Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Fulano de Tal

Título da Dissertação

Teresina - 2020

PROFMAT

Fulano de Tal

Dissertação de Mestrado:

Título da Dissertação

Dissertação submetida à Coordenaçao do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. Beltrano dos Anzóis.

Teresina - 2020

Copyright © 2020 by Fulano de Tal.

Direitos reservados, 2020 por Fulano de Tal.

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

Nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a expressa autorização do autor.

Ficha Catalográfica

de Tal, Fulano.
Título da Dissertação - Teresina-PI, UFPI. 2020.

Orientador: Prof. Dr. Beltrano dos Anzóis.

XXX.XX CDD(1.ed.) 512.5

Fulano de Tal

Título da Dissertação

Dissertação submetida à banca examinadora abaixo discriminada em defesa pública e aprovada em xx/xx/xxxx.

BANCA EXAMINADORA

Nome do examinador orientador (Orientador)

Universidade Federal do Piauí

Nome do examinador

Universidade xxxxxxxx xx xxxxxxxx

Nome do outro examinador

Universidade xxxxxxxx xx xxxxxxxx

Teresina - 2020

Dedico esta dissertação à minha família ....

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à meu orientador .... Agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento.

Agradecimento agradecimento, agradecimento agradecimento agradecimento, agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento, agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento, agradecimento.

Agradeçimento agradecimento agradecimento, agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento, agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento, agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento agradecimento.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"*de um poeta famoso, eu mesmo, que só escrevi um poema na vida*".

Michael Atiyah.

Resumo

No estudo da Teoria de Singularidade caracterizamos os pontos críticos de germes de funções suaves e analíticas. Neste trabalho apresentamos as noções introdutórias e essenciais para esta caracterização, como a Álgebra Comutativa, Funções Analíticas e E.D.O. A partir de um exemplo particular no caso real, apresentamos uma extensão, para o caso analítico, da C^0-suficiência de jatos de germes analíticos. Para uma tal abordagem, demonstramos lemas que nos levarão a associar a C^0-suficiência analítica de um jato com uma desigualdade que envolva o gradiente do respectivo germe.

Palavras-chave: C^0-suficiência, germes analíticos, jatos.

Abstract

In the study of Theory of Singularity we caracterize the critical points of germs of smooth and analitical functions. In this work, we presente the introductory and essential notions for this caracterization, as the Commutative Algebra, Analytical Functions and O.D.E. From an particular example in the real case, we presente an extension, for the analytical case, the C^0-suficiency of jets of analytical germs. For this approach, we show lemmes which will let us to associate the analytical C^0-sufficiency of jet with an desiguality of gradiente of the respective germe.

Key words : C^0-suficiency, analytical germs, jets.

Sumário

Prefácio

Este é o prefácio.

Prefácio prefácio.

Introdução

Esta é a introdução introdução introdução, introdução introdução introdução introdução introdução, introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução, introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução, introdução introdução introdução.

Introdução introdução introdução, introdução introdução introdução introdução introdução, introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução, introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução, introdução introdução introdução.

Introdução introdução introdução, introdução introdução introdução introdução introdução, introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução, introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução introdução, introdução introdução introdução.

Capítulo 1

Título das preliminares

1.1 Grupos e subgrupos

Definição 1.1.1 *Um grupo é um conjunto não vazio G munido de uma operação $* : G \times G \to G$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$ *(Associatividade);*
2. *Existe um elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \forall a \in G$ (Existência de elemento neutro);*
3. *Dado $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$ (Existência de elemento oposto);*

   Além disso, um grupo G é chamado de grupo Abeliano (ou comutativo) se também satisfaz a propriedade:
4. $a * b = b * a, \forall a, b \in G$ *(Comutatividade).*

1.2 Anéis, subanéis e ideais

Definição 1.2.1 *Seja A um conjunto não vazio no qual estão definidas as operações de soma e produto*

$$+ : A \times A \to A \quad e \quad \cdot : A \times A \to A.$$

Diremos que A é um anel quando são satisfeitas as seguintes propriedades:

1. $(A, +)$ *é um grupo abeliano;*
2. $(a.b).c = a.(b.c), \forall a, b, c \in A$ *(Associatividade do produto);*

3. $a.(b+c) = a.b + a.c$ e $(a+b).c = a.c + b.c$, $\forall a, b, c \in A$ *(Distributividades).*

O anel A é dito um anel com unidade quando:

4. *existe $1 \in A$ tal que $1.a = a.1 = a, \forall a \in A$;*

Além disso, o anel A será chamado de anel comutativo quando:

5. $a.b = b.a, \forall a, b \in A$.

Proposição 1.2.2 *Seja $(A, +, .)$ um anel. Então, para todo $a, b \in A$ tem-se:*

1. $0.a = a.0 = 0$;
2. $(-a).b = a.(-b) = -(a.b)$;
3. $(-a).(-b) = a.b$.

1.3 Domínios e corpos

Definição 1.3.1 *Um conjunto não vazio D, munido de operações de soma e produto*

$$+ : D \times D \to D \quad e \quad \cdot : D \times D \to D,$$

é chamado de domínio de integridade quando $(D, +, \cdot)$ for um anel comutativo com unidade sem divisores de zero, isto é, D satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Dados } x, y \in D, \text{ com } xy = 0 \text{ então } x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Capítulo 2

Espaços vetoriais

2.1 Definição e exemplos

Definição 2.1.1 *Um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto não vazio V munido de operações de soma vetorial e produto por escalar*

$$+ : V \times V \to V \quad e \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. *V, com a soma vetorial $+$, é um grupo Abeliano;*
2. *$(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $v \in V$;*
3. *Valem as leis de distributividade: para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e u, v $\in V$,*
$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad e \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v;$$
4. *$1.v = v$, para todo $v \in V$, em que 1 é a unidade de $\mathbb{K}$.*

Proposição 2.1.2 *Em um espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{K}$ o vetor nulo e o oposto são únicos.*

2.1.1 Propriedades

Na proposição seguinte listaremos algumas propriedades dos espaços vetoriais.

Proposição 2.1.3 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Então, são válidas as seguintes afirmativas.*

a) *Para qualquer* $\alpha \in \mathbb{K}$, *tem-se que* $\alpha.0 = 0$;

b) *Dado qualquer vetor* $u \in V$ *tem-se que* $0u = 0$;

c) *Se* $\alpha u = 0$ *então* $\alpha = 0$ *ou* $u = 0$;

d) $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$ *para quaisquer* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $u \in V$;

e) *Para qualquer* $u \in V$, *tem-se que* $-(-u) = u$;

f) *Se* $u, v, w \in V$ *são tais que* $u + w = v + w$ *então* $u = v$;

g) *Se* $u, v \in V$ *então existe um único vetor* $w \in V$ *tal que* $u + w = v$.

2.2 Subespaço vetorial

Consideremos os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definidos por

$$P := \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \in \mathbb{R}\} \ \text{ e } \ D := \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que dados, vetores $u, v \in P$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, nem sempre teremos $u + v \in P$ e $\alpha u \in P$. Por exemplo, tomando $u = (-1, 1), v = (2, 4)$ e $\alpha = 2$. Por outro lado, dados quaisquer $u, v \in D$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ sempre teremos $u + v \in D$ e $\alpha u \in D$.

Conforme podemos observar, o subconjunto D acima é fechado com as oprerações de $\mathbb{R}^2$. O mesmo não ocorre com o subconjunto P. Os subconjuntos de um espaço vetorial que possuem a propriedade de que a soma de dois de seus elementos é um elemento do próprio subconjunto e a multiplicação de um elemento do subconjunto por um escalar continua pertencendo ao subconjunto serão nosso objeto de estudo.

Definição 2.2.1 *Um subconjunto não vazio* U *de um espaço vetorial* V *(sobre o corpo* $\mathbb{K}$*) é chamado de subespaço vetorial (sobre um corpo* $\mathbb{K}$*) quando* U, *munido das mesmas operações de soma vetorial e produto por escalar de* V, *for também um espaço vetorial.*

Proposição 2.2.2 *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}$. *Um subconjunto* $U \subset V$ *é um subespaço vetorial de* V *se, e somente se, forem satisfeitas as seguintes condições:*

sv1) $0 \in U$;

sv2) *Se* $u, v \in U$ *então* $u + v \in U$;

sv3) *Se* $u \in U$ *então* $\alpha u \in U$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$.

2.2.1 Soma direta

Definição 2.2.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, U e W subespaços vetoriais de V. Definimos a soma $U + W$ como sendo o conjunto formado pelos vetores da forma $u + w$ em que $u \in U$ e $w \in W$.*

Proposição 2.2.4 *A soma $U + W$ é um subespaço vetorial de V.*

Capítulo 3

Base e dimensão

3.1 Conjunto de geradores

Definição 3.1.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Diremos que o vetor $u \in V$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$.*

Proposição 3.1.2 $[\varepsilon]$ *é um subespaço vetorial de V.*

3.1.1 Independência linear

Definição 3.1.3 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Os vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ são chamados de linearmente independentes quando, dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

tem-se que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Diremos que $v_1, \ldots, v_n \in V$ são linearmente dependentes quando não forem linearmente independentes.

3.2 Base

Definição 3.2.1 *Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma base ε de V é um conjunto de geradores de V linearmente independente.*

3.3 Dimensão

Teorema 3.3.1 *Suponha que $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base do espaco vetorial V. Então:*

1. *Todo subconjunto de V contendo pelo menos $n+1$ vetores é linearmente dependente;*

2. *Todo subconjunto de V contendo no máximo $n-1$ vetores não gera V.*

3.4 Coordenadas de um vetor

Seja V um espaço vetorial de dimensão n e β uma base de V. Escolhida uma ordem para os vetores de β, chamaremos β de uma base ordenada de V. Desta forma, podemos falar em i-ésimo elemento da base.

Suponhamos que $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Como sabemos (ver 3.3.1), dado um vetor $v \in V$ existem únicos escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n.$$

Referências Bibliográficas

[1] Artin, Michael, *Algebra*. Prentice Hall, Massachusetts Institute of Technology, 1991.

[2] Rose, Harvey E., *Linear Algebra - A Pure Mathematical Approach*. Birkäuser Basel, 2002.

[3] Hoffman, Kenneth and Kunze, Ray, *Linear Algebra*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[4] Lima, E. L., *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1995.

Índice Remissivo