the Omory-Yau Maximum Principle and applications*. XVI Escola de Geometria Diferencial, USP, 2010.

[5] AQUINO, C. P. *Uma caracterização de hipersuperfícies na esfera com curvatura escalar constante*. Dissertação de Mestrado-UFC, 2003.

[6] AQUINO, C. P. *Sobre Rigidez de hipersuperfícies completas*. Tese de doutorado-UFC, 2011.

[7] CHENG, S. Y.; YAU, S. T. *Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space*. Ann. of Math., 104, 407-419, 1976.

[8] do CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[9] OMORI, H. *Isometric immersions of Riemannian manifolds*. J. Math. Soc. Japan, 19, 205-214, 1967.

[10] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, London, 1983.

[11] PESSOA, L. F. *Algumas versões e aplicações do Princípio do Máximo de Omori-Yau*. Dissertação de Mestrado-UFPI, 2011.

[12] YAU, S. T. *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*. Commun. Pure Appl. Math., 28, 201-228, 1975.