Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O problema de Cauchy para a equação KdV super-simétrica com dado inicial pequeno

Thiago Esteves Moura

Teresina - 2014

Thiago Esteves Moura

Dissertação de Mestrado:

O problema de Cauchy para a equação KdV super-simétrica com dado inicial pequeno

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Roger Peres de Moura

Teresina - 2014

Moura, T. E.

O problema de Cauchy para a equação KdV super-simétrica com dado inicial pequeno.

Thiago Esteves Moura – Teresina: 2014.

Orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura.

1. Análise
2. EDP

CDD 516.36

Ao meu pai José Nevaldo Lima de Moura. (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo apoio dado e a minha namorada Antônia Regina de Oliveira Rosa por esta sempre comigo em todos os momentos.

Aos companheiros de todas as horas: Francisco Teixeira Esteves e Diego Marcos Marques, pela amizade e o apoio.

A todos os professores que contribuíram direta ou indiretamente em minha formação acadêmica. Em especial aos professores Paulo Alexandre Araújo Souza, João Xavier da Cruz Neto, Ezequias Matos Esteves, Jurandir de Oliveira Lopes e Newton Luiz Santos.

A todos os colegas de mestrado em especial aos amigos Lucas Vidal, Alberone Fernandes, Victor Carvalho. Gostaria de citar também os colegas Rafael Emanuel, Andressa Gomes, Pádua, Antonio Luiz, Elianderson, Andrelino, Jéferson Nascimento, Atécio, Sandoel, Ray Victor, Jhonata da Costa, Jaciel e Lucas Machado. Obrigado a todos pela força.

Agradeço ao meu orientador Roger Peres de Moura, cujos os ensinamentos, incentivos, sugestões e críticas marcaram decisivamente estas páginas.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"O impossível é apenas uma grande palavra usada por gente fraca, que prefere viver no mundo como ele está, em vez de usar o poder que tem para mudá-lo, melhorá-lo. Impossível não é um fato. É uma opinião. Impossível não é uma declaração. É um desafio. Impossível é hipotético. Impossível é temporário. O impossível não existe".

Muhammad Ali.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de Cauchy para a equação de Korteweg - de Vries super-simétrica (s-KdV). Mais precisamente, primeiro estudamos a boa colocação local do referido problema com restrição sobre o tamanho da norma do dado inicial em espaços de Sobolev com peso e de índice inteiro maior ou igual a três, e, por último, provamos que sem o uso de pesos na norma do dado inicial, o problema é mal posto em espaços de Sobolev de qualquer ordem, no sentido de que a aplicação dado inicial - fluxo não é suave. As principais ferramentas para a obtenção do primeiro resultado foram: o Teorema do Ponto Fixo para Contrações junto com as propriedades de efeito regularizantes de tipo Kato e da função maximal para fluxo da equação de Korteweg- de Vries linear. Já o segundo resultado é provado por redução ao absurdo e para isso, usamos as mesmas ferramentas da primeira parte junto com uma versão do Teorema da Função Implícita.

Palavras-chaves: Comportamento assimptótico em relação à variável espacial, Equação KdV super-simétrica, Má colocação.

Abstract

We study the Cauchy problem for the super-symmetric Korteweg-de Vries equation(s-KdV). More precisely, first we study the local well-posedness of this problem with restriction on the size of the norm of the initial data in weighted Sobolev spaces of index integer larger than three, and finally, we prove that without the use of weights in norm from the initial data, the problem is ill-posed in Sobolev spaces of any order, in the sense that the initial data - flow is not smooth. The primary tools for obtaining the first result were the Fixed Point Theorem for contractions along with the properties of Kato's smoothing effect and maximal function to the flow of the linear Korteweg-de Vries Vries equation. The second result is proved by reductio ad absurdum, and for this we use the same tools of the first part along with a version of the Implicit Function Theorem.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho discutiremos a boa colocação local com dado inicial pequeno e a má colocação das soluções reais do problema de Cauchy para a equação KdV supersimétrica

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u - 3v\partial_x^2 v = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + 3\partial_x(uv) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

nos espaços de Sobolev usuais com peso. Aqui, $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ são funções reais e $x, t \in \mathbb{R}$. Esta equação é encontrada em [6].

Um de nossos interesses reside no estudo da boa colocação de problemas de Cauchy (isto é, de valor inicial) de equações diferenciais parciais de evolução do tipo

$$\begin{cases} \partial_t u + P(\partial_x)u = F(t, u, \partial_x u, \cdots, \partial_x^k u) \in X \\ u(0) = u_0(x) \in Y, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $u = u(x,t)$, x é variavel espacial, t é o tempo, X e Y são espaços de Banach, P é uma função polinômial e $F : [0, T_0] \times Y \longrightarrow X$ é uma função contínua em relação às topologias envolvidas. O conceito de boa colocação compreende a existência, a unicidade, a persistência e a dependência das soluções com relação aos dados iniciais (e em quaisquer parâmetros de importância que porventura ocorram no problema). Para isso entende-se ser primordial considerar as equações em questão como equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach. Assim, a busca é por responder se o problema (1.2) satisfaz as seguintes propriedades:

a) Existe um $T \in (0, T_0]$, uma função $u \in C([0,T], Y)$, tal que $u(0) = \phi$ e a equação (1.2) é satisfeita com a derivada temporal calculada em relação à topologia de X.

Esta definição de existência de solução contém a chamada propriedade de persistência, isto é, a exigência de que a solução obtida pertença, para cada $T \in [0, T]$, ao espaço no qual se encontra o dado inicial ϕ. O procedimento para se estabelecer esta propriedade não é trivial e existem situações interessantes onde ela não é válida.

b) Existe no máximo uma solução de (1.2) (unicidade).

c) As soluções dependem continuamente do dado inicial (dependência contínua) isto significa que, se $\phi_n \longrightarrow \phi$ e u_n e u são as soluções correspondentes com dados iniciais ϕ_n e ϕ respectivamente, então para todo $T' \in (0, T)$ as soluções u_n podem ser estendidas ao intervalo $[0, T']$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T']} \|u_n(t) - u(t)\|_Y = 0.$$

Se alguma das propriedades a), b) e c) não é válida, o problema (1.2) é dito ser mal posto. Finalmente, o problema é dito bem posto globalmente se $u : [0, T) \times Y \longrightarrow X$ e as propriedades a), b) e c) valem em todo intervalo $[0, T] \subset [0, \infty)$. A ferramenta fundamental a ser utilizada no estudo do problema local no tempo é o Teorema do Ponto Fixo de Banach, também conhecido como o Lema da Contração. Mas a aplicação deste teorema ao problema (1.2) não é em geral imediata, na maioria dos casos há perda de derivadas no termo não-linear (isso nos obriga a utilizar pelo menos dois espaços de Banach em nossa formulação). Daí a necessidade de se desenvolver teorias que permitam contornar essa dificuldade. As mais conhecidas são, o método dos efeitos suavizantes que permitem estudar o problema em espaços com menor regularidade (Kenig/Ponce/Vega em [16], [17], [18], [19]) e o método de Bourgain ([4], [5] e muitos outros trabalhos). A propriedade de existência global no tempo apresenta características diversas; uma das maneiras de assegurá-la consiste em uma vez resolvido o problema local, obter estimativas a priori da solução que permitam estender os resultados locais a todo o intervalo $[0, \infty)$. Tais estimativas são geralmente asseguradas por leis de conservação. Este processo às vezes requer um conhecimento mais detalhado da física da equação em estudo.

A motivação física para problemas do tipo (1.1) surgiu da necessidade de se estudar o comportamento de partículas em campos não-lineares. Este estudo teve inicio com Einstein, com o objetivo de deduzir as equações que modelam o movimento de uma partícula num campo externo. Esta dedução foi feita observando-se a evolução de singularidades simples destes campos e teve grande impulso em 1967 com a descoberta do comportamento das soluções tipo soliton para a equação KdV ([10] e [11]). As propriedades tipo soliton podem ser vistas numa grande variedade de sistemas físicos não-lineares e a contrapartida matemática deste estudo é conhecida atualmente como a teoria dos sistemas integráveis (veja [8], [6] e [20]). A existência de solitons em todos os sistemas integráveis é traduzida de uma maneira muito simples: se dois campos evolutivos comutam, então os pontos estacionários de um dos campos são invariantes com relação ao outro campo. Neste sentido, alguns ramos da Física desenvolveram um importante conceito de supersimetria, cuja idéia principal consiste em tratar de maneira semelhante bosons e fermions (partículas elementares) ver [6] e [20] . Matematicamente, esta teoria é importante porque permite incorporar variáveis anti-comutativas do tipo Grassman juntamete com as variáveis comutativas usuais.

Levando em conta que as equações KdV supersimétricas são uma extensão de KdV, é natural perguntar quais propriedades desta última equação podem ser estabelicidas para a KdV supersimétrica. Como bem sabemos, para a KdV existe uma grande quantidade de resultados na literatura. Veja por exemplo [13], [14], [15], [17] e [18] .

Aplicando as idéias de Kenig, Ponce e Vega (veja por exemplo [18] e [16]) e fazendo a restrição sobre o dado incial conseguimos ver que o problema (1.1) é localmente bem posto nos espaços de Sobolev com peso $X_{s,1} = H^s(\mathbb{R}) \cap H^1(x^2 dx) \times H^s(\mathbb{R}) \cap H^1(x^2 dx)$, para $s \geqslant 3$ inteiro, desde que a norma do dado inicial nestes espaços seja pequena. Para obter tal resultado, combinamos os efeitos regularizantes associados ao grupo da KdV e o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Neste ponto utilizamos os espaços de Banach mistos $L^p_x L^q_T$ definido no capítulo de preliminares. Em algumas estimativas antes de aplicar os efeitos regularizantes foi preciso um cuidado de observar em quais termos esses efeitos nos dariam as estimativas desejadas.

Para encerrar mostramos que o problema (1.1) não é bem posto em $X^s = H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para $s \in \mathbb{R}$, se exigirmos na definição de boa colocação local que a aplicação dado inicial-fluxo seja C^2-Fréchet diferenciável.

O nosso trabalho é organizado da seguinte forma:

No capítulo 3 apresentamos as preliminares, onde exibimos definições e teoremas importantes para o desenvolvimento do texto.

No capítulo 4 apresentamos o resultado de boa colocação local nos espaços de Sobolev com peso $X_{s,1}$ para $s \geqslant 3$ inteiro, desde que o dado inicial seja pequeno. Nesse capitulo faremos as estimativas nos termos de (1.1) e usando os efeitos regularizantes apresentados chegaremos em uma estimativa suficiente para provar o resultado principal do capítulo. Neste capítulo foi provado também que a aplicação dado-fluxo é suave e portanto é C^2 Fréchet diferenciável.

Finalmente, no capítulo 5, apresentamos a má colocação para a equação KdV super-simétrica. Mais precisamente, provaremos que a aplicação dado inicial-fluxo não é de classe C^2 na origem em $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para $s \in \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Notação

- $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$.
- $\widehat{f}(\xi) = c\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx$ - tranformada de Fourier.
- $f^{\vee}(\xi) = c\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(x)dx$ - tranformada inversa de Fourier.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ - espaço de Schwartz.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ - espaço das distribuições temperadas.
- $J^s f = \left((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}\right)^{\vee}$ - potêncial de Bessel de ordem s.
- $D^s f = \left(|\xi|^s\widehat{f}\right)^{\vee}$ - potêncial de Riez de ordem s.
- $H^s(\mathbb{R})$ - espaço de Sobolev de ordem s.
- $H^k(x^2dx)$ - espaço de Sobolev com peso de ordem k.
- $X^s = H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ - produto cartesiano entre os espaços de Sobolev de ordem s.
- $||\vec{u}||_{H^s} = ||(u,v)||_{H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})} = ||u||_{H^s} + ||v||_{H^s}$ - norma de $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$.
- $||f||_{X_{3,1}} = ||f||_{H^3} + ||f||_{H^1(x^2dx)}$- norma usada para o dado inicial.
- $B(X,Y)$ - espaços dos operadores lineares limitados de X em Y.
- $B(X)$ - espaços dos operadores lineares limitados de X em X.
- $a \lesssim b \Rightarrow \exists \;\; c > 0$ tal que $a \leqslant cb$.

- $\mathfrak{a} \gtrsim \mathfrak{b} \Rightarrow \exists \ \mathfrak{c} > 0$ tal que $\mathfrak{a} \geqslant \mathfrak{c}\mathfrak{b}$.

- $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \Longleftrightarrow \mathfrak{a} \lesssim \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a} \gtrsim \mathfrak{b}$.

Capítulo 3

Preliminares

3.1 Os espaços de Lebesgue L^p

Nesta parte apresentaremos os espaços L^p de Lebesgue, os quais são espaços de Banach cujas as normas são definidas em termos de integrais. Para um estudo aprofundado, sugerimos a referência [1] e [9].

Definição 1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio e seja* $0 < p < \infty$. *Dada* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *mensurável, defenimos a norma*

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ é mensurável e } ||f||_{L^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Teorema 3.1. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Suponha* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$||fg||_{L^1} \leqslant ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}.$$

Vale a igualdade se, e somente se, existe um par de números reais $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, *tal que* $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ *q.s..*

Demonstração. Veja [9]. $\square$

Teorema 3.2. ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Se* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $f, g \in L^p(\Omega)$, *então*

$$||f+g||_{L^p} \leqslant ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}.$$

Demonstração. Veja [9]. □

Teorema 3.3. ***(Desigualdade de Minkowski para integrais)*** *Seja* $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *mensurável tal que ,* $f(.,y) \in L^p(\mathbb{R}^m)$ *para q.t.p.* $y \in \mathbb{R}^n$,*e que a função* $y \mapsto ||f(.,y)||_{L^p(\mathbb{R}^m)}$ *pertença a* $L^1(\mathbb{R}^n)$. *Então, a função* $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy$ *pertence a* $L^p(\mathbb{R}^m)$ *e*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dx\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja ,

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy\right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} ||f(x,y)||_{L^p(\mathbb{R}^m)}dy.$$

Demonstração. Veja [9]. □

Teorema 3.4. ***(Reprentação de Riez)*** *Seja* $1 < p < \infty$. *Se* $\varphi \in (L^p)'$, *então existe* $g \in L^q$ *tal que,* $\varphi = \varphi_g$, *onde* $\varphi_g(f) = \displaystyle\int fg dx$. *Além disso,* $||g||_{L^q} = ||\varphi||$.

Demonstração. Veja [9]. □

Para finalizar, escreveremos a definição dos espaços L^p mistos.

Definição 2. *Para* $1 \leqslant p, q < \infty$, $L^p_x L^q_T$ *é o espaço de Banach misto definido por*

$$L^p_x L^q_T = \{f : \mathbb{R} \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}; ||f||_{L^p_x L^q_T} < \infty\}$$

onde

$$||f||_{L^p_x L^q_T} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^T |f(x,t)|^q dt\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = \infty$ ou $q = \infty$ usaremos uma definição similar, envolvendo a norma do supremo essencial. O espaço $L^p_T L^q_x$ é definido como acima, invertendo-se apenas a ordem de integração.

3.2 A transformada de Fourier

Apresentaremos aqui alguns resutados sobre transformada de Fourier importantes para o nosso trabalho. Iniciaremos com uma proposição que nos possibilitará definir a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1. *A aplicação* $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *definida por*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \tag{3.1}$$

(onde $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$*) é um operador linear contínuo e* $||\mathcal{F}|| = 1$.

Demonstração. A linearidade de F segue da sua definição acima. Além disso, dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$||\mathcal{F}(f)||_\infty \leqslant ||f||_{L^1} \quad \text{e} \quad ||\mathcal{F}|| = 1.$$

□

Definição 3. *O operador linear contínuo* $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *definido pela fórmula* (3.1) *acima é chamado de transformada de Fourier.*

Definição 4. *Chamamos de espaço de funções* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *de decrescimento rápido, também conhecido como espaço de Schwartz, ao espaço*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n; ||\varphi||_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty, \forall \textit{ multi-índices } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}.$$

A título de economia designaremos $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ simplesmente por $\mathcal{S}$.

Teorema 3.5. *Se* $\varphi \in \mathcal{S}$, *então*

1. $(\partial^\alpha\varphi)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)$,

2. $((-i\,\cdot)^\alpha\varphi(\,\cdot\,))^\wedge(\xi) = \partial^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)$,

3. $\widehat{\varphi} \in S$ *ou seja ,* $F : S \longrightarrow S$.

Demonstração. Veja [9]. □

Definição 5. *Uma distribuição temperada é um funcional linear contínuo* $F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$*. O dual de* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*, ou seja, o conjunto de todas as distribuições temperadas, será desiguinado pela notação* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*.*

Portanto, $\mathsf{F} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se, e somente se,

1. $\mathsf{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear e

2. dada qualquer sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_j \longrightarrow 0$, tivermos que $\mathsf{F}(\varphi_j) \longrightarrow 0$ quando $j \longrightarrow \infty$.

Teorema 3.6. *A tranformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ é um isomorfismo, e ambos, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ são lineares contínuas.*

Demonstração. Veja [9]. □

Teorema 3.7. *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $(\partial^\alpha F)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{F}(\xi)$,

2. $((-ix)^\alpha F)^\wedge(\xi) = \partial_\xi^\alpha \widehat{F}(\xi)$,

3. $(\tau_h F)^\wedge(\xi) = e^{-ih\xi}\widehat{F}(\xi)$,

4. $(e^{ixh}F)^\wedge(\xi) = \tau_h \widehat{F}(\xi)$, *onde* $\tau_h f(x) = f(x-h)$.

Demonstração. Veja [9]. □

Teorema 3.8. ***(Identidade de Parseval)*** *Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\psi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}}(\xi)d\xi$$

Demonstração. Veja [12]. □

Teorema 3.9. ***(Plancherel)*** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e*

$$||\widehat{f}||_{L^2} = ||f||_{L^2}.$$

Demonstração. Veja em [23]. □

3.3 Os espaços de Sobolev

Os espaços de Sobolev são uma ferramenta fundamental no estudo de equações diferenciais parciais.

Definição 6. *Dado* $s \in \mathbb{R}$*, definimos os espaços de Sobolev* $H^s(\mathbb{R})$ *por:*

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})\},$$

munido da norma

$$||f||_{H^s} = ||(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}||_{L^2}.$$

Observe que $H^0 = L^2$ e que $||f||_{H^0} = ||f||_{L_2}$.

Definição 7. *Dado* $s \in \mathbb{N}$*, o espaço de Sobolev com peso* $H^s(x^2dx)$ *é definido por:*

$$H^s(x^2dx) = \{f \in L_2(\mathbb{R}); x\partial_x^i f \in L^2(\mathbb{R}), 0 \leqslant i \leqslant s\},$$

com norma

$$||f||_{H^s(x^2dx)} = \sum_{i=0}^{s} ||x\partial_x^i f||_{L^2}.$$

Proposição 2. *Sejam* $f \in H^s(\mathbb{R})$ *e* $s \geqslant 0$ *. Então*

$$||f||_{H^s} \sim ||f||_{L^2} + ||D^s f||_{L^2}.$$

Demonstração. Primeiramente observe que

$$\xi^{2s} + (1+\xi^2)^s \leqslant (1+\xi^2)^s + (1+\xi^2)^s = 2(1+\xi^2)^s. \tag{3.2}$$

Agora veja que

$$\begin{aligned}
||f||_{H^s} &= \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\int_{\xi\leqslant 1} (1+\xi^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\xi>1} (1+\xi^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\int_{\xi\leqslant 1} 2^s|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\xi>1} (2\xi^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2^{\frac{s}{2}}(||f||_{L^2} + ||D^s f||_{L^2}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (3.2) temos:

$$\begin{aligned}
||f||_{L^2} + ||D^s f||_{L^2} &\leqslant 2(||f||_{L^2}^2 + ||D^s f||_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2\left(\int_{\mathbb{R}} 2(1+\xi^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2^{\frac{3}{2}}||f||_{H^s}.
\end{aligned}$$

Segue o resultado. □

Proposição 3. *Se* $t < s$*, então* H^s *é denso em* H^t *e* $H^s \hookrightarrow H^t$ *na topologia de* H^t.

Demonstração. Veja [9]. □

Teorema 3.10. ***(Imersão de Sobolev)*** *Seja* $s > k + \frac{1}{2}$.

1. *Se* $f \in H^s$*, então* $(\widehat{\partial^\alpha f}) \in L^1$ *e*

$$||(\widehat{\partial^\alpha f})||_{L_1} \leqslant C||f||_{H^s}, \quad \forall|\alpha| \leqslant k.$$

2. $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^k_\infty(\mathbb{R})$*, em outras palavras, se* $f \in H^s$*,* $s > k + \frac{1}{2}$*, então* $f \in C^k_\infty(\mathbb{R})$ *e*

$$||f||_{C^k} \leqslant C||f||_{H^s}.$$

Demonstração. 1. Pela desigualdade de Hölder temos:

$$\begin{aligned}
\int |(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) d\xi &= i^\alpha \int |\xi|^\alpha |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&\leqslant i^\alpha \int (1+\xi^2)^{k/2} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&\leqslant i^\alpha \int (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}} (1+\xi^2)^{\frac{k-s}{2}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&\leqslant i^\alpha \left(\int (1+\xi^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (1+\xi^2)^{k-s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C||f||_{H^s}.
\end{aligned}$$

2. Considerando primeiro o caso $k = 0$. Temos que

$$||f||_{L^\infty} = ||(\widehat{f})^\vee||_{L^\infty} \leqslant ||\widehat{f}||_{L^1} \leqslant C||f||_{H^s}, \tag{3.3}$$

onde usamos a formula da inversão e o item 1 com $k = 0$. Agora se $k \geqslant 1$, então, pelo item 1, temos $\widehat{\partial^\alpha f} \in L^1$ e

$$||\partial^\alpha_x f||_{L^\infty} = ||(\widehat{\partial^\alpha f})^\vee||_{L^\infty} \leqslant ||\widehat{\partial^\alpha_x f}||_{L^1} \leqslant C||f||_{H^s}.$$

□

Corolário 3.1. *Sejam* $f \in H^s(\mathbb{R})$ *e* $s > \frac{1}{2}$*. Então*

$$||f||_{L^\infty} \leqslant C||f||_{H^s}.$$

Demonstração. Usando o item 1 do Teorema 3.10, com k=0 basta proceder como em (3.3). □

Teorema 3.11. *Se* $s \in (0, n/2)$*, então* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *esta contínuamente imerso em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *com* $p = 2/(n-2s)$*, isto é,* $s = n(1/2-1/p)$*. Mais ainda, para* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$*,* $s \in (0, n/2)$*,*

$$\|f\|_{L^p} \lesssim \|D^s f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{H^s}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Veja em [23]. □

Teorema 3.12. *Seja* $s > \frac{1}{2}$*. Então* $H^s(\mathbb{R})$ *é uma álgebra de Banach com relação ao produto de funções, ou seja, se* $f, g \in H^s(\mathbb{R})$*, então* $fg \in H^s$ *e*

$$\|fg\|_{H^s} \leqslant C_s \|f\|\|_{H^s} \|g\|\|_{H^s}.$$

Demonstração. Veja [23]. □

3.4 Os operadores projeção em baixa e alta frequências

Seja ψ uma função par de classe C^∞ de suporte compacto tal que

$$\Psi(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\xi| \leqslant 1 \\ 0, & \text{se } |\xi| \geqslant 2. \end{cases}$$

Definamos $\varphi(\xi) = \Psi(\xi) - \Psi(2\xi)$. Para qualquer número diádico $N = 2^j$, $j \in \mathbb{N}$, vamos escrever $\varphi_N(\xi) = \varphi(\xi/N)$. Observe que $\sum_N \varphi_N(\xi) = 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ e definimos

$$\varphi_0(\xi) = 1 - \sum_{N=2^j \geqslant 1} \varphi_N(\xi).$$

Denotaremos por P_0 e P_{hi} os seguintes operadores projeção:

$$P_0 f = \varphi_0^{\vee} * f \quad \text{e} \quad P_{hi} f = (1 - P_0) f.$$

P_0 é conhecido como projeção em baixa frequência e P_{hi} é o opereador projeção em alta frequência.

São válidas as seguintes propriedades para P_0 e P_{hi}:

Proposição 4. $\|P_0 D_x^\alpha f\|_{L_x^p} \lesssim \|f\|_{L^2}$*, com* $2 \leqslant p \leqslant \infty$*.*

Demonstração. De fato , pelo Teorema 3.11 temos

$$\begin{aligned} \|P_0 D_x^\alpha f\|_{L_x^p} \lesssim \|P_0 D_x^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} f\|_{L^2} &= \|\varphi_0(\xi)|\xi|^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \widehat{f}(\xi)\|_{L^2} \\ &\lesssim \|\varphi_0(\xi)\widehat{f}(\xi)\|_{L^2} \\ &\lesssim \|\widehat{f}\|_{L^2} \\ &= \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

□

Proposição 5. *Seja* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$*, então para todo* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$*, vale:*

$$\|P_{hi}f\|_{L_x^p L_T^q} \leqslant \|f\|_{L_x^p L_T^q}.$$

Demonstração. Veja em [28]. □

3.5 Resultados técnicos

Aqui apresentaremos o Teorema da Função Implícita.

Teorema 3.13. *Sejam* $U \subset E$*,* $V \subset F$ *abertos (E e F espaços de Banach) e* $f : U \times V \longrightarrow G$ *uma aplicação de classe* C^k*. Considere* $(a, b) \in U \times V$ *e assuma que* $D_j f(a, b) : F \longrightarrow G$ *é um isomorfismo. Se* $f(a, b) = 0$*, então existe uma aplicação contínua* $g : U_0 \longrightarrow V$*, onde* $U_0 \subset U$ *é uma vizinhança aberta de* a *tal que* $g(a) = b$ *e* $f(x, g(x)) = 0$*, para todo* $x \in U_0$*. Além disso, se* U_0 *é uma bola suficientemente pequena, então g é determinada de maneira única e é de classe* C^k*.*

Demonstração. Veja [21]. □

Proposição 6. *Seja* $T \in B(E)$*, onde E é um espaço de Banach, com* $\|T\| < 1$*. Então o operador definido pela série* $S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$ *pertence a* $B(E)$ *e* $S = (I - T)^{-1}$*.*

Demonstração. Observe que

$$\|S\| = \left\|\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \|T\|^j,$$

como $\|T\| < 1$, segue que $\|S\| < \infty$.

Agora veja que

$$S(I - T) = \sum_{j=0}^{\infty} T^j - \sum_{j=1}^{\infty} T^j = I.$$

□

Teorema 3.14. ***(Ponto Fixo de Banach)*** *Seja X um subconjunto fechado do espaço métrico completo* (E, d)*. Se a aplicação* $f : X \longrightarrow X$ *é uma contração, então f possui um, e somente um, ponto fixo em X.*

Demonstração. Veja [22]. □

Capítulo 4

Boa colocação com dado inicial pequeno

Nesse capítulo , discutiremos a boa colocação local com dado inicial pequeno, para o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u - 3v\partial_x^2 v = 0 \quad x, t \in \mathbb{R} \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + 3\partial_x(uv) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

com $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ funções reais.

Para (4.1) temos a seguinte formulação integral:

$$u(t,x) = W(t)u_0(x) - 3\int_0^t W(t-\tau)[2u\partial_x u - v\partial_x^2 v](\tau)d\tau,$$
$$v(t,x) = W(t)v_0(x) - 3\int_0^t W(t-\tau)[\partial_x(uv)](\tau)d\tau,$$

com $W(t)(u_0(x)) = (e^{8\pi^3 i\xi^3 t})^{\vee} * u_0(x)$, onde $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é o grupo que aparece na solução do PVI linear homogêneo

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u = 0 \quad x, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

No que faremos a seguir vamos explorar diretamente o caráter dispersivo da equação acima, onde utilizaremos os efeitos regularizantes locais tipo Kato ([15], [17], [18] e [19]) e para a função maximal em L^2, L^4 e em L^1, essa última em decorrencia do uso de espaços de Sobolev com peso.

4.1 Enunciado do Teorema principal

Considere $\overrightarrow{u} = (u, v)$ e $\overrightarrow{u_0} = (u_0, v_0), X_{s,1} = H^s(\mathbb{R}) \cap H^1(x^2dx)$. Definimos:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\overrightarrow{u}) &= \|\overrightarrow{u}\|_{L^\infty_T H^3},\\
\lambda_2(\overrightarrow{u}) &= \|\overrightarrow{u}\|_{L^\infty_T H^1(x^2dx)},\\
\lambda_3(\overrightarrow{u}) &= (1+T)^{-2} \max_{k=0,1,2} \|\partial_x^k \overrightarrow{u}\|_{L^2_x L^\infty_T},\\
\lambda_4(\overrightarrow{u}) &= (1+T)^{-2} \|\overrightarrow{u}\|_{L^1_x L^\infty_T},\\
\lambda_5(\overrightarrow{u}) &= \|\partial_x^4 \overrightarrow{u}\|_{L^\infty_x L^2_T}.
\end{aligned}$$

Agora, definimos os espaços de Banach

$$\begin{aligned}
X_T &= \{\overrightarrow{u} \in C([0,T]; X_{s,1} \times X_{s,1}); \quad \Gamma(\overrightarrow{u}) < \infty\},\\
X_T(a) &= \{\overrightarrow{u} \in C([0,T]; X_{s,1} \times X_{s,1}); \quad \Gamma(\overrightarrow{u}) \leqslant a\},
\end{aligned}$$

onde $\Gamma(\overrightarrow{u}) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant 5} \lambda_j(\overrightarrow{u})$.

Trabalhando nos espaços de Sobolev com peso e considerando o dado inicial suficientemente pequeno estabeleceremos o seguinte resultado de boa colocação local:

Teorema 4.1. *Seja* $X_{s,1} = H^s(\mathbb{R}) \cap H^1(x^2dx)$. *Assumindo* $\overrightarrow{u_0} = (u_0, v_0) \in X_{s,1} \times X_{s,1}$, *com* $s \geqslant 3$ *inteiro. Então existe* $\delta > 0$ *tal que se* $\|\overrightarrow{u_0}\|_{X_{s,1}} < \delta$ *então existe* $T = T(\|\overrightarrow{u_0}\|_{X_{s,1}}) > 0$ *e uma unica solução* $\overrightarrow{u} = (u, v)$ *de* (4.1) *definida no intervalo* $[0, T]$, *com* $\overrightarrow{u(0)} = \overrightarrow{u_0}$, *satisfazendo:*

$$\overrightarrow{u} \in C([0,T]; X_{s,1} \times X_{s,1}), \tag{4.2}$$

$$\max_{k=0,1,2} \|\partial_x^k \overrightarrow{u}\|_{L^2_x L^\infty_T} < \infty, \tag{4.3}$$

$$\|\overrightarrow{u}\|_{L^1_x L^\infty_T} < \infty, \tag{4.4}$$

$$\|\partial_x^{s+1} \overrightarrow{u}\|_{L^\infty_x L^2_T} < \infty. \tag{4.5}$$

Além disso, para qualquer $T_0 \in (0, T)$ *existe uma vizinhança V de* $\overrightarrow{u_0} \in X_{s,1}$ *tal que a aplicação dado inicial-solução de V em* X_T *(Classe definida de* (4.2)-(4.5)*) é Lipschitz.*

As ideias para a demonstração foram vistas em [2], [3] e [26], mas nosso resultado apresenta um aperfeiçoamento da técnica empregada nesses trabalhos. A parte da unicidade foi inspirada por [16] e [27].

4.2 Estimativas lineares

No que se segue, $W(t)$ denota o grupo unitario associado à equação KdV linear, isto é, para cada u_0, $W(t)u_0$ denota a solução do PVI linear

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u = 0 \quad x, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.6}$$

onde $W(t)(u_0(x)) = (e^{8\pi^3 i\xi^3 t})^{\vee} * u_0(x)$.

No lema a seguir enunciamos a estimativa de efeito regularizante de tipo Kato para o PVI homogênio (4.6) e sua versão dual.

Lema 4.1. *Sejam* $u_0 \in \mathcal{S}$ *e* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. *Então*

(i) $\|\partial_x W(t)u_0\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|u_0\|_{L_x^2}$,

(ii) $\|\partial_x \int_0^t W(-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim \|g\|_{L_x^1 L_T^2}$.

Demonstração. Veja em [18]. □

No lema abaixo enunciamos a estimativa de efeito regularizante local para a parte integral da solução do PVI não homogêneo

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u = g(x,t), \quad x, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Lema 4.2. *Seja* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. *Então*

$$\left\| \partial_x^2 \int_0^t W(t-\tau)g(x,\tau)d\tau \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|g\|_{L_x^1 L_T^2}.$$

Demonstração. Veja em [18]. □

O próximo lema diz respeito às estimativas para a função maximal associadas a solução do PVI (4.6), que iremos empregar na obtenção do nosso resultado principal.

Lema 4.3. *Sejam* $\rho, s > 3/4$ *e* $u_0 \in \mathcal{S}$. *Então*

(i) $xW(t)u_0 = W(t)(xu_0) + 3tW(t)\partial_x^2 u_0$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\|W(t)u_0\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim (1+T)^\rho \|u_0\|_{H^s}$,

(iii) $\|W(t)u_0\|_{L_x^4 L_T^\infty} \lesssim \|D^{1/4} u_0\|_{L_x^2}$,

(iv) $\|W(t)u_0\|_{L^1_xL^\infty_T} \lesssim \|D_x^{1/4}u_0\|_{L^2_x} + \|D_x^{1/4}(xu_0)\|_{L^2_x} + T\|D_x^{1/4}\partial_x^2u_0\|_{L^2_x}$.

Demonstração. A demonstração de (ii) e (iii) será omitida aqui, mas pode ser vista em [18].

(i) Temos que

$$\begin{aligned}
xW(t)u_0(x) &= i\left(-ix\widehat{W(t)u}_0(x)\right)^{\vee} \\
&= i\left[\partial_\xi(\widehat{W(t)u_0}(x))\right]^{\vee} \\
&= i\left(3i\xi^2te^{it\xi^3}\widehat{u_0}(\xi) + e^{it\xi^3}\partial_\xi\widehat{u_0}(\xi)\right)^{\vee} \\
&= \left(3te^{it\xi^3}(i\xi)^2\widehat{u_0}(\xi)\right)^{\vee} + i\left(e^{it\xi^3}\partial_\xi\widehat{u_0}(\xi)\right)^{\vee} \\
&= 3tW(t)\partial_x^2u_0(x) + W(t)xu_0(x).
\end{aligned}$$

(iv) Veja que

$$\|W(t)u_0(x)\|_{L^1_xL^\infty_T} = \int_{|x|\leqslant 1}\|W(t)u_0(x)\|_{L^\infty_T}dx + \int_{|x|>1}\frac{1}{|x|}\|xW(t)u_0(x)\|_{L^\infty_T}dx.$$

Usando o item (i) provado acima temos:

$$\begin{aligned}
\|W(t)u_0(x)\|_{L^1_xL^\infty_T} \leqslant &\int_{|x|\leqslant 1}\|W(t)u_0(x)\|_{L^\infty_T}dx + \int_{|x|>1}\frac{1}{|x|}\|W(t)xu_0(x)\|_{L^\infty_T}dx \\
&+ \int_{|x|>1}\frac{1}{|x|}\|W(t)\partial_x^2u_0(x)\|_{L^\infty_T}dx.
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder teremos:

$$\begin{aligned}
\|W(t)u_0(x)\|_{L^1_xL^\infty_T} \lesssim &\left(\int_{|x|\leqslant 1}1dx\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_{|x|\leqslant 1}\|W(t)u_0(x)\|^4_{L^\infty_T}dx\right)^{\frac{1}{4}} \\
&+ \left(\int_{|x|>1}\frac{1}{|x|^{\frac{4}{3}}}dx\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_{|x|>1}\|W(t)xu_0(x)\|^4_{L^\infty_T}dx\right)^{\frac{1}{4}} \\
&+ T\left(\int_{|x|>1}\frac{1}{|x|^{\frac{4}{3}}}dx\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_{|x|>1}\|W(t)\partial_x^2u_0(x)\|^4_{L^\infty_T}dx\right)^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|W(t)u_0(x)\|_{L^1_xL^\infty_T} \lesssim \|W(t)u_0(x)\|_{L^4_xL^\infty_T} + \|W(t)xu_0(x)\|_{L^4_xL^\infty_T} + T\|W(t)\partial_x^2u_0(x)\|_{L^4_xL^\infty_T}.$$

Usando (iii), obtemos:

$$\begin{aligned}
\|W(t)u_0(x)\|_{L^4_xL^\infty_T} &\lesssim \|D_x^{1/4}u_0(x)\|_{L^2_x}, \\
\|W(t)xu_0(x)\|_{L^4_xL^\infty_T} &\lesssim \|D_x^{1/4}xu_0(x)\|_{L^2_x}, \\
\|W(t)\partial_x^2u_0(x)\|_{L^4_xL^\infty_T} &\lesssim \|D_x^{1/4}\partial_x^2u_0(x)\|_{L^2_x},
\end{aligned}$$

e segue daí que

$$\|W(t)u_0(x)\|_{L^1_xL^\infty_t} \lesssim \|D_x^{1/4}u_0(x)\|_{L^2_x} + \|D_x^{1/4}(xu_0(x))\|_{L^2_x} + T\|D_x^{1/4}\partial_x^2 u_0(x)\|_{L^2_x}.$$

□

A fim de obter uma estimativa não homogêneo para a função máxima localizada, nos inspiramos na Proposição 2.7 do artigo de Molinet e Ribaud (veja [24] e [25]) inspirado em um resultado de Christ e Kiselev (veja [7]).

Proposição 7. *Sejam* $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$, $(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{R}^2_+$ *e* $1\leqslant p_1,q_1,p_2,q_2\leqslant\infty$ *tais que*

$$\|D_x^{\alpha_1}W(t)\varphi\|_{L^{p_1}_xL^{q_1}_T} \lesssim T^{\gamma_1}\|\varphi\|_{L^2_x}, \tag{4.7}$$

$$\|D_x^{\alpha_2}W(t)\varphi\|_{L^{p_2}_xL^{q_2}_T} \lesssim T^{\gamma_2}\|\varphi\|_{L^2_x}. \tag{4.8}$$

Então, $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\left\|D_x^{\alpha_2}\int_0^t W(t-\tau)f(x,\tau)d\tau\right\|_{L^\infty_TL^2_x} \lesssim T^{\gamma_2}\|f\|_{L^{\bar p_2}_xL^{\bar q_2}_T}, \tag{4.9}$$

$$\left\|D_x^{\alpha_1+\alpha_2}\int_0^t W(t-\tau)f(x,\tau)d\tau\right\|_{L^{p_1}_xL^{q_1}_T} \lesssim T^{\gamma_1+\gamma_2}\|f\|_{L^{\bar p_2}_xL^{\bar q_2}_T}, \tag{4.10}$$

se $\min(p_1,q_1)>\max(p_2,q_2)$, *ou,* $q_1=\infty$ *e* $\bar p_2,\bar q_2<\infty$, *onde* $\bar p_2,\bar q_2$ *são definidos por*

$$\frac{1}{\bar p_2}=1-\frac{1}{p_2} \quad e \quad \frac{1}{\bar q_2}=1-\frac{1}{q_2}.$$

Demonstração. Dados $i=1,2$ tais que

$$\|D_x^{\alpha_i}W(t)\varphi\|_{L^{p_i}_xL^{q_i}_T} \lesssim T^{\gamma_i}\|\varphi\|_{L^2_x}.$$

Usando o Teorema da representação de Riez, Fubini e a Identidade de Parserval, teremos

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t D_x^{\alpha_2}W(t-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x} &= \left\|\int_0^t D_x^{\alpha_2}W(-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x}\\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leqslant 1}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t D_x^{\alpha_2}W(-\tau)f(x,\tau)d\tau\right)\varphi(x)dx\right|\\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leqslant 1}\left|\int_0^t\left(\int_{-\infty}^{+\infty} D_x^{\alpha_2}W(-\tau)f(x,\tau)\varphi(x)dx\right)d\tau\right|\\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leqslant 1}\left|\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\tau)D_x^{\alpha_2}W(\tau)\varphi(x)dx\right)d\tau\right|\\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leqslant 1}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^T f(x,\tau)D_x^{\alpha_2}W(\tau)\varphi(x)d\tau\right)dx\right|\\
&\leqslant \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leqslant 1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T |f(x,\tau)||D_x^{\alpha_2}W(\tau)\varphi(x)|d\tau dx.
\end{aligned}$$

Agora usando a desigualdade de Hölder e (4.8) obtemos a estimativas (4.9):

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t D_x^{\alpha_2} W(t-\tau) f(\cdot,\tau)\,d\tau\right\|_{L_x^2} \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^T |f(x,t)|^{\bar{q}_2}dt\right)^{\frac{\bar{p}_2}{\bar{q}_2}}dx\right)^{\frac{1}{\bar{p}_2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^T |D_x^{\alpha_2}W(t)\varphi|^{q_2}dt\right)^{\frac{p_2}{q_2}}dx\right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&= \|f\|_{L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}} \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leqslant 1} \|D_x^{\alpha_2}W(t)\varphi\|_{L_x^{p_2}L_T^{q_2}} \\
&\lesssim \|f\|_{L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}} T^{\gamma_2} \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leqslant 1} \|\varphi\|_{L^2} \\
&\lesssim T^{\gamma_2}\|f\|_{L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}}.
\end{aligned}
$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos as seguintes estimativas duais:

$$
\left\|\int_0^t D_x^{\alpha_i} W(-\tau) h(\cdot,\tau)\,d\tau\right\|_{L_x^2} \lesssim T^{\gamma_i}\|h\|_{L_x^{\bar{p}_i}L_T^{\bar{q}_i}}, \quad \forall h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \tag{4.11}
$$

para $i = 1, 2$, onde

$$
\frac{1}{\bar{p}_i} = 1 - \frac{1}{p_i} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\bar{q}_i} = 1 - \frac{1}{q_i}.
$$

Neste ponto estamos prontos para aplicar o argumento de P. Tomas. Dados quaisquer $f \in L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}$ e $g \in L_x^{\bar{p}_1}L_T^{\bar{q}_1}$ com $\|g\|_{L_x^{\bar{p}_1}L_T^{\bar{q}_1}} \leqslant 1$, usando a Identidade de Parseval e Fubini teremos :

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\langle \int_0^t D_x^{\alpha_1+\alpha_2} W(t-\tau) f(x,\tau), g(x,\tau)\right\rangle_{L_{x,T}^2}\right| \\
&= \left|\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t D_x^{\alpha_1+\alpha_2}W(t-\tau)f(x,\tau)\,d\tau\right)\overline{g(x,t)}\,dx\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty} D_x^{\alpha_1}W(t)\left(\int_0^t D_x^{\alpha_2}W(-\tau)f(x,\tau)\,d\tau\right)\overline{g(x,t)}\,dx\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^{\alpha_1}e^{it\xi^3}\left(\int_0^t D_x^{\alpha_2}W(-\tau)f(\cdot,\tau)\,d\tau\right)^{\wedge}(\xi)\ \widehat{\overline{g(\cdot,t)}}(\xi)\,d\xi\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t D_x^{\alpha_2}W(-\tau)f(.,\tau)\,d\tau\right)^{\wedge}(\xi)\left(\overline{|\xi|^{\alpha_1}e^{-it\xi^3}\widehat{g}(\xi,t)}\right)d\xi\,dt\right|.
\end{aligned}
$$

Agora usando novamente a Identidade de Parseval, a desigualdade de Hölder e as estimativas (4.11), obteremos

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\langle \int_0^t D_x^{\alpha_1+\alpha_2} W(t-\tau)f(x,\tau), g(x,\tau)\right\rangle_{L^2_{x,T}}\right| \\
&= \left|\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t D_x^{\alpha_2}W(-\tau)f(x,\tau)d\tau\right)\overline{D_x^{\alpha_1}W(-t)g(x,t)}dxdt\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\left(\int_0^t D_x^{\alpha_2}W(-\tau)f(x,\tau)d\tau\right)\overline{D_x^{\alpha_1}W(-t)g(x,t)}dtdx\right| \\
&\lesssim \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_0^T\left(\int_0^t D_x^{\alpha_2}W(-\tau)f(x,\tau)d\tau\right)D_x^{\alpha_1}W(-t)g(x,t)dt\right|dx \\
&\lesssim \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_0^T D_x^{\alpha_2}W(-\tau)f(x,\tau)d\tau\right|\left|\int_0^T D_x^{\alpha_1}W(-t)g(x,t)dt\right|dx \\
&\lesssim \left\|\int_0^T D_x^{\alpha_2}W(-\tau)f(x,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x}\left\|\int_0^T D_x^{\alpha_1}W(-t)g(x,t)dt\right\|_{L^2_x} \\
&\lesssim T^{\gamma_1+\gamma_2}\|f\|_{L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}}\|g\|_{L_x^{\bar{p}_1}L_T^{\bar{q}_1}}.
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Daí, por (4.12) , chegamos que

$$
\begin{aligned}
&\left\|D_x^{\alpha_1+\alpha_2}\int_0^t W(t-\tau)f(x,\tau)d\tau\right\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}} \\
&= \sup_{\|g\|_{L_x^{\bar{p}_1}L_T^{\bar{q}_1}}\leqslant 1}\left|\left\langle\int_0^t D_x^{\alpha_1+\alpha_2}W(t-\tau)f(x,\tau), g(x,\tau)\right\rangle_{L^2_{x,T}}\right| \\
&\lesssim T^{\gamma_1+\gamma_2}\|f\|_{L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}}\|g\|_{L_x^{\bar{p}_1}L_T^{\bar{q}_1}} \\
&\lesssim T^{\gamma_1+\gamma_2}\|f\|_{L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}}.
\end{aligned}
$$

□

Estamos prontos para enunciar e provar as estimativas não homogêneas para a função maximal localizada, que serão essenciais à demonstração do nosso principal resultado. Começaremos com a estimativa não homogênea para a função maximal em L^2, que nada mais é que um corolário imediato da Proposição 7 e dos Lema 4.1 (i) e Lema 4.3 (ii).

Corolário 4.1. *Sejam* $0 < T \leqslant 1$ *e* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. *Então*

$$\left\|\int_0^t W(t-\tau)P_{hi}f(\cdot,\tau)d\tau\right\|_{L_x^2L_T^\infty} \lesssim \|P_{hi}f\|_{L_x^1L_T^2}.$$

Demonstração. Pela definição de operador projeção P_{hi}, dado qualquer $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|J^sP_{hi}u_0\|_{L^2} \lesssim \|D^sP_{hi}u_0\|_{L^2}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Usando o Lema 4.3 (ii) junto com (4.13) segue que

$$\|W(t)P_{hi}u_0\|_{L^2_xL^\infty_T} \lesssim \|J^sP_{hi}u_0\|_{L^2} \lesssim \|D^s_xP_{hi}u_0\|_{L^2}, \quad \forall s > \frac{3}{4},$$

e portanto, em particular,

$$\|D_x^{-1}W(t)P_{hi}u_0\|_{L^2_xL^\infty_T} \lesssim \|P_{hi}u_0\|_{L^2}. \tag{4.14}$$

Sabemos também que, pelo Lema 4.1 (i), temos

$$\|D_xW(t)P_{hi}u_0\|_{L^\infty_xL^2_T} \lesssim \|P_{hi}u_0\|_{L^2}. \tag{4.15}$$

Logo, usando (4.14) e (4.15), segue pela Proposição 7 com $p_1 = 2$, $q_1 = \infty$, $p_2 = \infty$ e $q_2 = 2$ (logo $\bar{p}_2 = 1$ e $\bar{q}_2 = 2$) que

$$\left\|\int_0^t W(t-\tau)P_{hi}f(\cdot,\tau)d\tau\right\|_{L^2_xL^\infty_T} \lesssim \|P_{hi}f\|_{L^1_xL^2_T}.$$

□

Estamos agora prontos para enunciar e provar as estimativas não-homogêneas para a função maximal que serão essenciais na demonstração do nosso resultado principal.

Lema 4.4. *Se* $f : \mathbb{R} \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é suave, então*

$$\left\|\int_0^t W(t-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\right\|_{L^4_xL^\infty_T} \lesssim \|f\|_{L^1_xL^2_T} + T^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2_{x,T}}.$$

Demonstração. Primeiramente, usando dualidade e os teoremas de Fubini e Plancherel e a desigualdade de Hölder, teremos

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t W(-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x} &= \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^T W(-\tau)f(x,\tau)d\tau\right)g(x)dx\right| \\
&= \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}} J^{1/4}f(x,t)W(t)J^{-1/4}g(x)dxdt\right| \\
&\leqslant \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}}\int_0^T \left|J^{1/4}f(x,t)W(t)J^{-1/4}g(x)\right| dtdx \\
&\leqslant \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}} \|W(t)J^{-1/4}g(x)\|_{L^\infty_T}\left(\int_0^T |J^{1/4}f(x,t)|dt\right)dx \\
&\leqslant \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1} \|W(t)J^{-1/4}g(x)\|_{L^4_xL^\infty_T}\|J^{1/4}f\|_{L^{\frac{4}{3}}_xL^1_T}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Pelo o Lema 4.3 (iii), obtemos

$$\|W(t)J^{-1/4}g(x)\|_{L^4_xL^\infty_T} \lesssim \|D^{1/4}_xJ^{-1/4}g\|_{L^2_x} \leqslant \|g\|_{L^2}. \tag{4.17}$$

Substituindo (4.17) em (4.16) obtemos

$$\left\|\int_0^t W(-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\right\|_{L_x^2} \lesssim \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\|g\|_{L^2}\|J^{1/4}f\|_{L_x^{\frac{4}{3}}L_T^1} \leqslant \|J^{1/4}f\|_{L_x^{\frac{4}{3}}L_T^1}. \tag{4.18}$$

Pelo Teorema da representação de riez, identidade de Parseval, desigualdade de Hölder e por (4.18), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t W(t-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\right\|_{L_x^4L_T^\infty}\\
&= \sup_{\|g\|_{L_x^{\frac{4}{3}}L_T^1}\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_0^T\left(\int_0^T W(-\tau)f(x,\tau)d\tau\right)W(-t)g(x,t)dtdx\right|\\
&\leqslant \sup_{\|g\|_{L_x^{\frac{4}{3}}L_T^1}\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^T W(-\tau)J^{1/4}f(x,\tau)d\tau\right)\left(\int_0^T W(-t)J^{-1/4}g(x,t)dt\right)dx\right|\\
&\leqslant \left\|\int_0^T W(-\tau)J^{1/4}f(x,\tau)d\tau\right\|_{L_x^2}\sup_{\|g\|_{L_x^{\frac{4}{3}}L_T^1}\leqslant 1}\left\|\int_0^T W(-t)J^{-1/4}g(x,t)dt\right\|_{L_x^2}\\
&\leqslant \left\|\int_0^T W(-\tau)J^{1/4}f(x,\tau)d\tau\right\|_{L_x^2}\sup_{\|g\|_{L_x^{\frac{4}{3}}L_T^1}\leqslant 1}\left\|J^{1/4}J^{-1/4}g\right\|_{L_x^{\frac{4}{3}}L_T^1}\\
&\leqslant \left\|\int_0^T W(-\tau)J^{1/4}f(x,\tau)d\tau\right\|_{L_x^2}\\
&\leqslant T^{1/2}\|f\|_{L_{x,T}^2}+\|f\|_{L_x^1L_T^2}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 8. *Se* $f:\mathbb{R}\times[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}$ *é suave, então*

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t W(t-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\right\|_{L_x^1L_T^\infty} &\lesssim T^{1/2}(\|f\|_{L_{x,T}^2}+T\|\partial_x^2 f\|_{L_{x,T}^2})+\|f\|_{L_x^1L_T^2}\\
&\quad + T\|\partial_x^2 f\|_{L_x^1L_T^2}+T\|xf\|_{L_T^\infty H^1}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Temos pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t W(t-\tau)f(x,\tau)d\tau\right\|_{L_x^1L_T^\infty}\\
&= \int_{|x|\leqslant 1}\left\|\int_0^t W(t-\tau)f(x,\tau)d\tau\right\|_{L_T^\infty}dx\\
&\quad + \int_{|x|>1}\frac{1}{|x|}\left\|\int_0^t xW(t-\tau)f(x,\tau)d\tau\right\|_{L_T^\infty}dx\\
&\leqslant \left\|\int_0^t W(t-\tau)f(x,\tau)d\tau\right\|_{L_x^4L_T^\infty}+\left\|\int_0^t xW(t-\tau)f(x,\tau)d\tau\right\|_{L_x^4L_T^\infty}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Agora, usando os Lemas 4.4 e 4.3 (i) e (iii) em (4.19), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t W(t-\tau)f(x,\tau)d\tau\right\|_{L^1_xL^\infty_T} &\lesssim T^{1/2}\|f\|_{L^2_{x,T}} + \|f\|_{L^1_xL^2_T} + \left\|\int_0^t W(t-\tau)xf(x,\tau)d\tau\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\\
&\quad + T\left\|\int_0^t W(t-\tau)\partial_x^2 f(x,\tau)d\tau\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\\
&\lesssim T^{1/2}\|f\|_{L^2_{x,T}} + \|f\|_{L^1_xL^2_T} + \int_0^T \|W(t)W(-\tau)(xf)\|_{L^4_xL^\infty_T}\,d\tau\\
&\quad + T^{1/2}T\|\partial_x^2 f\|_{L^2_{x,T}} + T\|\partial_x^2 f\|_{L^1_xL^2_T}\\
&\lesssim T^{1/2}(\|f\|_{L^2_{x,T}} + T\|\partial_x^2 f\|_{L^2_{x,T}}) + \|f\|_{L^1_xL^2_T} + T\|\partial_x^2 f\|_{L^1_xL^2_T}\\
&\quad + \int_0^T \left\|D^{1/4}W(-\tau)(xf)\right\|_{L^2_x}\,d\tau\\
&\lesssim T^{1/2}(\|f\|_{L^2_{x,T}} + T\|\partial_x^2 f\|_{L^2_{x,T}}) + \|f\|_{L^1_xL^2_T} + T\|\partial_x^2 f\|_{L^1_xL^2_T}\\
&\quad + T\|xf\|_{L^\infty_T H^1}.
\end{aligned}$$

□

4.3 Estimativas não lineares

Aqui faremos as estimativas para os termos não lineares de (4.1), para tanto usamos ideias contidas em [2], [3]e [26].

Considere $F = (F_1, F_2)$, onde

$$\begin{aligned}
F_1((u,v))(t) &= W(t)u_0(x) - \int_0^t W(t-\tau)Q_1(u,v)(\tau)d\tau\\
F_2((u,v))(t) &= W(t)v_0(x) - \int_0^t W(t-\tau)Q_2(u,v)(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

onde $Q_1(u,v)(t) = (6u\partial_x u - 3v\partial_x^2 v)(t)$, $Q_2(u,v)(t) = (\partial_x 3(uv))(t)$ e $Q = (Q_1, Q_2)$. Assim temos:

$$F(\overrightarrow{u}) = W(t)\overrightarrow{u_0}(x) - \int_0^t W(t-\tau)Q(u,v)(\tau)d\tau.$$

Procederemos com as estimitas sobre a F definida acima com o intuito de usarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach 3.14 .

Lema 4.5. *Sejam* $\overrightarrow{u_0} \in X_{3,1} \times X_{3,1}$ *e* $\overrightarrow{u} \in X_T$. *Então*

$$\lambda_1(F(\overrightarrow{u})) \lesssim \|\overrightarrow{u_0}\|_{H^3} + T\lambda_1^2 + (1+T)^2\lambda_4\lambda_5 + T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3.$$

Demonstração. Usando a desigualdade de Minkowski e o fato de $W(t)$ ser um grupo unitario em L^2, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(F(\vec{u})) &= \left\| W(t)\vec{u_0}(x) - \int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty H^3} \\
&\lesssim \left\| W(t)\vec{u_0}(x) \right\|_{L_T^\infty H^3} + \left\| \int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty H^3} \\
&\lesssim \|W(t)\vec{u_0}\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left\| W(t)\partial_x^3\vec{u_0} \right\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left\| \int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\quad + \left\| \partial_x^3 \int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&= \|\vec{u_0}\|_{H^3} + \left\| \int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left\| \partial_x^3 \int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant \|\vec{u_0}\|_{H^3} + \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \|W(t-\tau)Q(\tau)\|_{L_x^2}\, d\tau + \left\| \partial_x^3 \int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant \|\vec{u_0}\|_{H^3} + \int_0^T \|W(t-\tau)Q(\tau)\|_{L_x^2}\, d\tau + \left\| \partial_x^3 \int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Aplicando o Lema 4.1 (ii) em (4.20), teremos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(F(\vec{u})) &\lesssim \|\vec{u_0}\|_{H^3} + \int_0^T \|W(t-\tau)Q(\tau)\|_{L_x^2}\, d\tau + \left\| \partial_x^2 Q(\tau) \right\|_{L_x^1 L_T^2} \\
&\lesssim \|\vec{u_0}\|_{H^3} + \underbrace{T\|Q\|_{L_T^\infty L_x^2}}_{I} + \underbrace{\|\partial_x^2 Q\|_{L_x^1 L_T^2}}_{II}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
I &\lesssim T\left(\|Q_1\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|Q_2\|_{L_T^\infty L_x^2}\right) \\
&\lesssim T(\|u\partial_x u\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|v\partial_x^2 v\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|\partial_x(uv)\|_{L_T^\infty L_x^2}) \\
&\lesssim T(\|u\partial_x u\|_{L_T^\infty H^1} + \|v\partial_x^2 v\|_{L_T^\infty H^1} + \|uv\|_{L_T^\infty H^1}).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Agora usando o fato de $H^s(\mathbb{R})$ ser Álgebra de Banach para $s > \frac{1}{2}$ e o fado de $H^s \hookrightarrow H^t$ para $t < s$, teremos

$$\begin{aligned}
I &\lesssim T(\|u\|_{L_T^\infty H^1}\|\partial_x u\|_{L_T^\infty H^1} + \|v\|_{L_T^\infty H^1}\|\partial_x^2 v\|_{L_T^\infty H^1} + \|u\|_{L_T^\infty H^1}\|v\|_{L_T^\infty H^1}) \\
&\lesssim T(\|u\|_{L_T^\infty H^3}\|u\|_{L_T^\infty H^3} + \|v\|_{L_T^\infty H^3}\|v\|_{L_T^\infty H^3} + \|u\|_{L_T^\infty H^1}\|v\|_{L_T^\infty H^3}) \\
&\lesssim T\lambda_1^2.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Veja tambem que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &\lesssim \|\partial_x^2 Q_1\|_{L_x^1 L_T^2} + \|\partial_x^2 Q_2\|_{L_x^1 L_T^2} \\
&\lesssim \|\partial_x^2(u\partial_x u)\|_{L_x^1 L_T^2} + \|\partial_x^2(v\partial_x^2 v)\|_{L_x^1 L_T^2} + \|\partial_x^3(uv)\|_{L_x^1 L_T^2} \qquad (4.24)\\
&\lesssim \underbrace{\|\partial_x u\partial_x^2 u\|_{L_x^1 L_T^2}}_{(1)} + \underbrace{\|u\partial_x^3 u\|_{L_x^1 L_T^2}}_{(2)} + \underbrace{\|\partial_x v\partial_x^3 v\|_{L_x^1 L_T^2}}_{(3)} + \underbrace{\|v\partial_x^4 v\|_{L_x^1 L_T^2}}_{(4)} + \underbrace{\|\partial_x^2 v\partial_x^2 v\|_{L_x^1 L_T^2}}_{(5)} \\
&\quad + \underbrace{\|\partial_x^3 uv\|_{L_x^1 L_T^2}}_{(6)} + \underbrace{\|\partial_x^2 u\partial_x v\|_{L_x^1 L_T^2}}_{(7)} + \underbrace{\|\partial_x u\partial_x^2 v\|_{L_x^1 L_T^2}}_{(8)} + \underbrace{\|u\partial_x^3 v\|_{L_x^1 L_T^2}}_{(9)}.
\end{aligned}
$$

Para o termo **(1)** temos:

$$
\|\partial_x u\partial_x^2 u\|_{L_x^1 L_T^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^T |\partial_x^2 u|^2|\partial_x u|^2 dt\right)^{1/2} dx \lesssim \int_{-\infty}^{+\infty}\|\partial_x u\|_{L_T^\infty}\left(\int_0^T |\partial_x^2 u|^2 dt\right)^{1/2} dx.
$$

Pela desigualdade de Hölder e por Fubini obtemos:

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x u\partial_x^2 u\|_{L_x^1 L_T^2} &\lesssim \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\|\partial_x u\|_{L_T^\infty}^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T |\partial_x^2 u|^2 dt dx\right)^{1/2} \\
&\lesssim \|\partial_x u\|_{L_x^2 L_T^\infty}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|\partial_x^2 u|^2 dx dt\right)^{1/2} \\
&\lesssim \|\partial_x u\|_{L_x^2 L_T^\infty}\|\partial_x^2 u\|_{L_T^\infty L_x^2}\left(\int_0^T 1 dt\right)^{1/2} \\
&\lesssim T^{1/2}\|\partial_x u\|_{L_x^2 L_T^\infty}\|\partial_x^2 u\|_{L_T^\infty L_x^2}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\|\partial_x u\partial_x^2 u\|_{L_x^1 L_T^2} \lesssim T^{1/2}\|\partial_x u\|_{L_x^2 L_T^\infty}\|u\|_{L_T^\infty H^3} \lesssim T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3.
$$

Para o termo **(2)** temos:

$$
\|u\partial_x^3 u\|_{L_x^1 L_T^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^T |u\partial_x^3 u|^2 dt\right)^{1/2} dx \lesssim \int_{-\infty}^{+\infty}\|u\|_{L_T^\infty}\left(\int_0^T |\partial_x^3 u|^2 dt\right)^{1/2} dx.
$$

Usando a desigualdade de Hölder teremos:

$$
\begin{aligned}
\|u\partial_x^3 u\|_{L_x^1 L_T^2} &\lesssim \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\|u\|_{L_t^\infty}^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T |\partial_x^3 u|^2 dt dx\right)^{1/2} \\
&\lesssim \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty}\|\partial_x^3 u\|_{L_T^\infty L_x^2}\left(\int_0^T 1 dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\|u\partial_x^3 u\|_{L_x^1 L_T^2} \lesssim T^{1/2}\|u\|_{L_x^2 L_T^\infty}\|u\|_{L_T^\infty H^3} \lesssim T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3.
$$

Para o termo **(3)** temos:

$$\|\partial_x v \partial_x^3 v\|_{L_x^1 L_T^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |\partial_x v \partial_x^3 v|^2 dt \right)^{1/2} dx \lesssim \int_{-\infty}^{+\infty} \|\partial_x v\|_{L_t^\infty} \left(\int_0^T |\partial_x^3 v|^2 dt \right)^{1/2} dx.$$

Pela desigualdade de Hölder temos:

$$\begin{aligned}\|\partial_x v \partial_x^3 v\|_{L_x^1 L_T^2} &\lesssim \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|v\|_{L_T^\infty}^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T |\partial_x^3 v|^2 dt dx \right)^{1/2} \\ &\lesssim \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\partial_x^3 v\|_{L_T^\infty L_x^2} \left(\int_0^T 1 dt \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Logo

$$\|\partial_x v \partial_x^3 v\|_{L_x^1 L_T^2} \lesssim T^{1/2} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|v\|_{L_T^\infty H^3} \lesssim T^{1/2}(1+T)^2 \lambda_1 \lambda_3.$$

Para o termo **(4)** temos:

$$\begin{aligned}\|v \partial_x^4 v\|_{L_x^1 L_T^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |v|^2 |\partial_x v|^4 dt \right)^{1/2} dx \\ &\lesssim \int_{-\infty}^{+\infty} \|v\|_{L_T^\infty} \left(\int_0^T |\partial_x^4 v|^2 dt \right)^{1/2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \|v\|_{L_T^\infty} \|\partial_x^4 v\|_{L_T^2} dx \\ &\lesssim \|\partial_x^4 v\|_{L_x^\infty L_T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \|v\|_{L_T^\infty} dx.\end{aligned}$$

Logo

$$\|v \partial_x^4 v\|_{L_x^1 L_T^2} \lesssim \|v\|_{L_x^1 L_T^\infty} \|\partial_x^4 v\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim (1+T)^2 \lambda_4 \lambda_5.$$

Para o termo **(5)** temos:

$$\|\partial_x^2 v \partial_x^2 v\|_{L_T^1 L_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |\partial_x^2 v \partial_x^2 v|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \|\partial_x^2 v\|_{L_T^\infty} \left(\int_0^T |\partial_x^2 v|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Agora usando a desigualdade de Hölder e por Fubini, teremos

$$\begin{aligned}\|\partial_x^2 v \partial_x^2 v\|_{L_T^1 L_x^2} &\leqslant \|\partial_x^2 v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T |\partial_x^2 v|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\partial_x^2 v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x^2 v|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \|\partial_x^2 v\|_{L_x^2 L_T^\infty} T^{\frac{1}{2}} \|\partial_x^2 v\|_{L_T^\infty L_x^2}.\end{aligned}$$

Daí teremos

$$\begin{aligned}\|\partial_x^2 v \partial_x^2 v\|_{L_T^1 L_x^2} &\lesssim \|\partial_x^2 v\|_{L_x^2 L_T^\infty} T^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^\infty H^3} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2 \lambda_1 \lambda_3.\end{aligned}$$

Para os termos **(6)**, **(7)**, **(8)** e **(9)**, com os mesmos argumentos usados em (1) e (2) teremos:

$$\begin{aligned}\|\partial_x^3 u v\|_{L_x^1 L_T^2} &\lesssim T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2 \lambda_1 \lambda_3, \\ \|\partial_x^2 u \partial_x v\|_{L_x^1 L_T^2} &\lesssim T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2 \lambda_1 \lambda_3, \\ \|\partial_x u \partial_x^2 v\|_{L_x^1 L_T^2} &\lesssim T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2 \lambda_1 \lambda_3, \\ \|u \partial_x^3 v\|_{L_x^1 L_T^2} &\lesssim T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2 \lambda_1 \lambda_3.\end{aligned}$$

Assim obtemos a seguinte estimativa para II:

$$\mathrm{II} \lesssim T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2 \lambda_1 \lambda_3 + (1+T)^2 \lambda_4 \lambda_5. \tag{4.25}$$

Usando (4.23) e (4.25) em (4.21), obtemos:

$$\lambda_1(F(\vec{u})) \lesssim \|\vec{u_0}\|_{H^3} + T\lambda_1^2 + (1+T)^2 \lambda_4 \lambda_5 + T^{1/2}(1+T)^2 \lambda_1 \lambda_3.$$

□

Lema 4.6. *Sejam* $\vec{u_0} \in X_{3,1} \times X_{3,1}$ *e* $\vec{u} \in X_T$. *Então*

$$\lambda_3(F(\vec{u})) \lesssim \|\vec{u_0}\|_{H^3} + T\lambda_1^2 + T^2\lambda_1^2 + T^{1/2}(1+T)^2 \lambda_1 \lambda_3 + (1+T)^2 \lambda_4 \lambda_5.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}\lambda_3(F(\vec{u})) &= (1+T)^{-2} \left[\max_{k=0,1,2} \left\| \partial_x^k \left(W(t)\vec{u_0}(x) - \int_0^t W(t-\tau) Q(\tau) d\tau \right) \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \right] \\ &\leqslant (1+T)^{-2} \left[\max_{k=0,1,2} \left\| \partial_x^k W(t) \vec{u_0}(x) \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \max_{k=0,1,2} \left\| \partial_x^k \int_0^t W(t-\tau) Q(\tau) d\tau \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \right].\end{aligned}$$

Usando o Lema 4.3 (ii) com $\rho = 2$, obtemos:

$$\begin{aligned}\max_{k=0,1,2} \left\| \partial_x^k W(t) \vec{u_0}(x) \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\lesssim (1+T)^2 (\|\vec{u_0}\|_{H^1} + \|\partial_x \vec{u_0}\|_{H^1} + \|\partial_x^2 \vec{u_0}\|_{H^1}) \\ &\lesssim (1+T)^2 \|\vec{u_0}\|_{H^3}.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Agora vejamos o termo integral. Temos pela definição de Q(t) que

$$\begin{aligned}
\max_{k=0,1,2}\left\|\partial_x^k\int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau\right\|_{L_x^2L_T^\infty} &\lesssim \max_{k=0,1,2}\left\|\partial_x^k\int_0^t W(t-\tau)u\partial_x u d\tau\right\|_{L_x^2L_T^\infty}\\
&+\max_{k=0,1,2}\left\|\partial_x^k\int_0^t W(t-\tau)\partial_x(uv)d\tau\right\|_{L_x^2L_T^\infty}\\
&+\max_{k=0,1,2}\left\|\partial_x^k\int_0^t W(t-\tau)v\partial_x^2 v d\tau\right\|_{L_x^2L_T^\infty}\\
&= \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 4, Corolário 4.1 e o Lema 4.3 (ii) com $\rho = 1$, teremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\lesssim \max_{k=0,1,2}\left[\left\|\partial_x^k\int_0^t W(t-\tau)P_0(u\partial_x u)d\tau\right\|_{L_x^2L_T^\infty}+\left\|\partial_x^k\int_0^t W(t-\tau)P_{hi}(u\partial_x u)d\tau\right\|_{L_x^2L_T^\infty}\right]\\
&\lesssim \max_{k=0,1,2}\left[\int_0^T \|W(t)W(-\tau)\partial_x^k P_0(u\partial_x u)\|_{L_x^2L_T^\infty}d\tau+\|\partial_x^k P_{hi}(u\partial_x u)\|_{L_x^1L_T^2}\right]\\
&\lesssim \max_{k=0,1,2}\left[\int_0^T (1+T)\|P_0\partial_x^{k+1}(u\partial_x u)\|_{L_x^2}dt+\|\partial_x^k(u\partial_x u)\|_{L_x^1L_T^2}\right]\\
&\lesssim \max_{k=0,1,2}\left[T(1+T)\|u\partial_x u\|_{L_T^\infty L_x^2}+\|\partial_x^k(u\partial_x u)\|_{L_x^1L_T^2}\right]\\
&\lesssim T(1+T)\|u\partial_x u\|_{L_T^\infty L_x^2}+\|u\partial_x u\|_{L_x^1L_T^2}+\|\partial_x(u\partial_x u)\|_{L_x^1L_T^2}+\|\partial_x^2(u\partial_x u)\|_{L_x^1L_T^2}.
\end{aligned}$$

Com argumentos semelhantes aos de (4.22) e (4.24), obtemos

$$\mathrm{I} \lesssim T\lambda_1^2+T^2\lambda_1^2+T^{\frac{1}{2}}(T+1)^2\lambda_1\lambda_3. \tag{4.27}$$

Com o mesmo procedimento acima, prova-se que

$$\mathrm{II} \lesssim T\lambda_1^2+T^2\lambda_1^2+T^{\frac{1}{2}}(T+1)^2\lambda_1\lambda_3. \tag{4.28}$$

Agora passemos ao termo III. Novamente usando a Proposição 4, Corolário 4.1 e o Lema 4.3 (ii) com $\rho = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{III} &\lesssim \max_{k=0,1,2}\left[\left\|\partial_x^k\int_0^t W(t-\tau)P_0(v\partial_x^2 v)d\tau\right\|_{L_x^2L_T^\infty}+\left\|\partial_x^k\int_0^t W(t-\tau)P_{hi}(v\partial_x^2 v)d\tau\right\|_{L_x^2L_T^\infty}\right]\\
&\lesssim T\|P_0(v\partial_x^2 v)\|_{L_T^\infty L_x^2}+\max_{k=0,1,2}\|\partial_x^k(v\partial_x^2 v)\|_{L_x^1L_T^2}\\
&\lesssim T\|v\partial_x^2 v\|_{L_T^\infty L_x^2}+\|v\partial_x^2 v\|_{L_x^1L_T^2}+\|\partial_x(v\partial_x^2 v)\|_{L_x^1L_T^2}+\|\partial_x^2(v\partial_x^2 v)\|_{L_x^1L_T^2}.
\end{aligned}$$

Com argumentos semelhantes aos de (4.22) e (4.24) no Lema 4.5, obtemos

$$\mathrm{III} \lesssim T\lambda_1^2+T^2\lambda_1^2+T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3+(1+T)^2\lambda_4\lambda_5. \tag{4.29}$$

De (4.27), (4.28) e (4.29), temos que

$$\begin{aligned}\max_{k=0,1,2}\left\|\partial_x^k\int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau\right\|_{L_x^2L_T^\infty} &\lesssim T\lambda_1^2+T^2\lambda_1^2+T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3+(1+T)^2\lambda_4\lambda_5\\ &\lesssim (1+T)^2(T\lambda_1^2+T^2\lambda_1^2+T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3\\ &\quad +(1+T)^2\lambda_4\lambda_5).\end{aligned}$$

Usando (4.26), finalmente teremos

$$\lambda_3(F(\overrightarrow{u}))\lesssim\|\overrightarrow{u_0}\|_{H^3}+T\lambda_1^2+T^2\lambda_1^2+T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3+(1+T)^2\lambda_4\lambda_5.$$

□

Lema 4.7. *Sejam* $\overrightarrow{u_0}\in X_{3,1}\times X_{3,1}$ *e* $\overrightarrow{u}\in X_T$. *Então*

$$\lambda_5(F(\overrightarrow{u}))\lesssim\|\overrightarrow{u_0}\|_{H^3}+T\lambda_1^2+T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3+(1+T)^2\lambda_4\lambda_5$$

.

Demonstração. Pelo Lema 4.1 (i) e o Lema 4.2, temos que

$$\begin{aligned}\lambda_5(F(\overrightarrow{u})) &= \left\|\partial_x^4\left(W(t)\overrightarrow{u}_0-\int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\lesssim \left\|\partial_x^4\left(W(t)\overrightarrow{u}_0\right)\right\|_{L_T^\infty L_x^2}+\left\|\partial_x^4\left(\int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\\ &\lesssim \left\|\partial_x^3\left(W(t)\overrightarrow{u}_0\right)\right\|_{L_x^2}+\|\partial_x^2 Q\|_{L_x^1L_T^2}\\ &\lesssim \|\overrightarrow{u}_0\|_{H^3}+\|\partial_x^2(u\partial_x u)\|_{L_x^1L_T^2}+\|\partial_x^2(v\partial_x^2 v)\|_{L_x^1L_T^2}+\|\partial_x^3(uv)\|_{L_x^1L_T^2}.\end{aligned}$$

Usando os argumentos aplicados em (4.24) do Lema 4.5, obtemos

$$\lambda_5(F(\overrightarrow{u}))\lesssim\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^3}+T\lambda_1^2+(1+T)^2\lambda_4\lambda_5+T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3.$$

□

Lema 4.8. *Sejam* $\overrightarrow{u_0}\in X_{3,1}\times X_{3,1}$ *e* $\overrightarrow{u}\in X_T$. *Então*

$$\begin{aligned}\lambda_4(F(\overrightarrow{u}))\lesssim{}&(1+T)\|\overrightarrow{u_0}\|_{X_{3,1}}+T\lambda_1^2+T\lambda_1\lambda_2+T^{\frac{3}{2}}(1+T)^2\lambda_3\lambda_5+(T^{\frac{3}{2}}+T^{\frac{1}{2}})(1+T)^2\lambda_1\lambda_3\\ &+T(1+T)^2\lambda_4\lambda_5.\end{aligned}$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_4(F(\vec{u})) &\lesssim \|W(t)\vec{u}_0(x)\|_{L^1_x L^\infty_T} + \left\|\int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau\right\|_{L^1_x L^\infty_T} \\
&\lesssim \|W(t)\vec{u}_0(x)\|_{L^1_x L^\infty_T} + \left\|\int_0^t W(t-\tau)\partial_x(uv)d\tau\right\|_{L^1_x L^\infty_T} \\
&+ \left\|\int_0^t W(t-\tau)(u\partial_x u)d\tau\right\|_{L^1_x L^\infty_T} + \left\|\int_0^t W(t-\tau)(v\partial_x^2 v)d\tau\right\|_{L^1_x L^\infty_T} \\
&= \|W(t)\vec{u}_0(x)\|_{L^1_x L^\infty_T} + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.3 (iv), obtemos

$$\begin{aligned}
\|W(t)\vec{u}_0(x)\|_{L^1_x L^\infty_T} &\lesssim \|D_x^{1/4}\vec{u}_0\|_{L^2_x} + \|D_x^{1/4}(x\vec{u}_0)\|_{L^2_x} + T\|D_x^{1/4}\partial_x^2\vec{u}_0\|_{L^2_x} \\
&\lesssim (1+T)(\|\vec{u}_0\|_{H^3} + \|(x\vec{u}_0)\|_{H^1}) \\
&= (1+T)\|\vec{u}_0\|_{X_{3,1}}. \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 8 ao termo I, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\lesssim T^{\frac{1}{2}}(\|\partial_x(uv)\|_{L^2_{x,T}} + T\|\partial_x^3(uv)\|_{L^2_{x,T}}) + \|\partial_x(uv)\|_{L^1_x L^2_T} + T\|\partial_x^3(uv)\|_{L^1_x L^2_T} + T\|x\partial_x(uv)\|_{L^\infty_T H^1} \\
&\lesssim T(\|uv\|_{L^\infty_T H^1} + T\|uv\|_{L^\infty_T H^3}) + \|\partial_x(uv)\|_{L^1_x L^2_T} + T\|\partial_x^3(uv)\|_{L^1_x L^2_T} + T\|x\partial_x uv\|_{L^\infty_T H^1} \\
&+ T\|xu\partial_x v\|_{L^\infty_T H^1}.
\end{aligned}$$

Agora, usando o fato de $H^s(\mathbb{R})$ ser álgebra de Banach, para $s > \frac{1}{2}$, a Proposição 2 e o fato de $H^s \hookrightarrow H^t$ para $t < s$, chegamos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\lesssim T(\|u\|_{L^\infty_T H^3}\|v\|_{L^\infty_T H^3} + T\|u\|_{L^\infty_T H^3}\|v\|_{L^\infty_T H^3}) + \|\partial_x(uv)\|_{L^1_x L^2_T} + T\|\partial_x^3(uv)\|_{L^1_x L^2_T} \\
&+ T\|xv\|_{L^\infty_T H^1}\|\partial_x u\|_{L^\infty_T H^1} + T\|xu\|_{L^\infty_T H^1}\|\partial_x v\|_{L^\infty_T H^1} \\
&\lesssim (T+T^2)(\|u\|_{L^\infty_T H^3}\|v\|_{L^\infty_T H^3}) + \|\partial_x(uv)\|_{L^1_x L^2_T} + T\|\partial_x^3(uv)\|_{L^1_x L^2_T} \\
&+ T(\|xu\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|\partial_x(xu)\|_{L^\infty_T L^2_x})\|\partial_x v\|_{L^\infty_T H^1} + T(\|xv\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|\partial_x(xv)\|_{L^\infty_T L^2_x})\|\partial_x u\|_{L^\infty_T H^1} \\
&\lesssim T\lambda_1^2 + T^2\lambda_1^2 + \|\partial_x(uv)\|_{L^1_x L^2_T} + T\|\partial_x^3(uv)\|_{L^1_x L^2_T} + T(\|xu\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|u\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&+ \|x\partial_x u\|_{L^\infty_T L^2_x})\|v\|_{L^\infty_T H^3} + T(\|xv\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|v\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|\partial_x v\|_{L^\infty_T L^2_x})\|u\|_{L^\infty_T H^3} \\
&\lesssim T\lambda_1^2 + T^2\lambda_1^2 + T\lambda_1\lambda_2 + \|\partial_x(uv)\|_{L^1_x L^2_T} + T\|\partial_x^3(uv)\|_{L^1_x L^2_T}.
\end{aligned}$$

Procedendo como no Lema 4.5 em (4.24), obteremos

$$\mathrm{I} \lesssim T\lambda_1^2 + T^2\lambda_1^2 + T\lambda_1\lambda_2 + (1+T)^2 T^{\frac{1}{2}}\lambda_1\lambda_3 + (1+T)^2 T^{\frac{3}{2}}\lambda_1\lambda_3. \qquad (4.31)$$

Analogamente prova-se que

$$\mathrm{II} \lesssim T\lambda_1^2 + T^2\lambda_1^2 + T\lambda_1\lambda_2 + (1+T)^2 T^{\frac{1}{2}}\lambda_1\lambda_3 + (1+T)^2 T^{\frac{3}{2}}\lambda_1\lambda_3. \tag{4.32}$$

Usando novamente a Proposição 8 e o fato de $H^s(\mathbb{R})$ ser álgebra de Banach, para $s > \frac{1}{2}$, teremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{III} &\lesssim T^{\frac{1}{2}}(\|v\partial_x^2 v\|_{L^2_{x,T}} + T\|\partial_x^2(v\partial_x^2 v)\|_{L^2_{x,T}}) + \|v\partial_x^2 v\|_{L^1_x L^2_T} + T\|\partial_x^2(v\partial_x^2 v)\|_{L^1_x L^2_T} + T\|xv\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T H^1}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}(\|v\partial_x^2 v\|_{L^2_{x,T}} + T\|\partial_x^2(v\partial_x^2 v)\|_{L^2_{x,T}}) + \|v\partial_x^2 v\|_{L^1_x L^2_T} + T\|\partial_x^2(v\partial_x^2 v)\|_{L^1_x L^2_T}\\
&\quad + T(\|xv\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|v\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|x\partial_x v\|_{L^\infty_T L^2_x})\|v\|_{L^\infty_T H^3}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}(\|v\partial_x^2 v\|_{L^2_{x,T}} + T\|\partial_x^2(v\partial_x^2 v)\|_{L^2_{x,T}}) + \|v\partial_x^2 v\|_{L^1_x L^2_T} + T\|\partial_x^2(v\partial_x^2 v)\|_{L^1_x L^2_T} + T\lambda_1^2 + T\lambda_1\lambda_2.
\end{aligned}$$

Agora pela desigualdade de Hölder, Fubini e a imersão de Sobolev, teremos

$$\begin{aligned}
\|v\partial_x^2 v\|_{L^2_{x,T}} &\lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^\infty_T H^3}\|\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T H^1}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{L^\infty_T H^3}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\lambda_1^2,
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^2(v\partial_x^2 v)\|_{L^2_{x,T}} &\lesssim \|\partial_x^2 v\partial_x^2 v\|_{L^2_{x,T}} + \|\partial_x v\partial_x^3 v\|_{L^2_{x,T}} + \|v\partial_x^4 v\|_{L^2_{x,T}}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}(\|\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|\partial_x v\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x^3 v\|_{L^\infty_T L^2_x} + \left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T |v\partial_x^4 v|^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}(\|\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T H^1}\|\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T H^1} + \|\partial_x v\|_{L^\infty_T H^1}\|v\|_{L^\infty_T H^3}) + \left[\int_{-\infty}^{+\infty}\|v\|^2_{L^\infty_T}\|\partial_x^4 v\|^2_{L^2_T} dx\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{L^\infty_T H^3} + \|v\|_{L^2_x L^\infty_T}\|\partial_x^4 v\|_{L^\infty_x L^2_T}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\lambda_1^2 + (1+T)^2\lambda_3\lambda_5,
\end{aligned}$$

daí segue que

$$\mathrm{III} \lesssim T\lambda_1^2 + T\lambda_1\lambda_2 + T^{\frac{3}{2}}(1+T)^2\lambda_3\lambda_5 + \|v\partial_x^2 v\|_{L^1_x L^2_T} + T\|\partial_x^2(v\partial_x^2 v)\|_{L^1_x L^2_T}.$$

Procedendo como em (4.24) do Lema 4.5 teremos

$$\mathrm{III} \lesssim T\lambda_1^2 + T\lambda_1\lambda_2 + T^{\frac{3}{2}}(1+T)^2\lambda_3\lambda_5 + (T^{\frac{3}{2}} + T^{\frac{1}{2}})(1+T)^2\lambda_1\lambda_3 + T(1+T)^2\lambda_4\lambda_5. \tag{4.33}$$

Assim, de (4.30), (4.31), (4.32) e (4.33) teremos

$$\begin{aligned}\lambda_4(F(\vec{u})) &\lesssim (1+T)\|\vec{u_0}\|_{X_{3,1}} + T\lambda_1^2 + T\lambda_1\lambda_2 + T^{\frac{3}{2}}(1+T)^2\lambda_3\lambda_5 + (T^{\frac{3}{2}} + T^{\frac{1}{2}})(1+T)^2\lambda_1\lambda_3 \\ &+ T(1+T)^2\lambda_4\lambda_5.\end{aligned}$$

□

Lema 4.9. *Seja* $\vec{u_0} \in X_{3,1} \times X_{3,1}$ *e* $\vec{u} \in X_T$. *Então*

$$\lambda_2(F(\vec{u})) \lesssim (1+T)\|\vec{u}_0\|_{X_{3,1}} + T\lambda_1\lambda_2 + T^{\frac{3}{2}}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}\lambda_2(F(\vec{u})) &= \|F(\vec{u})\|_{L_T^\infty H^1(x^2dx)} \\ &= \|xF(\vec{u})\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|x\partial_x F(\vec{u})\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &= \mathrm{I} + \mathrm{II}\end{aligned}$$

Veja que, pelo Lema 4.3 (i), teremos

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &\lesssim \|xW(t)\vec{u_0}(x)\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left\|x\int_0^t W(t-\tau)Q(\tau)d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\lesssim \|W(t)(x\vec{u_0}(x))\|_{L_T^\infty L_x^2} + T\|W(t)\partial_x^2\vec{u_0}(x)\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left\|\int_0^t W(t-\tau)(xQ(\tau))d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &+ T\left\|\int_0^t W(t-\tau)\partial_x^2 Q(\tau)d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2}.\end{aligned}$$

Agora, usando o fato de $W(t)$ ser grupo unitário em L^2, o Lema 4.1 (ii), a desigualdade de Minkowski e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &\lesssim \|x\vec{u_0}(x)\|_{L_x^2} + T\|\partial_x^2\vec{u_0}(x)\|_{L_x^2} + T\|xQ\|_{L_T^\infty L_x^2} + T\|\partial_x Q\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim \|\vec{u}_0\|_{H^1(x^2dx)} + T\|\vec{u_0}\|_{H^3} + T\|xQ\|_{L_T^\infty L_x^2} + T\|\partial_x Q\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim (1+T)\|\vec{u}_0\|_{X_{3,1}} + T\|xQ\|_{L_T^\infty L_x^2} + T\|\partial_x Q\|_{L_x^1 L_T^2}.\end{aligned}$$

Veja que

$$\|\partial_x Q\|_{L_x^1 L_T^2} \lesssim \|\partial_x(u\partial_x u)\|_{L_x^1 L_T^2} + \|\partial_x(v\partial_x^2 v)\|_{L_x^1 L_T^2} + \|\partial_x^2(uv)\|_{L_x^1 L_T^2}$$

Procedendo de maneira semelhante a (4.24), obteremos

$$\|\partial_x Q\|_{L_x^1 L_T^2} \lesssim T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3.$$

Veja também que usando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, teremos

$$\begin{aligned}
\|xQ\|_{L^\infty_T L^2_x} &\lesssim \|xu\partial_x u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|xv\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|x\partial_x(uv)\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\lesssim \|xu\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|xv\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|xu\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x v\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\quad + \|xv\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x u\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\lesssim \|\vec{u}\|_{L^\infty_T H^1(x^2dx)}\|\vec{u}\|_{L^\infty_T H^3} \\
&\lesssim \lambda_1\lambda_2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$I \lesssim (1+T)\|\vec{u}_0\|_{X_{3,1}} + T\lambda_1\lambda_2 + T^{\frac{3}{2}}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3. \tag{4.34}$$

Agora veja que

$$II \lesssim \|xW(t)\partial_x\vec{u}_0\|_{L^\infty_T L^2_x} + \left\| x\int_0^t W(t-\tau)\partial_x Q(\tau)d\tau \right\|_{L^\infty_T L^2_x}.$$

Usando novamente o Lema 4.3 (i), teremos

$$\begin{aligned}
II &\lesssim \|W(t)(x\partial_x\vec{u}_0)\|_{L^\infty_T L^2_x} + T\|W(t)\partial_x^3\vec{u}_0\|_{L^\infty_T L^2_x} + \left\|\int_0^t W(t-\tau)(x\partial_x Q(\tau))d\tau\right\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\quad + T\left\|\int_0^t W(t-\tau)\partial_x^3 Q(\tau)d\tau\right\|_{L^\infty_T L^2_x}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Minkowski e o Lema 4.1 (ii) chegamos que

$$\begin{aligned}
II &\lesssim \|x\partial_x\vec{u_0}(x)\|_{L^2_x} + T\|\partial_x^3\vec{u_0}(x)\|_{L^2_x} + \int_0^T \|W(t-\tau)(x\partial_x Q(\tau))\|_{L^\infty_T L^2_x} d\tau + T\left\|\partial_x^2 Q(t)\right\|_{L^1_x L^2_T} \\
&\lesssim \|\vec{u}_0\|_{H^1(x^2dx)} + T\|\vec{u_0}\|_{H^3} + \int_0^T \|x\partial_x Q(t)\|_{L^\infty_T L^2_x} dt + T\left\|\partial_x^2 Q(t)\right\|_{L^1_x L^2_T} \\
&\lesssim (1+T)\|\vec{u}_0\|_{X_{3,1}} + T\|x\partial_x Q(t)\|_{L^\infty_T L^2_x} + T\left\|\partial_x^2 Q(t)\right\|_{L^1_x L^2_T}.
\end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
\|x\partial_x Q(t)\|_{L^\infty_T L^2_x} &\lesssim \|x\partial_x u\partial_x u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|xu\partial_x^2 u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|x\partial_x v\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|xv\partial_x^3 v\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\quad + \|x\partial_x^2 uv\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|x\partial_x u\partial_x v\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|xu\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\lesssim \|x\partial_x u\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|xu\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x^2 u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|x\partial_x v\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\quad + \|xv\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x^3 v\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|xv\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x^2 u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|x\partial_x u\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x v\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\quad + \|xu\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|\partial_x^2 v\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\lesssim \|\vec{u}\|_{L^\infty_T H^1(x^2dx)}\|\vec{u}\|_{L^\infty_T H^3} \\
&\lesssim \lambda_1\lambda_2.
\end{aligned}$$

Veja também que pela conta feita para II em (4.21) do Lema 4.5, temos

$$\|\partial_x^2 Q(t)\|_{L_x^1 L_T^2} \lesssim T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3.$$

Portanto

$$\text{II} \lesssim (1+T)\|\vec{u}_0\|_{X_{3,1}} + T\lambda_1\lambda_2 + T^{\frac{3}{2}}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3. \tag{4.35}$$

Segue de (4.34) e (4.35) que

$$\lambda_2(F(\vec{u})) \lesssim (1+T)\|\vec{u}_0\|_{X_{3,1}} + T\lambda_1\lambda_2 + T^{\frac{3}{2}}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3.$$

□

4.4 Demontração do Teorema principal

Sejam $\vec{w} = (w, z)$ e $\vec{u_0}$ pertencentes a $X_T(a)$, pelos Lemas vistos temos:

$$\begin{aligned}\Gamma(F(\vec{w})) \leqslant c\eta_0(1+T) + c\Big[&T + T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2 + (1+T)^2 + T(1+T)^2 \\ &+ (T^{3/2} + T^{\frac{1}{2}})(1+T)^2\Big]\Gamma^2(\vec{w}),\end{aligned}$$

com $\Gamma(\vec{w}) = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 5} \lambda_j(\vec{w}) = \|\vec{w}\|_{X_T}$ e $\eta_0 = \|\vec{u_0}\|_{X_{3,1}}$.
Daí, com $c > 1$, temos:

$$\Gamma(F(\vec{w})) \leqslant c\eta_0(1+T) + c(1+T)^4\Gamma^2(\vec{w}).$$

Escolhemos $\delta > 0$ tal que $16c^2\delta = 1$ e como tomaremos $\eta_0 < \delta$ então $16c^2\eta_0 < 1$. Agora escolhemos a e $T > 0$ tal que $a = 2c(1+T)\eta_0$ e $4c^2(1+T)^5\eta_0 < \dfrac{1}{2}$.
Note que

$$2ac = 4c^2(1+T)\eta_0 \leqslant 4c^2(1+T)^5\eta_0 < \frac{1}{2}.$$

Escolhidos $\delta > 0$, a e $T > 0$, resulta das escolhas que:

$$\begin{aligned}\Gamma(F(\vec{w})) &\leqslant \frac{a}{2} + c(1+T)^4a^2 \\ &= \frac{a}{2} + \frac{4c^2(1+T)^5a^2}{4c(1+T)} \\ &= \frac{a}{2} + \frac{4c^2(1+T)^5a^2}{\frac{2a}{\eta_0}} \\ &= \frac{a}{2} + \frac{4c^2(1+T)^5a^2\eta_0}{2a} \\ &\leqslant \frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}.\end{aligned}$$

Logo $\vec{w} \in X_T(a) \Rightarrow F(\vec{w}) \in X_T(a)$.

Afirmação 1. $F : X_T(a) \longrightarrow X_T(a)$ *é uma contração.*

Sejam $\overrightarrow{w} = (w, z) \in X_T(a)$ e $\overrightarrow{p} = (p, q) \in X_T(a)$.

Veja que

$$\begin{aligned}
&\|F(\overrightarrow{w}) - F(\overrightarrow{p})\|_{X_T} \\
&= \left\| \int_0^t W(t-\tau)[Q(\overrightarrow{p}) - Q(\overrightarrow{w})](\tau) d\tau \right\|_{X_T} \\
&\lesssim \left\| \int_0^t W(t-\tau)(p\partial_x p - w\partial_x w)(\tau) d\tau \right\|_{X_T} + \left\| \int_0^t W(t-\tau)(q\partial_x^2 q - z\partial_x^2 z)(\tau) d\tau \right\|_{X_T} \\
&\quad + \left\| \int_0^t W(t-\tau)(\partial_x(pq) - \partial_x(wz))(\tau) d\tau \right\|_{X_T} \\
&= \left\| \int_0^t W(t-\tau)((p-w)\partial_x p + w\partial_x(p-w))(\tau) d\tau \right\|_{X_T} \\
&\quad + \left\| \int_0^t W(t-\tau)((q-z)\partial_x^2 q + z\partial_x^2(q-z))(\tau) d\tau \right\|_{X_T} \\
&\quad + \left\| \int_0^t W(t-\tau)(\partial_x(p(q-z)) - \partial_x((p-w)z))(\tau) d\tau \right\|_{X_T} \\
&\lesssim \left\| \int_0^t W(t-\tau)((p-w)\partial_x p)(\tau) d\tau \right\|_{X_T} + \left\| \int_0^t W(t-\tau)(w\partial_x(p-w))(\tau) d\tau \right\|_{X_T} \\
&\quad + \left\| \int_0^t W(t-\tau)((q-z)\partial_x^2 q)(\tau) d\tau \right\|_{X_T} + \left\| \int_0^t W(t-\tau)(z\partial_x^2(q-z))(\tau) d\tau \right\|_{X_T} \\
&\quad + \left\| \int_0^t W(t-\tau)(\partial_x(p(q-z)))(\tau) d\tau \right\|_{X_T} + \left\| \int_0^t W(t-\tau)(\partial_x((p-w)z))(\tau) d\tau \right\|_{X_T}.
\end{aligned}$$

Os ultimos termos da desigualdade acima já são conhecidos, basta trocar, por exemplo u por $(p - w)$, v por $(q - z)$. Assim com argumentos semalhantes aos usados nos Lemas 4.5 até o Lema 4.9 temos:

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(\int_0^t W(t-\tau)[Q(\overrightarrow{p}) - Q(\overrightarrow{w})](\tau) d\tau \right) \\
&\leqslant c\big[T + T^{1/2}(1+T)^2 + (1+T)^2 + T(1+T)^2 \\
&\quad + (T^{3/2} + T^{\frac{1}{2}})(1+T)^2\big]\big((\Gamma(\overrightarrow{w}) + \Gamma(\overrightarrow{p})\big)\Gamma(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{p}),
\end{aligned}$$

logo

$$\Gamma\big(F(\overrightarrow{w}) - F(\overrightarrow{p})\big) \leqslant 2ca(1+T)^4 \Gamma(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{p}),$$

daí

$$\Gamma\big(F(\overrightarrow{w}) - F(\overrightarrow{p})\big) \leqslant 4c^2 \eta_0 (1+T)^5 \Gamma(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{p}) \leqslant \frac{1}{2}\Gamma(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{p}).$$

Segue a Afirmação 1. Com isso, do Teorema 3.14 existe um único $\vec{u} \in X_T(a)$ tal que $F(\vec{u}) = \vec{u}$.

Afirmação 2. *Para* $T_0 \in (0,T)$*, existe uma vizinhança* $V_{\vec{u_0}}$ *de* $\vec{u_0} \in X_{3,1}$ *tal que a aplicação* $\vec{u_0} \longrightarrow \vec{u_t}$ *de* $V_{\vec{u_0}}$ *em* X_T *(classe definida de ((4.2)-(4.5)) é Lipschitz.*

Considere $T_0 \in (0,T)$ e $\vec{p} \in X_T(a)$, com $\overrightarrow{p(0)} = \vec{p_0}$. Assim :

$$F_{\vec{u_0}}(\vec{u}) - F_{\vec{p_0}}(\vec{p}) = W(t)(\vec{u_0} - \vec{p_0}) - \int_0^t W(t-\tau)[Q(\vec{p}) - Q(\vec{u})](\tau)d\tau.$$

Como $\vec{u}$ e $\vec{p}$ são pontos fixos temos:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{T_0}(\vec{u} - \vec{p}) &= \Gamma^{T_0}(F_{\vec{u_0}}(\vec{u}) - F_{\vec{p_0}}(\vec{p})) \\
&\leqslant c(1+T_0)\|\vec{u_0} - \vec{p_0}\|_{X_{3,1}} \\
&\quad + c(1+T_0)^4(\Gamma^{T_0}(\vec{u}) + \Gamma^{T_0}(\vec{p}))(\Gamma^{T_0}(\vec{u} - \vec{p})) \\
&\leqslant c(1+T_0)\|\vec{u_0} - \vec{p_0}\|_{X_{3,1}} + 2ac(1+T_0)^4\Gamma^{T_0}(\vec{u} - \vec{p}) \\
&\leqslant c(1+T_0)\|\vec{u_0} - \vec{p_0}\|_{X_{3,1}} + \frac{1}{2}\Gamma^{T_0}(\vec{u} - \vec{p}).
\end{aligned}$$

Daí

$$\Gamma^{T_0}(\vec{u} - \vec{p}) \leqslant c_0(1+T_0)\|\vec{u_0} - \vec{p_0}\|_{X_{3,1}} = K\|\vec{u_0} - \vec{p_0}\|_{X_{3,1}},$$

com $c_0(1+T_0) = K > 0$. Assim a aplicação $\vec{u_0} \mapsto \vec{u_t}$, de $V_{\vec{u_0}}$ em X_T é Lipschitz onde $V_{\vec{u_0}}$ é uma vizinhança de $\vec{u_0}$ dependente de T_0.

Afirmação 3. $\vec{u} \in C([0,T]; H^3(\mathbb{R}) \times H^3(\mathbb{R}))$*, com* $F(\vec{u}) = \vec{u} = (u,v)$.

Basta que estabeleçamos em $t = 0$, pois a equação (4.1) é autônoma. Veja que

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} - \vec{u_0}\|_{H^3} &\leqslant \|W(t)\vec{u_0} - \vec{u_0}\|_{H^3} + \left\|\int_0^t W(t-\tau)Q(u,v)(\tau)d\tau\right\|_{H^3} \\
&\lesssim \|W(t)\vec{u_0} - \vec{u_0}\|_{H^3} + \left\|\int_0^t W(t-\tau)Q(u,v)(\tau)d\tau\right\|_{L^\infty_T H^3}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.5 temos que:

$$\|\vec{u} - \vec{u_0}\|_{H^3} \lesssim \|W(t)\vec{u_0} - \vec{u_0}\|_{H^3} + T\lambda_1^2 + T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3 + (T^2+2T+1)\lambda_4\lambda_5.$$

Pelo Lema 4.7 temos:

$$\begin{aligned}
\lambda_5(F(\vec{u}) &\lesssim \|\partial_x^4 W(t)\vec{u_0}(x)\|_{L^\infty_x L^2_T} + T\lambda_1^2 + T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3 + T^2\lambda_4\lambda_5 + 2T\lambda_4\lambda_5 + \lambda_4\lambda_5 \\
&\leqslant c\|\partial_x^4 W(t)\vec{u_0}(x)\|_{L^\infty_x L^2_T} + ca^2(T^2+2T) + 2ca\|\partial_x^4\vec{u}\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
&\leqslant c\|\partial_x^4 W(t)\vec{u_0}(x)\|_{L^\infty_x L^2_T} + ca^2(T^2+2T) + \frac{1}{2}\|\partial_x^4\vec{u}\|_{L^\infty_x L^2_T},
\end{aligned}$$

logo

$$\lambda_5(F(\vec{u}) \lesssim \|\partial_x^4 W(t)\vec{u_0}(x)\|_{L_x^\infty L_T^2} + a^2(T^2 + 2T).$$

Temos que $H^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $H^3(\mathbb{R})$, logo dado $\epsilon > 0$ existe $\phi \in H^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\|\vec{u_o} - \phi\|_{H^3} \leqslant \epsilon$.

Logo

$$\begin{aligned}\|\partial_x^4 W(t)\vec{u_0}\|_{L_x^\infty L_T^2} &= \|\partial_x^4 W(t)\vec{u_0} - \partial_x^4 W(t)\phi + \partial_x^4 W(t)\phi\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\leqslant \|\partial_x^4 W(t)(\vec{u_0} - \phi)\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\partial_x^4 W(t)\phi\|_{L_x^\infty L_T^2}.\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1 (i) temos:

$$\begin{aligned}\|\partial_x^4 W(t)\vec{u_0}\|_{L_x^\infty L_T^2} &\lesssim \|\partial_x^3(\vec{u_0} - \phi)\|_{L_x^2} + T^{1/2}\|\partial_x^4 W(t)\phi\|_{L_x^\infty L_T^\infty} \\ &\lesssim \|\vec{u_0} - \phi\|_{H^3} + T^{1/2}\|\partial_x^4 W(t)\phi\|_{L_x^\infty L_T^\infty} \\ &\lesssim \epsilon + T^{1/2}\|\partial_x^4 W(t)\phi\|_{L_x^\infty L_T^\infty},\end{aligned}$$

logo

$$\lambda_5(\vec{u}) \lesssim a^2(T^2 + 2T) + \epsilon + T^{1/2}\|\partial_x^4 W(t)\phi\|_{L_x^\infty L_T^\infty}. \tag{4.36}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{u_0}\|_{H^3} \lesssim\ & \|W(t)\vec{u_0} - \vec{u_0}\|_{H^3} + Ta^2 + T^{1/2}(1+T)^2 a^2 \\ &+ (T^2 + 2T)a^2 + a\left(\epsilon + T^{1/2}\|\partial_x^4 W(t)\phi\|_{L_x^\infty L_T^\infty} + a^2(T^2 + 2T)\right).\end{aligned}$$

Fazendo $t \longrightarrow 0$ e $\epsilon \longrightarrow 0$, obtemos que $\|\vec{u} - \vec{u_0}\|_{H^3} \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow 0$, portanto $\vec{u} \in C([0,T]; H^3(\mathbb{R}) \times H^3(\mathbb{R}))$.

Afirmação 4. $\vec{u} \in C([0,T]; H^1(x^2dx) \times H^1(x^2dx))$.

Temos que:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{u_0}\|_{H^1(x^2dx)} &\leqslant \|W(t)\vec{u_0} - \vec{u_0}\|_{H^1(x^2dx)} + \left\|\int_0^t W(t-\tau)Q(u,v)(\tau)d\tau\right\|_{H^1(x^2dx)} \\ &\leqslant \|x(W(t)\vec{u_0} - \vec{u_0}\|_{L_x^2} + \|x\partial_x(W(t)\vec{u} - \vec{u_0})\|_{L_x^2} \\ &\quad + \left\|\int_0^t W(t-\tau)Q(u,v)(\tau)d\tau\right\|_{H^1(x^2dx)}.\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.3 (i) e pelo Lema 4.9 temos que:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}-\vec{u_0}\|_{H^1(x^2dx)} &\lesssim \|W(t)x\vec{u_0}-x\vec{u_0})\|_{L^2_x}+\|W(t)x\partial_x\vec{u_0}-x\partial_x\vec{u_0})\|_{L^2_x}\\ &\quad + T\|W(t)\partial_x^2\vec{u_0}\|_{L^2_x}T\|W(t)\partial_x^3\vec{u_0}\|_{L^2_x}+T\lambda_1\lambda_2+T^{3/2}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3.\end{aligned}$$

Logo quando $t \longrightarrow 0 \Rightarrow \|\vec{u}-\vec{u_0}\|_{H^1(x^2dx)} \longrightarrow 0$, segue que

$$\vec{u} \in C\left([0,T]; H^1(x^2dx)\times H^1(x^2dx)\right).$$

Das afirmaçõs 3 e 4, temos que $\vec{u} \in C([0,T]; X_{3,1}\times X_{3,1})$.

Afirmação 5. $\vec{u}$ *é única em* X_T.

Suponha que $\vec{w}$ seja outra solução de (4.1) definida no intervalo $[0,T_1]$, onde $T_1 < T$ com $\Gamma^{T_1}(\vec{w}) < \infty$. Suponha que $\vec{w} \in X_{T_1}(a_1)$ para algum $a_1 > a = 2c(1+T)\eta_0$, com $\vec{w} \in C([0,T]; X_{3,1}\times X_{3,1})$. Pelos Lemas (4.5) e (4.7), para $i = 1,5$ teremos

$$\begin{aligned}\lambda_i(\vec{w}) &\lesssim \|\vec{w}_0\|_{3,1}+T\lambda_1^2+T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3+(T+1)^2\lambda_4\lambda_5\\ &\lesssim \|\vec{w}_0\|_{3,1}+Ta_1^2+T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2a_1^2+(T^2+2T)a_1^2+a_1\lambda_5.\end{aligned}$$

Por (4.36), temos que $\lambda_5(\vec{w}) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow 0$, logo existe $T_2 < T_1$, tal que

$$\lambda_i(\vec{w}) \leqslant a,$$

para $t \in [0,T_2]$.

Pelo Lema 4.6 chegamos que

$$\lambda_3(\vec{w}) \lesssim \|\vec{w}_0\|_{3,1}+T\lambda_1^2+T^2\lambda_1^2+T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3+(T+1)^2\lambda_4\lambda_5.$$

Da mesma forma como acima, obtemos $T_3 < T_2$ tal que $\lambda_3(\vec{w}) \leqslant a$ para $t \in [0,T_3]$. Recorrendo também aos Lemas 4.8 e 4.9, obtemos

$$\lambda_2(\vec{w}) \lesssim (1+T)\|\vec{w}_0\|_{X_{3,1}}+T\lambda_1\lambda_2+T^{\frac{3}{2}}(1+T)^2\lambda_1\lambda_3,$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_4(F(\vec{u})) &\lesssim (1+T)\|\vec{u_0}\|_{X_{3,1}}+T\lambda_1^2+T\lambda_1\lambda_2+T^{\frac{3}{2}}(1+t)^2\lambda_3\lambda_5+(T^{\frac{3}{2}}+T^{\frac{1}{2}})(1+T)^2\lambda_1\lambda_3\\ &\quad + T(1+T)^2\lambda_4\lambda_5.\end{aligned}$$

Assim obtemos $T_4 < T_3$ suficientemente pequeno tal que $\lambda_2(\overrightarrow{w}) \leqslant a$, para $t \in [0, T_4]$ e $T_5 < T_4$ suficientemente pequeno tal que $\lambda_4(\overrightarrow{w}) \leqslant a$, para $t \in [0, T_5]$. Portanto $\Gamma^T(\overrightarrow{w}) < a$ para $T \in [0, T_5]$ e pela afirmação 1 segue que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}$ em $\mathbb{R} \times [0, T_5]$.

Agora consideramos um novo problema de Cauchy para o PVI (4.1) na bola $X_{T_5}(a_1)$, com dado inicial $\overrightarrow{u}(T_5)$, e repetimos todas as estimativas feitas nos lemas anteriores para chegar a uma contração. Em seguida argumentamos como acima para obter a unicidade em $[0.T_{10}]$ com $T_{10} > T_5$.

Reaplicando o processo um número finito de vezes, estendemos a unicidade ao intervalo $[0, T]$.

Veja que no processo acima descrito a sequência $T_5 = T_5(\|\overrightarrow{u_0}\|_{X_{3,1}})$, $T_{10} = T_{10}(\|\overrightarrow{u}_{T_5}\|_{X_{3,1}}) \cdots$, $T_{5k} = T_{5k}(\|\overrightarrow{u}_{T_{5(k-1)}}\|_{X_{3,1}})$ com $k \in \mathbb{N}$ não acumula em $T^* < T$, pois se ocorresse não teríamos $T_{5k}(\|\overrightarrow{u}_{T_{5(k-1)}}\|_{X_{3,1}}) \longrightarrow \infty$ quando $\|\overrightarrow{u}_{T_{5(k-1)}}\|_{X_{3,1}} \longrightarrow 0$, o que é absurdo visto que os valores de T que realizam uma contração dependem inversamente da norma do dado inicial.

Com as afirmações 1, 2, 3, 4 e 5 o Teorema 4.1 está provado para $s = 3$.

Para $s \geqslant 4$ inteiro, procedemos de maneira análoga ao feito acima, bastando redefinir

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\overrightarrow{u}) &= \|\overrightarrow{u}\|_{L_T^\infty H^s},\\
\lambda_5(\overrightarrow{u}) &= \|\partial_x^{s+1}\overrightarrow{u}\|_{L_x^\infty L_T^2},
\end{aligned}$$

e observar que usando o Lema 4.1 (ii), a desigualdade de Hölder e Minkowski teremos

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_x^s \int_0^t W(t-\tau)(\nu\partial_x^2\nu)d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\\
&\lesssim \sum_{j=1}^{s} \left\|\partial_x \int_0^t W(t-\tau)(\partial_x^{s-j}\nu\partial_x^{j+1}\nu)d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\\
&\lesssim T(\|\partial_x^{s-1}\nu\partial_x^2\nu\|_{L_T^\infty H^1} + \|\partial_x^{s-2}\nu\partial_x^3\nu\|_{L_T^\infty H^1} + \cdots + \|\partial_x^2\nu\partial_x^{s-1}\nu\|_{L_T^\infty H^1})\\
&\quad + \left\|\partial_x \int_0^t W(t-\tau)(\partial_x\nu\partial_x^s\nu)d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left\|\partial_x \int_0^t W(t-\tau)(\nu\partial_x^{s+1}\nu)d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\\
&\lesssim T\sum_{j=1}^{s-2} \|\partial_x^{s-j}\nu\|_{L_T^\infty H^1}\|\partial_x^{j+1}\nu\|_{L_T^\infty H^1} + T\|\partial_x^2\nu\partial_x^s\nu\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left\|\partial_x \int_0^t W(t-\tau)(\partial_x\nu\partial_x^{s+1}\nu)d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\\
&\quad + \|\nu\partial_x^{s+1}\nu\|_{L_x^1 L_T^2}\\
&\lesssim T(\|\nu\|_{L_T^\infty H^3}^2 + \|\partial_x^2\nu\|_{L_T^\infty L_x^\infty}\|\partial_x^s\nu\|_{L_T^\infty L_x^2}) + T^{\frac{1}{2}}\|\partial_x\nu\partial_x^{s+1}\nu\|_{L_{x,T}^2} + \|\nu\|_{L_x^1 L_T^\infty}\|\partial_x^{s+1}\nu\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&\lesssim T\|\nu\|_{L_T^\infty H^3}^2 + T^{\frac{1}{2}}\|\partial_x\nu\|_{L_x^2 L_T^\infty}\|\partial_x^{s+1}\nu\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\nu\|_{L_x^1 L_T^\infty}\|\partial_x^{s+1}\nu\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&\lesssim T\lambda^2 + T^{\frac{1}{2}}(1+T)^2\lambda_3\lambda_5 + (1+T)^2\lambda_4\lambda_5,
\end{aligned}$$

e que usando novamente a desigualdade de Hölder, desigualdade de Minkowski e os Lemas 4.2, 4.1 (i) chegamos que

$$
\begin{aligned}
&\left\|\partial_x^{s+1}\int_0^t W(t-\tau)(v\partial_x^2 v)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&\lesssim \sum_{j=0}^{s-1}\left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)(\partial_x^{s-j}v\partial_x^{j+2}v)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}+\left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)(v\partial_x^{s+1}v)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&\lesssim \sum_{j=0}^{s-1}\left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)(\partial_x^{s-j}v\partial_x^{j+2}v)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}+\|v\partial_x^{s+1}v\|_{L_x^1L_T^2}\\
&\lesssim \sum_{j=0}^{s-1}\int_0^T\|\partial_x^{s-j}v\partial_x^{j+2}v\|_{L_x^2}dt+(1+T)^2\lambda_4\lambda_5\\
&\lesssim T\|\partial_x^s v\partial_x^2 v\|_{L_x^2}+T\sum_{j=1}^{s-2}\|\partial_x^{s-j}v\partial_x^{j+2}v\|_{L_x^2}+T^{\frac12}\|\partial_x v\partial_x^{s+1}v\|_{L_{x,T}^2}+(1+T)^2\lambda_4\lambda_5\\
&\lesssim T^{\frac12}\|\partial_x v\|_{L_x^2L_T^\infty}\|\partial_x^{s+1}v\|_{L_x^\infty L_T^2}T\lambda^2+(1+T)^2\lambda_4\lambda_5\\
&\lesssim T\lambda^2+T^{\frac12}(1+T)^2\lambda_3\lambda_5+(1+T)^2\lambda_4\lambda_5,
\end{aligned}
$$

e repetir as estimativas feitas nos Lemas 4.5 até 4.9.

□

Corolário 4.2. *Suponha válida as hipóteses do teorema 4.1. Então existe uma vizinhança* V_0 *de* $\overrightarrow{u_0}\in H^s(\mathbb{R})\cap H^1(x^2dx))$, *com* $s\geqslant 3$ *inteiro, tal que a aplicação dado inicial fluxo de* V_0 *em* X_T *é suave.*

Demonstração. Defina $G: V\times X_T\longrightarrow X_T$, pondo

$$
G(\overrightarrow{\varphi},\overrightarrow{w})(t)=\overrightarrow{w}(t)-\left(W(t)\overrightarrow{\varphi}-\int_0^t W(t-\tau)Q(w,z)(\tau)d\tau\right),
$$

onde $\overrightarrow{w}=(w,z)$.

Observe que

$$
\Gamma^T(G(\overrightarrow{\varphi},\overrightarrow{w}))\leqslant\Gamma^T(\overrightarrow{w})+\Gamma^T(F(\overrightarrow{w}))<\infty.
$$

Daí G esta bem definida e pelo Teorema 4.1 temos $G(\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{u}))=0$.

Veja que

$$
D_{\overrightarrow{u}}G\left(\overrightarrow{\varphi},\overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{w}(t)=\overrightarrow{w}(t)+\int_0^t W(t-\tau)D_{\overrightarrow{u}}Q(\overrightarrow{u})\overrightarrow{w}(\tau)d\tau.
$$

Temos que:

$$D_{\overrightarrow{u}}Q(u,v)(w,z) = \lim_{t\to 0}\frac{Q(u+tw, v+tz) - Q(u,v)}{t}.$$

Com uma conta simples tem-se:

$$D_{\overrightarrow{u}}Q(u,v)(w,z) = (6(u\partial_x w + w\partial_x u) - 3(v\partial_x^2 z + z\partial_x^2 v), 3\partial_x(uz + vw)).$$

Assim

$$\begin{aligned}
&D_{\overrightarrow{u}}G(\overrightarrow{\phi}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{w}(t)\\
&= \overrightarrow{w}(t) + \int_0^t W(t-\tau)(6(u\partial_x w + w\partial_x u) - 3(v\partial_x^2 z + z\partial_x^2 v), 3\partial_x(uz+vw))(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Analogamente podemos derivar G com relação a $\overrightarrow{u} = (u,v)$, k vezes, portanto temos que G é suave.

Afirmação 6. $D_{\overrightarrow{u}}G(\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{u}) : X_T \longrightarrow X_T$ *é inversivel.*

Observe que

$$(I - D_{\overrightarrow{u}}G)\overrightarrow{w} = -\int_0^t W(t-\tau)D_{\overrightarrow{u}}Q(w,z)(\tau)d\tau,$$

logo

$$\begin{aligned}
\lambda_i((I - D_{\overrightarrow{u}}G)\overrightarrow{w}) &\lesssim \lambda_i\left(\int_0^t W(t-\tau)D_{\overrightarrow{u}}Q(w,z)(\tau)d\tau\right)\\
&\lesssim \lambda_i\left(\int_0^t W(t-\tau)u\partial_x w(\tau)d\tau\right) + \lambda_i\left(\int_0^t W(t-\tau)w\partial_x u(\tau)d\tau\right)\\
&\quad + \lambda_i\left(\int_0^t W(t-\tau)v\partial_x^2 z(\tau)d\tau\right) + \lambda_i\left(\int_0^t W(t-\tau)z\partial_x^2 v(\tau)d\tau\right)\\
&\quad + \lambda_i\left(\int_0^t W(t-\tau)\partial_x(uz)(\tau)d\tau\right) + \lambda_i\left(\int_0^t W(t-\tau)\partial_x(vw)(\tau)d\tau\right),
\end{aligned}$$

com $1 \leqslant j \leqslant 5$. Procedendo como nos lemas anteriores, temos:

$$\begin{aligned}
\Gamma^T\left[(I - D_{\overrightarrow{u}}G)\overrightarrow{w}\right] &\leqslant c1 + T)^4\Gamma^T(\overrightarrow{u})\Gamma^T(\overrightarrow{w})\\
&\leqslant 2ca(1+T)^5\Gamma^T(\overrightarrow{w})\\
&\leqslant \frac{1}{2}\Gamma^T(\overrightarrow{w}),
\end{aligned}$$

com $\overrightarrow{w} \in X_T(a)$. Podemos tomar $a < 1$, daí

$$\Gamma^T\left[(I - D_{\overrightarrow{u}}G)\overrightarrow{w}\right] < 1.$$

Do resultados de análise funcional para operadores lineares limitados visto na proposição 6 , temos que

$$\left(I-(I-D_{\overrightarrow{u}}G)\right)=D_{\overrightarrow{u}}G\in B(X_T,X_T)$$

é invertível. Agora aplicando o Teorema da Função Implícita (3.13), existe uma vizinhança $V_0\subset V$ de $\overrightarrow{u_0}\in H^s(\mathbb{R})\cap H^1(x^2dx)\times H^s(\mathbb{R})\cap H^1(x^2dx)$ com $s\leqslant 3$ inteiro e uma aplicação $g:V_0\longrightarrow X_T$ tal que $G\left(\overrightarrow{w_0},g(\overrightarrow{w_0})\right)=0$ para todo $\overrightarrow{w}_0\in V_0$. Logo

$$g(\overrightarrow{w_0})=W(t)\overrightarrow{w_0}-\int_0^t W(t-\tau)Q(g(\overrightarrow{w_0}))(\tau)d\tau=\overrightarrow{w}(t).$$

Daí g é solução de (4.1) com dado inicíal $\overrightarrow{w_0}\in V_0$ e pelo Teorema da Função Implícita g é suave. $\square$

Capítulo 5

Má colocação

Aqui provaremos a má colocação para o super-KdV (4.1) no espaço de Sobolev $X^s = H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para $s \in \mathbb{R}$, se exigirmos que a aplicação dado inicial-fluxo seja de classe C^2 no sentido de Fréchet. Para tanto usaremos ideias contidas em [2] e [29].

Vamos provar os seguintes resultados:

Teorema 5.1. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e T um número real positivo. Então não existe um espaço X_T tal que*

$$\|u\|_{C([0,T],H^s)} \lesssim \|u\|_{X_T}, \quad \forall u \in X_T \tag{5.1}$$

e tal que

$$\|W(t)\overrightarrow{u_0}\|_{X_T} \lesssim \|\overrightarrow{u_0}\|_{H^s}, \quad \forall \overrightarrow{u_0} \in X^s \tag{5.2}$$

e

$$\left\| \int_0^t W(t-\tau)Q(u,v)(\tau)d\tau \right\|_{X_T} \lesssim \|u\|_{X_T}\|v\|_{X_T}, \quad \forall u,v \in X_T. \tag{5.3}$$

Teorema 5.2. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Então não existe $T > 0$ tal que (4.1) admita uma única solução definida no intervalo $[0,T]$ e tal que a aplicação dado inicial-fluxo $\overrightarrow{u_0} \mapsto \overrightarrow{u}(t)$ de X_s em X_s seja de classe C^2 na origem.*

5.1 Demonstração do Teorema 5.1

Suponha que existe um espaço X_T satisfazendo (5.1), (5.2) e (5.3). Defina ϕ e ψ pondo

$$\widehat{\phi}(\xi) = \alpha^{-1/2}\chi_{I_1}(\xi) \tag{5.4}$$

$$\widehat{\psi}(\xi) = \alpha^{-1/2}N^{-s}\chi_{I_2}(\xi), \tag{5.5}$$

onde $N \gg 1$, $0 < \alpha \ll 1$, $I_1 = [\alpha/2, \alpha]$ e $I_2 = [N, N+\alpha]$.

Veja que $\phi, \psi \in H^s(\mathbb{R})$ e que

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{H^s} &\sim \|\phi\|_{L^2} + \|D^s\phi\|_{L^2} \\
&\sim \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^s |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\sim \left(\alpha^{-1}\int_{\alpha/2}^{\alpha} 1 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\alpha^{-1}\int_{\alpha/2}^{\alpha} |\xi|^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\sim \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\alpha^{-1}\frac{\xi^{s+1}}{s+1}\Bigg|_{\alpha/2}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{2}} + \left[\frac{\alpha^s}{s+1} - \frac{\alpha^s}{2^s(s+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\sim 1.
\end{aligned}$$

Da mesma forma obtemos $\|\psi\|_{H^s} \sim 1$, portanto

$$\|\phi\|_{H^s} \sim \|\psi\|_{H^s} \sim 1.$$

Para verificar (5.3) precisamos realizar as estimativas semelhantes as obtidas nos Lemas anteriores nos termos de (4.1). Em particular, teremos que:

$$\left\|\int_0^t W(t-\tau) u \partial_x^2 v d\tau\right\|_{X_T} \lesssim \|u\|_{X_T}\|v\|_{X_T}.$$

Assim, tomando $u(t) = W(t)\phi$ e $v(t) = W(t)\psi$, com ϕ, ψ como em (5.4) e (5.5), supondo que (5.1), (5.2) e (5.3) ocorrem, teremos que:

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t W(t-\tau)(W(\tau)\phi)(\partial_x^2 W(\tau)\psi) d\tau\right\|_{X_T} &\lesssim \|W(t)\phi\|_{X_T}\|W(t)\psi\|_{X_T} \\
&\lesssim \|\phi\|_{H^s}\|\psi\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Agora veja que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t W(t-\tau)(W(\tau)\phi)(\partial_x^2 W(\tau)\psi) d\tau\right)^{\wedge}(\xi) \\
&= \int_0^t e^{i(t-\tau)\xi^3}\left(e^{i\tau\xi^3}\widehat{\phi}(\xi)\right) * \left(e^{i\tau\xi^3}(i\xi_1)^2\widehat{\psi}(\xi)\right) d\tau \\
&= \int_0^t e^{i(t-\tau)\xi^3}\int_{\mathbb{R}} e^{i\tau(\xi-\xi_1)^3}\widehat{\phi}(\xi-\xi_1)e^{i\tau\xi_1^3}(i\xi_1)^2\widehat{\psi}(\xi_1) d\xi_1 d\tau \\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\xi^3}(i\xi_1)^2 e^{i\tau(\xi^3-3\xi^2\xi_1+3\xi\xi_1^2-\xi_1^3)}e^{i\tau\xi_1^3}\widehat{\phi}(\xi-\xi_1)\widehat{\psi}(\xi_1) d\xi_1 d\tau.
\end{aligned}$$

Portanto, usando Fubini, teremos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t W(t-\tau)(W(t)\phi)(\partial_x^2 W(t)\psi)d\tau\right)^{\wedge}(\xi)\\
&=\int_{\mathbb{R}}\int_0^t e^{it\xi^3}(i\xi_1)^2 e^{-3i\tau\xi\xi_1(\xi-\xi_1)}\widehat{\phi}(\xi-\xi_1)\widehat{\psi}(\xi_1)d\xi_1 d\tau\\
&=\int_{\mathbb{R}} e^{it\xi^3}(i\xi_1)^2\widehat{\phi}(\xi-\xi_1)\widehat{\psi}(\xi_1)\left(\int_0^t e^{-3i\tau\xi\xi_1(\xi-\xi_1)}d\tau\right)d\xi_1\\
&=\int_{\mathbb{R}} e^{it\xi^3}(i\xi_1)^2\widehat{\phi}(\xi-\xi_1)\widehat{\psi}(\xi_1)\left(\frac{e^{-3it\xi\xi_1(\xi-\xi_1)}}{-3i\xi\xi_1(\xi-\xi_1)}\Bigg|_0^t\right)d\xi_1\\
&\sim\frac{e^{it\xi^3}}{\alpha N^s}\int_{\mathcal{A}}\xi_1^2\left(\frac{e^{-3it\xi\xi_1(\xi-\xi_1)}-1}{3\xi\xi_1(\xi-\xi_1)}\right)d\xi_1, \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

com

$$\mathcal{A}=\begin{cases}\xi_1\in I_2\\ \xi-\xi_1\in I_1.\end{cases}$$

Então $N\leqslant\xi_1\leqslant N+\alpha$ e $\dfrac{\alpha}{2}\leqslant\xi-\xi_1\leqslant\alpha$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\frac{\alpha}{2}+\xi_1\leqslant\xi\leqslant\alpha+\xi_1\\
&\Rightarrow N+\frac{\alpha}{2}\leqslant\xi\leqslant N+2\alpha \qquad (5.7)\\
&\Rightarrow N^2+N\frac{\alpha}{2}\leqslant\xi\xi_1\leqslant N^2+3\alpha N+2\alpha^2\\
&\Rightarrow N^2\frac{\alpha}{2}+N\frac{\alpha^2}{4}\leqslant\xi\xi_1(\xi-\xi_1)\leqslant N^2\alpha+3\alpha^2 N+2\alpha^3.
\end{aligned}$$

Como

$$N^2\frac{\alpha}{2}\leqslant N^2\frac{\alpha}{2}+N\frac{\alpha^2}{4}$$

e

$$N^2\alpha+3\alpha^2N+2\alpha^3\leqslant N^2\alpha+3\alpha N^2+2N^2\alpha,$$

pois $0<\alpha\ll 1$, segue que

$$|\xi\xi_1(\xi-\xi_1)|\sim N^2\alpha.$$

De (5.7) temos $|\xi|\sim N$, tome $\alpha=N^{-2-\epsilon}$. Assim $|3i\xi\xi_1(\xi-\xi_1)|\sim N^{-\epsilon}$, daí pondo $P(\xi,\xi_1)=3\xi\xi_1(\xi-\xi_1)$ obtemos:

$$|P(\xi,\xi_1)|\sim N^{-\epsilon}\ll 1.$$

Temos:

$$\frac{e^{itP(\xi,\xi_1)}-1}{P(\xi,\xi_1)}=\frac{\cos(tP(\xi,\xi_1)-1}{P(\xi,\xi_1)}+\frac{i\operatorname{sen}(tP(\xi,\xi_1)}{P(\xi,\xi_1)}.$$

Como $\lim_{x\to 0}\frac{t\operatorname{sen}(tx)}{tx}=t$ e $\lim_{x\to 0}\frac{t(\cos(tx)-1)}{tx}=0$ e observando que $|P(\xi,\xi_1)|\ll 1$ obtemos que:

$$\frac{e^{itP(\xi,\xi_1)}-1}{P(\xi,\xi_1)}=tc+o(N^{-\epsilon}), \tag{5.8}$$

onde $c\in\mathbb{C}$ é uma constante complexa.

Agora, usando (5.6) e (5.8), teremos

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t W(t-\tau)(W(t)\phi)(\partial_x^2W(t)\psi)d\tau\right\|_{H^s}\\
&=\left\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\left(\int_0^t W(t-\tau)(W(t)\phi)(\partial_x^2W(t)\psi)d\tau\right)^{\wedge}(\xi)\right\|_{L^2}\\
&\sim\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s\left|\frac{e^{it\xi^3}}{\alpha N^s}\int_{\mathcal{A}}\xi_1^2\left(\frac{e^{-3it\xi\xi_1(\xi-\xi_1)}-1}{3i\xi\xi_1(\xi-\xi_1)}\right)d\xi_1\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\gtrsim\frac{N^2}{\alpha N^s}\left(\int_{\mathcal{A}}(1+|\xi|^2)^s\left[t\xi_1+\xi_1 o(N^{-\epsilon})\right]^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\gtrsim\frac{N^2}{\alpha N^s}\left[\int_{\mathcal{A}}N^{2s}t^2\alpha^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\gtrsim\frac{N^2}{\alpha N^s}(N^s\alpha)N^{1/2}t\\
&\gtrsim N^2\alpha N^{1/2}\\
&=N^{1/2-\epsilon}.
\end{aligned}$$

Daí obtemos

$$\left\|\int_0^t W(t-\tau)(W(t)\phi)(\partial_x^2W(t)\psi)d\tau\right\|_{H^s}\gtrsim N^{1/2-\epsilon}\gg 1\gtrsim\|\phi\|_{H^s}\|\psi\|_{H^s}. \tag{5.9}$$

Uma contradição. Portanto não existe X_T tal que se verifique (5.1), (5.2) e (5.3).

□

5.2 Demonstração do Teorema 5.2

Suponha que (4.1) admita uma única solução e a aplicação dado inicial-fluxo

$$\begin{aligned}
S_t : X_s &\longrightarrow X_s\\
(\phi,\psi) &\longrightarrow (u(t),v(t))
\end{aligned}$$

seja de classe C^2 na origem, para $s \in \mathbb{R}$.

Considere o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u - 3v\partial_x^2 v = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + 3\partial_x(uv) = 0 \\ u(x,0) = \mu\phi(x), v(x,0) = \mu\psi(x) \end{cases} \tag{5.10}$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{\varphi} = (\phi, \psi) \in X_s$ para $s \in \mathbb{R}$.

Assim existe $(u(\mu,x,t), v(\mu,x,t))$ solução de (5.10) e a aplicação

$$S_{t\mu} : (\mu\phi, \mu\psi) \longrightarrow (u(\mu,t,x), v(\mu,t,x)) = \overrightarrow{u}(\mu,t,x)$$

de X_s em X_s é C^2-Frechet deferenciavel na origem.

Com a formulação integral de (5.10) obtemos:

$$u(\mu,t,x) = \mu W(t)\phi(x) - 3\int_0^t W(t-\tau)[2u\partial_x u - v\partial_x^2 v](\mu,\tau,x)d\tau$$
$$v(\mu,t,x) = \mu W(t)\psi(x) - 3\int_0^t W(t-\tau)[\partial_x(uv)](\mu,\tau,x)d\tau.$$

Com isso temos:

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = W(t)\phi(x) - 3\int_0^t W(t-\tau)[2u_x u_\mu + 2uu_{x\mu} - v_\mu v_{xx} - vv_{xx\mu}]d\tau$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} = -3\int_0^t W(t-\tau)[2u_x u_{\mu\mu} + 4u_\mu u_{\mu x} + 2uu_{x\mu\mu} - 2v_{\mu\mu}v_{xx} - 2v_\mu v_{xx\mu}]d\tau.$$

Também temos:

$$\frac{\partial v}{\partial \mu} = W(t)\psi(x) - 3\int_0^t W(t-\tau)[u_{x\mu}v + u_x v_\mu + u_\mu v_x + uv_{x\mu}]d\tau$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} = -3\int_0^t W(t-\tau)[u_{x\mu\mu}v + 2u_{x\mu}v_\mu + u_x v_{\mu\mu} + u_{\mu\mu}v_x + 2u_\mu v_{x\mu} + uv_{x\mu\mu}]d\tau.$$

Como $u(0,t,0) = 0 \cdot \phi(x) = 0$ e $v(0,x,0) = 0 \cdot \psi(x) = 0$ segue da unicidade de solução que $u(0,x,t) = v(0,x,t) = 0$. Logo

$$\frac{\partial u}{\partial \mu}(0,x,t) = W(t)\phi(x),$$
$$\frac{\partial v}{\partial \mu}(0,x,t) = W(t)\psi(x),$$

daí obtemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2}(0,x,t) = -6\int_0^t W(t-\tau)[2(W(\tau)\phi)\partial_x(W(\tau)\phi) - (W(\tau)\psi)\partial_x^2(W(\tau)\psi)]d\tau$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2}(0,x,t) = -6\int_0^t W(t-\tau)[\partial_x((W(\tau)\phi)(W(\tau)\psi))]d\tau.$$

Portanto

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial \mu^2}(0,t,x) = 2\int_0^t W(t-\tau)[Q(W(t)\phi, W(t)\psi)]d\tau.$$

Assim assumindo que a aplicação dado-fluxo é de classe C^2 de X_s em X_s teremos:

$$\left\| \int_0^t W(t-\tau)[Q(W(t)\phi, W(t)\psi)]d\tau \right\|_{H^s} \lesssim \|\phi\|_{H^s}\|\psi\|_{H^s}.$$

O que contraria o Teorema 5.1. Por contradição o Teorema 5.2 esta provado.

□

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A., Sobolev Spaces, New York-San Francisco-London, AP, 1975.

[2] BARROS, A. S., O Problema de Cauchy para a equação super Korteweg-de Vries, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, 2004.

[3] BARROS, A. S., Local well-posedness for super Korteweg-de Vries equations, Nonlinear Analysis, Vol.68, Number 6, 2008.

[4] BOURGAIN, J., Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations, Geometric and Funct. Anal., Vol. 3, p. 107-156, 1993.

[5] BOURGAIN, J., On the Cauchy problem for the Kadomstev-Petviashvili equation, Geometric and Funct. Anal., Vol. 4, p. 315-341, 1993.

[6] CARSTEA, A. S.; RAMANI, A.; GRAMMATICOS, B., Constructing the soliton solutions for the N = 1 supersymmetric KdV hierarchy, Nonlinearity, vol. 14, P.1419-1423, 2001.

[7] CHRIST, M.; KISELEV, A., Maximal functions associated to filtrations, J. Func. Anal. 406-425.179 (2001).

[8] DRESDEN, M.; CHEN, S., Solitons, Gauge Theories and the "Great Einstein Theorem". Physica Vol. 83A, p.01-17, 1976.

[9] FOLLAND, G. B., Real analysis, Modern Techniques and their Applications, John Wiley & Sons , New York, 1994.

[10] GARDNER, C. S.; GRENNE, J. M.; KRUSKAL. M. D.; MIURA, R. M.; Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Physical Rewiew Letters, Vol.19, p. 1095-1097, 1967.

[11] HIROTA, R.; SATSUMA, J., Soliton solutions of coupled Korteweg-de Vries equation, Physics Letters, Vol. 85A, N. 8, 9, p. 407-408, 1981.

[12] IÓRIO, R.; IÓRIO, V. M., Fourier Analysis and Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2001.

[13] KATO, T., Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, p.25-70, 1975.

[14] KATO, T., On the Korteweg-de Vries equations, Manuscripta Math., vol. 28, p. 89-99, 1979.

[15] KATO, T., On the Cauchy Problem for the (generalized) Korteweg-de Vries Equation, Advances in Mathematics Supplementary Studies, Studies in Applied Math., vol. 8, p. 93-128, 1983.

[16] KENIG, C. E.; PONCE, G.; VEGA, L., Small solutions to nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 10, no 3, p.255-288, 1993.

[17] KENIG, C. E., PONCE, G.,VEGA, L., Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via the Contraction Principle, Communications on Pure and applied Mathematics, Vol. 46, p. 527-620, 1993.

[18] KENIG, C. E., PONCE, G.,VEGA, L., Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation, J. Amer.Math. Soe., voL 4, p. 323-347, 1991.

[19] KENIG, C. E.; PONSE, G.; VEGA, L., Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations, Indiana Univ. Math. J., Vol. 40, p. 33-69, 1991.

[20] KUPERSHMIDT, B. A., The Super Korteweg-de Vries equation: An integrable system, Physics Letters, Vol. 102A, N. 5, 6, p. 213-215, 1984.

[21] LANG, S., Analysis II, Columbia University, 1969.

[22] LIMA, E. L., Espaços Métricos, Rio de Janeiro, Impa-CNPq, 1977.

[23] LINARES, F.; PONDE, G., Introduction to Nonlinear Dispersive Equations, Springer, New York, 2009.

[24] MOLINET, L.; RIBAUD, F., Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with arbitrary initial data, Internation Mathematics Research Notices, No 70, 2004.

[25] MOLINET, L.; RIBAUD, F., Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with small initial data, J. Math. Pures Appl. 83, p 277-311, 2004.

[26] MOURA, R. P.; PASTOR, A., On the Cauchy problem for the super Korteweg-de Vries system, Nonlinear Analysis, V. 76, p. 229-243, 2013.

[27] MOURA, R. P., O problema de Cauchy para a equação de Schrödinger não-linear não-local, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, 2005.

[28] MUSCALU, C.; SCHLAG, W., Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Vol I, Cambridge, 2013.

[29] PILOD, D., The Cauchy problem for the dispersive Kuramoto-Velarde equation, Tese de Doutorado apresentada no IMPA, Rio de Janeiro, Junho de 2006.