Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Ismael Carlos Pereira de Carvalho

Um estudo sobre a C^i-suficiência em $J^r_{(n,p)}$

Teresina - 2014

Ismael Carlos Pereira de Carvalho

Dissertação de Mestrado:

Um estudo sobre a C^i-suficiência em $J^r_{(n,p)}$

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior

Teresina - 2014

CARVALHO, Ismael Carlos Pereira de.

xxxxx Um estudo sobre a C^i-suficiência em $J^r_{(n,p)}$.

Ismael Carlos Pereira de Carvalho – Teresina: 2014.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior.

1. Teoria de singularidade

CDD 516.36

Sumário

Agradecimentos **2**

Resumo **3**

Abstract **4**

Introdução **5**

1 Preliminares **7**

1.1 Anéis 7

1.2 Grupos 10

1.2.1 Subgrupos 11

1.3 Módulos 12

1.4 Polinômio Quase-Homogêneo 16

1.5 Determinante de Gram 18

2 Introdução à Teoria de Singularidades **22**

2.1 Germes de conjuntos 22

2.2 Germes de aplicações suaves 23

3 Relações de Equivalência em Germes e Jatos **30**

3.1 Ação de Grupo 30

3.2 Equivalências 36

3.2.1 A $\mathcal{R}$-Equivalência 36

3.2.2 A $\mathcal{L}$-Equivalência 38

3.2.3 A $\mathcal{A}$-Equivalência 38

3.3 Grupos e Equivalências 41
3.3.1 Grupo de Lie 41
3.3.2 O grupo $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$-Equivalência 45
3.3.3 O grupo $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}$-Equivalência (Grupo de Contato) 47
3.4 Espaço Tangente à $\mathcal{R}$-órbita 53
3.5 Germes finitamente Determinados 58

4 A C^i-suficiência em $J^r_{(n,p)}$ 68

4.1 Resultados Preliminares para o Teorema Principal 68
4.2 Condições necessárias para a C^i-suficiência em $J^r_{(n,p)}$ 76

Dedico este trabalho ao meu irmão Rangel Pereira de Carvalho, fonte inesgotável de incentivo e força.

Agradecimentos

Agradeço a Deus acima de tudo, por ter me dado saúde, coragem, capacidade e persistência para que eu possa lutar e alcançar meus objetivos.

A minha mãe Maria Vendavalda, meu irmão Rangel e de um modo geral a toda a minha família, por me motivar e ajudarem a concluir mais uma etapa e sempre me apoiando em todas as minhas decisões.

A minha avó Maria de Lourdes, avó Teresa Azevedo, avô José Pedro dos Santos (DEDÉ). Em especial ao meu avô Sebastião Mourão (in memorium, † 08/09/2014).

Ao professor e orientador Dr. Humberto que contribuiu muito na minha formação acadêmica, me levando ao crescimento em meus conhecimento que me levaram a execução e conclusão deste trabalho.

A professora Liane Mendes (UFPI) e ao professor Alexandre César (UFC), por terem aceito o convite de participar da banca que avaliará este trabalho.

A Segunda Igrejas Batista de Teresina-PI e a Primeira Igreja Batista de Carolina-MA. Agradeço pelas orações e pelos momentos bons que pude usufruir. Em especial, ao meus amigos que conquistei no pequeno grupo (PG) da SIBTHE.

A minha namorada Julianne Pereira, uma pessoa que entrou na minha vida. obrigado pelos momentos bons e pela atenção.

A todos os professores do Colegiada do curso de Matemática da Universidade Federal de Tocantins e Universidade Federal do Piauí que contribuíram para o meu desenvolvimento acadêmico.

Agradeço por ter adquirido muitos amigos em ambas Universidades, por estarmos unidos em situações boas e ruim, às vezes, passávamos altas horas da noite ou finais de semana fazendo trabalhos e estudando para as provas.

Agradeço também ao CNPq e Capes, pelo apoio financeiro e incentivo à ciência.

Resumo

Neste trabalho será apresentado no primeiro capítulo Noções Preliminares de Anéis, Grupo, Módulos, Polinômio Quase-homogêneo e Determinante de Gram e no segundo capítulo uma introdução a Teoria de Singularidade. No terceiro capítulo mostraremos cinco tipos de equivalências, uma delas é a $\mathcal{R}$-equivalência, onde existe um germe h de difeomorfismo de classe C^∞ tal que $f = g \circ h$, onde $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$. No quarto e último capítulo faremos um estudo sobre a C^i-suficiência em $J^r_{(n,p)}$ onde $i \leq r$, ou seja, mostraremos que existe um germe h de difeomorfismo de classe C^i, $i \in \mathbb{N}$ (homomorfismo se $i = 0$) tal que vale a igualdade $((z + \theta) \circ h)(x) = z(x)$ quando $j^r(\theta) \equiv 0$.

Abstract

In this work will be presented in the first chapter Preliminary Notions Rings, Group, Modules, Polynomial Quasi-homogeneous and Gram determinant and the second chapter an introduction to Singularity Theory. In the third chapter shows five types of equivalence, one of them is $\mathcal{R}$-equivalence, where there is a germ h of diffeomorphism of class C^∞ such that $f = g \circ h$, where $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$. In the fourth and final chapter we will make a study on the C^i sufficiency in $J^r_{(n,p)}$ where $i \leq r$, ie, could there be a germ h of diffeomorphism of class C^i, $i \in \mathbb{N}$ (homomorphism if $i = 0$) such that worth the equal $((z+\theta) \circ h)(x) = z(x)$ when $j^r(\theta) \equiv 0$.

Introdução

Seja X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto. O conjunto $P(X)$ é formado por todos os subconjuntos de X e defina uma relação de equivalência $A \underset{X}{\sim} B \Longleftrightarrow A \cap U = B \cap U$ para alguma vizinhança U de $x \in X$. A classe de equivalência da relação $\underset{X}{\sim}$ é chamado de germe do subconjunto X no ponto x.

Seja Y um conjunto e considere agora o conjunto formado pelos pares $M = \{(U, f)\}$, onde U é uma vizinhança de x em X e f é uma função $f : U \longrightarrow Y$. Introduziremos a relação de equivalência em $M : (U_1, f_1) \underset{X}{\approx} (U_2, f_2)$ se, e somente se, $f\mid_{U_0} = f\mid_{U_0}$ para alguma vizinhança U_0 de x com $U_0 \subset U_1 \cap U_2$. A classe de equivalência da relação $\underset{X}{\approx}$ é chamada de germe de equivalência de (U, f). A mais apurada notação é f_x ou (f, x) e estas serão usadas quando necessário.

Quando $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^p$ iremos considerar apenas as aplicações suaves $C^\infty, f : U \longrightarrow Y$, onde U é uma vizinhança no ponto $x \in X$. O conjunto formado por todos esses germes será denotado por ${}_x\mathcal{E}_{n,p}$. Quando $x = 0$, escrevemos $\mathcal{E}_{n,p}$ para tal conjunto. Além disso, quando $p = 1$, isto é, quando estivermos trabalhando com funções, nós usaremos a notação $\mathcal{E}_n$. Veremos também que $\mathcal{E}_n$ é um anel local cujo o único ideal maximal é $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(0) = 0\}$.

A k-ésima potência do ideal $\mathcal{M}_n$ é gerada por todos os monômios de grau k, isto é, $\mathcal{M}_n^k = \{x^{|a|} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mid |a| = a_1 + \cdots + a_n = k\}$. Além disso $\mathcal{M}_n^k = \{f \in \mathcal{E}_n \mid \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x^a}(0) = 0, \forall 0 \leq |a| < k\}$.

Um ideal $I \subset \mathcal{E}_n$ tem condimensão finita, isto é, $dim \frac{\mathcal{E}_n}{I} < +\infty$ se, e somente se, $I \supset \mathcal{M}_n^k$ para algum inteiro k. Denotaremos por $J^r_{(n,p)}$ o espaço vetorial $\frac{\mathcal{E}^0_{n,p}}{\mathcal{M}_n^k \mathcal{E}_{n,p}}$ o qual é identificado como o $\mathbb{K}$-espaço vetorial das aplicações polinomial de $p : \mathbb{K}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{K}^p, 0$ cujas componentes têm grau no máximo $k-1$. Seja $j^k : \mathcal{E}^0_{n,p} \longrightarrow J^k_{(n,p)}$ a projeção canônica, isto é, dado $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}, j^k(f)$ é o polinômio de Taylor de f de grau k na origem ($j^k(f)$ é chamado de o k-jato de f na origem).

Seja G um grupo e C um conjunto qualquer. Uma ação do grupo G no conjunto C é a aplicação $\varphi : G \times C \longrightarrow C$ com $\varphi(g, c) = g \cdot c$ tal que: $\varphi(e, c) = e \cdot c = c, \forall c \in C$ e $\varphi(g_1, \varphi(g_2, c)) = \varphi(g_1 \cdot g_2, c), \forall g_1, g_2 \in G$. Chamaremos de Órbita de um elemento $c \in C$ como sendo o conjunto G_c de todos os elementos de C que estão relacionados com c. Isto é, $G_c = \{a \in C \mid \exists g \in G \text{ com } \varphi(g, c) = a\} = \{a \in C \mid a \sim c\}$.

Denotamos por $\mathcal{R}_n$ o conjunto de todos os germes de aplicações $h : \mathbb{K}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{K}^n, 0$ tal que h é um difeomorfismo quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e h é um isomorfismo analítico quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. A $\mathcal{R}$-equivalência ou Equivalência a direita está relacionada à ação do grupo $\mathcal{R} = \mathcal{R}_n$, dada por: $r : \mathcal{R}_n \times \mathcal{E}^0_{n,p} \longrightarrow \mathcal{E}^0_{n,p}$ onde $r(h, f) \longmapsto f \circ h^{-1}$. Dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ estão relacionados se, e somente se, $\exists h \in \mathcal{R}_n$ tal que $f \circ h^{-1} = g$. A $\mathcal{R}$-Órbita de f é denotada por $\mathcal{R}f := \{g \in \mathcal{E}^0_{n,p} \mid g \underset{\mathcal{R}}{\sim} f\}$.

A $\mathcal{R}$-equivalência ou Equivalência a direita está relacionada à ação do grupo $\mathcal{R} = \mathcal{R}_n$, dada por: $r = \mathcal{R}_n \times \mathcal{E}^0_{n,p} \longrightarrow \mathcal{E}^0_{n,p}$ onde $r(h, f) = f \circ h^{-1}$. Dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ estão relacionados se, e somente se, $\exists h \in \mathcal{R}_n$ tal que $f \circ h^{-1} = g$. A $\mathcal{R}$-órbita de f é denotada por $\mathcal{R}f := \{g \in \mathcal{E}^0_{n,p} \mid g \underset{\mathcal{R}}{\sim} f$.

O grupo $\mathcal{K}$ é formado pelos $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$ tais que $\pi_1 \circ H = h \in \mathcal{R}$ e $\pi_2 \circ H(x, 0) = 0, \forall x$. Onde $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ leva $(x, y) = x$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ leva $(x, y) = y$. Portanto, $\mathcal{K} = \{H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \mid H(x, y) = (h(x), \varphi(x, y))$ com $\varphi(x, 0) = 0, \forall x\}$. Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_n$ são $\mathcal{K}$-equivalêntes se, e somente se, existe $H \in \mathcal{K}$ tal que $H(x, f(x)) = (h(x), \varphi(x, f(x)) = (h(x), g(h(x)) \Longrightarrow \varphi(x, f(x)) = g(h(x))$.

Dois germes $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ de classe C^k, são ditos C^i-equivalentes se existe um germe de difeomorfismo (homeomorfismo se $i = 0$) $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ de classe C^i tal que $f = g \circ h$. Um r-jato $z \in J^r_{(n,p)}$ é C^i-suficiente em $C^k (k \geq r)$ se quaisquer f e g com $f, g \in C^k$ e $j^r(f) = j^r(g) = z$ são C^i-equivalentes.

O objetivo principal desse trabalho é dar condições necessárias para que z seja C^i-suficiência em $J^r_{(n,p)}$. Se mostrarmos que z é C^i-suficiente em $C^r (i \leq r)$, então para todo germe $\theta : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ de classe C^r com $j^r(\theta) \equiv 0$, existe um germe difeomorfismo de classe $C^i (i \leq 0)$ $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ tal que $((z + \theta) \circ h)(x) = z(x)$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Anéis

Definição 1.1.1 *Um anel comutativo com unidade* $(A, +, \cdot)$ *é um conjunto* A *com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por* $+$ *(chamada adição) e de uma operação denotada por* $\cdot$ *(chamada multiplicação) que satisfazem as seguintes condições:*

1. A adição é associativa, isto é, para quaisquer $x, y, z \in A$,

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

2. Existe um elemento neutro com respeito à adição, isto é,

$$\exists 0 \in A \text{ tal que, } \forall x \in A, 0 + x = x \text{ e } x + 0 = x.$$

3. Todo elemento de A possui um inverso com respeito a adição, isto é,

$$\forall x \in A, \exists z \in A \text{ tal que } x + z = 0 \text{ e } z + x = 0.$$

4. A adição é comutativa, isto é, $\forall x, y \in A$,

$$x + y = y + x.$$

5. A multiplicação é associativa, isto é, $\forall x, y, z \in A$,

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

6. Existe um elemento neutro com respeito à multiplicação, isto é,

$$\exists 1 \in A \text{ tal que, } \forall x \in A, 1 \cdot x = x \text{ e } x \cdot 1 = x.$$

7. A multiplicação é comutativa, isto é, $\forall x, y \in A$,

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

8. A adição é distributiva, relativamente à multiplicação, isto é, $\forall x, y, z \in A$,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Se todas as condições são satisfeitas, com exceção de (7), então $(A, +, \cdot)$ é chamado de anel não-comutativo.

Definição 1.1.2 *Um anel $(D, +, \cdot)$ é chamado domínio ou domínio de integridade se ele satisfaz a seguinte condição:*

- *O produto de quaisquer dois elementos não nulos de D é um elemento não nulo, isto é, $\forall x, y \in D \backslash \{0\}$, temos $x \cdot y \neq 0$.*

Definição 1.1.3 *Um anel $(K, +, \cdot)$ é um corpo se ele satisfaz a seguinte condição.*

- *Todo elemento difetente de zero de K possui um inverso com respeito à multiplicação, isto é,*

$$\forall x \in K \setminus \{0\}, \exists z \in K \text{ } tal \text{ } que \text{ } x \cdot z = 1.$$

Exemplo 1.1.1

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um domínio.

2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ são corpos.

3. Seja $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Então $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ é um domínio chamado de anel dos inteiros de Gauss.

4. Dado dois anéis $(A_1, +, \cdot)$ e $(A_2, +, \cdot)$, podemos construir um novo anel da seguinte maneira: no conjunto $A_1 \times A_2 := \{(a_1, a_2); a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$, definimos as operações:

$$(a_1, a_2) + (a_1', a_2') := (a_1 + a_1', a_2 + a_2')$$

$$(a_1, a_2) \cdot (a_1', a_2') := (a_1 \cdot a_1', a_2 \cdot a_2')$$

Definição 1.1.4 *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e I um subconjunto não vazio de A. Dizemos que I é um ideal de A se*

- $x + y \in I, \forall x, y \in I.$
- $ax \in I, \forall x \in I, \forall a \in A.$

Um ideal $m \neq A$ do anel A chama-se maximal se, para qualquer ideal I de A, a propriedade $m \subseteq I$ implica $I = m$ ou $I = A$.

Exemplo 1.1.2

1. Seja $n \geq 0$ um inteiro. Então o subconjunto $n\mathbb{Z} := \{zn \mid z \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal do anel dos inteiros.

2. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ elementos de A. Então o subconjunto $A\alpha_1 + A\alpha_2 + \cdots + A\alpha_t := \{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_t\alpha_t \mid a_1, a_2, \cdots, a_t \in A\}$ é um ideal de $(A, +, \cdot)$, que será denotado por $(a_1, a_2, \cdots, a_t)$.

Seja $\sum$ um conjunto parcialmente ordenado pela relação de inclusão c. Uma cadeia em $\sum$ é um subconjunto C de $\sum$ tal que, dado $a, b \in C$, tem-se que $a < b$ ou $a > b$.

Teorema 1.1.1 (Lema de Zorn) *Seja $\sum$ um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia em $\sum$ possui uma cota superior. Então $\sum$ contém um elemento maximal.*

Demonstração: Ver [13].

Definição 1.1.5 *O radical de Jacobson de um anel A é definido como sendo a interseção de todos os ideais maximais de A, isto é,*

$$JacA := \bigcap_{m \subset A} m, \text{ onde } m \text{ é um ideal maximal.}$$

1.2 Grupos

Definição 1.2.1 *Um conjunto $(G, \cdot)$ com uma operação*

$$G \times G \longrightarrow G$$

$$(a, b) = a \cdot b$$

é um grupo se as seguintes condições são satisfeitas:

i) A operação é associativa, isto é,

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in G.$$

ii) Existe um elemento neutro, isto é,

$$\exists e \in G \text{ tal que } e \cdot a = a, \forall a \in G.$$

iii) Todo elemento possui um elemento inverso, isto é,

$$\forall a \in G, \exists b \in G \text{ tal que } a \cdot b = b \cdot a = e.$$

O grupo $(G, \cdot)$ é abeliano ou comutativo, se:

iv) A operação é comutativa, isto é,

$$a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in G.$$

Da definição de grupos, obtemos que:

1. O elemento neutro é único. De fato, se $e, e' \in G$ são elementos neutros de G, então

$$e = e \cdot e' = e \text{ pois são elemento neutro.}$$

2. O elemento inverso é único. De fato, sejam $a \in G$ e $b, b' \in G$ dois elementos inversos de a, temos:

$$b = b' \cdot e = b \cdot (ab') = (ba) \cdot b' = e \cdot b' = b'$$

3. $(ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

   Observe que: $(ab) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = e$, pela unicidade do inverso de um elemento em G, obtêm-se que: $b^{-1} \cdot a^{-1} = (ab)^{-1}$.

Observação 1.2.1 *Muitas vezes deixamos de indicar a operação do grupo, escrevendo G para denotar um grupo $(G, \cdot)$.*

Exemplo 1.2.1

1. $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano infinito.

2. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$ é um grupo abeliano finito com n elementos.

1.2.1 Subgrupos

Definição 1.2.2 *Seja $(G, \cdot)$ um grupo. Um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G (denotamos $H < G$) quando, com a operação de G, o conjunto H é grupo, isto é, quando as seguintes condições são satisfeitas:*

i) $h_1 \cdot h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H.$

ii) $h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3) = (h_1 \cdot h_2) \cdot h_3 \in H, \forall h_1, h_2, h_3 \in H.$

iii) $\exists e_H \in H$ *tal que* $e_H \cdot h = h \cdot e_H = h, \forall h \in H.$

iv) Para cada $h \in H, \exists k \in H$ *tal que* $hk = kh = e_H$.

Observação 1.2.2

1. *A condição ii) é sempre satisfeita, pois a igualdade $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ é válida para todos os elementos de G.*

2. *O elemento neutro $e_H \in H$ é necessariamente o mesmo elemento neutro e de G. De fato, tomando $a \in H \subseteq G$, temos $e_H \cdot a = a$ e multiplicando as dois lados pro a^{-1} à direita, obtemos $e_H = e$.*

3. *Dado $h \in H$, o inverso de h em H é necessariamente o mesmo ao inverso de h em G. De fato, se k é o inverso de h em H, então $hk = kh = e_H$, logo $hk = kh = e$, pois $e_H = e$, e portanto k é o inverso de h em G.*

Proposição 1.2.1 *Seja H um subconjunto não-vazio do grupo G. Então H é um subgrupo de G se, somente se, as duas condições seguintes são satisfeitas:*

1. $h_1 \cdot h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H.$

2. $h^{-1} \in H, \forall h \in H$

Demonstração: Suponhamos que H seja subgrupo de G. A condição 1) é então claramente satisfeita. Agora, seja $h \in H$; sendo H um grupo, h possui um inverso em H; mas, pela observação anterior, tal inverso é necessariamente igual ao inverso de h em G, isto é, é necessariamente igual a h^{-1}; logo $h^{-1} \in H$, e a condição 2) é satisfeita. Reciprocamente, suponhamos que as duas condições 1) e 2) sejam satisfeitas. Então a condição i) da definição anterior é claramente satisfeita. Como observamos, a condição ii) sempre é satisfeita. Para ver que a iii) é satisfeita, basta que $e \in H$; isto de fato acontece pois, tomando $h \in H$, temos $h^{-1} \in H$ pela condição 2) e logo $e = h^{-1} \cdot h \in H$ pela condição 1). Finalmente, que a condição iv) é satisfeita decorre da condição 2) ser satisfeita.

■

1.3 Módulos

Definição 1.3.1 *Seja A um anel. Um conjunto M é um modulo sobre A, ou um A-módulo se existem operações*

$$+ : M \times M \longrightarrow M \;\; e \; \cdot : A \times M \longrightarrow M$$

tais que $(M, +)$ *é um grupo abeliano e* $\forall a, b \in A, \forall m, n \in M$ *são satisfeitas as condições abaixo:*

1. $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m;$

2. $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n;$

3. $(a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m);$

4. $1 \cdot m = m.$

Exemplo 1.3.1

1. Seja A um anel. Então $M = A^n$ é um módulo sobre A.

2. Seja A um anel e $I \subset A$ um ideal. Os conjuntos I e A/I são A-módulos.

3. Seja $\phi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis. O anel B pode ser considerado um A-módulo com a multiplicação $a \cdot b = \phi(a) \cdot \phi(b)$. Nesta situação B é denominado uma A-álgebra.

Definição 1.3.2 *Sejam M, N dois A-módulos.*

1. *Uma aplicação $\phi : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de A-módulos se for linear em A, isto é, se $\phi(am + n) = a\phi(m) + \phi(n)$. Se ϕ for uma bijeção, então é chamado de isomorfismo.*

2. *Sejam homomorfismos de anéis φ, ϕ, α tornando o diagrama abaixo comutativo ($\alpha \circ \varphi = \phi$). Então α é um homomorfismo de A-álgebras.*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & B \\
C \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}
$$

Definição 1.3.3 *Sejam A um anel e M um A-módulo. Um subconjunto N de M é um A-submódulo se a multiplicação escalar de M preserva em N, isto é, se $a \cdot n \in N, \forall a \in A$ e quaisquer $n \in N$.*

Seja M um A-módulo, $t \in \mathbb{N}$ e $m_1, m_2, \cdots, m_t$ elementos de M. Consideramos o seguinte subconjunto N de M:

$$N = Am_1 + Am_2 + \cdots + Am_t = \{a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_tm_t \mid a_i \in A\}.$$

Este conjunto N é um submódulo de M e é chamado de submódulo gerado por $m_1, m_2, \cdots, m_t$. O módulo M é dito finitamente gerado quando existe um número finito de elementos $m_1, m_2, \cdots, m_t$ de M tais que

$$M = Am_1 + Am_2 + \cdots + Am_t.$$

Neste caso, dizemos que $m_1, m_2, \cdots, m_t$ é um conjunto de geradores para o módulo M. O módulo M é cíclico se pode ser gerado por um elemento, isto é, se $M = Am$, para algum $m \in M$.

Definição 1.3.4 *Sejam M e M' dois A-módulos. Uma aplicação* $f : M \longrightarrow M'$ *é um homomorfismo de A-módulos ou um A-homomorfismo se:*

a) f *é um homomorfismo de grupo aditivos, isto é,*

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2), \forall m_1, m_2 \in M.$$

b) $f(a \cdot m) = a \cdot f(m), \forall a \in A$ *e* $\forall m \in M$.

Dizemos também que a aplicação f é A-linear, ou que f é um operador A-linear. Um homomorfismo de A-módulos é um isomorfismo de A-módulos se ele for bijetiva.

Definição 1.3.5 *Sejam A um anel e* $(M, +)$ *um A-módulo. Seja N um submódulo de M. Então, em particular* $(N, +)$ *é um subgrupo de* $(M, +)$ *e podemos considerar o grupo quociente* $(M/N, +)$*, isto é, o conjunto* $\{m + N \mid m \in M\}$ *das classes laterais de N em M munidos da adição.*

$$+ : M/N \times M/N \longrightarrow M/N$$

$$(m_1 + N, m_2 + N) \longrightarrow (m_1 + m_2) + N.$$

Sobre este grupo $(M/N, +)$*, podemos definir a seguinte multiplicação escalar:*

$$\cdot : A \times M/N \longrightarrow M/N$$

$$(a, m + N) \longrightarrow a \cdot m + N.$$

Verifica-se que esta operação está bem definida e que M/N *é um A-módulo, chamado de A-módulo quociente de M por N.*

Definição 1.3.6 *Um subconjunto* $N \subset M$ *de uma A-módulo M é um submódulo se for fechado nas operações de M, isto é, se* $m, n \in N$ *e* $a \in A$ *então* $m + n \in N$ *e* $am \in N$.

Se $\varphi : M \longrightarrow N$ *é um homomorfismo de A-módulos, definimos*

$$Ker(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\},$$

$$Im(\varphi) = \{\varphi(m) \in N \mid m \in M\}.$$

Observe, pela definição, que $Ker(\varphi) \subset M$ e $Im(\varphi) \subset N$ são submódulos. Se $N \subset M$. Definimos o módulo quociente

$$M/N = \{[m] = m + N \mid m \in M\},$$

a coleção das classes de equivalência pela relação $[m] = [m'] \Leftrightarrow m - m' \in N$. Com as operações induzidas por M temos que M/N é um A-módulo. Veremos que para anéis e ideais, temos que se $\varphi : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de A-módulos, então

$$\frac{M}{ker(\varphi)} \cong Im(\varphi).$$

Em particular, φ é injetiva se, e somente se, $Ker(\varphi) = \{0\}$. Um quociente de módulos muito importante ganha um nome especial: Se $\varphi : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de A-módulos, definimos

$$coker(\varphi) = \frac{N}{Im(\varphi)}.$$

Teorema 1.3.1 (Teorema do Isomorfismo) Seja $f : (A, +, \cdot) \longrightarrow (B, +, \cdot)$ um homomorfismo de anéis. Então, a aplicação $\bar{f}$ abaixo é um isomorfismo de anéis:

$$\bar{f} : (A/Ker(f), +, \cdot) \longrightarrow (Im(f), +, \cdot)$$

$$\bar{a} \longmapsto f(a)$$

Demonstração: Primeiramente mostraremos que $\bar{f}$ é uma função bem definida, isto é, se $a_1, a_2 \in A$ são tais que $\bar{a_1} = \bar{a_2}$, então $f(a_1) = f(a_2)$. De fato, se $\bar{a_1} = \bar{a_2}$, então temos $a_1 - a_2 \in Ker(f)$, logo $f(a_1 - a_2) = 0$; além disso do mais $f(a_1 - a_2) = f(a_1) - f(a_2)$ pois f é um homomorfismo; portanto, $f(a_1) = f(a_2)$.

Agora, $\bar{f}$ é claramente uma aplicação sobrejetiva e é um homomorfismo pois, para elementos $a_1, a_2 \in A$, temos:

- $\bar{f}(\bar{a_1} + \bar{a_2}) = \bar{f}(\overline{a_1 + a_2}) = f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) = \bar{f}(\bar{a_1}) + \bar{f}(\bar{a_2})$
- $\bar{f}(\bar{a_1} \cdot \bar{a_2}) = \bar{f}(\overline{(a_1 \cdot a_2)}) = f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2) = \bar{f}(\bar{a_1}) \cdot \bar{f}(\bar{a_2})$

Finalmente, temos que

$$Ker(\bar{f}) = \{\bar{a} \in (A/Ker(f) \mid f(a) = 0\} = \{\bar{a} \in (A/Ker(f)) \mid a \in Ker(f)\} = \{\bar{0}\};$$

logo $\bar{f}$ é injetiva.

$\blacksquare$

Teorema 1.3.2 (Lema de Nakayama) *Seja $I \subset A$ um ideal contido no radical de jacobson de A. Seja M um A-módulo finitamente gerado e $N \subset M$ um submódulo tal que $M = IM + N$. Então $M = N$.*

Demonstração: Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ geradores de M. A hipótese garante que existe $b_j \in M$ e $\lambda_{ij} \in I$ tais que $a_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_j$. Defina agora $\lambda = (\delta_{ij})$, como sendo a matriz $n \times n$ formada pelos elementos λ_{ij}.

Sendo $A = (a_1, \cdots, a_n)$ e $B = (b_1, \cdots, b_n)$. Como $a_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} a_j$, temos que $A = B + \lambda A$. Isto implica que, $(I - \lambda)A = B$. Observe que:

$$det(I-\lambda) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda_{11} & -\lambda_{12} & -\lambda_{13} & \cdots & -\lambda_{1n} \\ -\lambda_{21} & 1-\lambda_{22} & -\lambda_{23} & \cdots & -\lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{n1} & -\lambda_{n2} & -\lambda_{n3} & \cdots & 1-\lambda_{nn} \end{bmatrix} = 1 + \alpha,$$

com $\alpha \in I$. já sabemos que $1 + \alpha$ será invertível, logo $det(I - \lambda)$ é invertível.

$\blacksquare$

1.4 Polinômio Quase-Homogêneo

Seja $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ o anel dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ nas variáveis $x_1, \cdots, x_n$.

Polinômio Homogêneo é qualquer polinômio

$$p(x) = \sum \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

em que $a_1 + \cdots + a_n = d, d \in \mathbb{N}$ fixo.

Exemplo 1.4.1 *$f(x, y) = x^3 + x^2 y + y^3$ é polinômio homomgêneo de grau 3.*

Observação 1.4.1 *Dado $t \in \mathbb{R}$, temos que*

$$p(tx_1, \cdots, tx_n) = \sum \alpha_a (tx_1)^{a_1} \cdots (tx_n)^{a_n} = t^{a_1 + \cdots + a_n} \sum \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = t^d p(x).$$

Definição 1.4.1 *Sejam $w_1, \cdots, w_n, d \in \mathbb{N}$. Um polinômio $f(x) = \sum \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ é dito* ***quase-homogêneo*** *do tipo $(w_1, \cdots, w_n; d)$ quando $f(t^{w_1}x_1, \cdots, t^{w_n}x_n) = t^d f(x_1, \cdots, x_n), \forall t \in \mathbb{R}$.*

Observação 1.4.2 *Se $p(x)$ é homogêneo de grau d, então $p(x)$ é quase-homogêneo do tipo $(1, \cdots, 1; d)$.*

Exemplo 1.4.2 *$f(x, y) = x^2y^2 + x^4y + y^3$ é quase-homogênea do tipo $(1, 2; 6)$ pois*

$$\begin{aligned} f(t^1x, t^2y) &= t^2x^2t^4y^2 + t^4x^4t^2y + t^6y^3 \\ &= t^6(x^2y^2 + x^4y + y^3) \\ &= t^6 f(x, y) \end{aligned}$$

Observe que f não é homogênea.

Definição 1.4.2 *Se $f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ é quase-homogêneo do tipo $(w_1, \cdots, w_n; d)$, então dizemos que $w_1, \cdots, w_n$ são os pesos de f e que d é o grau pesado de f.*

Proposição 1.4.1 *Seja $S_d = \{$ Polinômios quse-homogêneos do tipo $(w_1, \cdots, w_n; d)\}$. Então S_d é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}^n$.*

Prova: Seja $f(x), g(x) \in S_d$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Por definição, temos:

$$f(t^{w_1}x_1, \cdots, t^{w_n}x_n) = t^d f(x)$$

$$g(t^{w_1}x_1, \cdots, t^{w_n}x_n) = t^d g(x)$$

Vamos mostrar que $\lambda f(t\ wx) + g(t^w x) = \lambda t^d f(x) + t^d g(x)$.

$$\begin{aligned} \lambda f(t\ wx) + g(t^w x) &= \lambda \sum \alpha_a (t^{w_1}x_1)^{a_1} \cdots (t^{w_n}x_n)^{a_n} + \sum \beta_a (t^{w_1}x_1)^{b_1} \cdots (t^{w_n}x_n)^{b_n} \\ &= \lambda \sum t^{w_1a_1 + \cdots + w_na_n} \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} + t^{w_1b_1 + \cdots + w_nb_n} \beta_a x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \\ &= t^d \sum \lambda \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} + \beta_a x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \\ &= t^d [\lambda \sum \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} + \sum \beta_a x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}] \\ &= t^d [\lambda f(x) + g(x)] \\ &= \lambda t^d f(x) + t^d g(x) \end{aligned}$$

O elemento neutro de S_d é $p(x) \equiv 0$.

Claramente, vale a associativa, comutatividade, existência do simétrico, vale a distribuição pela direita e pela esquerda.

Portanto, S_d é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

$\blacksquare$

Proposição 1.4.2 *Seja f um polinômio quase-homogêneo do tipo $(w_1, \cdots, w_n; d)$. Se $w' = mdc\{w_1, \cdots, w_n; d\}$, então $f(x)$ é também quase-homogêneo do tipo $\left(\frac{w_1}{w'}, \cdots, \frac{w_n}{w'}; \frac{d}{w'}\right)$.*

Prova: Por definição, temos

$$a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n = d \in \mathbb{N}.$$

Seja $w' = mdc\{w_1, \cdots, w_n; d\}$, daí $\frac{w_i}{w'} \in \mathbb{N}, i = 1, \cdots, n$ e $\frac{d}{w'} \in \mathbb{N}$, logo

$$a_1 \frac{w_1}{w'} + \cdots + a_n \frac{w_n}{w'} = \frac{d}{w'} \in \mathbb{N}.$$

Portanto, se $f(x)$ é quase-homogêneo do tipo $(w_1, \cdots, w_n; d)$, então $f(x)$ é quase-homogêneo do tipo $\left(\frac{w_1}{w'}, \cdots, \frac{w_n}{w'}; \frac{d}{w'}\right)$.

$\blacksquare$

1.5 Determinante de Gram

A **matriz de Gram** dos vetores $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ é a matriz $g = (g_{ij}) \in M(k \times k)$, onde $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Para ser mais explícitos, escrevemos $g = g(v_1, \cdots, g_k)$.

Exemplo 1.5.1 *Sejam $u = (2, 3)$ e $v = (1, 4)$ dois vetores em $\mathbb{R}^2$. A **matriz de Gram** desses vetores é a matriz:*

$$g = \begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix}$$

Calculemos:

$\langle u, u \rangle = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13$

$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$

$\langle u, u \rangle = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 1 + 16 = 17$

Daí, temos:

$$g = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 17 \end{pmatrix}.$$

Dado uma base $U = \{u_1, \cdots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$, seja $a = [a_{ij}] \in M(k \times k)$ a matriz das coordenadas dos vetores v_j em relação à base U, isto é:

$$v_j = a_{1j}u_1 + \cdots + a_{nj}u_n \text{ para } j = 1, \cdots, k.$$

Seja ainda $h = [h_{ij}] \in M(n \times n)$ a matriz de Gram da base U, isto é, $h_{ij} =< \langle u_i, u_j \rangle$. Então, para $i, j = 1, \cdots, k$ (escrevemos m_{ij} para indicar o ij-ésimo elemento de uma matriz m), temos:

$$g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_{r=1}^{n} a_{ri}u_r, \sum_{s=1}^{n} a_{sj}u_s \right\rangle = \sum_{r,s=1}^{n} a_{ri}a_{sj} \cdot \langle u_r, u_s \rangle =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{n} a_{ri}a_{sj}h_{rs} = \sum_{r=1}^{n} a_{ri} \left(\sum_{s=1}^{n} h_{rs}a_{sj} \right) = \sum_{r=1}^{n} (a^T)_{ir}(ha)_{rj} = (a_T ha)_{ij}.$$

A terceira igual é valida pela bilinearidade do produto interno.

Portanto $g = a_T ha$.

Em particular, se tomarmos uma base ortonormal $\{u_1, \cdots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$, teremos $h = I_k$, portanto a matriz de Gram se escreve como

$$g = g(v^1, \cdots, v_k) = A^T \cdot A,$$

onde A é a matriz das coordenadas dos vetores v_j em relação a essa base ortonormal do $\mathbb{R}^n$.

Chama-se **gramiano** dos vetores $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ ao número

$$\gamma(v_1, \cdots, v_k) = det(g(v_1, \cdots, v_k)) = det[a_{ij}], \text{ onde } a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

determinante da matriz de Gram $g(v_1, \cdots, v_k)$.

Como $A^T = A$, então a matriz de Gram é não-negativa, pois

$$det(g) = det(A^T \cdot A) = det(A^T) \cdot det(A) = det(A)^2 \geq 0.$$

A matriz de Gram $g = g(v_1, \cdots, g_k)$ é positiva (invertível) se, e somente se, os vetores $v_1, \cdots, v_k$ são $L.I.$

Proposição 1.5.1 *Se v_1 é perpendicular a $v_2, \cdots, v_k$ então $\gamma(v_1, \cdots, v_k) = |v_1|^2 \cdot \gamma(v_2, \cdots, v_k)$.*

Prova: Se v_1 é perpendicular aos outros vetores, então

$$\gamma(v_1, \cdots, v_k) = \begin{bmatrix} |v_1|^2 & 0_{1\times(k-1)} \\ 0_{(k-1)\times 1} & B_{(k-1)(k-1)} \end{bmatrix}$$

onde $B = (\langle v_i, v_j \rangle)$ para $i, j = 2, 3, \cdots, k$. Desenvolvendo este determinante pela primeira coluna, temos

$$\gamma(v_1, \cdots, v_k) = |v_1|^2 det(B) = |v_1|^2 \cdot \gamma(v_2, \cdots, v_k).$$

■

Proposição 1.5.2 *Sejam w_1 a projeção ortogonal do vetor v_1 sobre o subespaço gerado por $v_2, \cdots, v_k$ e $n_1 = v_1 - w_1$, logo n_1 é perpendicular aos v_j com $j = 1, \cdots, k$. Prove que $\gamma(v_1, \cdots, v_k) = |n_1|^2 \cdot \gamma(v_2, \cdots, v_k)$.*

Prova: Como $v_1 = n_1 + w_1$, temos

$$\begin{aligned} (v_1, \cdots, v_k) &= \gamma(n_1, v_2, \cdots, v_k) + \gamma(w_1, v_2, \cdots, v_k) \\ &= |n_1|^2 \gamma(v_2, \cdots, v_k) + 0 \end{aligned}$$

pois w_1 pertence ao subespaço gerado por $v_2, \cdots, v_k$ enquanto n_1 é perpendicular a estes vetores.

■

O **paralelepípedo** gerado pelos vetores linearmente independentes $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto $P[v_1, \cdots, v_k]$ das combinações lineares $t_1v_1 + \cdots, t_kv_k$ onde $0 \leq t_i \leq 1$. O volume em k-dimensional do paralelepípedo é definido por indução. Se $k = 1$, ele se reduz ao segmento de reta $[0, v_1]$, cujo "volume"unidimensional é, por definição, $|v_1|$. Suponha definido o volume de um paralelepípedo d dimensão $k - 1$, pões-se

$$volP[v_1, \cdots, v_k] = |n_1| \cdot volP[v_2, \cdots, v_k],$$

onde $|n_1|$ é a altura do paralelepípedo, isto é, $n_1 = v_1 - w_1$ e w_1 é a projeção ortogonal de v_1 sobre o subespaço gerado por $v_2, \cdots, v_k$.

Proposição 1.5.3 *Prove que* $volP[v_1, \cdots, v_k] = \sqrt{\gamma(v_1, \cdots, v_k)} = \sqrt{det(\langle v_i, v_j \rangle)}$.

Prova: Por indução: para $n = 1$, o volume é $vol[v_1] = |v_1|$ enquanto $\gamma(v_1) = det(\langle v_i, v_j \rangle) = det(\langle v_1, v_1 \rangle) = |v_1|^2$.

Portanto $vol[v_1] = \sqrt{\gamma(v_1)} = \sqrt{det(\langle v_1, v_1 \rangle)} = |v_1|$.

Por outro lado, supondo que a igualdade vale para quaisquer $n = k-1$ vetores, temos:

$volP[v_1, \cdots, v_k] = |n_1| volP[v_2, \cdots, v_k] = |n_1|\sqrt{\gamma(v_2, \cdots, v_k)} = \sqrt{|n_1|^2\gamma(v_1, \cdots, v_k)} = \sqrt{\gamma(v_1, v_2 \cdots, v_k)} = \sqrt{det(\langle v_i, v_j \rangle)}$.

■

Capítulo 2

Introdução à Teoria de Singularidades

2.1 Germes de conjuntos

Seja X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto. O conjunto $P(X)$ é formado por todos os subconjuntos de X e defina uma relação de equivalência

$$A \underset{X}{\sim} B \Leftrightarrow A \cap U = B \cap U$$

para alguma vizinhança U de $x \in X$.

Definição 2.1.1 *Dado $A \in P(X)$, a classe de equivalência de A, com respeito à relação de equivalência $\underset{X}{\sim}$ é chamada de **germe** do conjunto A na vizinhança do ponto x.*

Notação: (A, x)

Exemplo 2.1.1 *Sejam $X = \mathbb{R}^2$ e $x = 0$. $A_1 = \{(x, y) \mid x < 2\}$, $B_1 = \{(x, y) \mid x > -2\}$, $A_2 = \{(x, y) \mid x < 0\}$ e $B_2 = \{(x, y) \mid x > 0\}$.*

Observe que $A_1 \sim B_1$, mas $A_2 \nsim B_2$.

Seja X um conjunto e considere agora o conjunto formado pelos pares $M = \{(U, f)\}$, onde U é uma vizinhança de $x \in X$ e f é uma função $f : U \longrightarrow Y$. Introduziremos a relação de equivalência em M : $(U_1, f_1) \underset{x}{\sim} (U_2, f_2)$ se, e somente se, $f_1|_{U_0} = f_2|_{U_0}$ para alguma vizinhança U_0 de x com $U_0 \subset U_1 \cap U_2$.

Exemplo 2.1.2 *Sejam as funções $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ e $g(x) = x - 1$.*

Temos $f|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$.

Logo, $f \underset{x}{\sim} g$ *para* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Definição 2.1.2 *A classe de equivalência do par* $(U, f) \in M$ *será denotada por* f *e será chamada de o germe de* f *em torno do ponto* $x \in X$. *Se* $f : U, x \longrightarrow Y$ *é um germe e* f *é um representante deste germe que é suave, fica bem definido os germes das derivadas parciais de f.*

2.2 Germes de aplicações suaves

Sejam $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^p$. Considere o conjunto $M = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p \mid f$ suave e U é vizinhança de $a \in \mathbb{R}^n\}$.

Denotamos por $\mathcal{E}^a_{n,p}$ ao conjunto de todos os germes de funções de M.

Observação 2.2.1 *Quando* $a = 0$, *usa-se a notação* $\mathcal{E}_{n,p}$. *Além disso, quando* $a = 0$ *e* $p = 1$, *usa-se a notação* $\mathcal{E}_n$.

Proposição 2.2.1 *Em* $\mathcal{E}_n$ *definamos a soma e o produto por:* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ *e* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. *Seque que:*

1. $(\mathcal{E}_n, +, \cdot)$ *é um anel comutativo com unidade e com divisores de zero.*

2. *A função* $\varphi_x : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n$ *definida por*

$$\begin{aligned} \varphi_x(f) : \mathbb{R}^n, 0 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto f(u + x) \end{aligned}$$

   é um isomorfismo de anéis.

Prova do item 1. Afirmação 1: $(\mathcal{E}_n, +, \cdot)$ é um anel.

Seja $x \in U \subset X$, onde U é uma vizinhança aberta de x, logo $f(x), g(x)$ e $h(x)$ são números reais, onde $f, g, h \in \mathcal{E}_n$, então, temos que:

i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$;

ii) $\exists h \in \mathcal{E}_n$ tal que $h \equiv 0$, pois vale $(f + h)(x) = f(x) + h(x) = f(x) + 0 = f(x) \in \mathcal{E}_n$;

iii) $((f+g)+h)(x) = ([f(x)+g(x)]+h(x)) = (f(x)+[g(x)+h(x)]) = [f+(g+h)](x)$;

iv) $([f+g]\cdot h)(x) = ([f(x)+g(x)]\cdot h(x)) = (f(x)h(x)+g(x)\cdot h(x)) = (f\cdot h+g\cdot h)(x)$.

Afirmação 2: $(\mathcal{E}_n, +, \cdot)$ é um anel comutativo.

De fato, pois $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = g(x)\cdot f(x) = (g\cdot f)(x)$.

Afirmação 3: $(\mathcal{E}_n, +, \cdot)$ é um anel comutativo com unidade.

Seja $f \in \mathcal{E}_n$ tal que $f(0) \neq 0$ e f é contínua, então $\exists U \subset X$ e $0 \in U$ tal que $f(x) \neq 0, \forall x \in U$.

Daí, tome $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, g está bem definido, então vale $1 = g(x)f(x)$, como $g(x)f(x) \in \mathcal{E}_n$, então $h \equiv 1 \in \mathcal{E}_n$.

Afirmação 4: $(\mathcal{E}_n, +, \cdot)$ têm divisores de zero.

Tome $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x_1 < 0 \text{ e } x_i = 0, \forall i = 2, \cdots, n \\ x_1^2, \text{ se } x_1 \geq 0 \text{ e } x_i = 0, \forall i = 2, \cdots, n \end{cases}$ e

$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x_1 \geq 0 \text{ e } x_i = 0, \forall i = 2, \cdots, n \\ x_1^2, \text{ se } x_1 < 0 \text{ e } x_i = 0, \forall i = 2, \cdots, n. \end{cases}$

Temos que $f(x)g(x) = 0, \forall x \in U, \forall i = 1, \cdots, n$. Como $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$, então $\mathcal{E}_n$ têm divisores de zero.

Segue das quatro afirmações que $(\mathcal{E}_n, +, \cdot)$ é um anel comutativo com unidade que tem divisores de zero.

Prova do item 2. Seja U uma vizinhança de x e $f, g \in \mathcal{E}_n^x$, onde

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{E}_n^x &\longrightarrow \mathcal{E}_n \\ u &\longmapsto f(u-x) \end{aligned}$$

pelo **item 1.**, sabemos que:

$$\varphi(f+g)(x) = (f+g)(u-x) = f(u-x)+g(u-x) = \varphi(f)(u)+\varphi(g)(u).$$

$$\varphi(f\cdot g)(x) = (f\cdot g)(u-x) = f(u-x)\cdot g(u-x) = \varphi(f)(u)\cdot\varphi(g)(u).$$

Logo, temos que φ é um homomorfismo. A saber, para $f \equiv 1$, temos $\varphi(f) = 1$. Seja $Ker(\varphi) = \{f \in \mathcal{E}_n | f(x) = 0\}$. Daí, definamos a nova aplicação, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi_x(f) = \frac{\varphi(f)}{Ker(\varphi)} &\longrightarrow Im(\varphi) \\ f(u)+Ker(\varphi) &\longmapsto \varphi_x(f+Ker(\varphi))(u) = f(u+x). \end{aligned}$$

Daí, pelo **teorema do isomorfismo (1.3.1)**, temos que φ_x é um isomorfismo de anéis.

$\blacksquare$

Observação 2.2.2 *O anel $\mathcal{E}_{n,p}$ tem uma estrutura de $\mathcal{E}_n$-módulo.*

Proposição 2.2.2 *1) $\mathcal{E}_n$ é um anel local, isto é, possui um único ideal maximal, a saber $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(0) = 0\}$.*

2) A k-ésima potência de $\mathcal{M}_n$ é gerado, em $\mathcal{E}_n$, pelos monômios de grau k, isto é, $\mathcal{M}_n^k =< x^{|a|} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mid |a| = a_1 + \cdots + a_n = k >$. Além disso, $\mathcal{M}_n^k = \{f \in \mathcal{E}_n \mid \frac{\partial^{|b|} f}{\partial x^b}(0) = 0, \forall 0 \leq |b| \leq k\}$.

Demonstração: ver [10].

Observação 2.2.3 *Se $I \subset \mathcal{E}_n$ é ideal de $\mathcal{E}_n$, então $\dfrac{\mathcal{E}_n}{I}$ é também uma $\mathbb{K}$-álgebra.*

Definição 2.2.1 *Um ideal $I \subset \mathcal{E}_n$ é dito de codimensão finita quando a dimensão de $\frac{\mathcal{E}_n}{I}$ é finita, isto é,*

$$dim \frac{\mathcal{E}_n}{I} < \infty.$$

Se I e J são ideais de A e $J \subset I$, então

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \dfrac{A}{J} & \longrightarrow & \dfrac{A}{I} \\ \overline{a} & \longmapsto & \varphi(\overline{a}) = \tilde{a} \\ a + J & \longmapsto & \varphi(a + J) = a + I \end{array}$$

- $\varphi(\overline{a + b}) = (a \widetilde{+} b) = \tilde{a} + \tilde{b} = \varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b})$;
- Se $\tilde{a} \in \dfrac{A}{I}$, claramente $\varphi(\overline{a}) = \tilde{a}$

.

Portanto, φ é um homomorfismo sobrejetor.

Observação 2.2.4 *Se $I \subset \mathcal{E}_n$ é um ideal, então $\dfrac{\mathcal{E}_n}{I}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.*

Proposição 2.2.3 *Um ideal $I \subset \mathcal{E}_n$ tem codimensão finita se, e somente se, $\mathcal{M}_n^k \subset I$, para algum $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: ($\Longleftarrow$) Suponha que $\mathcal{M}_n^k \subset I$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Quero provar que $codI < +\infty$.

Observe que $\frac{\mathcal{E}_n}{I}$ e $\frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_n^k}$ são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Além disso $dim\frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_n^k} < +\infty$.

Como $\mathcal{M}_n^k \subset I$, temos que $\varphi : \frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_n^k} \longrightarrow \frac{\mathcal{E}_n}{I}$ é um homomorfismo sobrejetor definido por $\overline{f} \longmapsto \varphi(\overline{f}) = \tilde{f}$, isto é, φ é uma transformação linear sobrejetor. Daí,

$$dim\frac{\mathcal{E}_n}{I} \leq \frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_n^k} < +\infty \Longrightarrow cod(I) < +\infty.$$

($\Longrightarrow$). Suponha que $cod(I) < +\infty$, isto é, $dim\frac{\mathcal{E}_n}{I} < +\infty$. Observe a cadeia descendente.

$$\mathcal{E}_n \supset I + \mathcal{M}_n \supset I + \mathcal{M}_n^2 \supset \cdots \supset I + \mathcal{M}_n^k \supset \cdots .$$

Tomando o quociente pelo ideal I, obtemos a cadeia,

$$\frac{\mathcal{E}_n}{I} \supset \frac{I + \mathcal{M}_n}{I} \supset \frac{I + \mathcal{M}_n^2}{I} \supset \cdots \supset \frac{I + \mathcal{M}_n^k}{I} \supset \cdots$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathcal{E}_n}{I} \supset \frac{\mathcal{M}_n}{I} \supset \frac{\mathcal{M}_n^2}{I} \supset \cdots \supset \frac{\mathcal{M}_n^k}{I} \supset \cdots$$

$\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\mathcal{M}_n^k}{I} = \frac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{I} \longrightarrow I + \mathcal{M}_n^k = I + \mathcal{M}_n^{k+1}$

$\Longrightarrow \mathcal{M}_n^k \subset I + \mathcal{M}_n\mathcal{M}_n^k \underset{LemadeNakayana}{\Longrightarrow} \mathcal{M}_n^k \subset I.$

■

Exemplo 2.2.1 *Seja $I =< x^2, xy, y^2 >$ em $\mathcal{E}_2$. Temos $\mathcal{M}_2^2 \subseteq I$. Seque-se que $dim\frac{\mathcal{E}_n}{I} = 3$.*

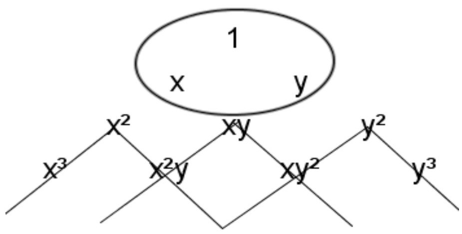

Figura 2.1: $dim\frac{\mathcal{E}_n}{I} = 3$

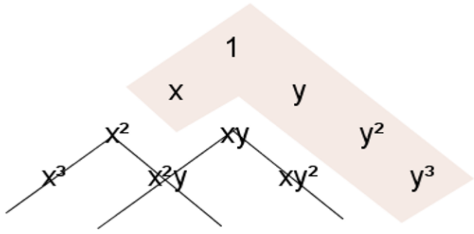

Figura 2.2: $dim\frac{\mathcal{E}_n}{J} = \infty$

Exemplo 2.2.2 *Seja* $J =< x^2, xy >$ *em* $\mathcal{E}_2$. *Temos* $\mathcal{M}_2^2 \nsubseteq J$. *Seque-se que* $dim\frac{\mathcal{E}_n}{J} = \infty$.

Relembrando. $\mathcal{E}^0_{n,p} = \{f : \mathbb{K}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{K}^p, 0 \mid f$ é suave ou analítico com $f(0) = 0\}$.

É fácil ver que $\mathcal{E}^0_{n,p} = \mathcal{M}_n\mathcal{E}_{n,p}$. Pois se

$$f(x) \in \mathcal{M}_n\mathcal{E}_{n,p} \Longleftrightarrow f(x) = g(x)F(x) \Longrightarrow f(0) = g(0)F(0)$$

$$\Longrightarrow f(0) = 0 \cdot F(0) = 0 \Longrightarrow f \in \mathcal{E}^0_{n,p}.$$

E se $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, então $f_i \in \mathcal{E}_n$, onde $f = (f_1, \cdots, f_p)$. Logo

$$f(0) = 0 \Longleftrightarrow f_i(0) = 0, \forall i = 1, \cdots, p \Longrightarrow f \in \mathcal{M}_n\mathcal{E}_{n,p}$$

Definição 2.2.2 *Definimos o conjunto*

$$J^k_{(n,p)} = \frac{\mathcal{E}^0_{n,p}}{\mathcal{M}^k_n\mathcal{E}^0_{n,p}}.$$

Mas $\mathcal{M}^k_n \cdot \mathcal{E}^0_{n,p} = \mathcal{M}^k_n\mathcal{M}_n\mathcal{E}_{n,p} = \mathcal{M}^{k+1}_n\mathcal{E}_{n,p}$, logo $J^k_{(n,p)} = \dfrac{\mathcal{E}^0_{n,p}}{\mathcal{M}^{k+1}_n\mathcal{E}_{n,p}}$, o qual é identificado como o $\mathbb{K}$-espaço vetorial das aplicações polinomiais de $\mathbb{K}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{K}^p, 0$, cujas componentes têm grau no máximo k.

Se $p = 1$, então o k-jato de um germe $f \in \mathcal{E}_n$, calculado na origem, é definido por

$$j^k f(x) = \sum_{|a| \leq k} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f|_{x=0}x^{\alpha},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \alpha! = (\alpha_1)! \cdots (\alpha_n)!, x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ e $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$.

Definição 2.2.3 *Dado um germe $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, denotamos por $j^k(f)$ o desenvolvimento de Taylor de f, em torno da origem, até o grau k. Podemos definir o germe f como a soma k-jato de f mais o resto.*

$$f(x) = j^k f(x) + r_k(x) = \sum_{|a| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} f|_{x=0} x^{\alpha} + r_k(x).$$

O $j^k(f)$ é chamado de "k-jato de f na origem".

Fórmula de Taylor Infinitesimal [2]: Seja o germe $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com 0 e $0 + x \in U$. Se f é k vezes diferenciável na origem, então

$$\lim_{|x| \to 0} \frac{r_k(x)}{|x|^k} = 0.$$

Exemplo 2.2.3

$$\begin{aligned} e^x = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ e^x - 1 = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ \Longrightarrow & \ j^k(e^x - 1) & = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Observação 2.2.5 *$j^k(f)$ pode ser identificado com a diferencial $df(0)$.*

Proposição 2.2.4 *Seja $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, então $j^k(f) \equiv j^k(g) \Longleftrightarrow \dfrac{\partial^{|a|} f}{\partial x^a}(0) = \dfrac{\partial^{|a|} g}{\partial x^a}(0)$, $\forall a = (a_1, \cdots, a_n)$ com $|a| = a_1 + \cdots + a_n \leq k$.*

Demonstração: Como $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, então f e g podem ser representado por série de Taylor na origem.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ e } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Como $j^k(f) \equiv j^k(g)$, então

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{k} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Mas isto é verdade se, e somente se,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n, \forall n \leq k$$

$$\Longleftrightarrow f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0), \forall n \leq k$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x^a}(0) = \frac{\partial^{|a|} g}{\partial x^a}(0), \forall a = (a_1, \cdots, a_n).$$

Momenclatura: O espaço $J^k_{(n,p)}$ é chamado de "O espaço de k-jatos do tipo (n,p).

Definição 2.2.4 *Para $s > t$, definimos*

$$\Pi^{s,t} : J^s_{(n,p)} \longrightarrow J^t_{(n,p)}$$

como sendo a projeção canônica $\Pi^{s,t}(p(x)) = j^t(p)$.

Proposição 2.2.5 *O $\Pi^{s,t} \circ j^s = j^t$ em*

$$\begin{array}{rcl} j^r : \mathcal{E}^0_{n,p} & \longrightarrow & J^r_{(n,p)} \\ f & \longmapsto & j^r(f). \end{array}$$

Como $\Pi^{s,t} \circ j^s(f) = \Pi^{s,t}(j^s(f))$, onde $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, temos $\Pi^{s,t}(j^s(f)) = j^t(f)$, se $t \leq s$. Daí, $\Pi^{s,t} \circ j^s \subset j^t$.

Seja $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, então $j^k(f) \in \mathcal{E}^0_{n,p}$. Como $t \leq s$, então se $j^t(f) \in J^t$, então $j^t \in J^s$, pois $J^t \subset J^s$. Portanto, j^t pertence ao domínio de $\Pi^{s,t} \circ j^s$. Logo $j^t \subset \Pi^{s,t} \circ j^s$.

Portanto $\Pi^{s,t} \circ j^s = j^t$.

Capítulo 3

Relações de Equivalência em Germes e Jatos

3.1 Ação de Grupo

Definição 3.1.1 *Sejam G um grupo e C um conjunto qualquer. Uma ação do Grupo G no conjunto C é uma função*

$$\varphi : G \times C \longrightarrow C$$

$$(g, c) \longmapsto \varphi(g, c) = g \cdot c$$

tal que:

i) $g_1(g_2c) = (g_1g_2)c$;

ii) $\varphi(e, c) = c, \forall c \in C$;

iii) $\varphi(g_1, \varphi(g_2, c)) = \varphi(g_1 \cdot g_2, c), \forall g_1, g_2 \in Ge\forall c \in C$.

Definição 3.1.2 *Dados $c_1, c_2 \in C$, definimos a relação $c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow \exists g \in G$ tal que $\varphi(g \cdot c_1) = c_2$.*

Proposição 3.1.1 *A relação $\sim$ é uma relação de equivalência.*

Prova:

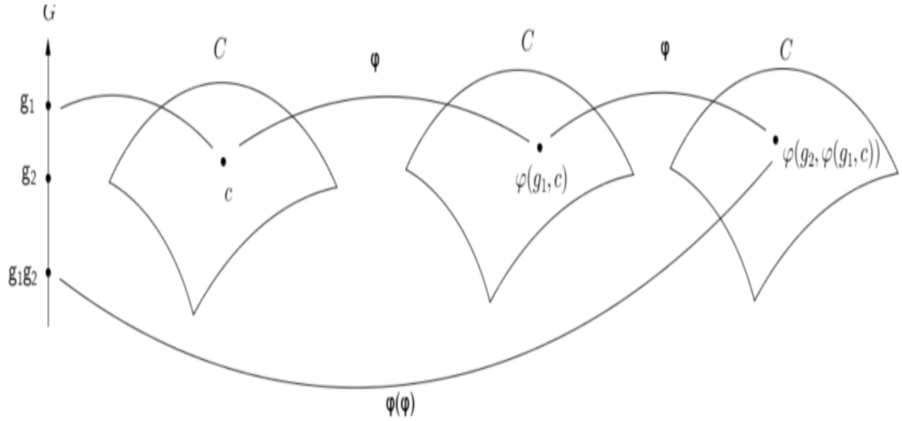

Figura 3.1:

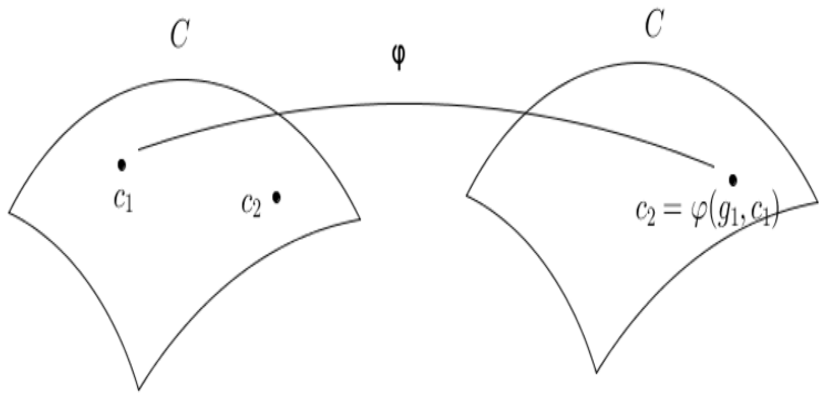

Figura 3.2:

i) **Reflexivo**:

Como G é um grupo, existe o elemento neutro $e \in G$. Daí, $\varphi(e, c_1) = c_1, \forall c_1 \in C$, logo $c_1 \sim c_1$.

ii) **Simetrica**:

Seja $g_1 \in G$ e $c_1, c_2 \in C$ tal que $\varphi(g_1, c_1) = g_1 \cdot c_1 = c_2$.

Como G é um grupo, então $\exists g_1^{-1} \in G$ tal que $g_1 \cdot g_1^{-1} = e$. Daí,

$$c_1 = \varphi(e, c_1) = \varphi(g_1 \cdot g_1^{-1}, c_1) = \varphi(g_1^{-1} \cdot g_1, c_1) = (g_1^{-1} \cdot g_1) \cdot c_1 =$$

$$= g_1^{-1} \cdot (g_1 \cdot c_1) = g_1^{-1} \cdot c_2 = \varphi(g_1^{-1}, c_2).$$

Portanto $c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow c_2 \sim c_1$.

iii) **Transitiva**:

Seja $c_1 \sim c_2$ e $c_2 \sim c_3$, donde $\exists g_1, g_2 \in G$ tal que $\varphi(g_1, c_1) = c_2$ e $\varphi(g_2, c_2) = c_3$.

Como $c_2 = g_1 \cdot c_1$, então $\varphi(g_2, g_1 c_1) = c_3$. Daí, $g_2 \cdot (g_1 c_1) = c_3$.

Logo $(g_2 \cdot g_1) \cdot c_1 = c_3$.

Portanto $c_1 \sim c_3$.

$\blacksquare$

Definição 3.1.3 *Definimos a **Órbita** de um elemento $c \in C$ como sendo a classe de equivalência de c pela relação $\sim$, isto é, a órbita de c é o conjunto*

$$\begin{aligned} G_c &= \{a \in C \mid \exists g \in G \textit{ com } \varphi(g,c) = a\} \\ &= \{a \in C \mid g \cdot c = a\} \\ &= \{a \in C \mid a \sim c\} \\ &= \{g \cdot c \mid g \in G\} \\ &= \{\varphi(g,c) \mid g \in G\}. \end{aligned}$$

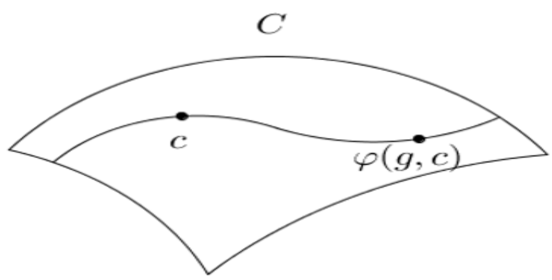

Figura 3.3:

Exemplo 3.1.1 *Seja $C = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ o conjunto das transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$ e $G := Gl_n \times Gl_p$ formado por pares de operadores lineares invertíveis de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, ou seja,*

$$C := \{T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p | T \textit{ é linear}\}$$

$$G := \{(A, B) | A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \textit{ invertível e } B : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p \textit{ invertível}\}.$$

Definimos:

$$\begin{aligned} \varphi : G \times C &\longrightarrow C \\ ((A,B),T) &\longmapsto \varphi((A,B),T) = B \circ T \circ A^{-1}. \end{aligned}$$

Observe que $\varphi((I_n, I_p), T) = I_p \circ T \circ I_n^{-1} = I_p \circ T \circ I_n = T$.

Proposição 3.1.2 *O φ é uma órbita do grupo G no conjunto C.*

Prova: Seja $G \cdot T = \mathcal{O}(T) = \{\varphi((A,B),T) \mid (A,B) \in G\}$ a órbita de T.

Daí, φ é uma órbita, pois se $S \in C$ tal que $T \sim S$, então existem $(A,B) \in G$ tal que:

$$\varphi((A,B),T) = B \circ T \circ A^{-1} = S.$$

Como $B \circ T \circ A^{-1} \in C, \forall (A,B) \in G$, então φ gera uma classe de equivalência, logo φ é uma órbita do grupo G no conjunto C.

■

Observação 3.1.1 *Em $C = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, temos a relação de equivalênçia.*

$$T \sim S \Leftrightarrow \text{ existem } (A,B) \in G \text{ tais que } T = B \circ S \circ A^{-1}$$

isto é, T e S estão na mesma órbita.

Teorema 3.1.1 *Duas transformações lineares $T, S \in C = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ são equivalentes se, e somente se, T e S têm o mesmo posto.*

Demonstração:($\Rightarrow$) Duas transformações lineares $T, S \in C$ são equivalentes se $\exists (A,B) \in G$ tal que $\varphi((A,B),T) = B \circ T \circ A^{-1} = S$. Como $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $B : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ são operadores invertíveis. Logo A e B têm posto máximo, assim, $posto(A) = n$ e $posto(B) = p$ e $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ tem posto k, onde $k \leq \{n, p\}$. Por propriedade de posto de transformações lineares, temos:

$$\begin{aligned} posto(S) &= posto(B \circ T \circ A^{-1}) \\ &\leq min\{posto(B), posto(T), posto(A^{-1})\} \\ &= k. \end{aligned}$$

Daí, $posto(S) \leq k$.

Como A e B são transformações lineares invertíveis, então

$$S = B \circ T \circ A^{-1} \Leftrightarrow B^{-1} \circ S \circ A = T.$$

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned} posto(T) &= posto(B^{-1} \circ S \circ A) \\ &\leq min\{posto(B^{-1}), posto(S), posto(A)\} \\ &= posto(S) \leq k \\ posto(T) &= k \leq posto(S) \leq k. \end{aligned}$$

Portanto, S e T têm o mesmo posto.

($\Leftarrow$) Suponha que S e T tem posto k, onde $k \leq nim\{n, p\}$. Como S e T são transformações lineares, pelo **Teorema do Posto**[2], existem $(A_1, B_1), (A_2, b_2) \in G$ tais que

$$\begin{cases} (B_1 \circ S \circ A_1^{-1})(x, y) = (x, 0) \\ (B_2 \circ T \circ A_2^{-1})(x, y) = (x, 0) \end{cases}$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_k)$ e $y = (x_{k+1}, \cdots, x_n)$. Tome

$$T_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x, y) \longmapsto T_k(x, y) = (x, 0).$$

Pela **Proposição 3.1.1**, como $S \sim T$ e $T \sim T_k$, então $S \sim T$.

$\blacksquare$

Consequência: Dado $T \in C$, tomando k = posto(T), temos que T é equivalente à transformação linear

$$T_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$T_k(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$$

pois o posto de T_k é igual à k.

Conclusão: Se duas transformações lineares estão em órbitas diferentes, então têm posto diferente, portanto, na ação de grupo G sobre C, existem exatamente $min\{n,p\}+1$ órbitas.

Definição 3.1.4 *Seja G um grupo agindo em um conjunto C. Fixado $a \in C$, denotamos por*

$$G_a = E(a) = \{g \in G | \varphi(g,a) = a\} \subset G$$

chamado de o subgrupo de ***isotropia de a*** *ou* ***estabilizador de a****.*

Proposição 3.1.3 *O estabilizador G_a é um subgrupo de G, ou seja, $G_a < G$.*

Prova: De fato, $\exists e \in G$ (elemento neutro) tal que $\varphi(e,a) = a$.
Se $\exists g \in G$ tal que $\varphi(g,a) = a$, então

$$a = \varphi(e,a) = \varphi(g^{-1} \cdot g, a) = (g^{-1} \cdot g) \cdot a = g^{-1} \cdot (g \cdot a) = g^{-1} \cdot a.$$

Logo $\varphi(g^{-1}, a) = a$, pois $g^{-1} \in G$. Daí, segue que se $g \in G_a$, então $g^{-1} \in G$. Agora tome $g_1, g_2 \in G$ tal que $\varphi(g_1,a) = a$ e $\varphi(g_2,a) = a$. Daí,

$$\varphi(g_1g_2, a) = (g_1g_2) \cdot a = g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = g_1 \cdot a = a$$

segue-se que $g_1g_2 \in G_a$.

$\blacksquare$

Definição 3.1.5 *Denotamos por R_n o conjunto de todos os germes de aplicações $h : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}^n, 0)$ tal que:*

a) h é um difeomorfismo de classe C^∞, quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

b) h é um isomorfismo quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Isto é:

$$R_n := \{h : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0) |\ h \text{ é difeomorfismo}\}$$

$$R_n := \{h : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) |\ h \text{ é isomorfismo}\}.$$

Proposição 3.1.4 *O R_n, com a composição de função, é um grupo.*

Prova: Seja $f, g, h \in R_n$, então vale:

i) Associatividade de composição:

$$(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f(g \circ h(x)) = f \circ (g \circ h)(x).$$

ii) Existe o elemento neutro:

A função identidade $I : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ definida por $I(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)$ é um difeomorfismo (isomorfismo) e $I \circ f \circ I(x) = f(x)$, segue-se que $I \in R_n$.

iii) Existência do inverso:

Seja $f \in R_n$, por definição, $f : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ é um difeomorfismo (isomorfismo), então existe o inverso f^{-1} tal que $f^{-1} : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ é um difeomorfismo (isomorfismo), logo $f^{-1} \in R_n$.

■

Observação 3.1.2 *Em geral, usamos a notação* [1] $\mathcal{R}$ *no lugar de* R_n*, desde que não cause interpretação irrôneas.*

3.2 Equivalências

3.2.1 A $\mathcal{R}$-Equivalência

Pode ser chamado também de equivalência à direita, pois esta relação de equivalência está relacionada à ação de grupo $\mathcal{R}$, dada por:

$$r : \mathcal{R} \times \mathcal{E}^0_{n,p} \longrightarrow \mathcal{E}^0_{n,p}$$

$$(h, f) \longmapsto r(h, f) = f \circ h^{-1}$$

onde h^{-1} faz composição com f pela direita, ou seja, h^{-1} faz mudança na fonte (domínio) de f.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n, 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{K}^p, 0 \\ \mathbb{K}^n, 0 \arrow[ur, "f \circ h^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

[1] $\mathcal{R}$ = Right: Direito (tradução)

Observação 3.2.1 *Como $h \in R$, então h é C^∞.*

Proposição 3.2.1 *A função r é uma ação do grupo R no conjunto $\mathcal{E}^0_{n,p}$.*

Prova: Pela **Proposição 3.1.4**, R é um grupo com a composição de função e $\mathcal{E}^0_{n,p}$ é o conjunto de todos os germes de funções suave na vizinhança do zero com $f(0) = 0$. Mostraremos que

$$r : \mathcal{R} \times \mathcal{E}^0_{n,p} \longrightarrow \mathcal{E}^0_{n,p}$$

$$(h, f) \longmapsto r(h, f) = f \circ h^{-1}$$

é uma ação.

Como $I \in R$, então

$$r(I, f) = f \circ I^{-1} = f \circ I = f \in \mathcal{E}^0_{n,p}, \forall f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$$

e dado $h_1, h_2 \in R$, temos

$$r(h_1, f) = f \circ h_1^{-1} \in \mathcal{E}^0_{n,p},$$

daí,

$$r(h_2, f \circ h_1^{-1}) = (f \circ h_1^{-1}) \circ h_2^{-1} = f \circ (h_1^{-1} \circ h_2^{-1}).$$

Como $(h_1^{-1} \circ h_2^{-1})$ é um difeomorfismo, então vale $(h_1^{-1} \circ h_2^{-1}) = (h_2 \circ h_1)^{-1}$. Logo $r(h_2, f \circ h_1^{-1}) = f \circ (h_2 \circ h_1)^{-1} = r(h_2 \circ h_1, f)$.

Portanto r é uma ação de grupo.

■

Dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ estão relacionados se, e somente se, estão na mesma R-órbita, isto é, $\exists h \in R$ tal que $r(h, g) = f$, ou equivalentemente, $f = g \circ h^{-1}$.

Notação: $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} g$ ou $g \in Rf$.

Exemplo 3.2.1 *Pelo* ***Teorema da Forma Local das Submersões*** *(ver [2]), se $f : \mathbb{R}^{n+k}, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ é tal que $f'(0)$ é sobrejetiva, então existe $h : \mathbb{R}^{n+k}, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}, 0$ difeomorfismo ($h \in R_{n+k}$) tal que $f \circ h(x, y) = x$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, donde segue que $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} I_{\mathbb{R}^n}$.*

3.2.2 A $\mathcal{L}$-Equivalência

Pode ser chamado também de equivalência à esquerda, pois esta relação de equivalência está relacionada à ação do grupo $\mathcal{L}$, dada por:

$$l : \mathcal{L} \times \mathcal{E}^0_{n,p} \longrightarrow \mathcal{E}^0_{n,p}$$

$$(k, f) \longmapsto l(k, f) = k \circ f$$

onde $\mathcal{L} := \mathcal{R}_p := \{k : \mathbb{K}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{K}^p, 0\}$ é difeomorfismo se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou isomorfismo se $\mathbb{K} = \mathbb{C}\}$. E k faz composição com f pela esquerda, ou seja, l faz mudança na meta (imagem) de f. Veja pelo diagrama abaixo que é comutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n, 0 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "k \circ f"'] & \mathbb{K}^p, 0 \arrow[d, "k"] \\ & \mathbb{K}^p, 0 \end{tikzcd}$$

Observe que, dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ são $\mathcal{L}$-equivalentes se, e somente se, os germes f e g estão na mesma $\mathcal{L}$-órbita, ou seja, existe $k : \mathbb{K}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{K}^p, 0$ difeomorfismo (isomorfismo) tal que $f = k \circ g$.

Exemplo 3.2.2 *Pelo* ***Teorema da Forma Local das Imersões*** *(ver [2]), se* $f : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}, 0$ *é tal que* $f'(0)$ *é injetiva, então existe* $k : \mathbb{R}^{n+k}, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}, 0$ *difeomorfismo* ($k \in R_{n+k}$) *tal que* $k \circ f(x) = (x, 0)$, *para todo* $(x) \in \mathbb{R}^n$, *donde segue que* $f \underset{\mathcal{L}}{\sim} I_{\mathbb{R}^n} \times \{0\}_{\mathbb{R}^k}$.

3.2.3 A $\mathcal{A}$-Equivalência

Esta relação de equivalência nasce da ação

$$a : (\mathcal{R} \times \mathcal{L}) \times \mathcal{E}^0_{n,p} \longrightarrow \mathcal{E}^0_{n,p}$$

$$((h, k), f) \longmapsto a((h, k), f) = k \circ f \circ h^{-1}.$$

Neste caso, diremos que dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ são $\mathcal{A}$-equivalentes se, e somente se, existe $(h, k) \in \mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ tal que $f = k \circ g \circ h^{-1}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n, 0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{K}^p, 0 \arrow[d, "k"] \\
\mathbb{K}^n, 0 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{K}^p, 0
\end{tikzcd}
$$

Teorema 3.2.1 *Os conjuntos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ são isomorfos aos subgrupos de $\mathcal{A}$.*

Demonstração: Sabemos que $\mathcal{R} \times \{I_p\}$ é um subconjunto de $\mathcal{A}$, onde $I_p : \mathbb{K}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{K}^p, 0$ é a aplicação identidade. Provaremos o teorema usando duas afirmações:

Afirmação 1: $\mathcal{R} \times \{I_p\} < \mathcal{A}$.

Seja $(h_1, I_p), (h_2, I_p), (h_3, I_p) \in \mathcal{R} \times \{I_p\}$, temos:

i) $(h_1, I_p) \cdot (h_2, I_p) = (h_1 \circ h_2, I_p \circ I_p)$. Como $h_1 \circ h_2 \in \mathcal{R}$ e $I_p \circ I_p = I_p$, então $(h_1 \circ h_2, I_p) \in \mathcal{R} \times \{I_p\}$.

ii) $(h_1, I_p) \cdot [(h_2, I_p) \cdot (h_1, I_p)] = (h_1, I_p) \cdot (h_2 \circ h_3, I_p) = (h_1 \circ (h_2 \circ h_3), I_p) = ((h_1 \circ h_2) \circ h_3, I_p) = (h_1 \circ h_2, I_p) \cdot (h_3, I_p) = [(h_1, I_p) \cdot (h_2, I_p)] \cdot (h_1, I_p)$.

iii) Como $h_1 \in \mathcal{A}$, então $h_1^{-1} \in \mathcal{A}$ e $I_p^{-1} = I_p$, daí, $(h_1, I_p) \cdot (h_1^{-1}, I_p^{-1}) = (h_1 \circ h_1^{-1}, I_p \circ I_p^{-1}) = (I_n, I_p)$.

Portanto, segue-se a afirmação 1.

Afirmação 2: $\mathcal{R} \simeq \mathcal{R} \times \{I_p\}$.

De fato, pois tome $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \times \{I_p\}$. Vemos que essa função é bijetiva. Logo $\mathcal{R} \simeq \mathcal{R} \times \{I_p\}$.

Portanto $\mathcal{R} \simeq \mathcal{R} \times \{I_p\} < \mathcal{A}$, segue analogamente que $\mathcal{L} \simeq \{I_n\} \times \mathcal{L} < \mathcal{A}$.

■

A $\mathcal{A}$-equivalência está associada à ação

$$
\begin{array}{rcl}
a : (\mathcal{R} \times \mathcal{L}) \times \mathcal{E}^0_{n,p} & \longrightarrow & \mathcal{E}^0_{n,p} \\
((h,k), f) & \longmapsto & k \circ f \circ h^{-1}
\end{array}
$$

onde a é uma ação de grupo.

Teorema 3.2.2 (do Posto Constante) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança aberto da origem e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação de classe C^∞ onde $f(0) = 0$. Suponha que $f'(a)$ tem posto constante, para todo $a \in U$. Então o germe $f \in \mathcal{E}^0_{n,n}$ é $\mathcal{A}$-equivalente ao germe de transformação linear $T_k : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ dada por $T_k(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_k, 0 \cdots, 0)$, onde $k = posto f'(a), \forall a \in U$.*

Demonstração: Como U é vizinhança aberta da origem, reindexando as coordenadas de f (mudança na meta), podemos assumir que

$$posto \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = m$$

$i, j = 1, \cdots, m, \forall x \in U$.

Claramente $m \leq \min\{n, p\}$. Seja $q = \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção $q(x_1, \cdots, x_p) = (x_1, \cdots, x_m)$. Então $q \circ f = (f_1, \cdots, f_m)$ e portanto é uma submersão, (ver [2]), e

$$posto \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = m = posto \left[\frac{\partial (q \circ f)_i}{\partial x_j}\right].$$

Logo, pela forma local das submersão, existe um difeomorfismo local $g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow g(U) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $(q \circ f) \circ g^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_m)$ é uma projeção linear e isto mostra que

$$f \circ g^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_m, \overline{f_{m+1}}(x), \cdots, \overline{f_p}(x))$$

onde $\overline{f_j} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Como f tem posto constante m, então $f \circ g^{-1}$ também tem posto constante m, nessa condição implica que

$$\frac{\partial \overline{f_j}}{\partial x_k}(x) = 0, \forall j = m+1, \cdots, p; k = m+1, \cdots, n \text{ e } \forall x \in U.$$

Então as funções $\overline{f_j}$ só depende de $x_1, \cdots, x_m$ e $j = m+1, \cdots, p$. Definamos o germe $h \in \mathcal{L}$ por

$$h(y_1, \cdots, y_p) = (y_1, \cdots, y_m, y_{m+1} - \overline{f_{m+1}}(\overline{y}), \cdots, y_p - \overline{f_p}(\overline{y}))$$

em que $\overline{y} = (y_1, \cdots, y_m, 0, \cdots, 0)$. Então,

$$\begin{aligned} h \circ f \circ g^{-1}(x_1, \cdots, x_n) &= h(x_1, \cdots, x_m, \overline{f_{m+1}}(x), \cdots, \overline{f_p}(x)) \\ &= (x_1, \cdots, x_m, \overline{f_{m+1}}(x) - \overline{f_{m+1}}(x), \cdots, \overline{f_p}(x) - \overline{f_p}(x)) \\ &= (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0). \end{aligned}$$

Portanto, $\exists h$ e g tal que $h \circ f \circ g^{-1} = T_k$. Logo, $f \underset{\mathcal{A}}{\sim} T_k$.

$\blacksquare$

3.3 Grupos e Equivalências

3.3.1 Grupo de Lie

Definição 3.3.1 *Um Grupo de Lie G é um grupo com uma estrutura de variedade diferenciável de classe C^∞ tal que a multiplicação*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto g \cdot h \end{aligned}$$

e a inversão

$$\begin{aligned} i : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

são aplicações de classe C^∞.

Exemplo 3.3.1 $S^1 = \{x + iy \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ *com o produto* $e^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}$ *e com a inversa* $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ *é um grupo de Lie.*

Definição 3.3.2 *Uma ação de grupo de Lie G em uma variedade suave M é uma ação de grupo $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ que é uma aplicação suave.*

Definição 3.3.3 *Sejam M e N variedades suaves.Uma imersão de N em M é uma aplicação suave $f : N \longrightarrow M$ tal que $f'(x)$ é injetiva, $\forall x \in N$.*

Seja G um grupo de Lie agindo em uma variedade M. Dado $x \in M$, a **órbita** de x é o conjunto

$$G_x := \{\varphi(g, x) \in M \mid g \in G\} \subset M.$$

Teorema 3.3.1 *Seja G um grupo de Lie agindo na variedade M. Então, as **órbitas** são subvariedades imersas de M.*

Demonstração: Ver [3].

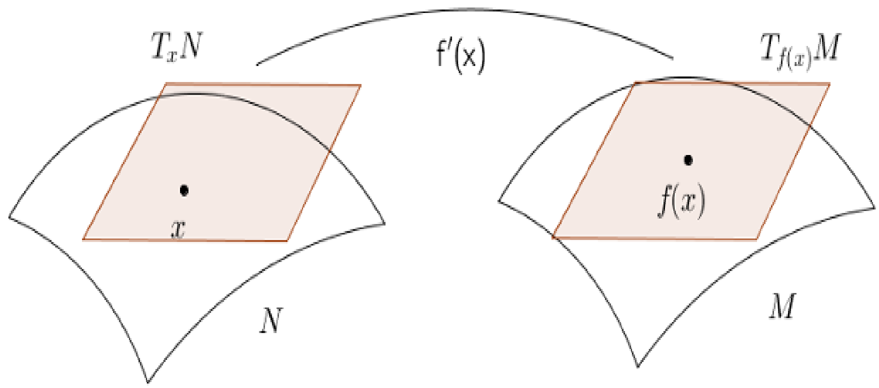

Figura 3.4:

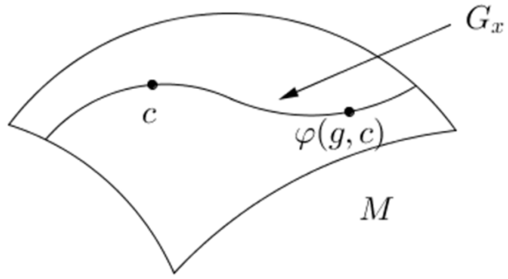

Figura 3.5:

Teorema 3.3.2 *Seja* $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ *uma ação de grupo de Lie* G *na variedade* M*. Então* $\forall x \in M$ *a aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi_x : G &\longrightarrow G_x \\ g &\longmapsto \varphi_x(g) = \varphi(g, x) \end{aligned}$$

é uma submersão.

Demonstração: Afirmação 1. φ_x tem posto constante.

Mostraremos que o posto de φ_x em $h \in G$, onde h é fixo, é igual ao posto de φ_x em $e \in G$ (elemento neutro).

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \xi : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto \xi(g) = h \cdot g \end{aligned}$$

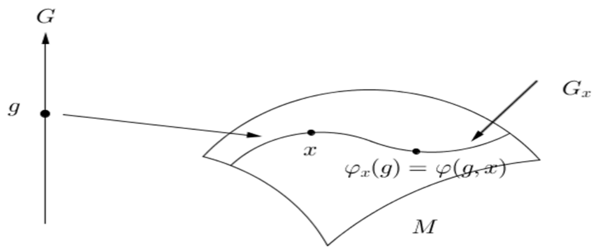

Figura 3.6:

e

$$\begin{aligned} \psi : G_x &\longrightarrow G_x \\ y &\longmapsto \psi(y) = \varphi(h, y). \end{aligned}$$

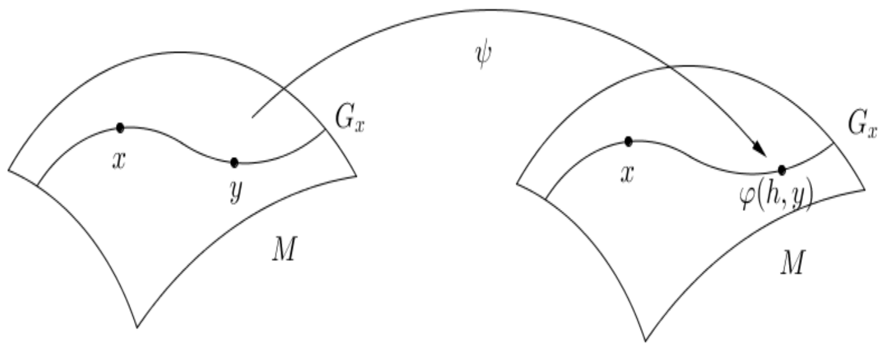

Figura 3.7:

Observe que:

$$\psi \circ \varphi_x(g) = \psi(\varphi_x(g)) = \psi(\varphi(g, x)) = \varphi(h, \varphi(g, x)) =$$

$$= \varphi(h \cdot g, x) = \varphi(\xi(g), x) = \varphi_x(\xi(g)) = \varphi_x \circ \xi(g), \forall g \in G.$$

Daí, temos que $\psi \circ \varphi_x \equiv \varphi_x \circ \xi$. Logo, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "\xi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G_x \arrow[d, "\psi"] \\ G \arrow[r, "\varphi_x"'] & G_x \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

De fato, de $\psi \circ \varphi_x(g) = \varphi_x \circ \xi(g)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
d(\psi \circ \varphi_x(g)) \mid_{g=e} &= d(\varphi_x \circ \xi(g)) \mid_{g=e} \\
d\psi(\varphi_x(e)) d(\varphi_x(e)) &= d\varphi_x(\xi(e)) d(\xi(e) \\
d\psi(x) d(\varphi_x(e)) &= d\varphi_x(f) d(\xi(e).
\end{aligned}$$

A comutatividade do diagrama (3.1) implica, pela regra da cadeia, na comutatividade do diagrama (3.2).

$$\begin{tikzcd}
T_eG \arrow[r, "d\varphi_x(e)"] \arrow[d, "d\xi(e)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T_xG_x \arrow[d, "d\psi(x)"] \\
T_hG \arrow[r, "d\varphi_x(h)"'] & T_{\varphi(h,x)}G_x
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Portanto, como $d\xi(e)$ e $d\psi(x)$ são isomorfismo, segue-se que posto$d\varphi_x(e) =$ posto$d\varphi_x(h)$.

■

Resta-nos mostrar que φ_x é submersão em algum $h \in G$, mas isto é consequência do teorema de Sard (ver [4]).

Teorema de Sard: $f : N \longrightarrow M$ suave. Então o conjunto dos valores regulares de f é denso em N.

Basta aplicar o **Teorema de Sard** à função $\varphi_x : G \longrightarrow G_x$. Daí, $\exists h \in G$ tal que posto$d\varphi_x(h)$ é máximo.

■

Corolário 3.3.1 $T_x(G_x) = d\varphi_x(e) \cdot (T_e(G)$.

Demonstração: $\varphi_x : G \longrightarrow G_x$ é submersão, então $d\varphi_x(e)$ é sobrejetiva, implica que $d\varphi_x(e) \cdot (T_eG) = T_x(G_x)$.

■

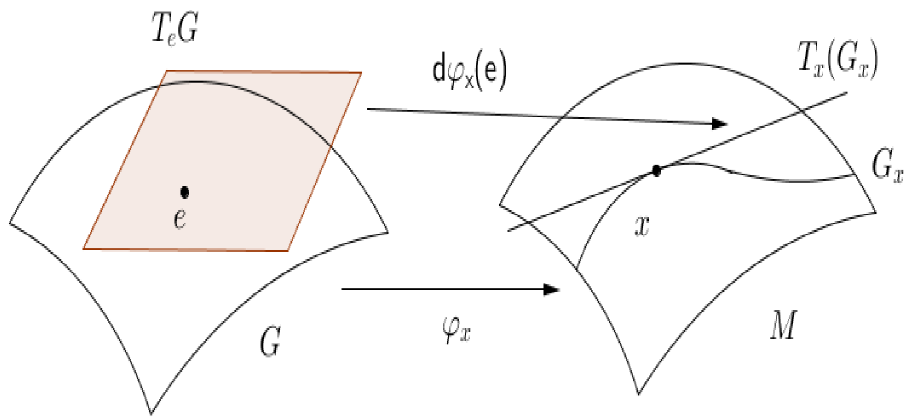

Figura 3.8:

3.3.2 O grupo $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$-Equivalência

O grupo $\mathcal{C}$ é formado pelos germes de difeomorfismos

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$$

tais que $\pi_1 \circ H(x, y) = x$ e $\pi_2(H(x, 0) = 0$. Isto é,

$$\mathcal{C} := \{H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \mid H(x, y) = (x, \varphi(x, y)), \text{ onde } \varphi(x, 0) = 0\}.$$

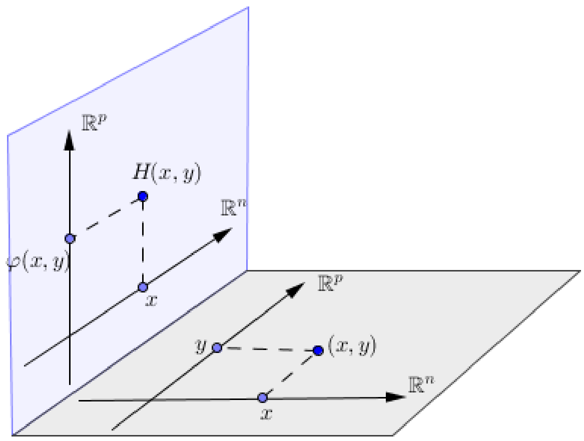

Figura 3.9:

O grupo $\mathcal{C}$ arge em $\mathbb{R}^n \times \mathcal{E}^0_{n,p}$ da seguinte forma.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{E}^0_{n,p} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathcal{E}^0_{n,p} \\ (H, (x, f(x))) & \longmapsto & H(x, f(x)) = (x, \varphi(x, f(x))). \end{array}$$

Desta forma, dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ são $\mathcal{C}$-equivalentes quando $\exists H \in \mathcal{C}$ tal que $H(x, f(x)) = (x, g(x))$.

Observação 3.3.1 $H(x, f(x)) = (x, \varphi(x, f(x))) = (x, g(x))$.

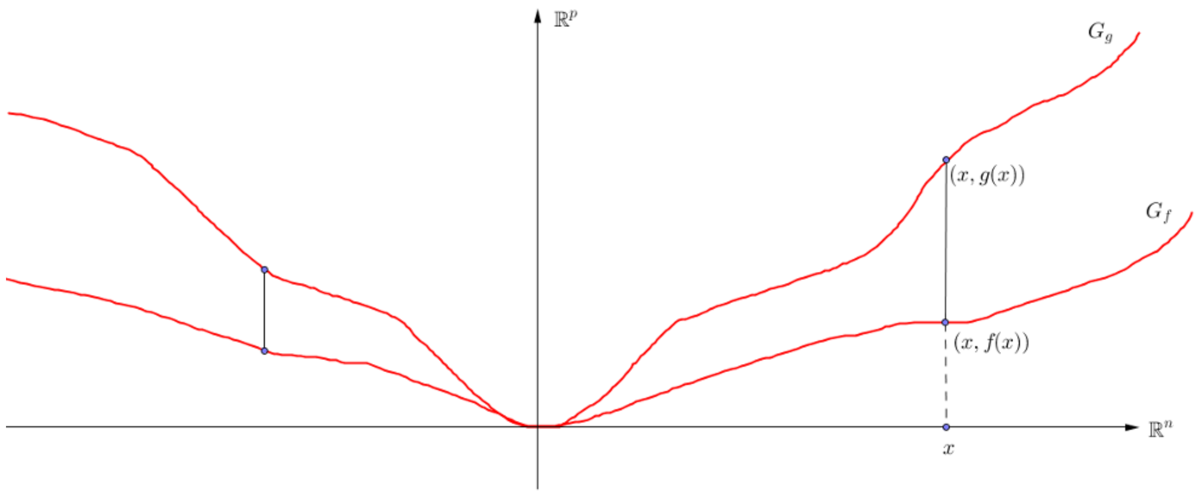

Figura 3.10:

Proposição 3.3.1 *Os elementos de $\mathcal{C}$ define uma família parametrizada por $x \in \mathbb{R}^n$ de difeomorfismos*

$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathbb{R}^p, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}^p, 0 \\ y &\longmapsto \varphi_x(y) = \varphi(x, y). \end{aligned}$$

Demonstração: Dado $H \in \mathcal{C}$, sabemos que $H(x, y) = (x, \varphi(x, y))$. Fixado $x \in \mathbb{R}^n$, define $\varphi_x : \mathbb{R}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ por $\varphi_x(y) = \varphi(x, y)$

$$JacH = \begin{bmatrix} [I_n]_{n \times n} & A \\ 0 & Jac\varphi_x \end{bmatrix}.$$

Como $Det(JacH) \neq 0$, então $Det(Jac\varphi_x) \neq 0$, logo φ_x é difeomorfismo.

■

3.3.3 O grupo $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}$-Equivalência (Grupo de Contato)

O grupo $\mathcal{K}$ é formado pelos germes de difeomorfismos $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$ tais que $\pi_1 \circ H(x, y) = h(x)$, onde $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ é um germe de difeomorfismo ($h \in \mathcal{R}$ e $\pi_2(H(x, y)) = \varphi(x, y)$ onde $\varphi(x, 0) = 0$).

$$\mathcal{K} := \{H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \mid H(x, y) = (h(x), \varphi(x, y)), h \in \mathcal{R} \text{ e } \varphi(x, 0) = 0\}.$$

A ação de $\mathcal{K}$ é definida da seguinte forma

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{K} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{E}^0_{n,p} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathcal{E}^0_{n,p} \\ (H, (x, f(x))) & \longmapsto & H(x, f(x)) = (h(x), \varphi(x, f(x))). \end{array}$$

Dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ são $\mathcal{C}$-equivalentes se, e somente se $\exists H \in \mathcal{C}$ tal que $H(x, f(x)) = (h(x), \varphi(x, f(x))) = (h(x), g \circ h(x))$.

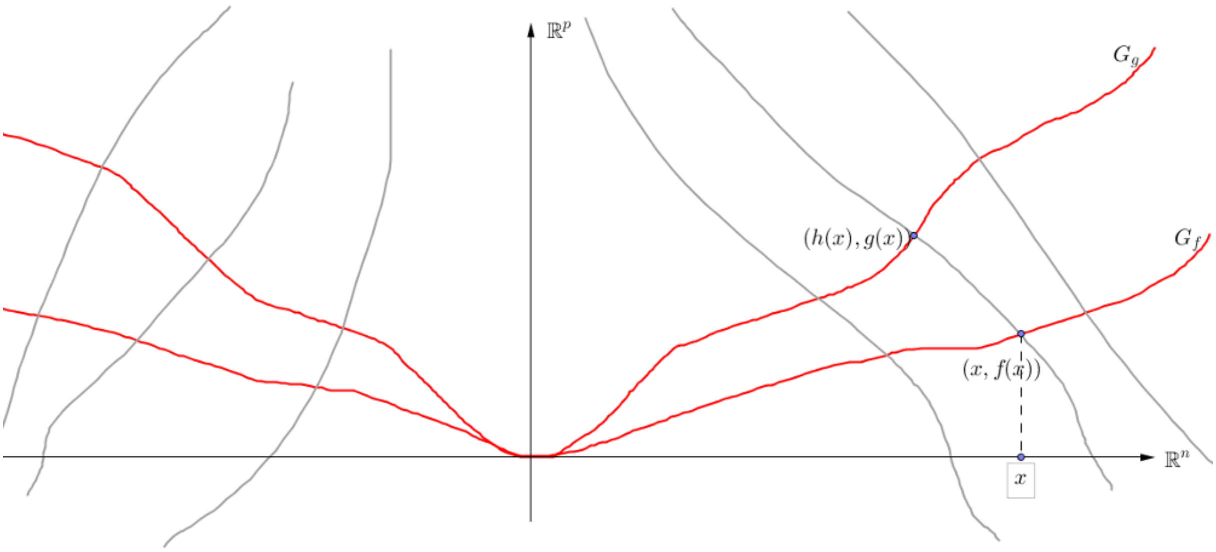

Figura 3.11:

Teorema 3.3.3 ***(Lema de Hadamard)*** *: Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ vizinhança convexa da origem e $f : U \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável que se anula em $(0, y) \in U \times \mathbb{R}^q$. Então existem funções diferenciáveis $f_1, \cdots, f_n : \times\mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x, y) = x_1 f_1(x, y) + \cdots + x_n f_n(x, y), \forall (x, y) \in U \times \mathbb{R}^q$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_q)$.*

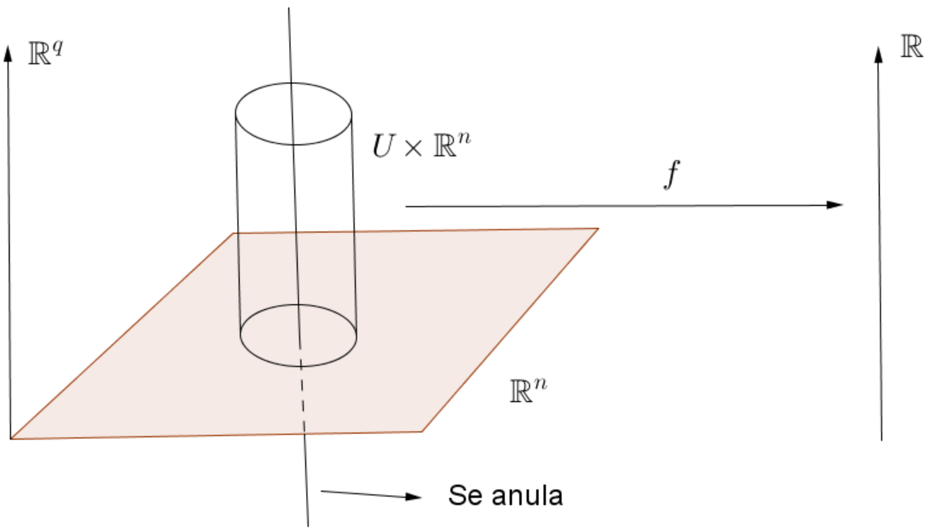

Figura 3.12:

Demonstração:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x,y) - f(0,y) \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[f(tx_1, \cdots, tx_n, y)\right] dt \\
&= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx,y)x_i\right] dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx,y)dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x,y)
\end{aligned}$$

onde $f_i(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx,y)dt$.

$\blacksquare$

Teorema 3.3.4 *Os germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ são $\mathcal{K}$-equivalentes se, e somente se, existir germe de difeomorfismo $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ tal que $f \circ h$ e g são $\mathcal{C}$-equivalentes.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} g$, então existe $\exists H \in \mathcal{K}$ tal que $H(x, g(x)) = (h(x), f \circ h(x))$ em que $H(x,y) = (h(x), \varphi(x,y))$.

Defina $\tilde{H}(x,y) = (x, \varphi(x,y))$. Então $\tilde{H} \in \mathcal{C}$ e $\tilde{H}(x, g(x)) = (x, \varphi(x, g(x))) = (x, f \circ h(x))$ segue que $f \circ h \underset{\mathcal{C}}{\sim} g$.

($\Leftarrow$) $\exists h$ tal que $f \circ h \underset{\mathcal{C}}{\sim} g$, então $\exists h(x,y) = (x, \varphi(x,y)) \in \mathcal{C}$ tal que $H(x, g(x)) = (x, f \circ h(x))$.

Defina $\overline{H}(x,y) = (h(x), \varphi(x,y)) \in \mathcal{K}$, temos

$$\overline{H}(x, g(x)) = (h(x), \varphi(x, g(x))) = (h(x), f \circ h(x)).$$

Portanto $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} g$.

$\blacksquare$

Definição 3.3.4 *Dado $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, definimos o ideal gerado pelas componentes de f, como sendo o ideal*

$$I_f =< f_1, \cdots, f_p >\subset \mathcal{E}_n.$$

Definição 3.3.5 *Dado $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, isto é, $f : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$, definimos $f^* : \mathcal{E}_p \longrightarrow \mathcal{E}_n$ por $f^*(h) = h \circ f$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^p, 0 \arrow[r, "h"] & \mathbb{K}, 0 \\
\mathbb{K}^n, 0 \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f^* \circ h"'] &
\end{tikzcd}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
I_f = f^*(\mathcal{M}_p) &= \{f^*(h) \mid h \in \mathcal{M}_p\} \\
&= \{h \circ f \mid h \in \mathcal{M}_p\} \\
&= < y_1 \circ f, \cdots, y_p \circ f > \\
&= < f_1, \cdots, f_p > .
\end{aligned}$$

Teorema 3.3.5 ***(Critério Algébrico para a $\mathcal{C}$-equivalência):*** *Sejam $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$. Então, são equivalentes:*

I) f e g são $\mathcal{C}$-equivalentes;

II) Os ideais I_f e I_g de $\mathcal{E}_n$ são iguais;

III) Existe uma matriz invertível $p \times p$ com coordenadas $a_{ij} \in \mathcal{E}_n$ tais que

$$f_i(x) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \cdot g_j(x), \forall i = 1, \cdots, p.$$

Demonstração: I) $\Longrightarrow$ II). Seja $f \underset{\mathcal{C}}{\sim} g$, então existe $H(x, y) = (x, \varphi(x, y)) \in \mathcal{C}$, onde $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \cdots, \varphi_p(x, y))$ e $\varphi_i(x, 0) = 0, \forall i = 1, \cdots, p$ tal que $H(x, g(x)) = (x, f(x))$. Implica que $(x, \varphi(x, g(x))) = (x, f(x)), \forall i = 1, \cdots, p$.
Pelo **Lema de Hadamard**, para cada $i = 1, \cdots, p$, tem-se:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, y) &= y_1\varphi_{i1}(x, y) + \cdots + y_p\varphi_{ip}(x, y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} y_i\varphi_{ij}(x, y). \end{aligned}$$

Logo, $f_i = \varphi_i(x, g(x)) = \sum_{j=1}^{p} g_i(x,)\varphi_{ij}(x, g(x)) \in I_g$.

Portanto $I_f \subset I_g$. Por simétria da $\mathcal{C}$-equivalência $I_g \subset I_f$.

Portanto $I_f = I_g$.

II) $\Longrightarrow$ III). Dadas duas matrizes $p \times p$ A e B, existe uma matriz C tal que $C(I - AB) + B$ é invertível. Usemos esse fato na prova. Suponha que $I_f = I_g$. Então podemos escrever

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}(x) f_j(x) \text{ e } f_i(x) = \sum_{j=1}^{p} b_{ij} g_j(x)$$

onde $a_{ij}, b_{ij} \in \mathcal{E}_n, \forall i = 1, \cdots, p$.

Sejam $A(x) = (a_{ij})$ e $B(x) = (b_{ij})$ matrizes de funções $p \times p$. Usando o fato de $C(I - AB) + B$ ser invertível para alguma matriz C, então $C(I - A(0)B(0)) + B(0)$ é uma matriz numérica invertível para alguma matriz C, então existe uma vizinhança de $x = 0$ tal que $U_x = C(I - A(x)B(x)) + B(x)$ é invertível, $\forall x$ nessa vizinhança.

Seja $u_{ij}(u)$ as coordenadas de U_x. Então,

$$\begin{aligned} U_x \cdot g &= (C(I - A(x)B(x)) + B(x)) \cdot g \\ &= C(I - A(x)B(x)) \cdot g + B(x) \cdot g \\ &= C(g - A(x)B(x) \cdot g) + f \\ &= C(g - g) + f \\ &= f. \end{aligned}$$

Logo $U_x \cdot g = f$. Portanto $f_i(x) = \sum_{j=1}^{p} u_{ij} g_j(x)$.

III) $\Longrightarrow$ I). Sunponha que existe uma matriz invertível $U_x = (U_{ij}(x))$ tal que $U_x \cdot g = f$, ou seja, $f_i(x) = \sum_{j=1}^{p} u_{ij} g_j(x), \forall i = 1, \cdots, p$. Defina $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ por $\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{p} u_{ij} g_j(x), \forall i = 1, \cdots, p$.

Claramente $\varphi(x, 0) = \varphi_1(x, 0), \cdots, \varphi_p(x, 0)) = 0$. Defina agora o germe $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$ por $(x, g) \longmapsto H(x, y) = (x, \varphi(x, y))$. Temos

$$JacH = \begin{bmatrix} I_n & D \\ 0 & Jac\varphi_x \end{bmatrix}$$

e $|Jac\varphi_x| = det(u_{ij}) \neq 0$.

Portanto H é difeomorfismo, logo $H \in \mathcal{C}$ e além disso $H(x, g(x)) = (x, \varphi(x, g(x)) = (x, f(x))$, pois $\varphi_i(x, g(x)) = f_i(x)$, daí $\varphi(x, g(x)) = f(x)$.

Portanto f e g são $\mathcal{C}$-equivalentes.

■

Exemplo 3.3.2 *Seja $f, g : \mathbb{R}, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, 0$ dada por: $f(x) = (x^2, 0)$ e $g(x) = (x^2, x^3)$.*

$I_f =< x^2 >$ e $I_g =< x^2, x^3 >=< x^2 >$.

Portanto f e g são $\mathcal{C}$-equivalentes.

Teorema 3.3.6 *Seja o germe $h \in \mathcal{E}_n$. Então:*

I) $h^* : \mathcal{E}_p \longrightarrow \mathcal{E}_n$ é um homomorfismo de anéis;

II) Se $I : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ é o germe da identidade, então $I^* : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n$ é o homomorfismo identidade;

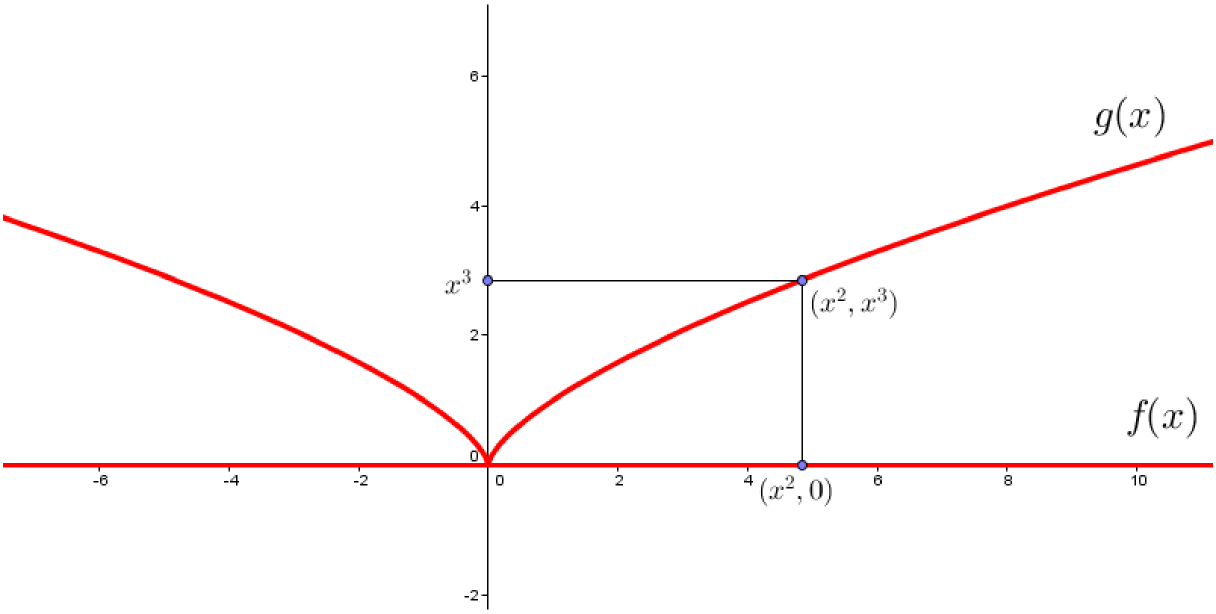

Figura 3.13:

III) O germe $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ é invertível se, e somente se, $h^* : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n$ é um isomorfismo do anel $\mathcal{E}_n$.

Demonstração: I) $h^*(f+g) = (f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h = h^*(f) + h^*(g)$ e $h^*(f\cdot g) = (f\cdot g)\circ h = (f\circ h)\cdot(g\circ h) = (h^*(f))\cdot(h^*(g))$.

II) $I^*(f) = f\circ I = f$.

III) **Afirmação:** Dados $h_1 \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ e $h_2 \in \mathcal{E}^0_{p,k}$ então $(h_2\circ h_1)^* = h_1^*\circ h_2^*$.

De fato: Seja $f \in \mathcal{E}_k$, então, $(h_2\circ h_1)^* = f\circ(h_2\circ h_1) = (f\circ h_2)\circ h_1 = h_1^*(f\circ h_2) = h_1^*(h_2^*(f)) = (h_1^*\circ h_2^*)(f)$.

Daí, segue a afirmação.

$(\Longrightarrow) h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ é invertível

$$\Longrightarrow \begin{cases} h\circ h^{-1} = I \\ h^{-1}\circ h = I \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (h\circ(h^{-1})^* = I^* \\ (h^{-1}\circ h)^* = I^* \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h^*\circ(h^{-1})^* = I^* \\ (h^{-1})^*\circ h^* = I^*. \end{cases}$$

Em particular, $(h^{-1})^* = (h^*)^{-1}$. Daí, h^* é um homomorfismo bijetivo. Logo h^* é um isomorfismo.

$(\Longleftarrow)$ Suponha $h^* : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n$ é um isomorfismo, $\exists (h^*)^{-1} : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n$ tal que

$$\begin{cases} h^*\circ(h^{-1})^* = I_{\mathcal{E}_n} = I^* \\ (h^{-1})^*\circ h^* = I_{\mathcal{E}_n} = I^* \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (h\circ(h^{-1})^* = I^* \\ (h^{-1}\circ h)^* = I^* \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h\circ h^{-1} = I_{\mathbb{R}^n} \\ h^{-1}\circ h = I_{\mathbb{R}^n}. \end{cases}$$

Portanto h é invertível.

$\blacksquare$

Definição 3.3.6 *Sejam I e J ideais de $\mathcal{E}_n$. Diremos que I e J são isomorfos induzidos quando existir um germe de difeomorfismo $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ tal que $h^*(I) = J$.*

Teorema 3.3.7 *Dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ são $\mathcal{K}$-equivalentes se, e somente se, os ideais I e J são isomorfos induzidos.*

Demonstração: Segue que $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} g$ se, e somente se, existir $h \in \mathcal{R}$ tal que $f \circ h \underset{\mathcal{C}}{\sim} g$ se, e somente se, os ideais $I_{f \circ h}$ e I_J são iguais se, e somente se, existir $h^* : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n$ tal que $h^*(I) = J$.

$\blacksquare$

3.4 Espaço Tangente à $\mathcal{R}$-órbita

Seja $\mathcal{R} = \{h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0 \mid h \text{ é difeomorfismo de classe } C^\infty\}$. Sabemos que:

$$T_{I_n}\mathcal{R} := \{\gamma'(0) \in \mathcal{E}^0_{n,n} \mid \gamma : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{E}^0_{n,n} \text{ é um caminho diferenciável com } \gamma(0) = I_n\}$$

onde I_n é o germe identidade.

Teorema 3.4.1 *O espaço tangente $T_{I_n}\mathcal{R}$ é igual a $\mathcal{E}^0_{n,n}$.*

Demonstração: ($\subseteq$) Por definição $T_{I_n}\mathcal{R} \subset \mathcal{E}^0_{n,n}$.

($\supseteq$) Dado $g \in \mathcal{E}^0_{n,n}$, definamos $\gamma : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{E}^0_{n,n}$ por $\gamma(t) = I_n + t \cdot g$. Então $\gamma'(0) = g$, logo $g \in T_{I_n}\mathcal{R}$, daí $\mathcal{E}^0_{n,n} \subset T_{I_n}\mathcal{R}$.

Portanto $T_{I_n}\mathcal{R} = \mathcal{E}^0_{n,n}$.

Teorema 3.4.2 *Vale a seguinte igualdade: $T_f(\mathcal{R}_f) = \mathcal{M}_n Jf$, onde $Jf =< \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) >_{\mathcal{E}_n}$.*

Sabemos, do **Corolário 3.3.1**, que $T_f(\mathcal{R}_f) = d\varphi_f(I_n)(T_{In}\mathcal{R})$ onde

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{R} \times \mathcal{E}_n &\longrightarrow \mathcal{E}_n \\ (h, f) &\longmapsto f \circ h. \end{aligned}$$

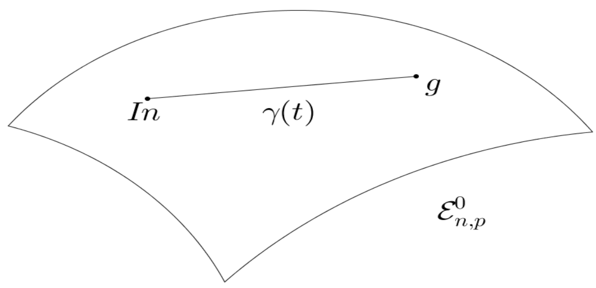

Figura 3.14:

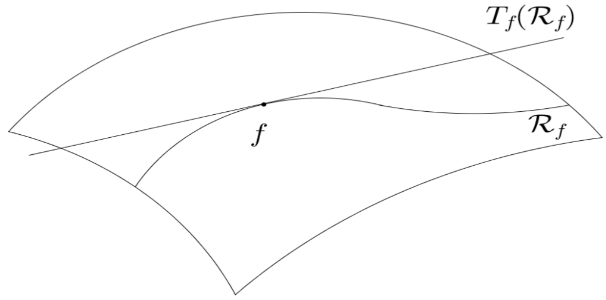

Figura 3.15:

Além disso

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_f &= \{\varphi(h, f) \mid h \in \mathcal{R}\} \\ &= \{f \circ h \mid h \in \mathcal{R}\} \\ &= \{g \mid g = f \circ h, \text{ para algum } h \in \mathcal{R}\}.\end{aligned}$$

Dado $g \in T_{I_n}\mathcal{R} = \mathcal{E}^0_{n,n}$, temos $g = (g_1, \cdots, g_n)$. Seja $\gamma(t) = I_n + t \cdot g$ e defina $\beta(t)$ como sendo a imagem de $\gamma(t)$ pela função

$$\begin{aligned}\varphi_f : \mathcal{R} &\longrightarrow \mathcal{E}_n \\ h &\longmapsto f \circ h.\end{aligned}$$

Isto é: $\beta(t) = \varphi_f(\gamma(f)) = f \circ \gamma(t)$

Observação 3.4.1 *$\beta'(t) \in T_f(\mathcal{R}_f)$ e*

$$\beta(t)(x) = f \circ \gamma(t)(x) = f((I_n + tg)(x)) = f(x + tg(x)).$$

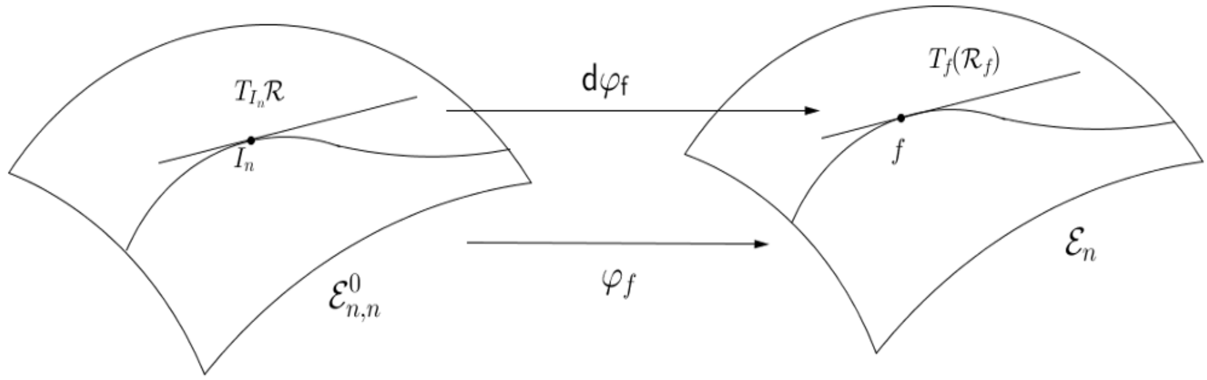

Figura 3.16:

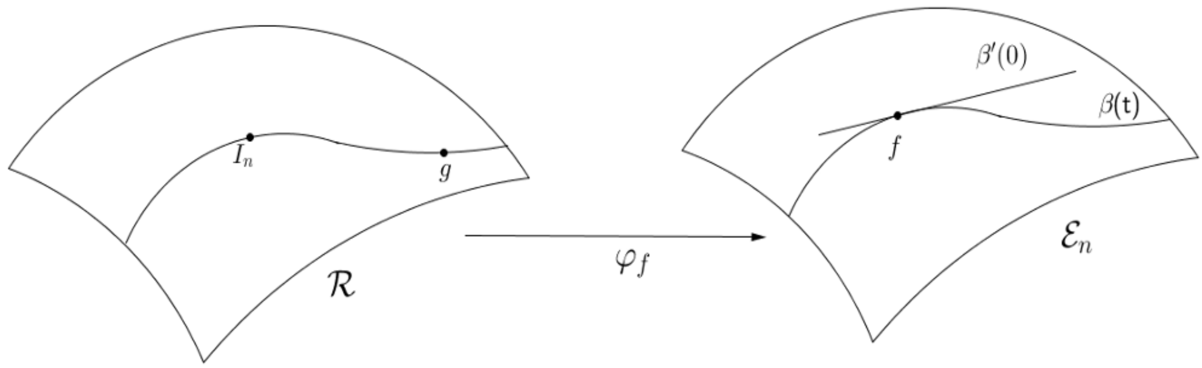

Figura 3.17:

Daí, $\beta'(0) = \frac{d}{dt}(f(x+tg(x))) \mid_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g_i(x)$, onde $g_i : \mathbb{K}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{K}, 0$, logo $g_i \in \mathcal{M}_n$. Então,

$$T_f(\mathcal{R}_f) = \left\{ \beta'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g_i(x) \right\} = \mathcal{M}_n J f$$

em que $Jf = < \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) >_{\mathcal{E}_n}$.

■

Definição 3.4.1 *Definimos o espaço tangente estendido por* $(T_E)_f(\mathcal{R}f) = Jf$. *O conjunto* Jf *é chamado de ideal jacobiano de* f.

Definição 3.4.2 *Seja* $f \in \mathcal{E}_n$, *definimos o* $\mathcal{R}$*-codimensão de* f *por:*

$$cod_{\mathcal{R}}f = dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathcal{E}_n}{Jf}.$$

Diremos que f tem $\mathcal{R}$-codimensão finita quando $cod_{\mathcal{R}}f < +\infty$.

Exemplo 3.4.1 *Tome em $\mathcal{E}_2$ os germes $f(x,y) = x^2 + y^3$ e $g(x,y) = x^3 + x^2y$.*

Temos $Jf =< 2x, 3y^2 >=< x, y^2 >$ e $Jg =< 3x^2 + 2xy, x^2 >=< xy, x^2 >$.

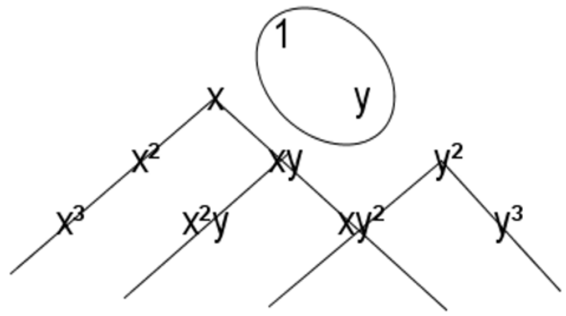

Figura 3.18: *Logo $dim_{\mathbb{R}}\frac{\mathcal{E}_2}{Jf} = 2 = cod_{\mathcal{R}}f$*

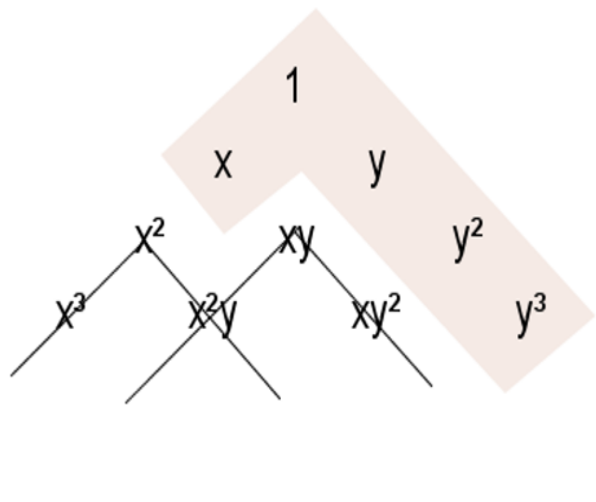

Figura 3.19: *Logo $dim_{\mathbb{R}}\frac{\mathcal{E}_2}{Jg} = +\infty = cod_{\mathcal{R}}g$*

Teorema 3.4.3 *Seja $f \in \mathcal{E}_n$. Então f tem $\mathcal{R}$-codimensão finita se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}_n^k \subset Jf$.*

Demonstração: $cod_{\mathcal{R}}f < +\infty \Longleftrightarrow dim_{\mathbb{R}}\frac{\mathcal{E}_n}{Jf} < +\infty \Longleftrightarrow codJf < +\infty \Longleftrightarrow \mathcal{M}_n^k \subset Jf$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

■

Definição 3.4.3 *$f : U \subset \mathbb{R}^n, \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $a \in U$.*

i) Diremos que a é um ponto singular de f quando $\nabla f(a) = \vec{0}$;

ii) Diremos que a é um ponto regular de f quando $\nabla f(a) \neq \vec{0}$.

Teorema 3.4.4 *Seja $f \in \mathcal{E}_n$ um germe de $\mathcal{R}$-codimensão finita e não-nula. Então a origem de $\mathbb{R}^n$ é um ponto singular isolado de qualquer representante de f. Isto é, existe uma vizinhança U da origem em $\mathbb{R}^n$ tal que a origem é o único ponto singular do representante de f em U.*

Demonstração: Afirmação. Se $cod_{\mathcal{R}}f > 0$, então a origem é ponto singular de f. De fato, se 0 for ponto regular de f, isto é, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \neq 0$ para algum $i = 1, \cdots, n$. Então, por continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, existe uma vizinhança U de 0 tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0, \forall x \in U$.

Logo, $Jf = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle = \mathcal{E}_n$, pois $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é invertível, daí, $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \in Jf$. Logo $dim_{\mathbb{R}}\frac{\mathcal{E}_n}{Jf} = 0 = cod_{\mathcal{R}}f$.

Portanto segue a afirmação.

■

Sabemos que $cod_{\mathcal{R}}f < +\infty \underset{(3.2.3)}{\Longrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}_n^k \subset Jf$.

Observe que $x_1^k, \cdots, x_n^k \in \mathcal{M}_n^k \subset Jf$. Daí, $x_i^k = \sum_{j=1}^n \alpha_J(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ para cada $i = 1, \cdots, n$.

Assim, se $a = (a_1, \cdots, a_n)$ é ponto singular de f, então $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = 1, \cdots, n$. Segue que

$$x_i^k = a_i^k = \sum_{j=1}^n \alpha_J(a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = 1, \cdots, n.$$

Como $a_i^k = 0, \forall i = 1, \cdots, n$, logo $a_1 = \cdots = a_n = 0$, segue que $a = (0, \cdots, 0)$. Portanto a origem é o único ponto singular de f.

■

3.5 Germes finitamente Determinados

Esta seção é continuação da **seção 3.2** e **3.3**, tendo quase as mesmas definições, iremos abordar mais especificamente a $\mathcal{R}$-equivalência, mas pode ser substituído o $\mathcal{R}$ por $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{K}$.

Definição 3.5.1 *Um germe $f : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}, 0$ é dito k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado se, $\forall g \in \mathcal{E}_n$ tal que $j^k(g) = j^k(f)$ tem-se que $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} g$. Isto é, $f = g \circ h$ para algum $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ germe difeomorfismo.*

Observe que, o germe f é k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado se, e somente se, $\{g \in \mathcal{E}_n \mid j^k(g) = j^k(f) \subset \mathcal{R}f\}$, ou se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}, \forall g \in \mathcal{E}_n$ com $j^k(g) = j^k(f)$, implica que $f = g \circ h^{-1}$ onde $h \in \mathcal{R}$.

Proposição 3.5.1 *Seja f um germe k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado. Então:*

a) $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} j^k(f)$;

b) f é k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado, $\forall \ell \geq k$.

Demonstração: a) Seja $g(x) = j^k(f(x))$, daí, temos $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} g$. Logo $j^k(f) = j^k(g) = j^k(j^k(f)) = j^k(f)$.

b) Seja $g \in \mathcal{E}_n$, tal que $j^\ell(g) = j^\ell(f), \forall \ell \geq k$. Logo, $j^k(g) = j^k(f)$. Como f é k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado, então $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} g$.

Definição 3.5.2 *Diremos que um germe $f \in \mathcal{E}_n$ é $\mathcal{R}$-finitamente determinado se este for k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado para algum $k \in \mathbb{N}$. E o menor $k \in \mathbb{N}$ tal que f é $\mathcal{R}$-finitamente determinado chama-se o grau de determinação finita de f.*

A seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} \Pi_k : \mathcal{E}_n & \longrightarrow & J^k_{(n,1)} \\ f & \longmapsto & \Pi_k(f) = j^k(f) \end{array}$$

é um homomorfismo de álgebra. Pois

- $\Pi_k(f+g) = \Pi_k(f) + \Pi_k(g)$;

- $\Pi_k(a \cdot g) = a\Pi_k(g)$;

- $Ker(\Pi_k) = \{f \in \mathcal{E}_n \mid \Pi_k(f) = 0\} = \dfrac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_n^{k+1}}$.

Seja $\mathcal{R}_k = \{h \in \mathcal{R} \mid j^k(h) = Id\} \subset \mathcal{R}$.

Observe que vale a seguinte sequência de inclusão $\cdots \subset \mathcal{R}_k \subset \mathcal{R}_{k+1} \subset \cdots \subset \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}$.

Proposição 3.5.2 *O conjunto $\mathcal{R}_k$ é um subgrupo normal de $\mathcal{R}$.*

Afirmação 1. $\mathcal{R}_k < \mathcal{R}$.

Seja $h_1, h_2 \in \mathcal{R}_k$, logo $j^k(h_1) = Id$ e $j^k(h_2) = Id$, como $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{R}$, então $h_1 \circ h_2 \in \mathcal{R}$, daí

$$j^k(h_1 \circ h_2) = \Pi_k(j^k h_1 \circ j^k h_2) = \Pi_k(Id \circ Id) = \Pi_k(Id) = j^k(Id) = Id.$$

Daí, $h_1 \circ h_2 \in \mathcal{R}_k$.

Como $Id \in \mathcal{R}_k$, temos

$$Id = j^k(Id) = j^k(h_1^{-1} \circ h_1) = \Pi_k(j^k h_1^{-1} \circ j^k h_1)$$

$$\Pi_k(j^k h_1^{-1} \circ Id) = \Pi_k(j^k h_1^{-1}) = j^k(j^k h_1^{-1}) = j^k(h_1^{-1}).$$

Portanto $h_1^{-1} \in \mathcal{R}_k$. Daí, segue a afirmação 1.

Afirmação 2. $\mathcal{R}_k \lhd \mathcal{R}$.

Para isso basta mostrar que $K \circ \mathcal{R}_k \circ K^{-1} = \mathcal{R}_k, \forall K \in \mathcal{R}$.

Tome $h_1 \in \mathcal{R}_k$, mostraremos que $K \circ h_1 \circ K^{-1} \in \mathcal{R}_k$. Consideremos $K \circ h_1 \circ K^{-1} = h_2$, como K e h_1 são invertíveis, então vale

$$\begin{array}{rcl} & K \circ h_1 \circ K^{-1} \circ K & = h_2 \circ K \\ \Longrightarrow & K \circ h_1 \circ Id & = h_2 \circ K \\ \Longrightarrow & K^{-1} \circ K \circ h_1 \circ Id & = K^{-1} \circ h_2 \circ K \\ \Longrightarrow & Id \circ h_1 \circ Id & = K^{-1} \circ h_2 \circ K \\ \Longrightarrow & h_1 & = K^{-1} \circ h_2 \circ K. \end{array}$$

Como $h_1 \in \mathcal{R}_k$, logo $K^{-1} \circ h_2 \circ K \in \mathcal{R}_k$. Mas isso implica que $h_2 \in \mathcal{R}_k$. Portanto $K^{-1} \circ h_1 \circ K \in \mathcal{R}_k$. Daí, segue a afirmação 2.

$\blacksquare$

Exemplo 3.5.1 *Mostrar que $f(x,y) = x^2 + y^2$ é 2-$\mathcal{R}$-finitamente determinado.*

Seja $g \in \mathcal{E}_2$ tal que $j^2 g(0) = j^2 f(0)$. Temos que

$$\begin{aligned}
j^2 f(x) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2 \\
&= \frac{1}{2}2x^2 + \frac{1}{2}2y^2 \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Então $j^2 g(0) = j^2 f(0) \Longrightarrow g(x,y) = x^2 + y^2 + h(x,y)$ com $h \in \mathcal{M}_2^3$.

Como $\mathcal{M}_2^3 = < x^3, x^2y, xy^2, y^3 >$, segue que

$$\begin{aligned}
h(x,y) &= a_1(x,y)x^3 + a_2(x,y)x^2y + a_3(x,y)xy^2 + a_4(x,y)y^3 \\
&= x^2(a_1(x,y)x + a_2(x,y)y) + y^2(a_3(x,y)x + a_4(x,y)y) \\
&= x^2 h_1(x,y) + y^2 h_2(x,y).
\end{aligned}$$

Onde $h_1(x,y) = a_1(x,y)x + a_2(x,y)y$ e $h_2(x,y) = a_3(x,y)x + a_4(x,y)y$. Logo,

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= x^2 + y^2 + h(x,y) \\
&= x^2 + y^2 + x^2 h_1(x,y) + y^2 h_2(x,y) \\
&= x^2(1 + h_1(x,y)) + y^2(1 + h_2(x,y)) \\
&= (x\sqrt{1 + h_1(x,y)})^2 + y\sqrt{1 + h_2(x,y)})^2 \\
&= (f \circ \phi)(x,y).
\end{aligned}$$

Onde $\phi(x,y) = (x\sqrt{1 + h_1(x,y)}, y\sqrt{1 + h_2(x,y)})$. Mostraremos que ϕ é um germe de difeomorfismo. Como $h_1, h_2 \in \mathcal{M}_2$, então $1 + h_1(0,0) = 1 + h_2(0,0) = 1 \geq 0$, daí, pelo **Teorema da Conservação de Sinal**, existe uma vizinhança da origem tal que

$1 + h_1(x,y)$ e $1 + h_2(x,y)$ são positivas. Logo, $\dfrac{1}{\sqrt{1+h_1(x,y)}}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{1+h_2(x,y)}}$ estão bem definidas numa vizinhança da origem. Assim,

$$Jac\phi(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+h_1(x,y)} + \dfrac{x\frac{\partial h_1(x,y)}{\partial x}}{2\sqrt{1+h_1(x,y)}} & \dfrac{x\frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y}}{2\sqrt{1+h_1(x,y)}} \\ \dfrac{y\frac{\partial h_2(x,y)}{\partial x}}{2\sqrt{1+h_2(x,y)}} & \sqrt{1+h_2(x,y)} + \dfrac{y\frac{\partial h_2(x,y)}{\partial y}}{2\sqrt{1+h_2(x,y)}} \end{pmatrix}$$

$$det(Jac\phi(0,0)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0.$$

Portanto, pelo **Teorema da Função Inversa**, ϕ é um germe de difeomorfismo.

Observação 3.5.1 *Vimos que* $J^k(f \circ h) = \Pi_k(j^k(f) \circ j^k(h))$*. Logo, se* $h \in \mathcal{R}_k$*, então* $J^k(f \circ h) = \Pi_k(j^k(f) \circ j^k(h)) = \Pi_k(j^k(f)) = J^k(f)$*.*

Como $\mathcal{R}_k \lhd \mathcal{R}$, defina $J^k\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_k} \simeq \{j^k h \mid h \in \mathcal{R}\}$, isto vale pelo **Teorema do isomorfismo**. Considere a ação

$$\begin{aligned} \circ : J^k\mathcal{R} \times J^k_{(n,1)} &\longrightarrow J^k_{(n,1)} \\ (j^k h, j^k f) &\longmapsto j^k(f \circ h). \end{aligned}$$

Esta operação está bem definida. Se $j^k h(0) \in J^k\mathcal{R}$ e $j^k f(0) \in J^k_{(n,1)}$, então $j^k(f \circ h)(0) \in J^k_{(n,1)}$, pois como $h \in \mathcal{R}$ e $f \in \mathcal{E}^0_n$, então $f \circ h \in \mathcal{E}^0_n$.

Mostraremos agora que é uma ação.

i) Para todo $j^k f(0) \in J^k_{(n,1)}$, temos

$j^k(f \circ Id)(0) = j^k f(0)$.

ii) Para todo $j^k h_1(0), j^k h_2(0) \in J^k\mathcal{R}$ e $j^k f(0) \in J^k_{(n,1)}$, temos

$(j^k h_1(0) \circ j^k h_2(0)) \circ j^k f(0) = j^k(h_1 \circ h_2(0)) \circ j^k f(0) = j^k(f \circ (h_1 \circ h_2)^{-1}(0)) =$

$(j^k h_1(0) \circ j^k(f \circ h_2^{-1})(0) = j^k h_1(0) \circ (j^k h_2(0) \circ j^k f(0))$.

De i) e ii) segue que $\circ$ é uma ação.

Corolário 3.5.1 *Seja* $f \in \mathcal{M}_n$*. Então* $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf \Leftrightarrow \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf + \mathcal{M}_n^{k+2} \Leftrightarrow \dfrac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n Jf)$*.*

Demonstração:

i) Mostremos que $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf \Leftrightarrow \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf + \mathcal{M}_n^{k+2}$.

($\Rightarrow$) Trivial.

($\Leftarrow$)$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf + \mathcal{M}_n^{k+2} \Longrightarrow \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \mathcal{M}_n^{k+1} + \mathcal{M}_n Jf$.

Pelo **Teorema (1.3.2) (Lema de Nakayana)** segue que $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf$.

ii) $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf + \mathcal{M}_n^{k+2} \Leftrightarrow \dfrac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n Jf)$.

($\Rightarrow$) $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf + \mathcal{M}_n^{k+2} \Longrightarrow j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{k+1}) \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n Jf) + \mathcal{M}_n^{k+2} \Longrightarrow \frac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \subset \mathcal{M}_n Jf$.

($\Leftarrow$) Mostremos primeiramente que $\dfrac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n Jf) \Longrightarrow \dfrac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \subset \mathcal{M}_n Jf + \mathcal{M}_n^{k+2}$.

De fato, seja $h \in \dfrac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}}$. Temos que $j^{k+1}\left(\dfrac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}}\right) \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n Jf)$.

Logo, existe $g \in \mathcal{M}_n Jf$ tal que $j^{k+1}h(0) = j^{k+1}g(0)$. Segue que $j^{k+1}(h-g)(0) = 0 \Longrightarrow h - g \in \mathcal{M}_n^{k+2}$. Portanto, $h \in \mathcal{M}_n Jf + \mathcal{M}_n^{k+2}$.

Assim, $\dfrac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n Jf) \Longrightarrow \dfrac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \subset \mathcal{M}_n Jf + \mathcal{M}_n^{k+2} \Longrightarrow \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf + \mathcal{M}_n^{k+2}$.

Por i) e ii) conclui a demonstração.

$\blacksquare$

O próximo teorema é uma condição necessária para um germe ser k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado.

Teorema 3.5.1 *Seja $f \in \mathcal{E}_n$. Se f é k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado, então $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf$.*

Demonstração: Seja $j^{k+1} : \mathcal{E}_n \longrightarrow J^{k+1}_{(n,1)}$, $M = \{g \in \mathcal{E}_n \mid g \underset{\mathcal{R}}{\sim} f\}$ e $N = \{g \in \mathcal{E}_n \mid j^k g(0) = j^k f(0)\}$.

Como f é k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado, então para todo $g \in \mathcal{E}_n$ com $j^k g(0) = j^k f(0)$, temos $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} g$.

Logo, $N \subset M$. Seja $M_{k+1} = j^{k+1}M$ e $N_{k+1} = j^{k+1}N$. Segue que $N_{k+1} \subset M_{k+1}$ pois $N \subset M$. Como $N = j^k f(0) + \mathcal{M}_n^{k+1}$, então $N_{k+1} = j^{k+1}(j^k f(0)) + j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{k+1}) \Longrightarrow N_{k+1} = j^k f(0) + \frac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}}$.

Além disso, $M_{k+1} = J^{k+1}\mathcal{R} \cdot j^{k+1}f(0)$. Como N_{k+1} e M_{k+1} são subvariedades de $J^{k+1}_{(n,1)}$ e $N_{k+1} \subset M_{k+1}$, então

$$T_{j^{k+1}f(0)}N_{k+1} \subset T_{j^{k+1}f(0)}J^{k+1}\mathcal{R} \cdot j^{k+1}f(0). \tag{3.3}$$

Temos que

$$T_{j^{k+1}f(0)}N_{k+1} = T_{j^{k+1}f(0)}\left(j^k f(0) + \frac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}}\right) = \frac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}}$$

e

$$T_{j^{k+1}f(0)}N_{k+1} = T_{j^{k+1}f(0)}J^{k+1}\mathcal{R} \cdot j^{k+1}f(0) = j^{k+1}(\mathcal{M}_n Jf).$$

Da inclusão de (3.3), temos

$$\frac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n Jf)$$

Pelo lema anterior, $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf$.

$\blacksquare$

Observação 3.5.2 *Não vale a reciproca exata, por exemplo: seja $f \in \mathcal{E}_2$ definida por $f(x,y) = x^3 + y^3$.*

$Jf\mathcal{M}_2 =< x^2, y^2 >< x, y >= \mathcal{E}_2^3$.

Mas f não é 2-$\mathcal{R}$-finitamente determinado, pois tomando $g(x,y) \equiv 0$, tem-se que $j\ 2(g) = 0 = j^2(f)$. Mas f não é $\mathcal{R}$-equivalente a g, pois se fosse, teríamos um difeomorfismo $h : \mathbb{R}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, 0$ tal que $f = g \circ h \equiv 0$, um absurdo.

Corolário 3.5.2 *Se $f \in \mathcal{M}_2^2$ não depende de x, então f é $\mathcal{R}$-finitamente determinado.*

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{M}_2^2$ tal que $f(x,y) = h(y)$.

$$Jf\mathcal{M}_2 =< 0, \frac{\partial h}{\partial y} >< x, y >=< x\frac{\partial h}{\partial y}, y\frac{\partial h}{\partial y} > .$$

Como $f \in \mathcal{M}_2^2$, então $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0) = \dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$. Segue que $\frac{\partial h}{\partial y}$ não é constante, pois $\frac{\partial h}{\partial y}(0) = 0$.

Logo, $x^{k+1} \neq < x\frac{\partial h}{\partial y}, y\frac{\partial h}{\partial y} >$, para todo $k \geq 0$. Segue que $\mathcal{M}_2^{k+1} \not\subseteq \mathcal{M}_2 Jf, \forall k \geq 0$, ou seja, f não é k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado, para todo $k \geq 0$. Portanto, f não é $\mathcal{R}$-finitamente determinado.

■

Temos o seguinte resultado.

f é k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado $\Longrightarrow \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf$.

Mas não existe a reciproca exata, ou seja,

f é k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado $\not\Leftarrow \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n Jf$.

Mas vale a seguinte reciproca.

f é k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado $\Leftarrow \mathcal{M}_n^{k} \subset \mathcal{M}_n Jf$.

Teorema 3.5.2 *Se $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n Jf$, então f é k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado. Devemos mostrar que dado $g \in \mathcal{E}_n$ com $j^k(g) = j^k(f)$, então $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} g$.*

Demonstração: Seja $g \in \mathcal{E}_n$ com $j^k(g) = j^k(f)$. Defina o germe $F : \mathbb{K}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^p$ por $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$.

Observe que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$ é o germe $F_t(x) = F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$.

Observação 3.5.3 *Para demonstrar o teorema, basta mostrar que, fixado arbitrariamente $s \in \mathbb{R}$ existe um família de difeomorfismos $h_t : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ tais que $F_t \circ h_t = F_s$ pois nesse caso, tomemos $s = 0$ e $t = 1$, teremos*

$$F_1 \circ h_1 = F_0 \Longrightarrow g \circ h_1(x) = f(x).$$

Em outras palavras, basta mostrar que existe uma família de germe $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ em $(0,s)$ satisfazendo

(a) $H(x,s) = x$;

(b) $H(0,t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$;

(c) $F(H(x,t),t) = F(x,s)$, onde s é fixo.

Derivando a equação (c) com relação à t, obtemos

(d) $\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) = 0.$

Afirmação 1. Determinar H satisfazendo (a), (b) e (d) é equivalente a resolver o problema de valor inicial.

(e) $\begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 0 \\ \xi_i(0,t) = 0, \forall i = 1, \cdots, n. \end{cases}$

De fato, seja $x' = \xi(x,t)$ em que $\xi(x,t) = (\xi_1(x,t), \cdots, \xi_n(x,t))$ é o campo vetorial à 1-parâmetro, com $\xi(0,t) = \vec{0}$. Portanto

$$\begin{cases} x' = \xi(x,t) \\ \xi(0,t) = \vec{0}. \end{cases}$$

Consideremos o fluxo associado

$$H : \mathbb{K}^n \times \mathbb{R}, 0 \longrightarrow \mathbb{K}^n, 0$$

$$(x,t) \longmapsto H(x,t)$$

tal que $H(x,t) = x$. Então

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \xi(H(x,t),t) \tag{3.4}$$

$$\Longrightarrow 0 = \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i(H(x,t),t) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t)$$

$$\Longrightarrow 0 = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t). \tag{3.5}$$

Portanto, vale (a) e (d). Verificaremos (b) $H(x,t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Para $x = 0$, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t}(0,t) = \xi(H(0,t),t) \\ H(0,s) = 0. \end{cases}$$

Por outro lado a função nula também é solução do P.V.I. $\begin{cases} x' = \xi(x(t),t) \\ x(s) = 0. \end{cases}$

Assim, como a função é contínua em $H(0,t)$. Logo $H(0,t) \equiv 0$, portanto vale (b).

Resumo: Temos até agora os seguintes resultados: (a), (b), (c) $\Longrightarrow$ (a), (b), (d) $\Longleftrightarrow$ (e).

Afirmação 2. (a), (b), (d) $\Longrightarrow$ (a), (b), (c).

Como vale (d), temos

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t)\cdot\frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\right]+\frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t)=0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}[F\circ H](x,t)=0$$

$$\Longrightarrow F\circ H(x,t)=c(x). \tag{3.6}$$

Em particular $F(H(x,s),s)=c(x)$ e como, por (a), $H(x,s)=x$, tem-se $F(x,t)=c(x)$. Logo, por (3.6), $F(H(x,t),t)=F(x,s)$ e portanto vale (c). Daí, segue a afirmação.

Mostraremos que o P.V.I. (e) tem solução.

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x,t)\cdot\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)+\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)=0 \Longleftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\in<\frac{\partial F}{\partial x_1}(x,t),\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}(x,t)>\cdot\mathcal{M}_n \tag{3.7}$$

em $\mathcal{E}_{n+1}$.

Por hipótese $\mathcal{M}_n^k\subset\frac{\partial F}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}>\cdot\mathcal{M}_n$ em $\mathcal{E}_n$. mas, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=(1-t)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}+t\dfrac{\partial g}{\partial x_i}=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}+t\left(\dfrac{\partial g}{\partial x_i}-\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. Como $j^k(g)=j^k(f)$, então $j^k(f-g)=0$, implica que as derivadas de f e g coincidem até o grau k. daí, $f-g\in\mathcal{M}_n^{k-1}$. Segue que $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}-\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\in\mathcal{M}_n^k$.

Logo $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}+t\left(\dfrac{\partial g}{\partial x_i}-\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)\in Jf+Jf+\mathcal{M}_{n+1}\mathcal{M}_n^k$.

Portanto $Jf\subset Jf+Jf+\mathcal{M}_{n+1}\mathcal{M}_n^k$. Observe que $\mathcal{M}_n^{k+1}\subset\mathcal{M}_n^k subset\mathcal{M}_nJf$

$$\Longrightarrow \mathcal{M}_n^{k+1}\subset\mathcal{M}_n^k\frac{\partial F}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}>+\mathcal{M}_{n+1}\mathcal{M}_n^k$$

$$\underset{\text{Lema de Nakayana}}{\Longrightarrow}\mathcal{M}_n^{k+1}\subset\mathcal{M}_n^k\frac{\partial F}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}>$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}=g-f\in\mathcal{M}_n^{k+1}\subset\mathcal{M}_n^k\frac{\partial F}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}>.$$

Portanto vale (3.7).

■

Exemplo 3.5.2 *Seja* $f \in \mathcal{E}_n$*, definido por* $f(x, y) = x^2y + y^4$ *é 4-*$\mathcal{C}$*-finitamente determinado, pois* $\mathcal{M}^4 \subset \mathcal{M}Jf$*. Mas não é 3-*$\mathcal{C}$*-finitamente determinado, pois:*

$j^3f = x^2y$ e este germe tem singularidade não isolada na origem, pois

$$\frac{\partial}{\partial x}(j^3f) = 2xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(j^3f) = x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Conjunto singular de j^3f é o conjunto $\{(c, y) \mid x = 0\}$ = eixo-y. Pela contrapositiva do teorema 3.4.4, tem que f é um germe de $\mathcal{R}$-codimensão infinita, daí, segue que $\mathcal{M}^4 \subset \mathcal{M}_2Jf$.

Capítulo 4

A C^i-suficiência em $J^r_{(n,p)}$

Os lemas deste capítulo e o **Teorema Principal 4.2.1** foram tirado do trabalho de MARTINS & FÁVARO [1].

4.1 Resultados Preliminares para o Teorema Principal

Definição 4.1.1 *Dois germes $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ de classe C^k, são ditos C^i-equivalentes se existe um germe de difeomorfismo (homeomorfismo se $i = 0$) $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ de classe C^i tal que $f = g \circ h$.*

Definição 4.1.2 *Um r-jato $z \in J^r_{(n,p)}$ é C^i-suficiente em $C^k (k \geq r)$ se quaisquer f e g com $f, g \in C^k$ e $j^r(f) = j^r(g) = z$ são C^i-equivalentes.*

Observação 4.1.1 *Se o germe h da **definição 4.1.1** for de classe C^∞, então $h \in \mathcal{R}$, logo essa definição é equivalente à **subseção 3.2.1**, consequentemente a **definição 4.1.2** é equivalente à **seção 3.5**. Aqui trabalharemos com $h \in C^i$ onde $i \geq 0$, ou seja, encontrar condições de exigências mais fraco.*

Motivação: Seja $z \in J^r_{(n,p)}$ e $\theta : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ dois germes de classe C^k com $j^r(\theta) \equiv 0$. Será que existe um germe de difeomorfismo $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ de classe $C^i (i \geq 0)$ tal que $(z + \theta) \circ h = z$?

Exemplo 4.1.1 *Seja $z(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ em $J^2_{(2,2)}$. Consideremos a perturbação $\theta(x, y) = (|y|^{\frac{5}{2}}, x^3 y)$, $\theta \in C^2$ com $j^2(\theta) \equiv 0$, mas $\theta \notin C^3$. Será que existe um germe de difeomorfismo $h : \mathbb{R}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, 0$ de classe $C^i (i \geq 0)$ tal que $(z + \theta)(x, y) = z(h(x, y))$?*

Mostraremos que existe $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ de classe C^1 que satisfaz o exemplo. Observe que a existência de um germe de difeomorfismo $C^i(i \geq 0)$, pressupõe a existência de um germe de homeomorfismo, pois vale a inclusão $c^{k-1} \subset C^k, \forall k \in \mathbb{N}$. Portanto, necessitamos que z seja C^0-suficiente.

Dado $z \in J^r_{(n,p)}$, definimos duas constantes associadas a z (ver [5]), onde:

$r(z) = min\{\ell \in \mathbb{N} \mid \exists c > 0$ e $\delta > 0$ com $D(\nabla z_1(x), \cdots, \nabla z_p(x)) \geq c|x|^{\ell-1}$ para $|x| < \delta\}$.

$r_0(z) = max\{\ell \in \mathbb{N} \mid \exists c > 0$ e $\delta > 0$ com $|z(x)| \leq c|x|^\ell$ para $|x| < \delta\}$.

Agora vamos enunciar e demonstrar alguns lemas necessários para o **Teorema Principal 4.2.1**.

Dados vetores $v_1, \cdots, v_p \in \mathbb{R}$, denotamos por d_i a distância de v_i ao subespaço gerado pelos vetores v_j, onde $j \neq i$ (Notação: $[v_j]_{j \neq i}$). No caso de $v_i = v_i(x)$ depender de uma variável x, escrevemos $d_i(x)$ para a distância. Logo,

$$d_i(x) = inf\{|v_i(x) - \sum_{j \neq i} y_j v_j(x)|\}. \tag{4.1}$$

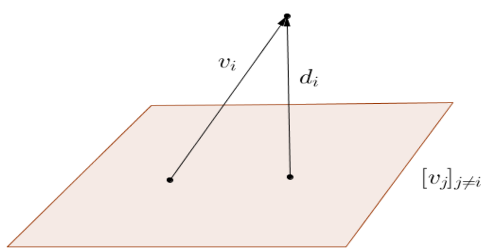

Figura 4.1:

Esta distância $d_i(x)$ mede a independência linear do v_i em relação ao subespaço $[v_j]_{j \neq i}$.

Observação 4.1.2 *$d_i = 0$ se, e somente se, v_i é combinação linear dos vetores $v_j, j \neq i$.*

Claramente, se $v_1(x), \cdots, v_p(x)$ são L.I., então $d_i(x)$ é da mesma classe de diferenciabilidade dos $v_i(x)$.

Notação:

$$D(v_1(x), \cdots, v_p(x)) = \min_{1 \leq i \leq p}\{d_i(x)\}. \tag{4.2}$$

Lema 1 *Se $D(x) = \min\{d_1(x), \cdots, d_p(x)\} = |v_i - \sum_{j \neq i} y_j v_j(x)|$, então $|y_j(x)| \leq 1$.*

Demonstração: Por definição, $D(x)$ é o mínimo dos $d_j(x)$, logo $\exists k$ tal que $D(x) = d_k(x)$. Daí,

$$d_k(x) = |v_k(x) - \sum_{j \neq k} y_j v_j(x)| \leq \{d_1(x), \cdots, d_p(x)\}.$$

Provaremos por contradição, fixemos x. Suponha que $|y_\ell| > 1$ para algum $\ell = 1, \cdots, p$ e $\ell \neq k$, observe a figura abixo.

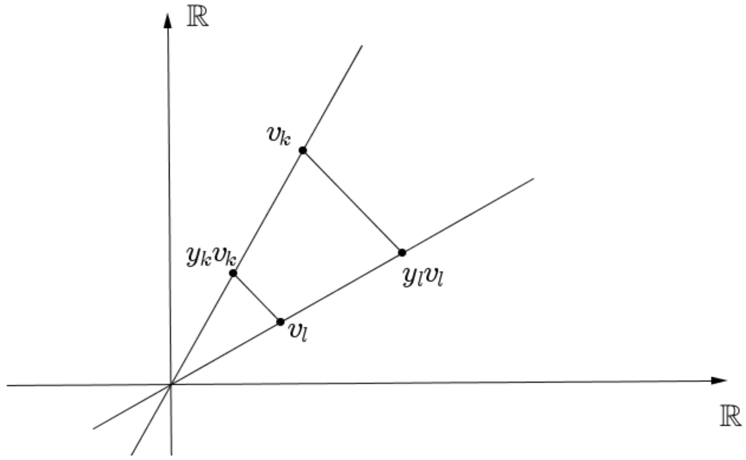

Figura 4.2:

Chamaremos de $[v_k]$ e $[v_\ell]$ os subespaços gerados pelos vetores v_k e v_ℓ, respectivamente. Como $|y_\ell| > 1$, então $\exists y_k$ tal que $|y_k| \leq 1$ e $|v_\ell - y_k v_k| < |v_k - y_\ell v_\ell|$. Daí,

$$d_\ell(x) = |v_\ell(x) - \sum_{j \neq \ell} y_j v_j(x)| < |v_k(x) - \sum_{j \neq k} y_j v_j(x)| = d_k(x).$$

Um absurdo, pois por hipótese, temos $D(x) = d_k(x)$. Portanto $|y_j| \leq 1 \forall j = 1, \cdots, p$ e $j \neq k$.

■

Lema 2 *[9] (Lema 3.2 - pag. 118) Sejam $v_1(x), \cdots, v_s(x) \in \mathbb{R}^n$ vetores L.I. Denotamos por $p_i(x)$ a projeção de $v_i(x)$ sobre os subespaço gerado pelos $v_j, j \neq i$, (denotaremos por $[v_j]_{j \neq i}$). E por $n_i(x) = v_i(x) - p_i(x)$ o vetor ortogonal ao subespaço $[v_j]_{j \neq i}$. Então, dado $w(x) \in \mathbb{R}^n$,*

$$X(x) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\langle w(x), v_i(x) \rangle}{||n_i(x)||^2} \cdot n_i(x)$$

é a projeção de $w(x)$ sobre o subespaço gerado pelos vetores $v_i(x), (i = 1, \cdots, s)$.

Demonstração: A saber, temos que $||n_i(x)|| = d_i(x)$ e que $n_i(x)$ é ortogonal ao subespaço $[v_j]_{j\neq i}$, pois $p_i(x) \in [v_j]_{j\neq i}$ e $d_i(x)$ é ortogonal a $[v_j]_{j\neq i}$, daí, $n_i(x)$ é também.

Segue-se que $\langle (x), p_i(x)\rangle = 0$, consequentemente,

$$\langle v_i(x) - p_i(x), p_i(x)\rangle = 0.$$

Temos também que

$$\langle n_i(x), v_j(x)\rangle = \langle v_i(x) - p_i(x), v_j(x)\rangle = 0$$

pois $d_i(x) \perp v_j(x), j \neq i$, $||n_i(x)|| = d_i(x)$ e

$$\begin{aligned}
\langle n_i(x), v_i(x)\rangle &= \langle v_i(x) - p_i(x), v_i(x)\rangle - 0 \\
&= \langle v_i(x) - p_i(x), v_i(x)\rangle - \langle v_i(x) - p_i(x), p_i(x)\rangle \\
&= \langle v_i(x) - p_i(x), v_i(x) - p_i(x)\rangle \\
&= ||v_i(x) - p_i(x)||^2 = ||n_i(x)||^2. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle X(x), v_j(x)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle w(x), v_i(x)\rangle}{||n_i(x)||^2} \cdot n_i(x), v_j(x) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle w(x), v_i(x)\rangle}{||n_i(x)||^2} \cdot \langle n_i(x), v_j(x)\rangle \\
&\overset{(4.3)}{=} \frac{\langle w(x), v_j(x)\rangle}{||n_j(x)||^2} \cdot ||n_j(x)||^2 \\
&= \langle w(x), v_j(x)\rangle
\end{aligned}$$

para cada j, segue-se que $w(x) - X(x)$ é perpendicular a $v_j(x)$.

Corolário 4.1.1 *Se $v_1, \cdots, v_s, w : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são de classe C^k, então $X : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k.*

Demonstração: Como v_i é $C^k, \forall i = 1, \cdots, s$ e considerando $v_i = (v_{i1}, \cdots, v_{im})$, então cada aplicação $v_{ik} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k e analogamente, se $w = (w_1, \cdots, w_m)$ é de classe C^k, então w_k é de classe $C^k, \forall k = 1, \cdots, m$. O produto de funções de classe C^k é de classe C^k, então $\langle w(x), v_i(x)\rangle$ é de classe C^k.

Temos também que $n_i = v_i - p_i$ é de classe C^k e $||n_i|| \neq 0$, pois $\{v_1, \cdots, v_s\}$ são L.I.. Daí, concluímos que X é de classe C^k.

$\blacksquare$

Um método prático para calcular os $d_i(x)$ é :

$$
\begin{aligned}
d_i(x) &= \frac{\sqrt{det(\langle v_j(x), v_k(x)\rangle)}}{\sqrt{det(\langle v_m(x), v_n(x)\rangle)}} \\
&= \frac{det\begin{pmatrix} \langle v_1(x), v_1(x)\rangle & \cdots & \langle v_1(x), v_p(x)\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p(x), v_1(x)\rangle & \cdots & \langle v_p(x), v_p(x)\rangle \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}}{det\begin{pmatrix} \langle v_1(x), v_1(x)\rangle & \cdots & \langle v_1(x), v_p(x)\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p(x), v_1(x)\rangle & \cdots & \langle v_p(x), v_p(x)\rangle \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

com $j, k = 1, \cdots, p$ e $m, n = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, p$.

Essa equação é verdadeira pois, pela **proposição 1.5.3**, temos

$$\sqrt{det(\langle v_i(x), v_j(x)\rangle)} = volP[v_1, \cdots, v_k]$$

e

$$volP[v_1, \cdots, v_k] = |n_i| vol[v_1, \cdots v_{i-1}, v_{i-1}, \cdots, v_k].$$

Como $n_i = v_i - p_i$ e $|v_i - p_i| = d_i$, segue o resultado.

Lema 3 *Sejam* $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ *de classe* C^k *com* $j^\ell(f) = j^\ell(g)$. *Se* $\exists c > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que* $D(\nabla f_1(x), \cdots, \nabla f_p(x) \geq c||x||^{\ell-1}$ *para* $||x|| < \delta$, *então existem* $c_1 > 0$ *e* $\delta_1 > 0$ *tais que* $D(\nabla g_1(x), \cdots, \nabla g_p(x) \geq c_1||x||^{\ell-1}$ *para* $||x|| < \delta_1$.

Consequência: "O número $r(z)$ independe do representante de z".

Demonstração: Sejam $f = (f_1, \cdots, f_p)$ e $g = (g_1, \cdots, g_p)$. Como $j^\ell(f) = j^\ell(g)$, então podemos escrever f_i e g_i na origem da seguinte forma:

$$f_i(x) = j^\ell f_i(x) + r_\ell(x) = \sum_{|\alpha| \leq \ell} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x}\right)^\alpha x^\alpha + r_\ell(x) \tag{4.5}$$

$$g_i(x) = j^\ell g_i(x) + s_\ell(x) = \sum_{|\alpha| \leq \ell} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x}\right)^\alpha x^\alpha + s_\ell(x). \tag{4.6}$$

Vimos no capítulo 2 que, usando a Fórmula de Taylor Infinitesinal, temos os seguintes resultados:

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{r_\ell(x)}{x^\ell} = 0 \text{ e } \lim_{|x|\to 0} \frac{s_\ell(x)}{x^\ell} = 0.$$

Daí,

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{|f_i(x) - g_i(x)|}{|x|^\ell} = \lim_{|x|\to 0} \frac{|j^\ell f_i(x) + r_\ell(x) - (j^\ell g_i(x) + s_\ell(x))|}{|x|^\ell} =$$

$$= \lim_{|x|\to 0} \frac{|r_\ell(x) - s_\ell(x)|}{|x|^\ell} \leq \lim_{|x|\to 0} \frac{|r_\ell(x)|}{|x|^\ell} + \lim_{|x|\to 0} \frac{|s_\ell(x)|}{|x|^\ell} = 0.$$

Em consequência de (4.5) e (4.6) o gradiente de f_i e g_i são da seguinte forma:

$$\nabla f_i(x) = j^\ell \nabla f_i(x) + r_{\ell-1}(x) = \sum_{|\alpha| \leq \ell-1} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \right)^\alpha x^\alpha + r_{\ell-1}(x)$$

$$\nabla g_i(x) = j^\ell \nabla g_i(x) + s_{\ell-1}(x) = \sum_{|\alpha| \leq \ell-1} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x} \right)^\alpha x^\alpha + s_{\ell-1}(x).$$

Analogamente,

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{|\nabla f_i(x) - \nabla g_i(x)|}{|x|^{\ell-1}} = \lim_{|x|\to 0} \frac{|j^\ell \nabla f_i(x) + r_{\ell-1}(x) - (j^\ell \nabla g_i(x) + s_{\ell-1}(x))|}{|x|^{\ell-1}} =$$

$$= \lim_{|x|\to 0} \frac{|r_{\ell-1}(x) - s_{\ell-1}(x)|}{|x|^{\ell-1}} \leq \lim_{|x|\to 0} \frac{r_{\ell-1}(x)}{|x|^{\ell-1}} + \lim_{|x|\to 0} \frac{s_{\ell-1}(x)}{|x|^{\ell-1}} = 0.$$

Desses cálculos, tiramos dois resultados.

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{|f_i(x) - g_i(x)|}{|x|^\ell} = \epsilon \tag{4.7}$$

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{|\nabla f_i(x) - \nabla g_i(x)|}{|x|^{\ell-1}} = \epsilon \tag{4.8}$$

para algum ϵ suficientemente pequeno.

Seja $y = (y_1, \cdots, y_p) \neq 0$, então $\exists y_j$ tal que $y_j \neq 0$. Para cada x e k fixos, suponhamos primeiramente que $j = k$, ou seja, $y_k \neq 0$. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{|y_k[\nabla g_k(x) - \nabla f_k(x)]|}{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x)|} &= \frac{|y_k[\nabla g_k(x) - \nabla f_k(x)]|}{|y_k \nabla f_k(x) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} y_i \nabla f_i(x)|} \\
&= \frac{|\nabla g_k(x) - \nabla f_k(x)|}{|\nabla f_k(x) + y_k^{-1} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} y_i \nabla f_i(x)|}.
\end{aligned}$$

Como $\{\nabla f_1(x), \cdots, \nabla f_p(x)\}$ são L.I., segue-se de (4.1) que

$$d_k(x) = inf\{|\nabla f_k(x) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} y_i \nabla f_i(x)|\} \leq |\nabla f_k(x) + y_k^{-1} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} y_i \nabla f_i(x)|.$$

Seque-se de (4.2), que

$$D(\nabla f_1(x), \cdots, \nabla f_p(x)) = \min_{1\leq i\leq p}\{d_i(x)\} \leq d_k(x).$$

Continuando os cálculos,

$$\begin{aligned}
\frac{|\nabla g_k(x) - \nabla f_k(x)|}{|\nabla f_k(x) + y_k^{-1} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} y_i \nabla f_i(x)|} &\leq \frac{|\nabla g_k(x) - \nabla f_k(x)|}{d_k(x)} \\
&\leq \frac{|\nabla g_k(x) - \nabla f_k(x)|}{D(\nabla f_1(x), \cdots, \nabla f_p(x))} \\
&\leq \frac{|\nabla g_k(x) - \nabla f_k(x)|}{c|x|^{\ell-1}} \\
&\overset{(4.8)}{\leq} \frac{\epsilon}{c}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

A última desigualdade é válida, pois estamos tomando x suficientemente pequeno.

Mas, se $y_k = 0$, a desigualdade acima é válida, pois supomos que $y \neq 0$, ou seja, $\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x) \neq 0$, logo

$$\frac{|y_k[\nabla g_k(x) - \nabla f_k(x)]|}{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x)|} = 0.$$

Desses resultados, concluimos que,

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sum_{i=1}^{p} y_i[\nabla g_i(x) - \nabla f_i(x)]|}{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x)|} = 0. \tag{4.10}$$

Por outro lado, usando a desigualdade triangular $|u| - |v| \leq |u - v|$, temos o seguinte resultado.

$$\begin{aligned}
|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x)| - |\sum_{i=1}^{p} y_i[\nabla g_i(x) - \nabla f_i(x)]| &\leq |\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla g_i(x)| \\
1 - \frac{|\sum_{i=1}^{p} y_i[\nabla g_i(x) - \nabla f_i(x)]|}{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x)|} &\leq \frac{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla g_i(x)|}{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x)|} \\
\frac{|\sum_{i=1}^{p} y_i[\nabla g_i(x) - \nabla f_i(x)]|}{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x)|} &\leq \frac{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla g_i(x)|}{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x)|} - 1.
\end{aligned}$$

Por (4.10), temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla g_i(x)|}{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x)|} - 1 \\
1 &\leq \frac{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla g_i(x)|}{|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x)|} \\
|\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla f_i(x)| &\leq |\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla g_i(x)|.
\end{aligned}$$

Como $y = (y_1, \cdots, y_p)$ é aleatório, então

$D(\nabla g_1(x), \cdots, \nabla g_p(x)) \geq D(\nabla f_1(x), \cdots, \nabla f_p(x)) \geq c|x|^{\ell-1}$, pela definição, existe $\delta > 0$ tal que tomemos $|x| < \delta$.

Portanto, basta tomar $c_1 = c$ e $\delta_1 = \delta$ e daí conclui-se a demonstração.

$\blacksquare$

Lema 4 *Dado $z \in J^r_{(n,p)}$, mostraremos que $r_0(z) \leq r(z)$.*

Demonstração: Por definição de $r_0(z)$, sabemos que $|z(x)| \leq c|x|^\ell$, diferenciando, temos $|\nabla z(x)| \leq c_i l |x|^{\ell-1}, \forall i = 1, \cdots, p$. Tome $k = \max\limits_{1 \leq i \leq p}\{c_i \ell\}$, como $|z(x)| \leq c|x|^\ell$, então

$|z(x)| \leq c|x|^{r_0}$. Portanto $|\nabla z(x)| \leq k|x|^{r_0-1}, \forall i = 1, \cdots, p$. Por outro lado, segue da definição de $r(z)$ que

$$\begin{aligned} c|x|^{r(z)-1} &\leq D(z_1(x), \cdots, z_p(x)) \leq |\nabla z_k(x) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} y_i \nabla z_i(x)|, \forall k = 1, \cdots, p \\ &\leq |\sum_{i=1}^{p} y_i \nabla z_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{p} |y_i \nabla z_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{p} |\nabla z_i(x)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} k|x|^{r_0(z)-1} \leq pk|x|^{r_0(z)-1} \end{aligned}$$

onde a antepenúltima desigualdade é valida, pois $|y_i(x)| \leq 1$ pelo **lema 1**, logo $c|x|^{r(z)-1} \leq pk|x|^{r_0(z)-1}$. como $|x| \in \mathbb{R}$, então usando as propriedades de logaritmo, temos

$$\log_{|x|}(c|x|^{r(z)-1}) \geq \log_{|x|}(pk|x|^{r_0(z)-1}).$$

A desigualdade inverte, pois a base é suficientemente próxima de 0, ou seja, existe $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta < 1$.

$$\begin{aligned} \log_{|x|}(c) + (r(z) - 1) \log_{|x|}(|x|) &\geq \log_{|x|}(pk) + (r_0(z) - 1) \log_{|x|}(|x|) \\ \log_{|x|}(c) + r(z) - 1 &\geq \log_{|x|}(pk) + r_0(z) - 1 \\ r(z) &\geq r_0(z) + \log_{|x|}(\frac{pk}{c}). \end{aligned}$$

Para $|x|$ suficientemente pequeno, existe $\epsilon > 0$ tal que $\log_{|x|}(\frac{pk}{c}) < \epsilon$.

Portanto, $r(z) \geq r_0(z)$ para $|x|$ suficientemente pequeno.

■

4.2 Condições necessárias para a C^i-suficiência em $J^r_{(n,p)}$

Suponha que $z \in J^r_{(n,p)}$. Se mostrarmos que z é C^i-suficiente em $C^r (i \leq r)$, então para todo germe $\theta : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ de classe C^r com $j^r(\theta) \equiv 0$, existe um germe difeomorfismo de classe $C^i (i \leq 0)$ $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ tal que $((z + \theta) \circ h)(x) = z(x)$. Podemos agora enunciar e demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.2.1 *Seja $z \in J^r_{(n,p)}$ e suponhamos $r(z) \leq r$ e que $r - r(z) + 1 - i[r(z) - r_0(z) + 1] \geq 0$ para algum $i \geq 0$. Então z é C^i-suficiente em C^r.*

Observação 4.2.1 *Quanto $p = 1$, temos exatamente o Teorema de F. Takens (ver [5]).*

Dividiremos a demonstração em duas partes:

Parte A: Seja $\theta : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ de classe C^r com $j^r(\theta) \equiv 0$.

Definimos $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ por

$$F(x,t) = z(x) + t\theta(x).$$

Observe que $F(x,0) = z(x)$ e $F(x,1) = (z+\theta)(x)$. Como $F = (F_1, \cdots, F_p)$ com $F_k(x,t) = z_k(x) + t\theta_k(x), k = 1, \cdots, p$, derivando parcialmente, temos $\nabla F_k(x,t) = (\nabla z_k(x) + t\nabla\theta_k(x), \theta_k(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $k = 1, \cdots, p$.

Seja $X(x,t)$ a projeção de $e_{n+1} = (0, \cdots, 0, 1)$ sobre o subespaço gerados pelos vetores $\{\nabla F_1(x,t), \cdots, \nabla F_p(x,t)\}$. Pelo **Lema 2**, tomemos

$$\begin{cases} w(x) = e_{n+1} \\ v_i(x) = \nabla F_i(x,t). \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} X(x,t) &= \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle e_{n+1}, \nabla F_i(x,t)\rangle}{||n_i(x,t)||^2} \cdot n_i(x,t) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{0 \cdot (\nabla z_i(x) + t\nabla\theta_i(x)) + 1 \cdot \theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2} \cdot n_i(x,t) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2} \cdot n_i(x,t). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Como $n_i(x,t) = \nabla F_i(x) - p_i(x,t)$, onde $p_i(x,t)$ é a projeção de $\nabla F_i(x)$ sobre o subespaço $[\nabla F_j]_{j\neq i}$, segue do **Lema 2**, que $||n_i(x,t)|| = d_i(x,t)$.

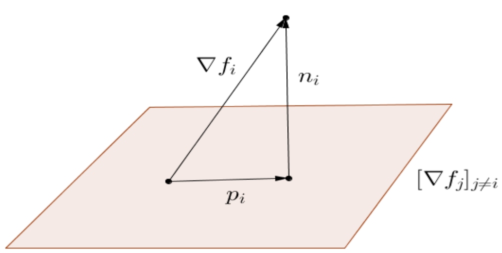

Figura 4.3:

Afirmação 1. $D(\nabla F_1(x), \cdots, \nabla F_p(x)) \geq c||x||^{r(z)-1}$ para $0 < ||x|| < \delta$ e $t \in [0,1]$.

Seja $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ definido por

$$H(x,t) = z(x) + t^{r+1}\vec{1}$$

onde $\vec{1} = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor em que todas as coordenadas tem valor 1.

Como $z(x)$ e $\theta(x)$ são de classe C^r, segue que $H(x,t)$ e $F(x,t)$ são de classe C^r.

Temos que $j^r(\theta) \equiv 0$ e $j^r(t^{r+1}) \equiv 0$, portanto o r-jato de H e F depende só de $z(x)$. Logo $j^r(H) = j^r(F)$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} H(x,t) &= (H_1(x,t), \cdots, H_p(x,t)) \\ &= (z_1(x) + t^{r+1}, \cdots, z_p(x) + t^{r+1}). \end{aligned}$$

Diferenciando em cada coordenada, obtemos

$$\nabla H_k(x,t) = (\nabla z_k(x), t^r).$$

daí,

$$D(\nabla H_1(x,t), \cdots, \nabla H_p(x,t)) = D(\nabla z_1(x) + t^r, \cdots, \nabla z_p(x) + t^r).$$

Foi definido, no inicio do capítulo 4, a constante $r(z)$ da seguinte forma $\min\{\ell \in \mathbb{N} | \exists c > 0 e \delta > 0$ com $D(\nabla z_1(x), \cdots, \nabla z_p(x)) \geq c|x|^{r(z)-1}$ para $|x| < \delta\}$ e como $t^r \geq 0$ para $t \in [0,1]$, logo $||\nabla z_i(x) + tr|| \geq ||\nabla z_i(x)||, \forall ||x|| \leq \delta$ e $t \in [0,1]$, ver **figura 4.4**. Portanto, $D(\nabla H_1(x,t), \cdots, \nabla H_p(x,t)) \geq D(\nabla z_1(x), \cdots, \nabla z_p(x)) \geq c|x|^{r(z)-1}$ para $|x| < \delta\}$ e $t \in [0,1]$. Os germes F e H tem as mesmas hipóteses do **Lema 3**, portanto conclui-se a **afirmação 1**.

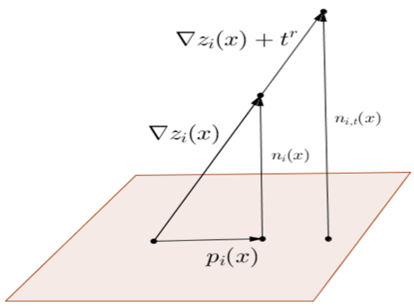

Figura 4.4:

Consequência 1. Como $\{\nabla F_1(x), \cdots, \nabla F_p(x)\}$ são L.I., então $d_i(x,t) = ||n_i(x,t)|| > 0$. segue da **Observação 4.1.2**.

Consequência 2. Como F é de classe C^r, tem-se que $\nabla F_i(x,t)$ é de classe C^{r-1}. Daí X é de classe C^{r-1} para $x \neq 0$.

Seja $X : B(0,\alpha) \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$X(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\langle e_{n+1}, \nabla F_i(x,t)\rangle}{||n_i(x,t)||^2} \cdot n_i(x,t), & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Afirmação 2. X é continua.

De fato,

$$\begin{aligned} ||X(x,t)|| &= ||\sum_{i=1}^{p} \frac{\langle e_{n+1}, \nabla F_i(x,t)\rangle}{||n_i(x,t)||^2} \cdot n_i(x,t)|| \\ &\overset{(4.11)}{=} ||\sum_{i=1}^{p} \frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2} \cdot n_i(x,t)|| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \frac{||\theta_i(x)||}{||n_i(x,t)||^2} \cdot ||n_i(x,t)|| \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{||\theta_i(x)||}{||n_i(x,t)||}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dizemos que f tem a ordem de crescimento $O(f) = r$ se $\lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{f}{|x|^k} = 0, \forall k < r$. Usaremos a seguinte notação $||f|| = O(||x||^{O(f)}) = O(||x||^r)$. Se f e g tem ordem de crescimento $O(||x||^r)$ e $O(||x||^s)$ respectivamente. Então teremos os seguintes resultados:

1. Se $s = r$, então a ordem da soma é a mesma das ordens, pois se $\lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|f|}{|x|^k} = 0, \forall k < r$ e $\lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|g|}{|x|^k} = 0, \forall k < r$, então $\lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|f+g|}{|x|^k} \leq \lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|f|}{|x|^k} + \lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|g|}{|x|^k} = 0, \forall k < r$;

2. A ordem do produto é a soma das ordens de crescimento, ou seja, se $\lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|f|}{|x|^{k_1}} = 0, \forall k_1 < r$ e $\lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|g|}{|x|^{k_2}} = 0, \forall k_2 < s$, então $\lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|f \cdot g|}{|x|^{k_1+k_2}} = \lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|f|}{|x|^{k_1}} \cdot \lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|g|}{|x|^{k_2}} = 0, \forall (k_1+k_2) < r+s$;

3. Se $k_1 \leq k_2$, então $\dfrac{O(||x||^r)}{O(||x||^s)} = O(||x||^{r-s})$, pois temos

   $\lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|f|}{|x|^{k_1}} = 0, \forall k_1 < r$ e $\lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|g|}{|x|^{k_2}} = 0, \forall k_2 < s$, então

$$\frac{\lim\limits_{|x|\to 0}\dfrac{|f|}{|x|^{k_1}}}{\lim\limits_{|x|\to 0}\dfrac{|g|}{|x|^{k_2}}} = \lim_{|x|\to 0}\frac{|f\cdot g^{-1}|}{|x|^{k_1-k_2}} = 0, \text{ para } 0 < (k_1-k_2) < r-s.$$

Continuando com os cálculos, temos,

$$||n_i(x,t)|| = d_i(x,t) \geq D(\nabla F_1(x), \cdots, \nabla F_p(x)) \geq c||x||^{r(z)-1}$$

e $||\theta_i(x)|| = O(||x||^{r+1})$, pois $j^r(\theta) \equiv 0$.

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{||\theta_i(x)||}{||n_i(x,t)||} \leq \frac{O(||x||^{r+1})}{O(||x||^{r(z)-1})} = O(||x||^{r-r(z)+2}).$$

Como $r \geq r(z)$, então $r - r(z) + 2 \geq 2$.

Assim, X é contínua, pois $||X(x,t)|| = O(||x||^2)$.

Afirmação 3. Seja $Y(x,t) = e_{n+1} - X(x,t)$. Mostraremos que $\lim\limits_{|x|\to 0}\dfrac{Y(x,t)-Y(0,t)}{||x||} = 0$ e portanto $Y(x,t)$ é uniformemente contínua para $t \in [0,1]$.

De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n$, existe $\delta > 0$ tal que $||x|| < \delta$, então

$$\begin{aligned}
\frac{||Y(x,t)-Y(0,t)||}{||x||} &= \frac{||e_{n+1} - X(x,t) - e_{n+1} + X(0,t)||}{||x||} \\
&= \frac{||X(0,t) - X(x,t)||}{||x||} \\
&\overset{(4.12)}{=} \frac{||X(x,t)||}{||x||} \\
&\overset{(4.13)}{=} \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}\dfrac{||\theta_i(x)||}{||n_i(x,t)||}}{||x||} \\
&= \frac{O(||x||^{r-r(z)+2})}{O(||x||^1)} \\
&= O(||x||^{r-r(z)+1}) = O(||x||^1). \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Portanto, segue-se a **afirmação 3**, pois $||x||$ converge uniforme para zero.

Verifica-se, pela **Afirmção 3** e pelo Teorema de Picard (ver [7]), que o Problema de Valor Inicial (P.V.I.) $\begin{cases} Y'(y) = Y(y) \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$ com $y = (x,t), y_0 = (x_0,t_0) \in B(0,\alpha)\times[0,1]$ tem uma única solução, que depende continuamente de y_0, e pela **afirmação 4**, temos que F é constante ao longo destas trajetórias e $Y(y)$ é tangente à superfície de nível $F(x,t) = c$ em cada (x,t).

Afirmação 4. F é constante em $Y(y)$ em $B(0,\alpha)\times[0,1]$.

Para provar, é suficiente ver que $\frac{d}{dy}F_k(Y(y)) = 0, \forall k = 1,\cdots,p$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dy}F_k(Y(y)) &= \frac{\partial F_k}{\partial x_1}\frac{\partial Y_1}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}\frac{\partial Y_n}{\partial y} + \frac{\partial F_k}{\partial t}\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y} \\
&= \frac{\partial F_k}{\partial x_1}Y_1' + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}Y_n' + \frac{\partial F_k}{\partial t}Y_{n+1}' \\
&= \frac{\partial F_k}{\partial x_1}Y_1 + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}Y_n + \frac{\partial F_k}{\partial t}Y_{n+1} \\
&= \langle \nabla F_k, Y(x,t)\rangle \\
&= \langle \nabla F_k, e_{n+1} - X(x,t)\rangle \\
&= \langle \nabla F_k, e_{n+1} - \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle e_{n+1}, \nabla F_i(x,t)\rangle}{||n_i(x,t)||^2}\cdot n_i(x,t)\rangle \\
&= \langle \nabla F_k, e_{n+1}\rangle - \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle e_{n+1}, \nabla F_i(x,t)\rangle}{||n_i(x,t)||^2}\cdot \langle \nabla F_k, n_i(x,t)\rangle \\
&\overset{(4.14)}{=} \theta_k(x) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\cdot \langle \nabla F_k, n_i(x,t)\rangle \\
&= \theta_k(x) - \frac{\theta_k(x)}{||n_k(x,t)||^2}\cdot \langle \nabla F_k, n_k(x,t)\rangle - \\
&\quad - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{p} \frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\cdot \langle \nabla F_k, n_i(x,t)\rangle \\
&\overset{(4.3)}{=} \theta_k(x) - \frac{\theta_k(x)}{||n_k(x,t)||^2}\cdot ||n_k(x,t)||^2 - 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Afirmação 5. Mostraremos que existe uma família de difeomorfismos $h_t : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ de classe C^r tal que $F_1 \circ h_1 = F_0$.

Para provar a afirmação, basta mostrar que, fixado arbitrariamente $s \in \mathbb{R}$, existe um família de difeomorfismos $h_t : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ tais que $F_t \circ h_t = F_s$ pois nesse caso, tomemos $s = 0$ e $t = 1$, teremos

$$F_1 \circ h_1 = F_0 \Longrightarrow (z+\theta)\circ h_1(x) = z(x).$$

Restringindo $t \in [0,1]$, teremos

$$F : \mathbb{R}^n \times [0,1], 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$$

$$F(x,t) = z(x) + t\theta(x).$$

Em outras palavras, basta mostrar que existe uma família de germe $H : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ em $(0, s)$ satisfazendo

(a) $H(x, s) = x$;

(b) $H(0, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$;

(c) $F(H(x, t), t) = F(x, s)$, onde s é fixo.

Derivando a equação (c) com relação à t, obtemos

(d) $\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) = 0.$

Afirmação 5.1. Determinar H satisfazendo (a), (b) e (d) é equivalente a resolver o problema de valor inicial.

e) $\begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 0 \\ \xi_i(0,t) = 0, \forall i = 1, \cdots, n. \end{cases}$

De fato, seja $x' = \xi(x, t)$ em que $\xi(x, t) = (\xi_1(x, t), \cdots, \xi_n(x, t))$ é o campo vetorial à 1-parâmetro, com $\xi(0, t) = \vec{0}$. Portanto

$$\begin{cases} x' = \xi(x,t) \\ \xi(0,t) = \vec{0}. \end{cases}$$

Consideremos o fluxo associado

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^{n+1}, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}^n, 0 \\ (x,t) &\longmapsto H(x,t) \end{aligned}$$

tal que $H(x, t) = x$. Então

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \xi(H(x,t),t) \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow 0 &= \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i(H(x,t),t) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) \\ \Longrightarrow 0 &= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Portanto, valem (a) e (d). Verificaremos (b) $H(x,t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Para $x = 0$, temos
$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t}(0,t) = \xi(H(0,t),t) \\ H(0,s) = 0. \end{cases}$$

Por outro lado a função nula também é solução do P.V.I. $\begin{cases} x' = \xi(x(t),t) \\ x(s) = 0. \end{cases}$

Assim, como a função é contínua em $H(0,t)$. Logo $H(0,t) \equiv 0$, portanto vale b).

Resumo: Temos até agora os seguintes resultados: (a), (b), (c) $\Longrightarrow$ (a), (b), (d) $\Longleftrightarrow$ (e).

Afirmação 5.2. (a), (b), (d) $\Longrightarrow$ (a), (b), (c).

Como vale (d), temos
$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\right] \quad &+ \quad \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}[F \circ H](x,t) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad F \circ H(x,t) = c(x). \qquad (4.18) \end{aligned}$$

Em particular $F(H(x,s),s) = c(x)$ e como, por a), $H(x,s) = x$, tem-se $F(x,t) = c(x)$. Logo, por (4.18), $F(H(x,t),t) = F(x,s)$ e portanto vale (c) e segue a **afirmação 5**.

Nesse caso existe um difeomorfismo $h_t : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ tal que $F_t \circ h_t = F_s$ pois nesse caso, tomemos $s = 0$ e $t = 1$, teremos
$$F_1 \circ h_1 = F_0 \Longrightarrow (z + \theta) \circ h_1(x) = z(x).$$

Assim, existe $h : B(0,\alpha) - \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \{1\}$ isomorfo a $h_1 \mid_{B(0,\alpha)}$: $B(0,\alpha) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow B(0,\alpha) \in \mathbb{R}^n$ onde a cada $(x,0)$ associa $(h(x),1)$ = ponto onde a trajetória fura $\mathbb{R}^n \times \{1\}$. Como h é isomorfismo a $h_1 \mid_{B(0,\alpha)}$, então h é um homeomorfismo e $h(0) = 0$. Logo,
$$z(x) = F(x,0) = F(h(x),1) = z(h(x)) + \theta(h(x)) = [(z+\theta) \circ h](x).$$

Portanto z é C^0-suficiente em C^r.

Parte B: Observemos que $h : B(0,\alpha) - \{0\} \longrightarrow B(0,\alpha) - \{0\}$ é um difeomorfismo de classe C^i, pois h_1 é de classe C^i. Mostremos então, que se $r-r(z)+1-i[r(z)-r_0(z)+1] \geq 0$ para algum $i > 0$, o campo X é de classe C^i numa vizinhança de $\{0\}_{\mathbb{R}^n} \times [0,1]$ no $\mathbb{R}^{n+1}$, consequentemente o campo Y é de classe C^i, e como h é de classe C^i (pois $i \leq r$) e portanto z será C^i-suficiente em C^r.

Suponhamos então que $r - r(z) + 1 - i[r(z) - r_0(z) + 1] \geq 0$ para algum $i \geq 0$. Se $r(z) = r_0(z) = 1$, então 0 é ponto regular de z, pois $D(\nabla z_1(x), \cdots, \nabla z_p(x)) > 0$. Neste caso o Teorema se reduz ao seguinte teorema.

Teorema do Posto [2]: Seja $(z+\theta) : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ de classe C^r e seja a um valor regular, ou seja, tem posto máximo em a. Logo existe um difeomorfismo $h : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0$ de classe C^r sobre um aberto em $\mathbb{R}^n$ tal que $(z+\theta) \circ h(x) = z(x)$.

Portanto z é C^i-suficiente em C^r.

Suponhamos então que $r \geq r(z) \geq r_0(z) > 1$. Consideremos o campo X.

$$
\begin{aligned}
X(x,t) &= \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle e_{n+1}, \nabla F_i(x,t)\rangle}{||n_i(x,t)||^2} \cdot n_i(x,t) \\
&\overset{(4.13)}{=} \sum_{i=1}^{p} \frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2} \cdot n_i(x,t) \\
&= \sum_{i=1}^{p} H_i(x,t)
\end{aligned}
$$

Onde $H_i(x,t) = \dfrac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2} \cdot n_i(x,t), \forall i = 1 \cdots, p.$

Vamos derivar H_i na ordem $\alpha = 1, \cdots, r-1$ num ponto $(x,t) \neq (0,t)$.

$$
\begin{aligned}
H_i^{(1)}(x,t) &= \left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(1)} \cdot n_i(x,t) + \frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2} \cdot n_i^{(1)}(x,t) \\
H_i^{(2)}(x,t) &= \left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(2)} n_i(x,t) + 2\left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(1)} n_i^{(1)}(x,t) + \\
&\quad + \frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2} n_i^{(2)}(x,t) \\
&= \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} \left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(j)} n_i^{(2-j)}(x,t) \\
H_i^{(3)}(x,t) &= \left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(3)} n_i(x,t) + \left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(2)} n_i^{(1)}(x,t) + \\
&\quad +2\left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(2)} n_i^{(1)}(x,t) + 2\left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(1)} n_i^{(2)}(x,t) + \\
&\quad + \left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(1)} n_i^{(2)}(x,t) + \left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right) n_i^{(3)}(x,t) \\
&= \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} \left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(j)} n_i^{(3-j)}(x,t).
\end{aligned}
$$

Por indução, temos,

$$
H_i^{(\alpha)}(x,t) = \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} n_i^{(\alpha-j)}(x,t) \left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(j)}.
$$

Por indução novamente, temos,

$$
\left(\frac{\theta_i(x)}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \theta_i^{(j-k)}(x)(||n_i(x,t)||^{-2})^{(k)}.
$$

Daí,

$$
H_i^{(\alpha)}(x,t) = \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} n_i^{(\alpha-j)}(x,t) \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \theta_i^{(j-k)}(x)(||n_i(x,t)||^{-2})^{(k)} \right).
$$

Como $||\theta_i(x)|| = O(||x||^{r+1})$, então $||\theta_i(x)|| = O(||x||^r)$, em consequência, temos $||\theta_i^{(j-k)}(x)|| = O(||x||^{r-j+k})$ e

$$
||n_i(x,t)|| = d_i(x,t) = |\nabla F_i(x) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} y_j \nabla F_j(x)| \leq
$$

$$
\leq |\sum_{j=1}^{p} y_j \nabla F_j(x)| \leq \sum_{j=1}^{p} |y_j \nabla F_j(x)| \leq |M \sum_{j=1}^{p} |\nabla F_j(x)|
$$

$$
\leq M \sum_{j=1}^{p} (|\nabla z_j(x)| + |\nabla(t\theta_i(x))|). \tag{4.19}
$$

Foi tomado $M = \max\{y_1, \cdots, y_p\}$ e analisando a ordem de crescimento dos germes, pelo **lema 4**, temos

$$|\nabla z(x)| \leq k|x|^{r_0 - 1} = O(||x||^{r_0(z)-1}), \forall i = 1, \cdots, p$$

e como $j^r(\theta(x)) \equiv 0$ e $r \geq r_0(z)$, então $j^{r_0(z)}(\theta(x)) \equiv 0$, segue-se desse resultado que $j^{r_0(z)-1}\nabla\theta(x) \equiv 0$, logo $||\nabla\theta_i(x)|| = O(||x||^{r_0(z)}) = O(||x||^{r_0(z)-1}), \forall i = 1, \cdots, p$. Como t é uma variável independente de x, então

$$||\nabla t\theta_i(x)|| = O(||x||^{r_0(z)-1}).$$

Continuando os cálculos,

$$M\sum_{j=1}^{p}(|\nabla z_j(x)| + |\nabla(t\theta_i(x))|) \leq M\sum_{j=1}^{p}(O(||x||^{r_0(z)-1}) + O(||x||^{r_0(z)-1}) = O(||x||^{r_0(z)-1}).$$

Essa última igualdade é válida, por que a soma de ordem de crescimento não influencia as ordens de crescimento se forem iguais. Portanto

$$||n_i(x,t)|| = O(||x||^{r_0(z)-1}). \tag{4.20}$$

Por outro lado,

$$||n_i(x,t)|| = d_i(x,t) \geq D(\nabla F_1(x), \cdots, \nabla F_p(x)) \geq c||x||^{r(z)-1} = O(||x||^{r(z)-1}). \tag{4.21}$$

Donde seguem vários resultados

$$\begin{aligned} ||n_i^{(\alpha-j)}(x,t)|| &= O(||x||^{r_0(z)-\alpha+j-1}) \qquad (4.22)\\ ||n_i(x,t)||^2 &\geq O(||x||^{2r(z)-2})\\ \frac{1}{O(||x||^{2r(z)-2})} &\geq \frac{1}{||n_i(x,t)||^2}\\ \frac{1}{O(||x||^{2r(z)-2+k})} &\geq \left(\frac{1}{||n_i(x,t)||^2}\right)^{(k)}\\ \frac{1}{O(||x||^{2r(z)-2+k})} &\geq (||n_i(x,t)||^{-2})^{(k)}. \qquad (4.23)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
||H_i^{(\alpha)}(x,t)|| &= ||\sum_{j=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{j} n_i^{(\alpha-j)}(x,t)\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\theta_i^{(j-k)}(x)(||n_i(x,t)||^{-2})^{(k)}\right)|| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{j}||n_i^{(\alpha-j)}(x,t)||\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}||\theta_i^{(j-k)}(x)||||(||n_i(x,t)||^{-2})^{(k)}|| \\
&\overset{(4.22)(4.23)}{=} \sum_{j=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{j}O(||x||^{r_0(z)-\alpha+j-1})\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}O(||x||^{r-j+k})O(||x||^{-2r(z)+2-k}) \\
&= O(||x||^{r_0(z)-\alpha+j-1})O(||x||^{r-j+k})O(||x||^{-2r(z)+2-k}). \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

A ordem do produto é a soma dos expoente de cada ordem de crescimento, segue-se então que,

$$\begin{aligned}
||H_i^{(\alpha)}(x,t)|| &= O(||x||^{r_0(z)-\alpha+j-1+r-j+k-2r(z)+2-k}) \\
&= O(||x||^{r_0(z)-\alpha+1+r-2r(z)}) \\
&= O(||x||^{(r-r(z)+1)+[-r(z)+r_0(z)-\alpha]}).
\end{aligned}$$

Temos por hipótese $r(z) \geq r_0(z)$ e $\alpha \geq 1$, então $r(z)-r_0(z) \geq 0$.

$$\begin{aligned}
1 \leq \alpha \Longrightarrow \frac{-r(z)+r_0(z)}{-r(z)+r_0(z)} &\leq \alpha \\
-r(z)+r_0(z) &\leq \alpha(-r(z)+r_0(z)) \\
-r(z)+r_0(z)-\alpha &\leq -\alpha(r(z)-r_0(z))-\alpha \\
-r(z)+r_0(z)-\alpha &\leq -\alpha(r(z)-r_0(z)+1).
\end{aligned}$$

$$||H_i^{(\alpha)}(x,t)|| = O(||x||^{(r-r(z)+1)+(-r(z)+r_0(z)-\alpha)}) \leq O(||x||^{(r-r(z)+1)-\alpha[r(z)-r_0(z)+1]}).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
||X^{\alpha}(x,t)|| &= ||\sum_{i=1}^{p}H_i^{\alpha}(x,t)|| \leq \sum_{i=1}^{p}||H_i^{\alpha}(x,t)|| \\
||X^{\alpha}(x,t)|| &\leq O(||x||^{(r-r(z)+1)-\alpha[r(z)-r_0(z)+1]}). \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Como $r(z)-r_0(z) \geq 0$ e $\alpha \geq 1$, então $-\alpha \leq -1$ e $(1-\alpha)(r(z)-r_0(z)) \leq 0$. Dessas hipóteses podemos adquirir alguns resultados importantes.

$$
\begin{aligned}
-\alpha &\leq 0\\
-\alpha-\alpha(r(z)-r_0(z)) &\leq -\alpha(r(z)-r_0(z))\\
-\alpha-\alpha(r(z)-r_0(z)) &\leq -\alpha(r(z)-r_0(z))+r(z)-r_0(z)\\
-\alpha(r(z)-r_0(z)+1) &\leq (1-\alpha)(r(z)-r_0(z))\leq 0. \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

Continuando com os cálculos de (4.25), usando os resultados de (4.26),

$$
\begin{aligned}
||X^{\alpha}(x,t)|| &\leq O(||x||^{(r-r(z)+1)-\alpha[r(z)-r_0(z)+1]})\\
&\leq O(||x||^{(r-r(z)+1)+(1-\alpha)(r(z)-r_0(z))})\\
&\leq O(||x||^{(r-r(z)+1)+r(z)-r_0(z)-\alpha r(z)+\alpha r_0(z)})\\
&\leq O(||x||^{r+1-r_0(z)-\alpha r(z)+\alpha r_0(z)}). \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Logo, se $\alpha=i$, então

$$||X^{\alpha}(x,t)||\leq O(||x||^{r+1-r_0(z)-i(r(z)-r_0(z))}).$$

Como $r(z)\geq r_0(z)$ e $i=\alpha\geq 1$, então $i(r(z)-r_0(z))\geq 0$ e $-i(r(z)-r_0(z))\leq 0$. logo,

$$O(||x||^{r+1-r_0(z)-i(r(z)-r_0(z))})\leq O(||x||^{r+1-r_0(z)})$$

$$||X^{\alpha}(x,t)||\leq O(||x||^{r+1-r_0(z)}).$$

Por $r(z)-r_0(z)\geq 0$, temos $r(z)-r_0(z)+1=m>0$, onde $m\in\mathbb{N}$. logo,

$$||X^{\alpha}(x,t)||\leq O(||x||^{m}).$$

Como $\lim\limits_{||x||\to 0}||x||^m=0$ é uniformemente contínua para $t\in[0,1]$. Então $\lim\limits_{||x||\to 0}||X^{\alpha}(x,t)||=0$ é uniformemente contínua para $t\in[0,1]$.

Como derivamos H_i na ordem $\alpha=1,\cdots,r-1$, onde α é arbitrário e $\alpha=i$, então $\lim\limits_{||x||\to 0}||X^{\alpha}(x,t)||=0$ é uniformemente contínua para $t\in[0,1]$ e $\forall i=1,\cdots,r-1$. Pela **Afirmação 2**, X é contínua, portanto

$$X(x,t)=X^{(1)}(x,t)=\cdots=X^{(i)}(x,t)=0 \qquad (4.28)$$

e como $X^{(i)}$ é contínua na vizinhança do zero $B(0,\alpha)$. Então $X^{(i)}$ é de classe C^0. Portanto X é de classe C^i.

Seja $\alpha = i-1$, como $r \geq r_0(z)$ e $r(z)-r_0(z)+1 = m > 0$, então m é no mínimo 1, daí, $||X^\alpha(x,t)|| = O(||x||^1)$ e portanto existe $X^{\alpha+1}(x,t)$ e é contínua em $x = 0$. E daí, segue-se que $X^{\alpha+1}$ é de classe C^0. Portanto X é de classe $C^{\alpha+1}$ em $B(0,\alpha) \times [0,1]$. Isto mostra que X é de classe C^i. Como $\alpha = r-1$ e $i \leq r$, então não há possibilidade para os casos de $\alpha < i-1$, pois nesse caso, X seria de classe $C^{\alpha=r-1}$, como $i \leq r$, consequentemente X seria de classe C^i.

Logo, $Y(x,t) = e_{n+1} - X(x,t)$ é de classe C^i e consequentemente, conclui a **Parte B**, do teorema.

Portanto z é C^i-suficiente em C^r.

■

Exemplo 4.2.1 *O germe $z(x,y) = (x^2-y^2, 2xy) \in J^2_{(2,2)}$ é C^1-suficiente em C^2.*

De fato: Observe que

$$jac(z) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} \longrightarrow Det(jac(z)) = 4(x^2+y^2)$$

Logo, $(0,0)$ é ponto crítico isolado de z. Temos: $r_0(z) = 2$ e

$$\begin{aligned} \nabla z_1(x,y) &= 2(x,-y) \\ \nabla z_2(x,y) &= 2(y,x) \end{aligned}$$

temos que,

$$d(\nabla z_1, \nabla z_2) = \frac{2(x^2+y^2)}{|(x,y)|} = 2|(x,y)|$$
$$d(\nabla z_1, \nabla z_2) > 2|(x,y)|^{2-1}.$$

Logo, $r(z) = 2$.

Segue que, $r - r(z) + 1 - i[r(z) - r_0(z) + 1] = 1 - i \geq 0 \Longleftrightarrow i = 0$ ou $i = 1$.

Portanto, z é C^1-suficiente em C^2.

Observação 4.2.2 *Isto responde à pergunta feita no inicio deste capítulo.*

Referências Bibliográficas

[1] MARTINS, J. C. C. & FÁVARO A. L. - Sobre a C^i-suficiência em $J^r_{(n,p)}$. MÉTRICA: Estudos e pesquisas e m Matemática, Nº 13, UNESP (1981).

[2] LIMA, E. L. - Curso de Análise. Volume II. Projeto Euclides - IMPA - SBM, Décima primeira edição, 2012.

[3] GOLUBITSKY, M. & GUILLEMIN, V. - Stable Mappings and Their Singularities. Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1973.

[4] HARTMAN, Ph.: Ordinary differential equations. New York: John Wiley & Sens, 1964.

[5] TAKENS, F. - A note on sufficiency of jets. Inventiones - Math. 13, pag. 225 - 231, 1971.

[6] LIMA, E. L. - Álgebra Linear. Oitava ed. Rio de janeiro: IMPA, 2011.

[7] DOERING, C. I. & LOPES, A. O. - Equações Diferenciais Ordinárias. Quinta edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[8] COSTA, M. S. - Introdução à Teoria de Singularidades de Aplicações Diferenciáveis. UNESP.

[9] KUO, T. C. - Characterizations of v-sufficiency of jets - Topology, volume 11, pag. 115 - 131, 1972.

[10] SENA FILHO, E. S. - Quando a equivalência de contato implica na $\mathcal{R}$-equivalência. Dissertação de Mestrado. UFPI, 2012.

[11] CARVALHO, Ramon Soares. - Sobre a C^0-suficiência de jatos de germes analíticos. Dissertação de Mestrado. UFPI, 2014.

[12] DIMCA,A. - Topics on Real and Complex Singularities: an introduction.Wiesbaden - Vieweg, 1987.

[13] BOTELHO, G. & PELLEGRINO, D. & TEIXEIRA, E. - Fundamento de análise funcional. Rio de Janeiro: SBM. Primeira edição, 2012.