Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teorema de Liouville para Gráficos Mínimos

Luís Estevão de Sousa Vieira

Teresina - 2024

Luís Estevão de Sousa Vieira

Dissertação de Mestrado:

Teorema de Liouville para Gráficos Mínimos

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa

Teresina - 2024

À minha família.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teorema de Liouville para gráficos mínimos

Luis Estevão de Sousa Vieira

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 31 de julho de 2024.

Banca Examinadora:

gov.br
Documento assinado digitalmente
LEANDRO DE FREITAS PESSOA
Data: 31/07/2024 17:16:42-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa – Orientador

gov.br
Documento assinado digitalmente
PAULO ALEXANDRE ARAUJO SOUSA
Data: 31/07/2024 18:15:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araujo Sousa - UFPI

gov.br
Documento assinado digitalmente
ALLAN GEORGE DE CARVALHO FREITAS
Data: 31/07/2024 17:08:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Divisão de Representação da Informação

V658t Vieira, Luís Estevão de Sousa.
Teorema de Liouville para gráficos mínimos / Luís Estevão de Sousa Vieira. -- 2024.
61 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
"Orientador: Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa".

1. Gráficos mínimos. 2. Teorema de Liouville. 3. Estimativa gradiente. I. Pessoa, Leandro de Freitas. II. Título.

CDD 510

Bibliotecária: Francisca das Chagas Dias Leite – CRB3/1004

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa por toda ajuda, ensinamentos e incentivo concedido nesse processo.

Agradeço aos membros da banca Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas, Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa e Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa por aceitarem o convite e por todas as contribuições para esta dissertação.

Agradeço aos meus pais Maria Antonia e Luis Gonzaga, minhas irmãs Sandra, Francisca e Maria por todo o apoio para que eu pudesse concretizar este objetivo, e agradeço especialmente ao meu irmão Pedro por todo o apoio e companheirismo durante essa jornada.

Agradeço aos meus amigos e companheiros de mestrado José Gonçalves de Oliveira Rufino e Wilkreffy Manoel de Sousa Santos por toda ajuda e parceria concedida durante esse ciclo.

Agradeço ao meu amigo Prof. Me. Jonathas Peres de Macedo por todo o incentivo.

Agradeço à toda equipe do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPI pelo compromisso com o ensino nesta instituição.

Agradeço ao Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar por todos os ensinamentos e toda a ajuda concedida tanto como professor quanto como coordenador do programa.

Agradeço a CAPES, ao CNPq e a FAPEPI pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos aqueles que de forma direta ou indireta me ajudaram e me impulsionaram a seguir firme até a obtenção do título Mestre em Matemática.

"*A persistência é o caminho do êxito*".

Charles Chaplin.

Resumo

Estudamos um teorema do tipo Liouville, o resultado diz que toda solução suave para a equação de gráficos mínimos definida em uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa e cuja parte negativa possui crescimento sublinear deve ser constante. Para isto, apresentamos estimativas gradiente e estimativas integrais para potências da função volume para gráficos mínimos via uma modificação do método de iteração De Giorgi-Nash-Moser.

Palavras-chave: Gráficos mínimos, teorema de Liouville, estimativa gradiente.

Abstract

We studied a Liouville-type theorem that states that every smooth solution to the minimal graph equation defined on a complete Riemannian manifold with non-negative Ricci curvature, and whose negative part has sublinear growth, must be constant. To this end, we present gradient estimates and integral estimates for the powers of the volume function of minimal graphs via a modification of the De Giorgi-Nash-Moser iteration method.

Key-Words: Minimal graphs, Liouville theorem, gradient estimate.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos um teorema do tipo Liouville para funções que definem um gráfico mínimo sobre uma variedade Riemanniana completa não compacta Σ. Sejam D e div_{Σ} a conexão Levi-Civita e o operador divergência (em termos da métrica Riemanniana de Σ), respectivamente. Estudamos a equação da hipersuperfície mínima em Σ

$$\text{div}_{\Sigma}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)=0 \tag{1}$$

que é uma equação diferencial parcial não linear que descreve o gráfico mínimo

$$M=\{(x,u(x))\in\Sigma\times\mathbb{R}:x\in\Sigma\} \tag{2}$$

sobre Σ. A solução suave u para (1) é a função altura do gráfico mínimo M em $\Sigma\times\mathbb{R}$.

O estudo de superfícies mínimas gerou grande interesse da pesquisa, proporcionando inúmeros trabalhos pelo mundo afora. Em 1915, uma contribuição de grande relevância nessa direção nos foi fornecida por Bernstein (ver [1, 11, 19, 32]), como segue

Teorema 0.1 (Bernstein)**.** *Se uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ é um gráfico inteiro de uma função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ então ela é um plano, ou seja, as únicas soluções inteiras para a equação de superfície mínima*

$$(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}=0$$

são as funções afins $f(x,y)=ax+by+c$ com $a,b,c\in\mathbb{R}$

Este resultado, por sua vez, despertou interesse de estudos sobre os casos com ambiente diferente de $\mathbb{R}^3$. Em 1969, E. Bombieri, E. De Giorgi e M. Miranda [3] provaram estimativas de gradiente interior para soluções da equação de hipersuperfície mínima em $\mathbb{R}^n$, o caso bidimensional já havia sido obtido por R. Finn [17] em 1954. Como corolário, eles obtiveram imediatamente o seguinte

Teorema 0.2. *Se uma função u que difine um gráfico mínimo sobre $\mathbb{R}^n$ satisfaz o crescimento sublinear para sua parte negativa, ou seja,*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\max\{-u(x), 0\}}{|x|} = 0 \tag{3}$$

então u é uma constante.

A necessidade da condição (3) é imediata, pois qualquer função afim define um gráfico mínimo em $\mathbb{R}^n$ e, por exemplo, a função $u(x) = \langle e_1, x\rangle + b$, onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$, satisfaz

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\max\{-u(x), 0\}}{|x|} = 1.$$

Quando a função u que define um gráfico mínimo sobre $\mathbb{R}^n$ tem o gradiente uniformemente limitado, Moser [27] provou que u é afim usando as desigualdades de Harnack para equações uniformemente elípticas . A estimativa do gradiente de u em $\mathbb{R}^n$ também pode ser obtida pelo princípio do máximo (ver [24, 33] por exemplo). Em 1968, Simons [32] obteve que qualquer função que define um gráfico mínimo sobre $\mathbb{R}^n$ é afim para $n \leqslant 7$. O contra-exemplo pro caso $n \geqslant 8$ pode ser encontrado em [2].

Teoremas do tipo Liouville para funções gráficos mínimos não negativas também foram estudados em variedades. Em 1980, Fischer-Colbrie e Schoen [18], obtiveram que qualquer função positiva que define um gráfico mínimo sobre uma superfície de Riemann Σ de curvatura não negativa é constante (ver Rosenberg [30] para o caso de superfícies mínimas em $\Sigma\times\mathbb{R}$). Já em 2013, H. Rosenberg, F. Schulze e J. Spruck [31] provaram que toda função não negativa que define um gráfico mínimo em uma variedade completa de curvatura de Ricci não negativa e com curvatura seccional uniformemente limitada inferiomente, é constante.

Em 2020, J.-B. Casteras, E. Heinonen e I. Holopainen [6] mostraram um resultado semelhante trocando a hipótese de *curvatura seccional uniformemente limitada inferiomente* por *curvatura seccional assintoticamente não negativa* e acrescentando a hipótese que a função tenha no máximo crescimento linear. Já em 2021, Q. Ding [12], provou que toda função não negativa que define um gráfico mínimo sobre uma variedade completa de curvatura de Ricci não negativa é constante, o que também foi obtido por G. Colombo, M. Magliaro, L. Mari e M. Rigoli [9] independentemente.

Ainda no trabalho de 2013, Rosenberg, Schulze e Spruck [31] provaram um teorema tipo Liouville para gráficos mínimos sobre variedades completas de curvatura seccional não negativa. Já Ding, Jost e Xin [16], em 2016, provaram o resultado para gráficos mínimos sobre variedades completas de curvatura de Ricci não negativa, crescimento de volume euclidiano e decaimento de curvatura quadrática. Em 2021, Ding [13] provou isso sem a condição de decaimento da curvatura quadrática acima, que é um subproduto da desigualdade de Poincaré em gráficos mínimos (ver [4] para o caso da desigualdade euclidiana).

Em [8], G. Colombo, E. Gama, L. Mari e M. Rigoli provaram o teorema de Liouville forte para gráficos mínimos sobre variedades completas de curvatura de Ricci não negativa e que a $(n-2)$-ésima curvatura de Ricci na direção radial a partir de uma origem fixa tem um limite inferior que decai quadraticamente até zero. Mais recentemente, em 2023, G. Colombo, L. Mari e M. Rigoli [10] obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 0.3. *Seja Σ uma variedade Riemanniana não compacta, completa e com curvatura de Ricci não negativa. Se $u\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ define um gráfico mínimo sobre Σ e satisfaz*

$$\limsup_{\Sigma \ni x \to \infty} \frac{\log d(x,p)}{d(x,p)} \max\{-u(x), 0\} < \infty \tag{4}$$

para algum $p \in \Sigma$, então u é constante.

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar de forma detalhada o resultado provado por Q. Ding [15] que generaliza o resultado obtido em [10, 12].

Teorema 0.4. *Seja Σ uma variedade Riemanniana Σ não compacta, completa e com curvatura de Ricci não negativa. Se $u\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ define um gráfico mínimo sobre Σ e para algum $p \in \Sigma$ vale*

$$\limsup_{\Sigma \ni x \to \infty} \frac{\max\{-u(x), 0\}}{d(x,p)} = 0, \tag{5}$$

então u é constante.

Observação 1. *Note que a condição* (4) *implica na condição* (5). *De fato, se a condição em* (5) *fosse positiva, então necessariamente teríamos que a condição* (4) *seria ilimitada.*

A prova do Teorema 0.4 perpassa pela seguinte estimativa gradiente uniforme para funções que são soluções da equações dos gráficos mínimos.

Teorema 0.5. *Existe uma constante $\beta_n > 0$ dependendo apenas de n tal que se uma função u que define um gráfico mínimo sobre Σ satisfaz*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{|u(x)|}{d(x,p)} < \beta_n \tag{6}$$

para algum $p \in \Sigma$*, então existe uma constante* $c > 0$ *dependendo apenas de* n *tal que*

$$\sup_{x\in\Sigma} |Du|(x) \leqslant c \limsup_{x\to\infty} \frac{|u(x)|}{d(x,p)}. \tag{7}$$

A ideia chave na prova do Teorema 0.5 é obter uma estimativa integral de v^k nas bolas geodésicas em Σ para uma grande constante k via método de iteração (em ℓ) de uma integral de $(\log v)^\ell v$, onde v é a função de volume do gráfico mínimo definido pela função u.

No Capítulo 1 apresentaremos os resultados teóricos já pré-estabelecidos na Análise Geométrica tais como o teorema de comparação de Bishop-Gromov, desigualdades de Sobolev, a desigualdade de Poincaré e a desigualdade de Harnack, incluindo versões para o caso em que Ric $\geqslant 0$. Esta condição é muito importante pois nos permite estendermos resultados locais para versões globais de teoremas como o de comparação de Bishop-Gromov, o que é essencial para as demonstrações dos resultados do capítulo seguinte.

No Capítulo 2 estabeleceremos as estimativas integrais da função volume com as quais, através da desigualdade de Sobolev em Σ, aplicaremos uma modificação do método de iteração de Giorgi-Nash-Moser nas bolas geodésicas de Σ para concluir a estimativa gradiente necessária para a prova do resultado principal que é apresentada na Conclusão desta Dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as definições, notações e resultados relevantes que serão utilizados nos capítulos seguintes. Não demonstraremos todos os resultados, mas deixaremos as devidas referências. Para a leitura do texto espera-se que o leitor possua noções básicas de geometria diferencial, que podem ser encontradas em [5, 25, 28].

1.1 Teorema de comparação de volume

O principal resultado que apresentaremos nesta seção nos permite comparar o volume de bolas de raio $r > 0$ em uma variedade Riemanniana Σ com o volume de bolas de mesmo raio contidas em uma variedade modelo Σ_σ cuja curvatura de Ricci é menor que a curvatura de Ricci de Σ. Assim, primeiramente introduziremos a classe das variedades modelo que são as variedades com simetria rotacional e posteriormente apresentaremos o resultado.

Seja g_{ij} o tensor métrico Riemanniano em Σ e $g \doteq \det[g_{ij}]$. Então o elemento de volume Riemanniano $d\mu$ é definido por

$$d\mu = \sqrt{g}dx_1dx_2\cdots dx_d \tag{1.1}$$

onde $(x_1, x_2, ..., x_d)$ são as coordenadas em Σ. Ainda, denotamos por $d\mu'$ o elemento de volume Riemanniano na subvariedade definida pela fronteira de um subconjunto aberto de Σ.

Seguindo [22], iremos fixar um ponto $o \in \Sigma$ e denotar por $cut(o)$ o *cut locus* de o. Longe de $cut^*(o) \doteq cut(o) \cup \{o\}$, pode-se definir coordenadas polares com o pólo o. Ou seja, para qualquer ponto $x \in \Sigma \setminus cut^*(o)$ corresponde um raio polar $\rho \doteq dist(x, o)$ e um ângulo polar $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ tal que as geodésicas minimizantes entre o e x tem origem em o e vetor velocidade inicial $\theta \in T_o\Sigma$. Podemos identificar $T_o\Sigma$ com $\mathbb{R}^d$ para que θ possa ser considerado como um ponto em $\mathbb{S}^{d-1}$. Em particular, $\Sigma \setminus \mathrm{cut}^*(o)$ é difeomorfo a uma região semelhante a uma estrela em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}$ (as demonstrações dos fatos aqui mencionados podem ser encontradas em [23, 21]).

A métrica Riemanniana em $\Sigma \setminus \mathrm{cut}^*(o)$ tem nas coordenadas polares a forma

$$ds^2 = d\rho^2 + A_{ij}(\rho,\theta)d\theta_i d\theta_j \tag{1.2}$$

onde $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{d-1})$ são coordenadas em $\mathbb{S}^{d-1}$ e $[A_{ij}(\rho,\theta)]$ é uma matriz positiva definida. Na verdade, $A_{ij}(\rho, .)$ é o tensor métrico Riemanniano na esfera geodésica $S_\rho \doteq \partial B(o,\rho) \setminus \mathrm{cut}(o)$. Denotamos $A = \det[A_{ij}]$. Então temos, por (1.1), que o elemento de área em S_ρ

$$d\mu'|_{S_p} = \sqrt{A}d\theta_1 d\theta_2 ... d\theta_{d-1}. \tag{1.3}$$

Em particular

$$\mu'(S_p) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{A}d\theta_1 d\theta_2 ... d\theta_{d-1}, \tag{1.4}$$

assumindo que $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{d-1}$ estão definidos em quase todo $\mathbb{S}^{d-1}$.

Dizemos que Σ é uma variedade com pólo se Σ possui um ponto o com *cut locus* $\mathrm{cut}(o)$ vazio. O ponto o é chamado de pólo de Σ, e as coordenadas polares são definidas em $\Sigma \setminus o$. Se, além disso, Σ é geodesicamente completa, então Σ é difeomorfa a $\mathbb{R}^d$.

Uma variedade Σ com um pólo o é chamada de variedade esfericamente simétrica ou modelo se a métrica Riemanniana em S_ρ for dada por

$$A_{ij}(\rho,\theta)d\theta_i d\theta_j = \sigma^2(\rho)d\theta^2, \tag{1.5}$$

onde $d\theta^2$ é a métrica euclidiana padrão $\mathbb{S}^{d-1}$ e $\sigma(\rho)$ é uma função positiva suave de ρ. Em outras palavras, a métrica Riemanniana em S_ρ é obtida escalonando a de $\mathbb{S}^{d-1}$ pelo fator σ^2.

Dada uma função positiva suave $\sigma(\rho)$ em $(0, R_0)$, a condição necessária e suficiente para que tal variedade exista é

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 1 \quad \text{e} \quad \sigma^{(2k)}(0) = 0. \tag{1.6}$$

A condição (1.6) garante que a métrica no cone $(0, R_0) \times \mathbb{S}^{d-1}$ definida por

$$ds^2 = d\rho^2 + \sigma^2(\rho)d\theta^2 \tag{1.7}$$

pode ser estendido suavemente até a origem $\rho = 0$ (ver [21]). Assumimos na sequência que σ satisfaz (1.6) e denotamos por Σ_σ o cone $(0, R_0) \times \mathbb{S}^{d-1}$ unido com a origem.

Claramente, a variedade modelo Σ_σ é difeomorfa a uma bola aberta em $\mathbb{R}^d$ de raio R_0 (ou todo $\mathbb{R}^d$ se $R_0 = \infty$). A métrica em qualquer esfera geodésica $\partial B(o, r)$ em Σ_σ é obtida a partir de $\mathbb{S}^{d-1}$ escalonando-a pelo fator $\sigma(r)$.

Desde que $\sqrt{A} = \sigma^{d-1}$, vemos de (1.4) que a área da esfera geodésica $\partial B(o, r)$ é calculada por

$$S(r) = \omega_d \sigma^{d-1}(r), \tag{1.8}$$

onde ω_d é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^d$. O volume $V(r)$ da bola $B(o, r)$ é dado por

$$V(r) = \int_0^r S(\varepsilon) d\varepsilon = \omega_d \int_0^r \sigma^{d-1}(\varepsilon) d\varepsilon. \tag{1.9}$$

Exemplo 1. *Se* $R_0 = \infty$ *e*

$$\sigma(r) = r,$$

então Σ_σ *é isométrico a* $\mathbb{R}^d$*. A área da fronteira é dada por*

$$S(r) = \omega_d r^{d-1}.$$

Exemplo 2. *Definamos*

$$\sigma(r) = \sin r.$$

Então Σ_σ *é a esfera* $\mathbb{S}^d$ *(assumindo que* R_0 *assume o valor máximo possível* π *e que o ponto máximo* $\rho = \pi$ *é adicionado a* Σ_σ*). Se* $d = 2$ *então r se torna a medida latitude a partir do pólo, e* θ *é a longitude. A área da fronteira será*

$$S(r) = \omega_d \sin^{d-1} r.$$

Exemplo 3. *Definamos*

$$\sigma(r) = \sinh r.$$

Então Σ_σ *é o espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^d$ *- variedade d-dimensional completa simplesmente conexa com curvatura seccional constante* -1 *(assumindo* $R_0 = \infty$*). Assim, a área da fronteira do espaço hiperbólico d-dimensional* $\mathbb{H}^d$ *é igual a*

$$S(r) = \omega_d \sinh^{d-1} r.$$

Em geral, se G é uma função positiva C^1 em $[0, +\infty]$, podemos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \sigma'' - G\sigma = 0 \text{ em } [0, +\infty), \\ \sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 1 \end{cases} \tag{1.10}$$

e calcular a curvatura seccional radial da varidade modelo associada Σ_σ como

$$Sect_{rad}(x) = -\frac{\sigma''}{\sigma}(\rho(x)) = -G(\rho(x)).$$

A curvatura média das esferas geodésicas S_ρ é dada por

$$H_{S_\rho} = \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

Exemplo 4. *Se* $G(r) = B^2$, $B > 0$, *então a solução do problema* (1.10) *é dada por* $\sigma(r) = B^{-1}\sinh(Br)$ *e, a curvatura seccional radial e a curvatura média das esferas são dadas respectivamente por*

$$Sect_{rad}(x) = -B^2 \quad e \quad H = \coth(B\rho).$$

O seguinte resultado é um dos mais importantes da teoria de comparação e pode ser encontrado em [29, Teorema 2.4].

Teorema 1.1 (Teorema de comparação do Laplaciano)**.** *Seja* Σ *uma variedade Riemanniana d-dimensional completa satisfazendo*

$$Ric\ (x) \geqslant -(d-1)G(r(x)) \text{ em } \Sigma$$

para alguma função não negativa $G \in C^0([0, +\infty))$, *onde* $r(x) = d(x, o)$ *é a distância de* x *a* $o \in \Sigma$. *Seja* $\sigma(t) \in C^2([0, +\infty))$ *a solução não negativa do problema*

$$\begin{cases} \sigma''(t) - G(t)\sigma(t) = 0, \\ \sigma(0) = 0, \sigma'(0) = 1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Então, a desigualdade

$$\Delta r(x) \leqslant (d-1)\frac{\sigma'(r(x))}{\sigma(r(x))} \tag{1.12}$$

vale pontualmente em $\Sigma \setminus (\{o\} \cup \mathrm{cut}(o))$ *e fracamente em toda a* Σ. *Em particular, se* $G(t) = B^2$ *com* $B > 0$, *então* $h(r) = B^{-1}\sinh(Br)$ *satisfaz* (1.11) *e obtemos*

$$\Delta r \leqslant (d-1)B\coth(Br) \text{ fracamente em } \Sigma$$

e pontualmente em $\Sigma \setminus (\{o\} \cup \mathrm{cut}(o))$.

Demonstração. Seja $[0, r_0) \subseteq [0, +\infty)$ o intervalo máximo onde σ é positivo. Observe que comparando σ com a solução da equação diferencial associada a (1.11) e notando que G é não negativo, então $r_o = +\infty$.

Seja $D_o = \Sigma \setminus \mathrm{cut}(o)$ o domínio máximo estrelado das coordenadas normais em o. Fixado qualquer $x \in D_o \cap (B_{r_o}(o) \setminus \{o\})$, seja $\gamma : [0, l] \to \Sigma$ a geodésica minimizadora de o a x parametrizada pelo comprimento do arco. Defina

$$\varphi(s) = (\Delta r) \circ \gamma(s),\ s \in (0, l].$$

Afirmamos que φ satisfaz

$$\begin{cases} i)\varphi(s) = \frac{d-1}{s} + o(1), \text{ quando } s \to 0^+ \\ \\ ii)\varphi' + \frac{1}{d-1}\varphi^2 \leqslant (d-1)G, \text{ em } (0, l]. \end{cases} \tag{1.13}$$

Na verdade (1.13) i) decorre do fato bem conhecido de que

$$\Delta r = \frac{d-1}{r} + o(1), \text{ quando } r \to 0^+.$$

De [29, Theorem 2.3], temos

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Hess}(r)(\gamma)(Y, Y)) + \langle \mathrm{Hess}(r)(\gamma)(Y), \mathrm{Hess}(r)(\gamma)(Y) \rangle = -\mathrm{Sect}_\gamma(Y \wedge \dot{\gamma})$$

então, quanto a (1.13) ii), deduzimos que

$$\frac{d}{dt}(\Delta r \circ \gamma) + |\mathrm{Hess}\, r|^2(\gamma) = -\mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r)(\gamma).$$

Usando a desigualdade elementar

$$\frac{(\Delta r)^2}{d-1} \leqslant |\mathrm{Hess}\, r|^2,$$

que por sua vez decorre facilmente da desigualdade de Cauchy-Schwarz, deduzimos que

$$\frac{d}{dt}(\Delta r \circ \gamma) + \frac{(\Delta r \circ \gamma)^2}{d-1} \leqslant -\mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r)(\gamma).$$

A desigualdade (1.13) ii) decorre da suposição de Ric. Assim, (1.19) vale pontualmente em $D_o \cap (B_{r_o}(o) \setminus \{o\})$.

Observe agora que um cálculo em coordenadas geodésicas polares mostra que

$$\Delta r \circ \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{g(t, \theta)}} \frac{\partial \sqrt{g(t, \theta)}}{\partial t}$$

onde $\theta = \gamma^{'}(0)$ e $g(r,\theta)$ é o determinante da métrica em coordenadas polares geodésicas. Assim (1.19) pode ser reescrito na forma

$$\frac{1}{\sqrt{g(t,\theta)}}\frac{\partial\sqrt{g(t,\theta)}}{\partial t} = (d-1)\frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}.$$

Daí, integrando e usando o comportamento assintótico de σ e $\sqrt{g}$ quando $t \to 0^+$, temos que para cada unitário $\theta \in T_o\Sigma$,

$$\sqrt{g(t,\theta)} \leqslant \sigma(t) \quad \forall t < \min\{r_0, c(\theta)\},$$

onde $c(\theta)$ denota a distância entre o e $cut(o)$ ao longo da geodésica γ_θ. Desde que $g(t,\theta) > 0$ se (t,θ) pertence ao domínio das coordenadas polares geodésicas, enquanto, se $r_o < +\infty$, então $\sigma(r_o) = 0$, deduzimos que para todo θ, temos $c(\theta) \leqslant r_o$, e portanto $D_o \subset B_{r_o}(o)$.

Assim, (1.19) vale pontualmente em $\Sigma \setminus (\{o\} \cup cut(o))$, e resta provar que a desigualdade se aplica fracamente em toda Σ. Isto é garantido pelo seguinte lema. □

Lema 1.1. *Defina* $D_o = \Sigma \setminus cut(o)$ *e suponha que*

$$\Delta r \leqslant \alpha(r) \textit{ pontualmente em } \Omega \setminus \{o\}$$

para algum $\alpha \in C^0(0,+\infty)$. *Seja* $\nu \in C^2(\mathbb{R})$ *não negativo e defina* $u(x) = \nu(r(x))$ *em* Σ. *Suponha que*

$$i)\nu^{'} \leqslant 0 \quad \textit{ou} \quad ii)\nu^{'} \geqslant 0. \tag{1.14}$$

Então temos respectivamente

$$i)\Delta u \geqslant \nu^{''}(r) + \alpha(r)\nu^{'}(r) \quad \textit{ou} \quad ii)\Delta u \leqslant \nu^{''}(r) + \alpha(r)\nu^{'}(r) \tag{1.15}$$

fracamente em Σ.

Demonstração. Seja E_o o domínio máximal estrelado no qual $\exp_o$ é um difeomorfismo com sua imagem, de modo que $D_o = \exp(E_o)$ e temos $cut(o) = \partial(\exp_o(E_o))$. Como E_o é um domínio estrelado, podemos cobrir E_o por uma família $\{E_o^n\}$ de domínios compactos estrelados com limites suaves. Definamos $\Omega_n = \exp_o(E_o^n)$ então temos que

$$\overline{\Omega}^n \subset \Omega^{n+1} \text{ e } \bigcup_n \Omega^n = D_o.$$

O fato de cada E_o^n ser estrelado implica

$$\frac{\partial r}{\partial \nu} > 0, \text{ em } \partial\Omega^n \tag{1.16}$$

onde ν_n denota o normal unitário exterior a $\partial\Omega^n$. Agora, assumimos a validade de (1.14) i). Como $r \in C^\infty(\Omega^n \{o\})$, temos

$$\Delta u \geqslant v''(r) + \alpha(r)v'(r) \quad \text{pontualmente em } \Omega^n \setminus \{o\}. \tag{1.17}$$

Seja $0 \leqslant \varphi \in C_0^\infty(\Sigma)$. Afirmamos que, $\forall_n$,

$$\int_{\Omega^n} u\Delta\varphi \geqslant \int_{\Omega^n} (v'' + \alpha(r)v')\varphi + \varepsilon_n,$$

com $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to +\infty$. Como $\Sigma = \Omega \cup \mathrm{cut}(o)$ e $\mathrm{cut}(o)$ tem medida nula, a desigualdade (1.15) i) permanece quando $n \to +\infty$. Para provar a afirmação fixamos $\delta > 0$ pequeno e aplicamos a segunda fórmula de Green em $\overline{\Omega}^n \setminus B_\delta(o)$ para obter

$$\int_{\Omega^n \setminus B_\delta(o)} u\Delta\varphi = \int_{\Omega^n \setminus B_\delta(o)} \varphi\Delta u - \int_{\partial\Omega^n \cup \partial B_\delta(o)} \left(\varphi\frac{\partial u}{\partial \nu_n} - u\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_n}\right) \tag{1.18}$$

onde ν_n é o normal exterior unitário a $\partial\Omega^n \cup \partial B_\delta(o)$. Note que, combinando (1.14) e (1.16), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_n} = v'(r)\frac{\partial r}{\partial \nu_n} \leqslant 0 \text{ em } \partial\Omega_n.$$

Usando isso, (1.17) e (1.18), obtemos

$$\int_{\Omega^n} u\Delta\varphi \geqslant \int_{\Omega^n} (v'' + \alpha(r)v')\varphi + \varepsilon_n + I_\delta$$

com

$$\varepsilon_n = \int_{\partial\Omega^n} u\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_n},$$

$$I_\delta = \int_{B_\delta(o)} [u\Delta\varphi - (v'' + \alpha(r)v')\varphi] - \int_{\partial B_\delta(o)} \left[u\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \varphi\frac{\partial u}{\partial r}\right].$$

Note que, $I_\delta \to 0$ quando $\delta \to 0^+$. Por outro lado, como $\varphi \in C_0^\infty(\Sigma)$ e $\mathrm{cut}(o)$ tem medida nula, usando os teoremas da divergência e de Lebesgue vemos que, quando $n \to +\infty$,

$$\varepsilon_n = \int_{\Omega^n} \operatorname{div}\,(u\nabla\varphi) \to \int_{\Omega} \operatorname{div}\,(u\nabla\varphi) = \int_{\Sigma} \operatorname{div}\,(u\nabla\varphi) = 0.$$

Isto prova a afirmação e a validade de (1.15) i).

O caso de (1.14) ii) e (1.15) ii) segue de forma análoga. □

A condição Ric $\geqslant 0$ nos permite estendermos este resultado local para uma versão global, como vemos a seguir, essencial para as demonstrações do próximo capítulo. O mesmo vale para o teorema de comparação de volume apresentado em sequência.

Corolário 1. *Seja* Σ *uma variedade Riemanniana d-dimensional completa satisfazendo* *Ric* $\geqslant 0$. *Então, a desigualdade*

$$\Delta r(x) \leqslant (d-1)\frac{\sigma'(r(x))}{\sigma(r(x))} \tag{1.19}$$

vale pontualmente em $\Sigma \setminus (\{o\} \cup \mathrm{cut}(o))$ *e fracamente em toda a* Σ.

Passaremos então ao resultado principal desta seção denominado Teorema de comparação de volume ou Teorema de Comparação de Bishop-Gromov. Seguiremos como referência o texto em [29, Theorem 2.14].

Teorema 1.2 (Bishop-Gromov)**.** *Seja* Σ *uma variedade Riemanniana d-dimensional completa satisfazendo*

$$\mathit{Ric}\ (x) \geqslant -(d-1)G(r(x)) \ \mathit{em}\ \Sigma$$

para alguma função não negativa $G \in C^0([0,+\infty))$, *onde* $r(x) = d(x,o)$ *é a distância de de* x *a* $o \in \Sigma$. *Seja* $\sigma(t) \in C^2([0,+\infty))$ *a solução não negativa do problema*

$$\begin{cases} \sigma''(t) - G(t)\sigma(t) = 0, \\ \sigma(0) = 0, \sigma'(0) = 1. \end{cases}$$

Então, para quase todo $R > 1$, *a função*

$$R \longmapsto \frac{\mathit{vol}(\partial B_R(o))}{\sigma(R)^{d-1}}$$

é não crescente e

$$\mathit{vol}(\partial B_R(o)) \leqslant c_d \sigma(R)^{d-1},$$

onde c_d *é o volume da esfera unitária em* $\mathbb{R}^d$. *Além disso,*

$$R \mapsto \frac{\mathit{vol}(B_R(o))}{\int_0^R \sigma(t)^{d-1} dt}.$$

é uma função não crescente em $(0,+\infty)$.

Demonstração. No caso de o ser um pólo de Σ basta integrar o campo vetorial radial

$$X = \sigma(r(x))^{-d+1}\nabla r$$

em bolas concêntricas $B_R(o)$, e utilizar os teoremas da divergência e da comparação do laplaciano. No entanto, em geral, os objetos não são suaves, logo, temos que tomar alguns cuidados extras.

O teorema da comparação laplaciano afirma que

$$\Delta r(x) \leqslant (d-1)\frac{\sigma'(r(x))}{\sigma(r(x))}$$

pontualmente no conjunto aberto, estrelado e mensurável $\Sigma \subset \mathtt{cut}(o)$ e fracamente em todo Σ. Assim, para cada $0 \leqslant \varphi \in \mathrm{Lip}_c(\Sigma)$,

$$-\int \langle \nabla r, \nabla \varphi \rangle \leqslant (d-1)\int \frac{\sigma'(r(x))}{\sigma(r(x))}\varphi. \tag{1.20}$$

Para qualquer $\varepsilon > 0$, considere a função cut-off radial

$$\varphi_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(r(x))\sigma(r(x))^{-d+1}$$

onde ρ_ε é a função linear por partes

$$\rho_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, r), \\ \frac{t-r}{\varepsilon} & \text{se } t \in [r, r+\varepsilon), \\ 1 & \text{se } t \in [r+\varepsilon, R-\varepsilon), \\ \frac{R-t}{\varepsilon} & \text{se } t \in [R-\varepsilon, R), \\ 0 & \text{se } t \in [R, \infty). \end{cases}$$

Note que

$$\nabla \varphi_\varepsilon = \left\{ -\frac{\chi_{R-\varepsilon,R}}{\varepsilon} + \frac{\chi_{r,r+\varepsilon}}{\varepsilon}(d-1)\frac{\sigma'(r(x))}{\sigma(r(x))}\rho_\varepsilon \right\} \sigma(r(x))^{-d+1}\nabla r,$$

para quase todo $x \in \Sigma$ onde $\chi_{s,t}$ é a função característica do anel $B_t(o) \setminus B_s(o)$. Portanto, usando φ_ε em (1.20) e simplificando, obtemos

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{B_R(o)\setminus B_{R-\varepsilon}(o)} \sigma(r(x))^{-d+1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{B_{r+\varepsilon}(o)\setminus B_r(o)} \sigma(r(x))^{-d+1}.$$

Usando a fórmula da co-área deduzimos que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{R-\varepsilon}^{R} \mathrm{vol}\partial B_t(o)\sigma(t)^{-d+1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{r}^{r+\varepsilon} \mathrm{vol}\partial B_t(o)\sigma(t)^{-d+1}$$

e, tomando $\varepsilon \searrow 0$,

$$\frac{\mathrm{vol}\partial B_R(o)}{\sigma(R)^{d-1}} \leqslant \frac{\mathrm{vol}\partial B_r(o)}{\sigma(r)^{d-1}} \tag{1.21}$$

para quase todo $0 < r < R$. Tomando $r \to 0$, e relembrando que $\sigma(r) \sim r$ e $\mathrm{vol}\partial B_r \sim c_m r^{d-1}$ quando $r \to 0$, concluimos que, para quase todo $R > 0$

$$\mathrm{vol}\partial B_R(o) \leqslant c_m \sigma(R)^{d-1}, \text{ q.t. } R > 0.$$

Para provar a segunda afirmação, notamos que foi observado por M. Gromov, (ver [7]), que para funções gerais de valor real $f(t) \geqslant 0$, $g(t) > 0$,

$$\text{se } t \to \frac{f(t)}{g(t)} \text{ está decrescendo, então } t \to \frac{\int_0^t f}{\int_0^t g} \text{ está decrescendo.}$$

Na verdade, como f/g está decrescendo, se $0 < r < R$,

$$\begin{aligned} \int_0^r f \int_r^R g = \int_0^r g \frac{f}{g} \int_r^R g &\geqslant \frac{f(r)}{g(r)} \int_0^r g \int_r^R g \\ &\geqslant \int_0^r g \int_r^R g \frac{f}{g} \\ &= \int_0^r g \int_r^R f, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_0^r f \int_r^R g &= \int_0^r f \int_0^r g + \int_0^r f \int_r^R g \\ &\geqslant \int_0^r f \int_0^r g + \int_0^r g \int_r^R f \\ &= \int_0^r g \int_0^R f. \end{aligned}$$

Em particular, aplicando esta observação a (1.21) e utilizando a fórmula de co-área nós deduzimos que

$$r \to \frac{\mathrm{vol} B_r(o)}{\int_0^r \sigma(t)^{d-1} dt} \text{ está decrescendo,}$$

concluindo a prova. $\square$

Como consequência obtemos o seguinte

Corolário 2. *Seja Σ uma variedade Riemanniana d-dimensional completa satisfazendo Ric $(x) \geqslant 0$ em Σ. Seja $\sigma(t) \in C^2([0,+\infty))$ a solução não negativa do problema* (1.11)*. Então, para quase todo $R > 1$, a função*

$$R \mapsto \frac{\mathrm{vol}(\partial B_R(0))}{R^{d-1}}$$

é não crescente, e

$$\mathrm{vol}(\partial B_R(0)) \leqslant c_d R^{d-1},$$

onde c_d é o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^d$. Além disso,

$$R \mapsto \frac{\mathrm{vol} B_R(0)}{R^d}$$

é uma função não crescente em $(0, +\infty)$.

Demonstração. Note que a solução do sistema (1.11) é dada por $\sigma(t) = t$ e o resultado segue aplicando o Teorema 1.2. □

Uma outra consequência simples do Teorema de comparação de volume e que será útil no Capítulo 2 é a seguinte.

Lema 1.2. *Seja* Σ *uma variedade Riemanniana n-dimensional completa satisfazendo* $Ric\ (x) \geqslant 0$ *em* Σ *e* $B_R(p)$ *a bola geodésica em* Σ *centrada em* $p \in \Sigma$ *com raio* $R > 0$. *Então, para todo* $0 < s < r$

$$\frac{1}{n} r^{1-n} \mathcal{H}^{n-1} \left(\partial B_r(p)\right) \leqslant r^{-n} \mathcal{H}^n \left(B_r(p)\right) \leqslant s^{-n} \mathcal{H}^n \left(B_s(p)\right), \tag{1.22}$$

onde $\mathcal{H}^n$ *a medida de Hausdorff n-dimensional.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n \left(B_r(p)\right) = \int_{B_r(p)} 1 = \int_0^r \int_{\partial B_t(p)} 1 dt &= \int_0^r \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_t(p)) dt \\ &\geqslant \int_0^r \frac{\mathcal{H}^{n-1}}{r^{n-1}} \\ &= \frac{r}{n} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r(p)) \end{aligned}$$

donde segue a primeira desigualdade. Agora note que, pelo Corolário 2,

$$R \mapsto \frac{\mathcal{H}^n(B_R(p))}{R^n}$$

é uma função não crescente em $(0, +\infty)$, logo para $0 < s < r$

$$\frac{\mathcal{H}^n \left(B_r(p)\right)}{r^n} \leqslant \frac{\mathcal{H}^n \left(B_s(p)\right)}{s^n},$$

donde segue a segunda desigualdade. □

Lema 1.3. *Seja* Σ *uma variedade Riemanniana n-dimensional completa satisfazendo* $Ric\ (x) \geqslant 0$ *em* Σ *e* $B_R(p)$ *a bola geodésica em* Σ *centrada em* $p \in \Sigma$ *com raio* $R > 0$. *Então,*

$$\mathcal{H}^n \left(B_r(p)\right) \leqslant 2^n \mathcal{H}^n \left(B_{\frac{r}{2}}(p)\right),$$

Demonstração. É suficiente tomar $s = \frac{r}{2}$ no Lema 1.2 □

1.2 Desigualdades de Sobolev

Nesta seção apresentaremos as desigualdades de Sobolev que serão essenciais para dedução das estimativas integrais no próximo capítulo.

De agora em diante fixemos a notação $B_R(p)$ para bola geodésica em Σ centrada em $p \in \Sigma$ com raio $R > 0$. Além disso, fixemos tambem, para cada inteiro $n \geqslant 0$, $\mathcal{H}^n$ sendo a medida de Hausdorff n-dimensional. Agora, para cada função f não negativa em Σ e cada constante $q > 0$, denotamos

$$\varphi_{B_r(p)} = \fint_{B_r(p)} \varphi := \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))} \int_{B_r(p)} \varphi \quad \text{e} \quad \|f\|_{q,r} = \left(\fint_{B_r(p)} f^q \right)^{1/q}.$$

O teorema a seguir, conhecido na literatura como "Desigualdade de Poincaré-Sobolev" (ver [28, Theorem 7.1.13]), representa uma versão geral do resultado que iremos utilizar, seguido assim, da versão da desigualdade para Ric $\geqslant 0$ que utilizaremos.

Teorema 1.3 (Poincaré-Sobolev). *Seja Σ uma variedade Riemanniana completa, n-dimensional e com curvatura Ric $\geqslant (n-1)k$, $k \leqslant 0$. Para toda $\varphi : \Sigma \to [0, +\infty)$ suave e $\nu \in \left[1, \frac{n}{n-1}\right]$ vale*

$$\|\varphi - \varphi_{B_r(p)}\|_{\nu,r} \leqslant c(n, kd^2) r \||D\varphi|\|_{1,r},$$

onde $r \leqslant d$ e d é um limite superior para o diâmetro da $B_r(p)$.

Demonstração. Usamos a estimativa obtida em [28, Theorem 7.1.15] para provar o resultado. Primeiro precisamos de mais dois fatos elementares. Observe que para qualquer $c \in \mathbb{R}$:

$$\|\varphi - \varphi_{B_r(p)}\|_p \leqslant \|c - \varphi_{B_r(p)}\|_p + \|\varphi - c\|_p = \|\varphi_{B_r(p)} - c\|_p + \|\varphi - c\|_p \leqslant 2\|\varphi - c\|_p$$

e

$$\inf_c \|\varphi - c\|_p \leqslant \|\varphi - \varphi_{B_r(p)}\|_p.$$

Portanto é suficiente estimar $\|\varphi - c\|_p$ para um c adequado.

Para $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$ devemos encontrar m tal que $\mathrm{vol}\{\varphi \geqslant m\} \geqslant \frac{\mathrm{vol}\Sigma}{2}$ e $\mathrm{vol}\{\varphi \geqslant m\} \leqslant \frac{\mathrm{vol}\Sigma}{2}$. Em seguida, dividir φ em duas funções $\nu^+ = max\{\varphi - m, 0\}$ e $\nu^- = max\{m - \varphi, 0\}$. Observe que ambos satisfazem $\mathrm{vol}\{\nu^\pm = 0\} \geqslant \frac{\mathrm{vol}\Sigma}{2}$.

Embora $\nu^\pm$ não seja suave, podemos definir $|d\nu^\pm| = 0$ em todos os pontos onde $\nu^\pm$ desaparece. Assim, basta mostrar que

$$\|\nu^\pm\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant C(n, kD^2)\, D\, \||d\nu^\pm|\|_1$$

quando

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant \|v^+\|_{\frac{n}{n-1}} + \|v^-\|_{\frac{n}{n-1}} \text{ e } |dv^+| + |dv^-| \leqslant |d\varphi|.$$

Primeiro afirmamos que $v = v^\pm$ satisfaz

$$\mathrm{vol}\{v > t\} \leqslant 2\left\{|v - c| > \frac{t}{2}\right\}.$$

Para ver isso observe que quando $\frac{t}{2} \leqslant c$ temos $\left\{c - v > \frac{t}{2}\right\} \subset \{v = 0\}$, enquanto quando $\frac{t}{2} \geqslant c$ temos $\left\{v > c + \frac{t}{2}\right\} \subset \{v > t\}$.

Para $0 < a < b$ considere a função truncada

$$v_a^b(x) = \begin{cases} b - a & \text{se } v(x) \geqslant b, \\ v(x) - a & \text{se } a < v(x) \leqslant b, \\ 0 & \text{se } v(x) \leqslant a \end{cases}$$

e observe que a desigualdade fraca de Poincaré vale para v_a^b se usarmos $\langle |dv|, \chi_{\{a<v\leqslant b\}}\rangle$ como um gradiente superior. O [28, Theorem 7.1.15] agora pode ser usado:

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{vol}\left\{v_a^b > t\right\} &\leqslant 2t^{\frac{n}{n-1}} \inf_c \mathrm{vol}\left\{\left|v_a^b - c\right| > \frac{t}{2}\right\} \\ &= 2^{\frac{n}{n-1}+1}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \inf_c \mathrm{vol}\left\{\left|v_a^b - c\right| > \frac{t}{2}\right\} \\ &\leqslant 2^{\frac{n}{n-1}+1}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{vol}\left\{\left|v_a^b - \left(v_a^b\right)_\Sigma\right| > \frac{t}{2}\right\} \\ &\leqslant CD^{\frac{n}{n-1}} 2^{\frac{n}{n-1}+1} \mathrm{vol}\Sigma \left\|\langle |dv|, \chi_{\{a<v\leqslant b\}}\rangle\right\|_1^{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned}$$

Obtemos então a estimativa desejada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int v^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{vol} &\leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\frac{n}{n-1}} \mathrm{vol}\left\{2^{k-1} < v \leqslant 2^k\right\} \\ &\leqslant \sum_k 2^{k\frac{n}{n-1}} \mathrm{vol}\left\{v > 2^{k-1}\right\} \\ &\leqslant \sum_k 2^{k\frac{n}{n-1}} \mathrm{vol}\left\{v_{2^{k-2}}^{2^{k-1}} > 2^{k-1} - 2^{k-2}\right\} \\ &= \sum_k 2^{k\frac{n}{n-1}} \mathrm{vol}\left\{v_{2^{k-2}}^{2^{k-1}} > 2^{k-2}\right\}, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
\int \nu^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{vol} &\leqslant 2^{3\frac{n}{n-1}+1} C D^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{vol}\Sigma \sum_k \left\| \langle |d\nu|, \chi_{\{2^{k-2}<\nu\leqslant 2^{k-1}\}} \rangle \right\|_1^{\frac{n}{n-1}} \\
&\leqslant 2^{3\frac{n}{n-1}+1} C D^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{vol}\Sigma \left\| \sum_k \langle |d\nu|, \chi_{\{2^{k-2}<\nu\leqslant 2^{k-1}\}} \rangle \right\|_1^{\frac{n}{n-1}} \\
&= 2^{3\frac{n}{n-1}+1} C D^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{vol}\Sigma \, \| |d\nu| \|_1^{\frac{n}{n-1}} .
\end{aligned}$$

□

Assim, para $\nu = 1$ e $k = 0$ temos

Corolário 3. *Se uma variedade Riemanniana completa Σ satisfaz Ric $\geqslant 0$, então para toda $\varphi : \Sigma \to [0, +\infty)$ suave e para todo $r > 0$*

$$\|\varphi - \varphi_{B_r(p)}\|_{1,r} \leqslant c(n) r \| |D\varphi| \|_{1,r},$$

ou seja,

$$\int_{B_r(p)} |\varphi - \varphi_{B_r(p)}| \leqslant c(n) r \int_{B_r(p)} |D\varphi| \tag{1.23}$$

onde $c(n)$ é uma constante dependendo de n.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 1.3. □

Outra resultado importante que apresentamos nesta seção é conhecida como Desigualdade de Poincaré [26, Teorema 5.9] o qual terá grande utilidade para estabelecer a estimativa gradiente no próximo capítulo.

Teorema 1.4 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Sejam Σ uma variedade completa de dimensão n e $p \in \Sigma$ um ponto fixado tal que $B_{2\rho}(p) \cap \partial\Sigma = \emptyset$ para $2\rho \leqslant d$. Suponha que Ric $\geqslant (n-1)k$ em $B_{2\rho}(p)$ para alguma constante $k \leqslant 0$. Para $\alpha \geqslant 1$, existem constantes $c_1(\alpha)$, $c_2(n, \alpha) > 0$, tal que para qualquer função f com suporte compacto em $B_\rho(p)$ a seguinte desigualdade é satisfeita*

$$\int_{B_\rho(p)} |f| \leqslant c_1 \rho^{-1} \exp\left(-c_2(1 + r\sqrt{-k})\right) \int_{B_\rho(p)} |Df|\cdot$$

Demonstração. Seja $q \in \partial B_{2\rho}(p)$. Pela desigualdade triangular $B_\rho(p) \subset (B_{3\rho}(q) \backslash B_\rho(q))$. De [26, Theorem 4.1], temos que

$$\begin{aligned}
\Delta w &\leqslant (n-1)\sqrt{-k} \coth(w\sqrt{-k}) \\
&\leqslant (n-1)(w^{-1} + \sqrt{-k})
\end{aligned}$$

para $w(x) = w(q, x)$. Para $s > n - 2$, temos

$$\begin{aligned}\Delta w^{-s} &= -sw^{-s-1}\Delta w + s(s+1)w^{-s-2} \\ &\geqslant -s(n-1)w^{-s-1}(w^{-1} + \sqrt{-k}) + s(s+1)w^{-s-2} \\ &= sw^{-s-1}(k+2-n)w^{-1} - (n-1)\sqrt{-k} \\ &\geqslant sw^{-s-1}(k+2-n)(3\rho)^{-1} - (n-1)\sqrt{-k}\end{aligned}$$

em $B_\rho(p)$. Escolhendo $s = n - 1 + 3(n-1)\rho\sqrt{-k}$ obtemos

$$\begin{aligned}\Delta w^{-s} &\geqslant sw^{-s-1}(3\rho)^{-1} \\ &\geqslant s(3\rho)^{-s-2} \qquad (1.24)\end{aligned}$$

em $B_\rho(p)$.

Seja f uma função não negativa com suporte em $B_\rho(p)$. Multiplicando (1.24) com f e integrando sobre $B_\rho(p)$ obtemos

$$\begin{aligned}s(3\rho)^{-s-2}\int_{B_\rho(p)} f &\leqslant \int_{B_\rho(p)} f\Delta r^{-s} \\ &= \int_{B_\rho(p)} \langle Df, Dr^{-s}\rangle \\ &\leqslant s\int_{B_\rho(p)} |Df| w^{-s-1} \\ &\leqslant s\rho^{-s-1}\int_{B_\rho(p)} |Df|,\end{aligned}$$

implicando

$$\int_{B_\rho(p)} f \leqslant c_1\rho^{-1}\exp\left(-c_2(1 + r\sqrt{-k}\right)\int_{B_\rho(p)} |Df|.$$

□

Quando Ric $\geqslant 0$ obtemos o seguinte

Corolário 4. *Seja Σ uma variedade completa de dimensão n. Seja $p \in \Sigma$ um ponto fixado tal que $B_{2r}(p) \cap \partial\Sigma = \emptyset$ para $2r \leqslant d$. Suponha que Ric $\geqslant 0$ em $B_{2r}(p)$. Existem constantes c_1, $c_2(n) > 0$, tal que para qualquer função f com suporte compacto em $B_r(p)$*

$$\int_{B_r(p)} |f| \leqslant c_1 r^{-1}\exp\left(-c_2\right)\int_{B_r(p)} |Df|$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 1.4. □

Aplicando o Corolário 4, juntamente com a Desigualdade de Poincaré-Sobolev, Teorema 1.3, obtemos o seguinte resultado

Teorema 1.5 (Desigualdade de Sobolev)**.** *Se uma variedade Riemanniana completa* Σ *satisfaz Ric* $\geqslant 0$*, então para toda função Lipschitz* $\varphi : \Sigma \to [0, +\infty)$ *com suporte compacto em* $B_r(p)$*, temos*

$$\frac{(\mathcal{H}^n(B_r(p)))^{\frac{1}{n}}}{r}\left(\int_{B_r(p)} |\varphi|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \Theta \int_{B_r(p)} |D\varphi|, \tag{1.25}$$

onde Θ *é uma constante dependendo de n.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1},r} &\leqslant \|\varphi - \varphi_{B_R(p)}\|_{\frac{n}{n-1},r} + \|\varphi_{B_R(p)}\|_{\frac{n}{n-1},r} \\
&= \|\varphi - \varphi_{B_R(p)}\|_{\frac{n}{n-1},r} + \left(\fint_{B_R(p)} \left(\fint_{B_R(p)} \varphi\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \|\varphi - \varphi_{B_R(p)}\|_{\frac{n}{n-1},r} + \left(\fint_{B_R(p)} \left(\int_{B_R(p)} \varphi\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}},
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1},r} &\leqslant \|\varphi - \varphi_{B_R(p)}\|_{\frac{n}{n-1},r} + \mathcal{H}^n(B_R(p))^{\frac{n-1}{n}} \fint_{B_R(p)} \varphi \\
&= \|\varphi - \varphi_{B_R(p)}\|_{\frac{n}{n-1},r} + [\mathcal{H}^n(B_R(p))]^{-\frac{1}{n}} \int_{B_R(p)} \varphi.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{[\mathcal{H}^n(B_r(p))]^{\frac{1}{n}}}{r}\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant \frac{[\mathcal{H}^n(B_r(p))]^{\frac{1}{n}}}{r}\|\varphi - \varphi_{B_r(p)}\|_{\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{r}\int_{B_r(p)} \varphi.$$

Combinando com o Teorema 1.3 para $\nu = \frac{n}{n-1}$ e o Corolário 4, obtemos

$$\frac{[\mathcal{H}^n(B_r(p))]^{\frac{1}{n}}}{r}\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant c(n)\int_{B_r(p)} |D\varphi| + c_1 \exp(-c_2)\int_{B_r(p)} |D\varphi|,$$

e então

$$\frac{(\mathcal{H}^n(B_r(p)))^{\frac{1}{n}}}{r}\left(\int_{B_r(p)} |\varphi|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \Theta \int_{B_r(p)} |D\varphi|, \tag{1.26}$$

onde $\Theta = c(n) + c_1 \exp(-c_2)$. □

Seja Φ uma função Lipschitz em $B_{r+s}(p)$, $s \in (0, r]$ e ζ uma função Lipschitz não negativa tal que $\zeta \equiv 1$ em $B_r(p)$, $\zeta \equiv 0$ fora de em $B_{r+s}(p)$ e $|D\zeta| \leqslant \frac{1}{s}$. Então da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_r(p)} |D(\Phi^2\zeta)| &= \int_{B_r(p)} |2\Phi D\Phi\zeta + \Phi^2 D\zeta| \\ &\leqslant 2\int_{B_r(p)} |\Phi|\zeta|D\Phi| + \int_{B_r(p)} \Phi^2|D\zeta|.\end{aligned}$$

Como $|D\zeta| \leqslant \frac{1}{s}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_r(p)} |D(\Phi^2\zeta)| \leqslant& 2\int_{B_r(p)} |\Phi|\zeta|D\Phi| + \frac{1}{s}\int_{B_r(p)} \Phi^2 \\ =& r\int_{B_r(p)} \left(2|D\Phi|\frac{|\Phi|}{r}\right)\zeta + \frac{1}{s}\int_{B_r(p)} \Phi^2\end{aligned}$$

e daí

$$\int_{B_r(p)} |D(\Phi^2\zeta)| \leqslant r\int_{B_r(p)} |D\Phi|^2\zeta + \frac{1}{r}\int_{B_r(p)} \Phi^2\zeta + \frac{1}{s}\int_{B_r(p)} \Phi^2.$$

Da desigualdade de Sobolev (1.25) segue que

$$(\mathcal{H}^n(B_r(p)))^{\frac{1}{n}} \left(\int_{B_r(p)} |\Phi|^{\frac{2n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \Theta r^2 \int_{B_r(p)} |D\Phi|^2 + \frac{2\Theta r}{s}\int_{B_{r+s}(p)} \Phi^2 \qquad (1.27)$$

1.3 Gráficos Mínimos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados para funções que definem um gráfico mínimo sobre a variedade Riemanniana não compacta completa Σ. Para isto, sejam D e $\operatorname{div}_{\Sigma}$ a conexão Levi-Civita e o operador divergência (em termos da métrica Riemanniana de Σ), respectivamente. A equação da hipersuperfície mínima em Σ

$$\operatorname{div}_{\Sigma}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0 \qquad (1.28)$$

é uma equação diferencial parcial do tipo não linear que descreve o gráfico mínimo

$$M = \{(x, u(x)) \in \Sigma \times \mathbb{R} \mid x \in \Sigma\}$$

acima de Σ. A solução suave u para (1.28) é a função altura do gráfico mínimo M em $\Sigma \times \mathbb{R}$. Portanto, chamamos u de função gráfico mínimo em Σ. Seja M um gráfico mínimo sobre Σ com a função gráfico u em Σ, onde M tem a métrica induzida de $\Sigma \times \mathbb{R}$ equipada com a métrica de produto padrão.

Seja ∇ e Δ a conexão Levi-Civita e Laplaciano de M, respectivamente. Também podemos ver u como uma função em M por projeção $M \to \Sigma$, ou seja, $u(x, u(x)) = u(x)$ para qualquer $x \in \Sigma$. Então a equação (1.28) é equivalente a u ser harmônica em M, ou seja,

$$\Delta u = 0. \tag{1.29}$$

Seja

$$\nu = \sqrt{1 + |Du|^2}$$

a função volume de M (como mencionado acima), e vemos ν como uma função em M identificando $\nu(x, u(x)) = \nu(x)$.

O seguinte resultado nos permite concluir que M minimiza área em $\Sigma \times \mathbb{R}$.

Lema 1.4. *Seja u uma solução da equação* (1.28) *de hipersuperfície mínima em Σ e seja $S \subset Graf_u$ um domínio conexo com bordo suave. Então, para todo domínio conexo $\Omega \subset \Sigma \times \mathbb{R}$ tal que $\partial\Omega = \partial S$, vale*

$$Area(S) \leqslant Area(\Omega). \tag{1.30}$$

Demonstração. Daremos uma ideia da prova. Considere $X(t)$ uma variação normal de S, isto é, uma aplicação $X\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times S \to \Sigma \times \mathbb{R}$ tal que $X(0) = S$, $X(t)_{|\partial S} = \partial S$. Como S é gráfico, sem perda de generalidade podemos assumir que $\Omega = X(t_0)$ para algum $t_0 > 0$. Seja ξ o campo variacional desta variação e que satisfaz $\xi(0) = \eta$, com η sendo o campo normal de S. Como a curvatura de Ricci do ambiente é não negativa e S é mínima, então a curvatura média de $X(t)$ será maior ou igual a zero. Daí, denotando por A a região compreendida entre S e Ω, e por ν seu campo normal exterior, pelo Teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_A \operatorname{div} \xi = \int_{S \cup \Omega} \langle \xi, \nu \rangle \\ &= \int_S -\langle \eta, \eta \rangle + \int_\Omega \langle \xi, \nu \rangle \\ &\leqslant -Area(S) + Area(\Omega). \end{aligned}$$

Isto conclui a prova. $\square$

Em coordenadas locais (x^i) em Σ, a métrica σ de Σ e a métrica g do gráfico são escritas como

$$\sigma = \sigma_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad du = u_i dx^i,$$

e $g_{ij} = \sigma_{ij} + u_i u_j$. Tomando σ^{ij} e g^{ij} como as componentes das matrizes inversas de (σ_{ij}), (g_{ij}) respectivamente, vale

$$g^{ij} = \sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{\nu^2},$$

onde $u^i = \sigma_{ij} u_j$. Além disso, escrevemos os gradientes de uma função $\varphi \in C^1(\Sigma)$ nas métricas σ e g, em notação local, como

$$d\varphi = \varphi_i dx^i, \quad D\varphi = \varphi^i \partial_{x_i} \equiv \sigma^{ij} \varphi_j \partial_{x_i}, \quad \nabla\varphi = g^{ij} \varphi_j \partial_{x_i}.$$

Diferenciando o vetor normal unitário apontando para cima $n = \nu^{-1}(\partial_t - u^i e_i)$, a segunda forma fundamental II na direção de n tem componentes

$$II_{ij} = \frac{u_{ij}}{\nu},$$

onde u_{ij} são as componentes do Hessiano $D^2 u$ na métrica σ. Seja $H = g^{ij} h_{ij}$ a curvatura média, que assumimos como nula. Usando a relação

$$\Gamma^k_{ij} - \gamma^k_{ij} = \frac{u^k u_{ij}}{\nu^2}$$

entre os coeficientes de Christoffel Γ^k_{ij} de g e γ^k_{ij} de σ, para cada $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$ o Operador Laplace-Beltrami Δ_g de g é escrito como

$$\Delta_g \varphi = g^{ij} \varphi_{ij} - \varphi_k u^k \frac{H}{\nu} = g^{ij} \varphi_{ij},$$

onde usamos a minimalidade de M. Além disso, Δ_g tem a seguinte expressão local:

$$\Delta_g \varphi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{x_j} \left(\sqrt{g} g^{ij} \varphi_i \right) = \frac{1}{\nu} \mathrm{div} \, \left(\nu g^{ij} \varphi_i \partial_{x_j} \right)$$

onde $|g|$ é o determinante de (g_{ij}). Para cada campo de Killing $\overline{X}$ definido em $\Sigma \times \mathbb{R}$, a função ângulo $\Theta_{\bar{X}} \doteq \langle n, \overline{X} \rangle$ resolve a equação de Jacobi

$$\Delta_g \Theta_{\overline{X}} + \left(|II|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}\, (n, n) \right) \Theta_{\overline{X}} = 0$$

onde $\overline{\mathrm{Ric}}$ é a curvatura de Ricci de $\Sigma \times \mathbb{R}$. É o caso, por exemplo, da função ângulo

$$\Theta_{\partial_t} = \langle n, \partial_t \rangle = \nu^{-1}$$

associada ao campo de Killing ∂_t. Como consequência, ν^{-1} satisfaz

$$\Delta \nu^{-1} = -(|II|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}\, (n, n)) \nu^{-1}. \tag{1.31}$$

Por outro lado, como $n = \nu^{-1}(\partial_t - u^i e_i)$ vale que

$$\nu^2 \overline{\text{Ric}}\,(n,n) \;=\; \overline{\text{Ric}}\,(\partial_t, \partial_t) - 2\overline{\text{Ric}}\,(\partial_t, Du) + \text{Ric}\;(Du, Du).$$

Como a métrica é dada pelo produto, sabemos que

$$2\overline{\text{Ric}}\,(\partial_t, Du) = \overline{\text{Ric}}\,(\partial_t, \partial_t) = 0,$$

e, portanto,

$$\overline{\text{Ric}}\,(n,n) = \nu^{-2}\text{Ric}\;(Du, Du).$$

Substituindo esta igualdade em (1.31) obtemos

$$\Delta \nu^{-1} = -(|\text{II}|^2 + \nu^{-2}\mathsf{Ric}(Du, Du))\nu^{-1} \tag{1.32}$$

De (1.32) segue que

$$\begin{aligned}\Delta \log \nu^{-1} = \text{div}\left(\frac{\nabla \nu^{-1}}{\nu^{-1}}\right) &= \nu\Delta\nu^{-1} + \langle \nabla\nu, \nabla\nu^{-1}\rangle \\ &= -(|A|^2 + \nu^{-2}\mathsf{Ric}(Du, Du)) - \nu^{-2}|\nabla\nu|^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta \log \nu = |A|^2 + \nu^{-2}\mathsf{Ric}\,(Du, Du) + |\nabla \log \nu|^2 \geqslant |\nabla \log \nu|^2\,. \tag{1.33}$$

Para uma função f de classe C^1 em um conjunto aberto de Σ, podemos ver f como uma função em M deixando $f(x, u(x)) = f(x)$. Então

$$|\nabla f|^2 = |Df|^2 - \frac{1}{\nu^2}\,|\langle Du, Df\rangle|^2 \geqslant |Df|^2 - \frac{|Du|^2}{\nu^2}|Df|^2 = \frac{1}{\nu^2}|Df|^2. \tag{1.34}$$

1.4 Desigualdade de Harnack

Seja $\bar{p} = (p, u(p))$, denote por $B_r(\bar{p})$ a bola geodésica em $\Sigma \times \mathbb{R}$ com raio r e centro $\bar{p}$. O próxmo resultado, conhecido como Desigualdade de Harnack (ver [26, Corollary 6.2]), é crucial para a conclusão do resultado principal.

Teorema 1.6. *Seja Σ uma variedade completa com curvatura de Ricci não negativa. Se u é uma função positiva definida na bola geodésica $B_{2\rho}(p) \subset \Sigma$ satisfazendo $\Delta u = 0$. Então existe uma constante $c > 0$ dependendo de n tal que*

$$u(x) \leqslant c\, u(y) \tag{1.35}$$

para todo $x, y \in B_{\rho/2}(p)$.

Demonstração. Seja γ a menor curva em $B_\rho(p)$ unindo y a x, claramente o comprimento de γ é no máximo 2ρ. Integrando a $|\nabla \log u|$ ao longo de γ obtemos

$$\log u(x) - \log u(y) \leqslant \int_\gamma |\nabla \log u|. \tag{1.36}$$

Por outro lado, aplicando a estimativa do gradiente do [26, Theorem 6.1], obtemos

$$\begin{aligned}\int_\gamma |\nabla \log u| &\leqslant \int_\gamma \left(C((1+\epsilon^{-1})\rho^{-2})\right)^{1/2} \\ &\leqslant \int_\gamma C_1\rho^{-1} \\ &\leqslant 2c\end{aligned}$$

com $c > 0$. Combinando esta desigualdade com (1.36), obtemos o resultado. □

1.5 Desigualdade Caccioppoli

Apresentaremos agora nosso último resultado deste capítulo, conhecido na literatura como Desigualdade Caccioppoli (ver [20, Theorem 4.1]) que será utilizado na demonstração do lema que precede o resultado principal deste trabalho.

Lema 1.5 (Desigualdade Caccioppoli)**.** *Seja* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *uma solução de* $\Delta u = 0$*, ou seja*

$$\int_\Omega D_\alpha u D_\alpha \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{1.37}$$

Então para cada $x_0 \in \Omega$*,* $0 < \rho < R \leqslant dist(x_0, \partial\Omega)$ *temos*

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx \leqslant \frac{c}{(R-\rho)^2}\int_{B_R(x_0)\setminus B_\rho(x_0)} |u-\lambda|^2 dx \tag{1.38}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *e c uma constante universal.*

Demonstração. Defina uma função "cut-off" $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

1. $0 \leqslant \eta \leqslant 1$;
2. $\eta \equiv 1$ em $B_\rho(x_0)$ e $\eta \equiv 0$ em $B_R(x_0) \setminus B_\rho(x_0)$;
3. $|D\eta| \leqslant \dfrac{2}{R-\rho}$.

Escolhendo como função de teste $\varphi \doteq (u-\lambda)\eta^2$ em (1.37) obtemos

$$\int_\Omega |Du|^2\eta^2 dx + \int_\Omega D_\alpha u(u-\lambda)2\eta D_\alpha \eta dx = 0,$$

portanto, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(x_0)} |Du|^2\eta^2 dx &\leqslant \int_{B_R(x_0)} |Du||u-\lambda||2\eta||D\eta| dx \\
&\leqslant \left(\int_{B_R(x_0)} |Du|^2\eta^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R(x_0)} 4|u-\lambda||D\eta|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Dividindo por

$$\left(\int_{B_R(x_0)} |Du|^2\eta^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

e considerando as propriedades de η, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx &\leqslant \int_{B_R(x_0)} |Du|^2\eta^2 dx \\
&\leqslant \frac{16}{(R-\rho)^2} \int_{B_R(x_0)\setminus B_\rho(x_0)} |u-\lambda|^2 dx.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Teorema de Liouville para gráficos mínimos

Neste capítulo, apresentamos estimativas gradiente e estimativas integrais para a função volume e funções que definem gráficos mínimos em Σ via uma modificação do método de iteração de Giorgi-Nash-Moser, donde concluiremos o resultado principal.

2.1 Estimativas integrais de volume

Nesta seção, apresentamos estimativas integrais para a função volume. Primeiramente introduzimos um lema que fornece uma estimativa para a integral do produto envolvendo uma função Lipschitz e a função $\log \nu$ sobre a variedade Σ.

Lema 2.1. *Seja ξ uma função Lipschitz em Σ com suporte compacto. Para quaisquer constantes $l \geqslant 1$ e $q, \theta > 0$ temos*

$$\int_\Sigma \left|D(\log \nu)^l\right| \xi^{q+1} \leqslant l\theta r \int_\Sigma (\log \nu)^{l-1} \nu \,|D\xi|^2 + \frac{l}{\theta r} \int_\Sigma (\log \nu)^{l-1} \nu \xi^{2q}. \tag{2.1}$$

Demonstração. Vejamos ξ como uma função em M, tomando $\xi(x, u(x)) = \xi(x)$. De (1.33), para cada $l' \geqslant 0$, temos

$$\int_M (\log \nu)^{l'} \xi^2 |\nabla \log \nu|^2 \leqslant \int_M (\log \nu)^{l'} \xi^2 \Delta \log \nu. \tag{2.2}$$

Como ξ tem suporte compacto, pela primeira identidade de Green, temos

$$\begin{aligned}\int_M (\log v)^{l'} \xi^2 \Delta \log v &= -\int_M \langle \nabla((\log v)^{l'} \xi^2), \nabla \log v\rangle \\ &= -\int_M l'(\log v)^{l'-1} |\nabla \log v|^2\, \xi^2 - 2\int_M (\log v)^{l'} \xi\langle \nabla\xi, \nabla \log v\rangle \\ &\leqslant -2\int_M (\log v)^{l'} \xi\langle \nabla\xi, \nabla \log v\rangle, \text{ pois } l' \geqslant 0.\end{aligned}$$

De (2.2), e da Desigualdade de Cauchy-Shwarz temos que

$$\begin{aligned}\int_M (\log v)^{l'} \xi^2 |\nabla \log v|^2 &\leqslant -2\int_M (\log v)^{l'} \xi\langle \nabla\xi, \nabla \log v\rangle \\ &\leqslant 2\int_M (\log v)^{l'} \xi\, |\nabla \log v|\, |\nabla \xi|\,.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}2\int_M (\log v)^{l'} \xi\, |\nabla \log v|\, |\nabla\xi| &= 2\int_M (\log v)^{l'} 2\frac{\xi\, |\nabla \log v|}{2}\, |\, \nabla\xi\, | \\ &\leqslant 2\int_M (\log v)^{l'} \left(\frac{\xi^2\, |\nabla \log v|^2}{4} + |\nabla\xi|^2\right),\end{aligned}$$

e então

$$\int_M (\log v)^{l'} \xi^2 |\nabla \log v|^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_M (\log v)^{l'} \xi^2\, |\nabla \log v|^2 + 2\int_M (\log v)^{l'}\, |\nabla\xi|^2\,.$$

Logo,

$$\int_M (\log v)^{l'} |\nabla \log v|^2 \xi^2 \leqslant 4\int_M (\log v)^{l'}\, |\nabla \xi|^2\,. \tag{2.3}$$

Agora note que

$$\begin{aligned}\int_M \left|\nabla(\log v)^{l}\right| \xi^{q+1} &= \int_M l(\log v)^{l-1}\, |\nabla \log v|\, \xi^{q+1} \\ &= l\theta r\int_M (\log v)^{l-1} 2\frac{|\nabla \log v|\, \xi}{2}\frac{\xi^q}{\theta r}.\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}l\theta r\int_M (\log v)^{l-1} 2\frac{|\nabla \log v|\, \xi}{2}\frac{\xi^q}{\theta r} &\leqslant l\theta r\int_M (\log v)^{l-1}\left[\left(\frac{|\nabla \log v|\, \xi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\xi^q}{\theta r}\right)^2\right] \\ &= \frac{l\theta r}{4}\int_M (\log v)^{l-1}\, |\nabla \log v|^2\, \xi^2 + \frac{l}{\theta r}\int_M (\log v)^{l-1} \xi^{2q},\end{aligned}$$

e assim

$$\int_M \left|\nabla(\log v)^{l}\right| \xi^{q+1} \leqslant \frac{l\theta r}{4}\int_M (\log v)^{l-1}\, |\nabla \log v|^2\, \xi^2 + \frac{l}{\theta r}\int_M (\log v)^{l-1} \xi^{2q}.$$

De (2.3) temos

$$\int_M \left|\nabla(\log \nu)^l\right| \xi^{q+1} \leqslant l\theta r \int_M (\log \nu)^{l'} |\nabla \xi|^2 + \frac{l}{\theta r}\int_M (\log \nu)^{l-1}\xi^{2q},$$

que combinando com (1.34) nos fornece

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \left|D(\log \nu)^l\right| \xi^{q+1} &\leqslant l\theta r \int_M (\log \nu)^{l'} |\nabla \xi|^2 + \frac{l}{\theta r}\int_M (\log \nu)^{l-1}\xi^{2q} \\ &\leqslant l\theta r \int_\Sigma (\log \nu)^{l'} \nu |D\xi|^2 + \frac{l}{\theta r}\int_\Sigma (\log \nu)^{l-1}\nu\xi^{2q}.\end{aligned}$$

□

Dadas duas constantes $\beta, r_0 > 0$, assumimos

$$|u(x)| \leqslant \beta \max\{r_0, d(x,p)\} \quad \text{para cada } x \in \Sigma, \tag{2.4}$$

onde $d(x,p)$ é a função distancia em Σ. Para cada $r \geqslant r_0$, é claro que

$$|u(x)| \leqslant \beta \max\{r, d(x,p)\} \quad \text{para cada } x \in \Sigma. \tag{2.5}$$

Fixamos o ponto p e denotamos $\rho(x) = d(x,p)$ para cada $x \in \Sigma$. Do último resultado podemos estimar a integral média de potências da função $\log \nu$ sobre bolas geodésicas na variedade, como segue.

Lema 2.2. *Dada uma constante* $\theta \in (0,1]$ *e uma constante* $0 < \delta \ll 1$, *para cada constante* $l \geqslant 1$ *temos*

$$\begin{aligned}\fint_{B_r(p)} (\log \nu)^l \nu \leqslant (1+\delta)\beta l \frac{(1+\theta)^{n+1}}{\theta} &\fint_{B_{(1+\theta)r(p)}} (\log \nu)^{l-1}\nu \\ + \frac{2^n(1+c_\delta\beta)}{\theta} &\fint_{B_{(1+\theta)r(p)}} (\log \nu)^l,\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $c_\delta \geqslant 1$ *é uma constante dependendo somente de* n, δ.

Demonstração. Seja δ uma constante positiva suficientemente pequena, e ξ uma função Lipschitz em Σ com $\operatorname{supp}\xi \subset B_{(1+\theta)r}(p)$, $\xi \equiv 1$ em $B_r(p)$ e

$$\xi(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\rho(x) - x}{\theta r}\right) & \text{para } x \in B_{(1+\delta\theta/4)r}(p) \setminus B_r(p), \\ \dfrac{\cos(\delta/4)}{1-\delta/4}\left(1 - \dfrac{\rho(x) - r}{\theta r}\right) & \text{para } x \in B_{(1+\theta)r}(p) \setminus B_{(1+\delta\theta/4)r}(p). \end{cases} \tag{2.7}$$

Assim,

$$|D\xi| = \begin{cases} \left|-\sin\left(\dfrac{\rho(x)-r}{\theta r}\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\rho(x)-x}{\theta r}\right)\right| & \text{para } x \in B_{(1+\delta\theta/4)r}(p) \setminus B_r(p), \\ \left|\dfrac{\cos(\delta/4)}{1-\delta/4}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(1-\dfrac{\rho(x)-r}{\theta r}\right)\right| & \text{para } x \in B_{(1+\theta)r}(p) \setminus B_{(1+\delta\theta/4)r}(p). \end{cases}$$

Agora note que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(1-\frac{\rho(x)-r}{\theta r}\right) = \frac{1}{\theta r}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{(x-p)^2} = \frac{1}{\theta r}.$$

Daí,

$$|D\xi|(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\rho(x)-r}{\theta r}\right)\dfrac{1}{\theta r} & \text{para } x \in B_{(1+\delta\theta/4)r}(p) \setminus B_r(p), \\ \dfrac{\cos(\delta/4)}{1-\delta/4}\dfrac{1}{\theta r} & \text{para } x \in B_{(1+\theta)r}(p) \setminus B_{(1+\delta\theta/4)r}(p) \end{cases}$$

e então,

$$\theta r\,|D\xi|(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\rho(x)-r}{\theta r}\right) & \text{para } x \in B_{(1+\delta\theta/4)r}(p) \setminus B_r(p), \\ \dfrac{\cos(\delta/4)}{1-\delta/4} & \text{para } x \in B_{(1+\theta)r}(p) \setminus B_{(1+\delta\theta/4)r}(p), \end{cases}$$

donde segue que

$$\theta^2 r^2\,|D\xi|^2(x) = \begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{\rho(x)-r}{\theta r}\right) & \text{para } x \in B_{(1+\delta\theta/4)r}(p) \setminus B_r(p), \\ \dfrac{\cos^2(\delta/4)}{(1-\delta/4)^2} & \text{para } x \in B_{(1+\theta)r}(p) \setminus B_{(1+\delta\theta/4)r}(p). \end{cases} \tag{2.8}$$

Seja $q = q_\delta > 1$ tal que $\cos^q(\delta/4) = \dfrac{\sin(\delta/4)}{1-\delta/4}$. Assim,

$$\cos^{2q}(\delta/4) = \frac{\sin^2(\delta/4)}{(1-\delta/4)^2},$$

o que implica que

$$\frac{\cos^{2q}(\delta/4)}{(1-\delta/4)^{2q}} = \frac{\sin^2(\delta/4)}{(1-\delta/4)^{2q+2}}.$$

Dessa forma, é fácil ver que

$$\xi^{2q}(x) = \begin{cases} \cos^{2q}\left(\dfrac{\rho(x)-x}{\theta r}\right) & \text{para } x \in B_{(1+\delta\theta/4)r}(p) \setminus B_r(p), \\ \dfrac{\sin^2(\delta/4)}{(1-\delta/4)^{2q+2}}\left(1-\dfrac{\rho(x)-r}{\theta r}\right)^{2q} & \text{para } x \in B_{(1+\theta)r}(p) \setminus B_{(1+\delta\theta/4)r}(p). \end{cases} \tag{2.9}$$

Logo, de (2.8) e (2.9), obtemos

$$\theta^2 r^2 |D\xi|^2(x) + \xi^{2q}(x) =$$
$$\begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{\rho(x)-r}{\theta r}\right) + \cos^{2q}\left(\dfrac{\rho(x)-x}{\theta r}\right) \text{ para } x \in B_{(1+\delta\theta/4)r}(p) \setminus B_r(p) \\ \dfrac{\cos^2(\delta/4)}{(1-\delta/4)^2} + \dfrac{\sin^2(\delta/4)}{(1-\delta/4)^{2q+2}}\left(1 - \dfrac{\rho(x)-r}{\theta r}\right)^{2q} \text{ para } x \in B_{(1+\theta)r}(p) \setminus B_{(1+\delta\theta/4)r}(p) \end{cases}$$

Como $0 < \delta \ll 1$ temos que $-8 + 7\delta - \delta^2 < 0$. Daí, temos

$$(-16+8)\delta + (8-1)\delta^2 - \delta^3 + 16 - 16 < 0$$

donde segue que

$$\frac{16}{(4-\delta)^2} - \delta - 1 < 0,$$

e assim

$$(1-\delta/4)^{-2} < 1 + \delta. \tag{2.10}$$

Note que se $x \in B_{(1+\delta\theta/4)r}(p) \setminus B_r(p)$, temos

$$r < \rho(x) < \left(1 + \frac{\delta\theta}{4}\right) r = r + \frac{\delta\theta r}{4},$$

e

$$0 < \frac{\rho(x)-r}{\theta r} < \frac{\delta}{4}.$$

Logo,

$$\cos\left(\frac{\delta}{4}\right) < \cos\left(\frac{\rho(x)-r}{\theta r}\right) < 1.$$

Daí, temos que

$$\cos^{2q}\left(\frac{\rho(x)-r}{\theta r}\right) < \cos^{2q-2}\left(\frac{\rho(x)-r}{\theta r}\right) < ... < \cos^2\left(\frac{\rho(x)-r}{\theta r}\right) < 1$$

e as seguintes desigualdades se verificam

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\rho(x)-r}{\theta r}\right) + \cos^{2q}\left(\frac{\rho(x)-x}{\theta r}\right) &< \sin^2\left(\frac{\rho(x)-r}{\theta r}\right) + \cos^2\left(\frac{\rho(x)-x}{\theta r}\right) \\ &< 1 + \delta. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Agora note que se $x \in B_{(1+\theta)r}(p) \setminus B_{(1+\delta\theta/4)r}(p)$, temos que

$$\left(1 + \frac{\delta\theta}{4}\right) r < \rho(x) < (1+\theta)r,$$

donde

$$0 < 1 - \frac{p(x) - r}{\theta r} < 1 - \frac{\delta}{4}.$$

Então,

$$0 < \left(1 - \frac{p(x) - r}{\theta r}\right)^{2q} < \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)^{2q}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2(\delta/4)}{(1-\delta/4)^2} + \frac{\sin^2(\delta/4)}{(1-\delta/4)^{2q+2}}\left(1 - \frac{p(x)-r}{\theta r}\right)^{2q} &< \frac{\cos^2(\delta/4)}{(1-\delta/4)^2} + \frac{\sin^2(\delta/4)}{(1-\delta/4)^{2q+2}}\left(1 - \frac{\delta}{4}\right)^{2q} \\ &= (1-\delta/4)^{-2}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Logo, de (2.11) e (2.12) combinado com (2.10), obtemos

$$\theta^2 r^2 |D\xi|^2(x) + \xi^{2q}(x) < 1 + \delta \quad \text{em } \Sigma. \tag{2.13}$$

Para cada $l > 0$, de (1.28) e Teorema da Divergência temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Sigma \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) \\ &= \int_\Sigma \left\langle \frac{Du}{v}, D(u(\log v)^l \xi^{q+1})\right\rangle \\ &= \int_\Sigma \left\langle \frac{Du}{v}, Du(\log v)^l \xi^{q+1} + u\xi^{q+1} D(\log v)^l + u(\log v)^l D\xi^{q+1}\right\rangle, \end{aligned}$$

donde

$$0 = \int_\Sigma \frac{|Du|^2}{v}(\log v)^l \xi^{q+1} + \int_\Sigma u\xi^{q+1}\left\langle \frac{Du}{v}, D(\log v)^l\right\rangle + \int_\Sigma u(\log v)^l \left\langle \frac{Du}{v}, D\xi^{q+1}\right\rangle. \tag{2.14}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwars, temos

$$u\xi^{q+1}\left\langle \frac{Du}{v}, D(\log v)^l\right\rangle \geqslant -|u|\,\xi^{q+1}\left|\frac{Du}{v}\right|\left|D(\log v)^l\right|,$$

donde segue que

$$\int_\Sigma u\xi^{q+1}\langle \frac{Du}{v}, D(\log v)^l\rangle \geqslant \int_\Sigma -|u|\,\xi^{q+1}\left|\frac{Du}{v}\right|\left|D(\log v)^l\right|. \tag{2.15}$$

Por outro lado, também vale

$$u(\log v)^l\left\langle \frac{Du}{v}, D\xi^{q+1}\right\rangle \geqslant -|u|\,(\log v)^l\left|\frac{Du}{v}\right|\left|D\xi^{q+1}\right|,$$

e portanto

$$\int_\Sigma u(\log v)^l \left\langle \frac{Du}{v}, D\xi^{q+1} \right\rangle \geqslant \int_\Sigma -|u|\,(\log v)^l \left|\frac{Du}{v}\right| \left|D\xi^{q+1}\right|. \tag{2.16}$$

De (2.14), (2.15) e (2.16) temos

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \int_\Sigma \frac{|Du|^2}{v}(\log v)^l \xi^{q+1} + \int_\Sigma -|u|\,\xi^{q+1}\left|\frac{Du}{v}\right| \left|D(\log v)^l\right| \\ + \int_\Sigma -|u|\,(\log v)^l \left|\frac{Du}{v}\right| \left|D\xi^{q+1}\right|. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Note que como $\operatorname{supp}\xi \subset B_{(1+\theta)r}(p)$ temos que $\xi(x) = 0$ para $x \in \Sigma \setminus B_{(1+\theta)r}(p)$. Assim,

$$\int_\Sigma -|u|\,\xi^{q+1}\left|\frac{Du}{v}\right| \left|D(\log v)^l\right| = \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} -|u|\,\xi^{q+1}\left|\frac{Du}{v}\right| \left|D(\log v)^l\right|.$$

Dessa forma, para cada $x \in \Sigma \setminus B_{(1+\theta)r}(p)$ e para cada $r \geqslant r_0$ com (2.5), temos

$$|u(x)| \leqslant \beta \max\{r, d(x,p)\} \leqslant \beta(1+\theta)r \text{ para cada } x \in B_{(1+\theta)r}(p). \tag{2.18}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_\Sigma -|u|\,\xi^{q+1}\left|\frac{Du}{v}\right| \left|D(\log v)^l\right| &\geqslant \int_\Sigma -\beta(1+\theta)r\xi^{q+1}\left|\frac{Du}{v}\right| \left|D(\log v)^l\right| \\ &= -(1+\theta)\beta r \int_\Sigma \xi^{q+1}\left|\frac{Du}{v}\right| \left|D(\log v)^l\right|. \end{aligned}$$

Agora veja que como $|Du|^2 \leqslant 1 + |Du|^2$, temos $-\left|\frac{Du}{v}\right| \geqslant -1$. Dessa forma,

$$-(1+\theta)\beta r \int_\Sigma \xi^{q+1}\left|\frac{Du}{v}\right| \left|D(\log v)^l\right| \geqslant -(1+\theta)\beta r \int_\Sigma \xi^{q+1}\left|D(\log v)^l\right|,$$

e então

$$\int_\Sigma -|u|\,\xi^{q+1}\left|\frac{Du}{v}\right| \left|D(\log v)^l\right| \geqslant -(1+\theta)\beta r \int_\Sigma \xi^{q+1}\left|D(\log v)^l\right|. \tag{2.19}$$

Além disso, novamente como $\operatorname{supp}\xi \subset B_{(1+\theta)r}(p)$ temos que $\xi(x) = 0$ para $x \in \Sigma \setminus B_{(1+\theta)r}(p)$, e vale

$$\int_\Sigma -|u|\,(\log v)^l \left|\frac{Du}{v}\right| \left|D\xi^{q+1}\right| = \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} -|u|\,(\log v)^l \left|\frac{Du}{v}\right| \left|D\xi^{q+1}\right|.$$

Por (2.18), temos

$$\int_{B_{(1+\theta)r}(p)} -|u|\,(\log v)^l \left|\frac{Du}{v}\right| \left|D\xi^{q+1}\right| \geqslant \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} -\beta(1+\theta)r(\log v)^l \left|\frac{Du}{v}\right| \left|D\xi^{q+1}\right|.$$

Novamente como $-\left|\frac{Du}{v}\right| \geqslant -1$, segue que

$$\begin{aligned}\int_{B_{(1+\theta)r}(p)} -\beta(1+\theta)r(\log v)^l \left|\frac{Du}{v}\right| \left|D\xi^{q+1}\right| &\geqslant \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} -\beta(1+\theta)r(\log v)^l \left|D\xi^{q+1}\right| \\ &= -\beta(1+\theta)r \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^l \left|D\xi^{q+1}\right|.\end{aligned}$$

E então temos

$$-\beta(1+\theta)r \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^l \left|D\xi^{q+1}\right| \geqslant -\frac{c_\delta \beta}{\theta} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^l \tag{2.20}$$

com $c_\delta > 0$ dependendo apenas de $(n, q) = q_\delta$. Assim de (2.17), (2.19) e (2.20), temos

$$\begin{aligned}0 \geqslant \int_\Sigma \frac{|Du|^2}{v}(\log v)^l \xi^{q+1} - (1+\theta)\beta r \int_\Sigma \xi^{q+1} \left|D(\log v)^l\right| \\ - \frac{c_\delta \beta}{\theta} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^l.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Como $v \geqslant 1$ e $v^2 = 1 + |Du|^2$, temos $v = \frac{|Du|}{v} + \frac{1}{v} \leqslant \frac{|Du|}{v} + 1$. Daí,

$$\int_\Sigma (\log v)^l v \xi^{q+1} \leqslant \int_\Sigma \left(\frac{|Du|^2}{v} + 1\right)(\log v)^l \xi^{q+1}.$$

Por outro lado, de (2.21), temos

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \left(\frac{|Du|^2}{v} + 1\right)(\log v)^l \xi^{q+1} \leqslant (1+\theta)\beta r \int_\Sigma \xi^{q+1} \left|D(\log v)^l\right| + \frac{c_\delta \beta}{\theta} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^l \\ + \int_\Sigma (\log v)^l \xi^{q+1}\end{aligned}$$

então

$$\int_\Sigma (\log v)^l v \xi^{q+1} \leqslant (1+\theta)\beta r \int_\Sigma \xi^{q+1} \left|D(\log v)^l\right| + \frac{1 + c_\delta \beta}{\theta} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^l. \tag{2.22}$$

Para cada $l \geqslant 1$, de (2.1) obtemos

$$\int_\Sigma \left|D(\log v)^l\right| \xi^{q+1} \leqslant \frac{l}{\theta r} \int_\Sigma \left(\theta^2 r^2 |D\xi|^2 + \xi^{2q}\right)(\log v)^{l-1} v.$$

Como $\operatorname{supp} \xi \subset B_{(1+\theta)r}(p)$, e vale (2.13), temos então que

$$\int_\Sigma \left|D(\log v)^l\right| \xi^{q+1} \leqslant \frac{(1+\delta)l}{\theta r} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^{l-1} v. \tag{2.23}$$

Substituindo (2.23) em (2.22), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (\log v)^l v \xi^{q+1} \leqslant (1+\theta)\beta \frac{(1+\delta)l}{\theta} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^{l-1} v \\ + \frac{1 + c_\delta \beta}{\theta} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^l.\end{aligned}$$

Como $B_r(p) \subset \Sigma$ e $\xi \equiv 1$ em $B_r(p)$, temos

$$\int_{B_r(p)} (\log v)^l v \leqslant \int_\Sigma (\log v)^l v \xi^{q+1}$$

e daí

$$\int_{B_r(p)} (\log v)^l v \leqslant (1+\theta)\beta \frac{(1+\delta)l}{\theta} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^{l-1} v + \frac{1+c_\delta \beta}{\theta} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^l. \tag{2.24}$$

Por definição,

$$\fint_{B_r(p)} (\log v)^l v = \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))} \int_{B_r(p)} (\log v)^l v,$$

o que combinado com (2.24), fornece

$$\fint_{B_r(p)} (\log v)^l v \leqslant \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))} \left((1+\theta)\beta \frac{(1+\delta)l}{\theta} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^{l-1} v \right) + \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))} \frac{1+c_\delta\beta}{\theta} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^l.$$

Segue então por Bishop-Gromov (1.22) que

$$\begin{aligned} \fint_{B_r(p)} (\log v)^l v &\leqslant (1+\theta)\beta \frac{(1+\delta)l}{\theta} \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^{l-1} v \\ &\quad + \frac{1+c_\delta\beta}{\theta} \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))} \int_{B_{(1+\theta)r}(p)} (\log v)^l \\ &\leqslant \fint_{B_r(p)} (\log v)^l v \leqslant (1+\delta)\beta l \frac{(1+\theta)^{n+1}}{\theta} \fint_{B_{(1+\theta)r(p)}} (\log v)^{l-1} v \\ &\quad + \frac{2^n(1+c_\delta\beta)}{\theta} \fint_{B_{(1+\theta)r(p)}} (\log v)^l. \end{aligned}$$

□

Agora assumiremos que $\beta \leqslant 1$. Denotamos $\gamma_\delta = (1+\delta)\, n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Ao tomar $\theta = 1/n$ em (2.6), para cada $l \geqslant 1$ (e $c_\delta \geqslant 1$), temos

$$\fint_{B_r(p)} (\log v)^l v \leqslant \gamma_\delta \beta l \fint_{B_{\frac{(n+1)r}{n}}(p)} (\log v)^{l-1} v + c_\delta \fint_{B_{\frac{(n+1)r}{n}}(p)} (\log v)^l. \tag{2.25}$$

Como, pelo Lema 1.4, M minimiza a área em $\Sigma \times \mathbb{R}$, temos

$$\int_{B_r(p)} v = \mathcal{H}^n(M \cap (B_r(p) \times \mathbb{R})) \leqslant \mathcal{H}^n(B_r(p)) + \int_{\partial B_r(p)} |u|.$$

De (2.4) temos

$$\mathcal{H}^n(B_r(p)) + \int_{\partial B_r(p)} |u| \leqslant \mathcal{H}^n(B_r(p)) + \beta r \mathcal{H}^n(\partial B_r(p)).$$

Por outro lado, ainda de Bishop-Gromov (1.22) temos

$$\mathcal{H}^n(B_r(p)) + \beta r \mathcal{H}^n(\partial B_r(p)) \leqslant (1 + n\beta)\mathcal{H}^n(B_r(p)).$$

Assim, obtemos então

$$\int_{B_r(p)} v \leqslant (1 + n\beta)\mathcal{H}^n(B_r(p)). \tag{2.26}$$

Vamos iterar a estimativa (2.25) em l. Para tanto necessitaremos do seguinte.

Lema 2.3. *Seja* c_δ *a constante em* (2.25) *com* $0 < \delta \ll 1$ *fixado. Para cada inteiro* $j \geqslant 0$ *vale que*

$$\sup_{r \geqslant r_0} ⨍_{B_r(p)} (\log v)^j v \leqslant j! \gamma_\delta^j \beta^j \binom{j+m}{m} (1 + n\beta), \tag{2.27}$$

onde $m = \left[\frac{c_\delta}{\gamma_\delta \beta}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ *depende de* $n, \delta, \beta,$ *e* $\binom{j+m}{m} = \frac{(m+j)!}{j!m!}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Para $j = 0$ temos

$$\sup_{r \geqslant r_0} ⨍_{B_r(p)} v \leqslant (1 + n\beta),$$

que se verifica por (2.26). De (2.25) e $\log v \leqslant v$, para cada $j \geqslant 1$ temos

$$\sup_{r \geqslant r_0} ⨍_{B_r(p)} (\log v)^j v \leqslant \gamma_\delta \beta j \sup_{r \geqslant r_0} ⨍_{B_r(p)} (\log v)^{j-1} v + c_\delta \sup_{r \geqslant r_0} ⨍_{B_r(p)} (\log v)^{j-1} v. \tag{2.28}$$

Seja $m = \left[\frac{c_\delta}{\gamma_\delta \beta}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ dependendo de $n, \delta, \beta,$ e $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência definida por

$$a_j = \sup_{r \geqslant r_0} ⨍_{B_r(p)} (\log v)^j v. \tag{2.29}$$

De (2.28), para cada inteiro $j \geqslant 1$ tem-se

$$a_j \leqslant \gamma_\delta \beta j a_{j-1} + c_\delta a_{j-1} = \gamma_\delta \beta \left(j + \frac{c_\delta}{\gamma_\delta \beta} \right) a_{j-1},$$

donde

$$\begin{aligned}
a_j &\leqslant \gamma_\delta \beta (j + m - 1) a_{j-1} \leqslant \gamma_\delta \beta (j + m) a_{j-1} \\
a_{j-1} &\leqslant \gamma_\delta \beta (j + m - 2) a_{j-2} \leqslant \gamma_\delta \beta (j + m - 1) a_{j-2} \\
&\vdots \\
a_1 &\leqslant \gamma_\delta \beta (j + m - j) a_0 \leqslant \gamma_\delta \beta (m + 1) a_0.
\end{aligned}$$

Por iteração

$$a_j \leqslant \gamma_\delta^j \beta^j \frac{(j+m)!}{m!} a_0 = j! \gamma_\delta^j \beta^j \tbinom{j+m}{m} a_0. \tag{2.30}$$

Note que

$$a_0 = \sup_{r \geqslant r_0} \fint_{B_r(p)} \nu = \frac{1}{\mathcal{H}^n B_r(p)} \int_{B_r(p)} \nu.$$

De (2.26), $a_0 \leqslant 1 + n\beta$. Isto completa a prova $\square$

Agora de posse da estimativa integral da função $(\log \nu)^j \nu$ por uma constante, estimamos a integral de potências da função volume ν, como segue.

Teorema 2.1. *Seja então* u *uma função cujo gráfico é mínimo em* $\Sigma \times \mathbb{R}$ *satisfazendo* (2.5) *para alguma constante* $\beta \in (0, 1]$. *Então existe uma constante* $c(n, \delta, \beta) > 0$ *dependendo somente de* n, δ, β *tal que para cada constante* $\lambda \in \left(0, \frac{1}{\gamma_\delta \beta}\right)$ *temos*

$$\sup_{r \geqslant r_0} \fint_{B_r(p)} \nu^{\lambda+1} \leqslant c(n, \delta, \beta)(1 - \lambda\gamma_\delta\beta)^{-m-1} \tag{2.31}$$

Demonstração. Seja λ uma constante positiva tal que $\lambda \leqslant \frac{1}{\gamma_\delta \beta}$. Da expansão de Taylor, temos

$$\nu^\lambda = e^{\lambda \log \nu} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} (\log \nu)^j. \tag{2.32}$$

Assim,

$$\sup_{r \geqslant r_0} \fint_{B_r(p)} \nu^{\lambda+1} = \sup_{r \geqslant r_0} \fint_{B_r(p)} \nu^\lambda \nu = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \sup_{r \geqslant r_0} \fint_{B_r(p)} (\log \nu)^j \nu, \tag{2.33}$$

e combinando com (2.27) obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{r \geqslant r_0} \fint_{B_r(p)} \nu^{\lambda+1} &\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} j! \gamma_\delta^j \beta^j \tbinom{j+m}{m} (1 + n\beta) \\ &= (1 + n\beta) \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda\gamma_\delta\beta)^j \tbinom{j+m}{m}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \tbinom{j+m}{m} t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m+j)!}{j! m!} t^j &= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m+j)!}{j!} \frac{t^m t^j}{t^m} \\ &= \frac{1}{m!} \frac{1}{t^m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m+j)!}{j!} t^m t^j. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \tbinom{j+m}{m} t^j = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dt^m} \sum_{j=0}^{\infty} t^{j+m} = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{t^m}{1-t} \right) \tag{2.34}$$

para cada $t \in (0, 1)$, isso completa a prova. $\square$

2.2 Desigualdade do Valor Médio e Estimativa Gradiente

Nesta seção, apresentamos estimativas gradiente onde usaremos fortemente as desigualdades de Sobolev apresentadas na seção 1.2 donde concluimos, através da iteração de Giorgi-Nash-Moser, o resultado principal. Relembramos que para cada função f não negativa em Σ e cada constante $q > 0$, denotamos

$$||f||_{q,r} = \left(\fint_{B_r(p)} f^q \right)^{1/q}.$$

Lema 2.4. *Para cada constante* $k > n$ *e* $\sigma \in (0,1)$*, existe uma constante* $c_{\sigma,k} > 0$ *dependendo somente de* n, σ, k*, de tal modo que*

$$||v||_{\infty,\sigma r} \leqslant c_{\sigma,k}(||v||_{2k,r})^{e^{\frac{n}{k-n}}} \tag{2.35}$$

para qualquer $r > 0$.

Demonstração. Seja η uma função Lipschitz em Σ com suporte compacto. Denotamos $\eta(x) = \eta(x, u(x))$. De (1.33) temos $\Delta v \geqslant 0$ em M. Assim, para qualquer constante $\ell \geqslant 1$, temos

$$o \leqslant \int_M v^{2\ell}\eta^2 \Delta v,$$

que integrando por partes nos fornece

$$0 \leqslant \int_M v^{2\ell}\eta^2\Delta v = -2\ell \int_M v^{2\ell-1}\eta^2 |\nabla v|^2 - 2\int_M v^{2\ell}\eta\langle \nabla v, \nabla \eta\rangle.$$

Assim, pela desigualdade de Cachy-Schwarz

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant 2\ell \int_M v^{2\ell-1}\eta^2 |\nabla v|^2 + 2\int_M v^{2\ell}\eta\langle \nabla v, \nabla \eta\rangle \\ &\geqslant 2\ell \int_M v^{2\ell-1}\eta^2 |\nabla v|^2 - 2\int_M v^{2\ell}\eta |\nabla v| |\nabla \eta| \\ &= 2\ell \int_M v^{2\ell-1}\eta^2 |\nabla v|^2 - \ell\int_M 2\frac{v^{\ell}\eta |\nabla v|}{\ell} v^{\ell} |\nabla \eta|, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant 2\ell \int_M v^{2\ell-1}\eta^2 |\nabla v|^2 - \ell\int_M v^{2\ell-1}\eta^2 |\nabla v|^2 - \frac{1}{\ell}\int_M v^{2\ell+1}|\nabla \eta|^2 \\ &= \ell \int_M v^{2\ell-1}\eta^2 |\nabla v|^2 - \frac{1}{\ell}\int_M v^{2\ell+1}|\nabla \eta|^2 \end{aligned}$$

que fornece

$$\ell^2 \int_M \nu^{2\ell-1}\eta^2 |\nabla \nu|^2 \leqslant \int_M \nu^{2\ell+1} |\nabla \eta|^2 . \tag{2.36}$$

De (1.34) temos

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \left|D\nu^\ell\right|^2 \eta^2 &\leqslant \int_M \left|\nabla \nu^\ell\right|^2 \nu\eta^2 \\ &= \ell^2 \int_M |\nabla \nu|^2 \nu^{2\ell-1}\eta^2,\end{aligned}$$

que combinando com (2.36) nos dá

$$\int_\Sigma \left|D\nu^\ell\right|^2 \eta^2 \leqslant \int_M \nu^{2\ell+1} |\nabla \eta|^2 \leqslant \int_\Sigma \nu^{2\ell+2}|D\eta|^2. \tag{2.37}$$

Para cada $r \geqslant \tau > 0$, seja η definido por $\eta \equiv 1$ em $B_{r+\frac{\tau}{2}}(p)$, $\eta = \frac{2}{\tau}(r+\tau-\rho)$ em $B_{r+\tau}(p) \setminus B_{r+\frac{\tau}{2}}(p)$ e $\eta \equiv 0$ fora de $B_{r+\tau}(p)$. Então $|D\eta| \leqslant 2/\tau$. Por definição

$$\|\nu^{2\ell}\|_{\frac{n}{n-1},r} = \left(⨍_{B_r(p)} \nu^{2\ell\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))}\int_{B_r(p)} \nu^{2\ell\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

e assim,

$$\|\nu^{2\ell}\|_{\frac{n}{n-1},r} = \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))}(\mathcal{H}^n(B_r(p)))^{\frac{1}{n}} \left(\int_{B_r(p)} \nu^{\ell\frac{2n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Por outro lado, combinando com desigualdade de Sobolev (1.27), temos

$$\begin{aligned}\|\nu^{2\ell}\|_{\frac{n}{n-1},r} &\leqslant \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))}\left(\Theta r^2 \int_{B_r(p)} |D\nu^\ell|^2 + \frac{2\Theta r}{s}\int_{B_{r+s}(p)} \nu^{2\ell}\right) \\ &= \Theta\left(\frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))} r^2 \int_{B_r(p)} |D\nu^\ell|^2 + \frac{2r}{s}\frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))}\int_{B_{r+s}(p)} \nu^{2\ell}\right),\end{aligned}$$

tomando $s = \frac{\tau}{2}$ e combinando com Bishop-Gromov (1.22), obtemos

$$\begin{aligned}\|\nu^{2\ell}\|_{\frac{n}{n-1},r} &\leqslant \Theta\left(r^2 \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))}\int_{B_r(p)} |D\nu^\ell|^2 + \frac{4r}{\tau}\frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))}\int_{B_{r+\frac{\tau}{2}}(p)} \nu^{2\ell}\right) \\ &\leqslant \Theta\left(r^2 \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_{r+\frac{\tau}{2}}(p))}\int_{B_{r+\frac{\tau}{2}}(p)} |D\nu^\ell|^2 + \frac{4r}{\tau}\frac{1}{\mathcal{H}^n(B_{r+\frac{\tau}{2}}(p))}\int_{B_{r+\frac{\tau}{2}}(p)} \nu^{2\ell}\right) \\ &= \Theta\left(r^2 \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_{r+\frac{\tau}{2}}(p))}\int_{B_{r+\frac{\tau}{2}}(p)} |D\nu^\ell|^2\eta^2 + \frac{4r}{\tau}\|\nu^{2\ell}\|_{1,r+\frac{\tau}{2}}\right)\end{aligned}$$

desde que $\eta \equiv 1$ em $B_{r+\frac{\tau}{2}}(p)$. Agora, note que combinando ainda o Lema (1.3) com (2.37) e usando do fato de $|D\eta| \leqslant \frac{2}{\tau}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\left|v^{2\ell}\right|\right|_{\frac{n}{n-1},r} &\leqslant \Theta\left(r^2\int_{\Sigma} v^{2l+2}\left|D\eta\right|^2 + \frac{4r}{\tau}\left|\left|v^{2\ell}\right|\right|_{1,r+\tau}\right)\\
&\leqslant \Theta\left(\frac{4r^2}{\tau^2}\left|\left|v^{2\ell+2}\right|\right|_{1,r+\tau} + \frac{4r}{\tau}\left|\left|v^{2\ell}\right|\right|_{1,r+\tau}\right)\\
&\leqslant c\frac{r^2}{\tau^2}\left|\left|v^{2\ell+2}\right|\right|_{1,r+\tau} = c\frac{r^2}{\tau^2}\left|\left|v\right|\right|^{2\ell+2}_{2\ell+2,r+\tau}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

onde $c = 8\Theta$ é uma constante dependendo somente de n. Dada uma constante $k > n$, obtemos

$$\alpha = \frac{n(k-1)}{(n-1)k} > 1. \tag{2.39}$$

Para $\ell + 1 \geqslant k$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{2\ell n}{n-1} - (2\ell+2)\alpha &= \frac{2\ell nk}{(n-1)k} - \frac{(2\ell+2)n(k-1)}{(n-1)k}\\
&= \frac{2n}{(n-1)k}(\ell+1-k) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

e então

$$(2\ell+2)\alpha \leqslant \frac{2\ell n}{n-1}.$$

Da desigualdade de Hölder e (2.38) tem-se

$$||v||_{(2\ell+2)\alpha,r} \leqslant ||v||_{\frac{2\ell n}{n-1},r} \leqslant c^{\frac{1}{2\ell}} r^{\frac{1}{\ell}} \tau^{-\frac{1}{\ell}} ||v||^{\frac{\ell+1}{\ell}}_{2\ell+2,r+\tau}. \tag{2.40}$$

Para qualquer $\sigma \in (0,1)$ e qualquer inteiro $i \geqslant -1$, defina $m_i = 2k\alpha^i$, $l_i = m_i/2 - 1$, $\tau_i = 2^{-(1+i)}(1-\sigma)r$ e $r_{i+1} = r_i - \tau_{i+1}$ com $r_{-1} = r$. Então

$$r_{i+1} = r - \sum_{j=0}^{i+1}\tau_j = \sigma r + \tau_{i+1} \leqslant r,$$

e $\lim_{i\to\infty} r_i = \sigma r$. Iterando (2.40), para cada $i \geqslant 0$ obtemos

$$||v||_{\alpha m_i, r_i} \leqslant c^{\frac{1}{2\ell_i}} r_i^{\frac{1}{\ell_i}} \tau_i^{-\frac{1}{\ell_i}} ||v||^{\frac{\ell_i+1}{\ell_i}}_{\alpha m_{i-1}, r_{i-1}}. \tag{2.41}$$

Defina $\xi_i = \log||v||_{\alpha m_i, r_i}$ para cada ineiro $i \geqslant -1$ e $b_\sigma = \frac{c}{(1-\sigma)^2}$. Observe que $\tau_i/r_i \geqslant 2^{-(1+i)}(1-\sigma)$, e $\ell_i \geqslant k\alpha^i - 1 \geqslant (k-1)\alpha^i$ para cada $i \geqslant 0$. Então

$$\begin{aligned}
\xi_i = \log||v||_{\alpha m_i, r_i} &\leqslant \log\left(c^{\frac{1}{2\ell_i}} r_i^{\frac{1}{\ell_i}} \tau_i^{-\frac{1}{\ell_i}} ||v||^{\frac{\ell_i+1}{\ell_i}}_{\alpha m_{i-1}, r_{i-1}}\right)\\
&= \frac{1}{2\ell_i}\log c + \frac{1}{\ell_i}\log\frac{r_i}{\tau_i} + \frac{\ell_i+1}{\ell_i}\xi_{i-1}\\
&= \frac{1}{2\ell_i}\log\left(b_\sigma(1-\sigma)^2\right) + \frac{1}{\ell_i}\log\frac{r_i}{\tau_i} + \frac{\ell_i+1}{\ell_i}\xi_{i-1}.
\end{aligned}$$

Como $\tau_i/r_i \geqslant 2^{-(1+i)}(1-\sigma)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_i}\log\frac{r_i}{\tau_i} &\leqslant \frac{1}{\ell_i}\log\left(\frac{1}{2^{-(1+i)}(1-\sigma)}\right)\\
&= \frac{(1+i)}{\ell_i}\log 2 - \frac{1}{\ell_i}\log(1-\sigma).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\xi_i &\leqslant \frac{1}{2\ell_i}\log\left(b_\sigma(1-\sigma)^2\right) + \frac{(1+i)}{\ell_i}\log 2 - \frac{1}{\ell_i}\log(1-\sigma) + e^{\frac{1}{\ell_i}}\xi_{i-1}\\
&= \frac{1}{2\ell_i}\log b_\sigma + \frac{(1+i)}{\ell_i}\log 2 + e^{\frac{1}{\ell_i}}\xi_{i-1}.
\end{aligned}$$

Além disso, como $\ell_i \geqslant (k-1)\alpha^i$, temos

$$\xi_i \leqslant \frac{1}{2(k-1)\alpha^i}\log b_\sigma + \frac{1+i}{(k-1)\alpha^i}\log 2 + e^{\frac{\alpha^{-1}}{k-1}}\xi_{i-1}. \tag{2.42}$$

Para todo $0 \leqslant i_0 \leqslant i$, assegura-se

$$\prod_{j=i_0}^{i} e^{\frac{\alpha^{-j}}{k-1}} = e^{\frac{1}{k-1}\sum_{j=i_0}^{i}\alpha^{-j}} \leqslant e^{\frac{\alpha^{1-i_0}}{(k-1)(\alpha-1)}}.$$

Portanto, para cada $i \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\xi_i &\leqslant \frac{\log b_\sigma}{2(k-1)\alpha^i} + \frac{(1+i)\log 2}{(k-1)\alpha^i} + e^{\frac{\alpha^{-i}}{k-1}}\left(\frac{\log b_\sigma}{2(k-1)\alpha^{i-1}} + \frac{i\log 2}{(k-1)\alpha^{i-1}} + e^{\frac{\alpha^{1-i}}{k-1}}\xi_{i-2}\right)\\
&\vdots\\
&\leqslant \sum_{j=0}^{i}\left(\frac{\log b_\sigma}{2(k-1)\alpha^j} + \frac{1+j}{(k-1)\alpha^j}\log 2\right)\prod_{J=j+1}^{i} e^{\frac{\alpha^{-J}}{k-1}} + \xi_{-1}\prod_{j=0}^{i} e^{\frac{\alpha^{-j}}{k-1}}\\
&\leqslant e^{\frac{1}{(k-1)(\sigma-1)}}\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{\log b_\sigma}{2(k-1)}\frac{1}{\alpha^j} + \frac{\log 2}{k-1}\frac{1+j}{\alpha^j}\right) + e^{\frac{\alpha}{(k-1)(\alpha-1)}}\xi_{-1}.
\end{aligned}$$

Desde que

$$\sum_{j-0}^{\infty}\frac{j+1}{\alpha^j} = \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}, \tag{2.43}$$

temos

$$\xi_i \leqslant e^{\frac{1}{(k-1)(\alpha-1)}}\left(\frac{\log b_\sigma}{2(k-1)}\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{\log 2}{k-1}\frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}\right) + e^{\frac{\alpha}{(k-1)(\alpha-1)}}\xi_{-1}. \tag{2.44}$$

De $\alpha - 1 = \frac{k-1}{(n-1)k}$ e $\frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{n(k-1)}{k-n}$, obtemos

$$\xi_i \leqslant e^{\frac{n}{k-n}}\left(\frac{n\log b_\sigma}{2(k-n)} + \frac{n^2 k\log 2}{(k-n)^2}\right) + e^{\frac{n}{k-n}}\xi_{-1}. \tag{2.45}$$

Concluimos que

$$\|v\|_{\alpha m_i, r_i} \leqslant \exp\left(e^{\frac{n}{k-n}}\left(\frac{n \log b_\sigma}{2(k-n)} + \frac{n^2 k \log 2}{(k-n)^2}\right)\right)(\|v\|_{2k,r})^{e^{\frac{n}{k-n}}}. \tag{2.46}$$

Fazendo $i \to \infty$, segue-se que

$$\|v\|_{\infty,\sigma r} \leqslant \exp\left(e^{\frac{n}{k-n}}\left(\frac{n \log b_\sigma}{2(k-n)} + \frac{n^2 k \log 2}{(k-n)^2}\right)\right)(\|v\|_{2k,r})^{e^{\frac{n}{k-n}}}.$$

Isso completa a prova. $\square$

Observação 2. *O fator* $e^{\frac{n}{k-n}}$ *em* (2.35) *vem de* (2.37)*, que transforma uma estimativa em* M *para outra estimativa em* Σ *com uma pequena "perda" mas substancial. Na verdade, o fator poderia será menor se escolhermos um fator maior que* α *em* (2.40) *para* ℓ *grande. Contudo, não podemos reduzir a constante k para uma constante menor ou igual n, pois precisamos de* $\alpha > 1$ *em* (2.39)*. Portanto, ao contrário da iteração clássica De Giorgi-Nash-Moser, aqui não podemos obter* $\sup_{B_r(p)} v$ *limitado por um múltiplo de uma integral de* v^γ *com* $\gamma \leqslant 2n$ *em* $B_{2r}(p)$*.*

Seja

$$\beta_n = \frac{1}{n(2n-1)}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1} \tag{2.47}$$

Provaremos agora o Teorema 0.5 enunciado na Introdução.

Teorema 2.2. *Seja u uma função que define um gráfico minimo sobre* Σ *que satisfaz*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{|u(x)|}{d(x,p)} < \beta_n \tag{2.48}$$

para algum $p \in \Sigma$*. Então existe uma constante* $c > 0$ *dependendo somente de n tal que*

$$\sup_{x \in \Sigma} |Du|(x) \leqslant c \limsup_{x \to \infty} \frac{|u(x)|}{d(x,p)} \tag{2.49}$$

Demonstração. De (2.48), existe uma constante $\beta \in (0, \beta_n)$ tal que

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{|u(x)|}{d(x,p)} < \beta. \tag{2.50}$$

Então existe uma constante $r_\beta > 0$ tal que

$$|u(x)| \leqslant \beta \max\{r_\beta, d(x,p)\} \text{ para cada } x \in \Sigma. \tag{2.51}$$

Fixamos uma constante positiva $\delta = \delta(\beta) \ll 1$ satisfazendo $\beta(1+\delta) < \beta_n$. Seja $\gamma_\delta = (1+\delta)\, n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Do Teorema 2.1 existe uma constante $\lambda_\beta = \left(1 + \frac{\beta_n}{\beta(1+\delta)}\right)(n - 1/2) + 1$ tal que

$$⨍_{B_r(p)} v^{\lambda_\beta} \leqslant \frac{c(n,\delta,\beta)}{(1 - (\lambda_\beta - 1)\gamma_\delta \beta)^{m+1}}$$

para todo $r \geqslant r_\beta$. Note que

$$\begin{aligned}\frac{c(n,\delta,\beta)}{(1-(\lambda_\beta-1)\gamma_\delta\beta)^{m+1}} &= \frac{c(n,\delta,\beta)}{\left(1-\left(1+\frac{\beta_n}{\beta(1+\delta)}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\gamma_\delta\beta\right)^{m+1}}\\ &= \frac{c(n,\delta,\beta)}{\left(1-\left(\frac{(\beta(1+\delta)+\beta_n)(2n-1)}{2\beta(1+\delta)}\right)\gamma_\delta\beta\right)^{m+1}}.\end{aligned}$$

Como $\gamma_\delta = (1+\delta)\,n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$\begin{aligned}\frac{c(n,\delta,\beta)}{(1-(\lambda_\beta-1)\gamma_\delta\beta)^{m+1}} &= \frac{c(n,\delta,\beta)}{\left(1-\left(\frac{(\beta(1+\delta)+\beta_n)(2n-1)}{2\beta(1+\delta)}\right)(1+\delta)\,n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\beta\right)^{m+1}}\\ &= \frac{c(n,\delta,\beta)}{\left(1-\left(\frac{(\beta(1+\delta)+\beta_n)(2n-1)}{2}\right)\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\right)\right)^{m+1}},\end{aligned}$$

e daí

$$\frac{c(n,\delta,\beta)}{(1-(\lambda_\beta-1)\gamma_\delta\beta)^{m+1}} = c(n,\delta,\beta)\left(\frac{2\beta_n}{\beta_n-(1+\delta)\beta}\right)^{m+1}.$$

Do Lema 2.4, obtemos

$$\sup_{B_r/2(p)} \nu = \|\nu\|_{\infty,r/2} \leqslant c_{\frac{1}{2},\frac{\lambda_\beta}{2}}\left(\|\nu\|_{\lambda_\beta,r}\right)^{e^{\frac{n}{\lambda_{\beta/2}-n}}} \leqslant \psi(n,\beta), \tag{2.52}$$

onde $\psi = \psi(n,\beta)$ é uma função positiva dependendo somente de n e $\beta < \beta_n$ satisfazendo $\lim_{\beta\to\beta_n}\psi(n,\beta) = \infty$, que pode mudar de linha para linha. Em outras palavras, concluimos que ν é uniformemente limitado em Σ. A seguir, vamos dar uma estimativa melhor para ν do que (2.52).

Seja $\bar{p} = (p, u(p))$, denote por $B_r(\bar{p})$ a bola geodésica em $\Sigma\times\mathbb{R}$ com raio r e centro $\bar{p}$. De [14, 3.5], Bishop-Gromov (1.22) e (2.26), obtemos

$$2\mathcal{H}^n(B_r(p)) \geqslant \mathcal{H}^n(M\cap(B_r(\bar{p}))) \geqslant \frac{1}{r}\mathcal{H}^{n+1}(B_{r/2}(\bar{p})) \geqslant \frac{1}{c}\mathcal{H}^n(B_r(p)) \tag{2.53}$$

para cada $r>0$, onde $c \geqslant 1$ é uma constante dependendo somente de n, que pode mudar de linha para linha. Combinando a desigualdade de Sobolev (1.25) e (2.52) (por projeção de $\Sigma\times\mathbb{R}$ em Σ) garantimos a desigualdade de Sobolev em M, i.e.,

$$\left(\fint_{M\cap(B_r(\bar{p}))}|\phi|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \psi r\fint_{M\cap(B_r(\bar{p}))}|D\phi| \tag{2.54}$$

vale para qualquer função Lipschitz ψ em $M\cap(B_r(\bar{p}))$ com suporte compacto em $M\cap(B_r(\bar{p}))$. Combinando (1.23) e (2.52) garantimos a desigualdade de Neumann-Poincaré no interior das bolas geodésicas de M, i.e.,

$$\int_{M\cap(B_r(\bar{p}))}|\varphi-\bar{\varphi}_{p,r}| \leqslant \psi r\int_{M\cap(B_r(\bar{p}))}|D\varphi| \tag{2.55}$$

para qualquer função Lipschitz φ em $M\cap(B_r(\bar{p}))$ com $\bar{\varphi}_{p,r} = \fint_{M\cap(B_r(\bar{p}))}\varphi$. Da iteração De Giorgi-Nash-Moser, as desigualdades de valor médio se mantêm em M para funções sub(super)-harmônicas em M. Denote $|Du|_0 = \sup_\Sigma |Du|$. Desde que $|Du|$ é subharmonica em M, de (1.32), concluímos que $|Du|_0 - |Du|^2$ é superharmônica não negativa em M, então (ver página 42 em [13], ou Lema 3.5 em [16])

$$|Du|_0 = \sup_\Sigma |Du| = \lim_{r\to\infty}\fint_{M\cap(B_r(\bar{p}))} |Du|^2. \tag{2.56}$$

Seja $\tilde{\eta}$ uma função Lipschitz em Σ com $\operatorname{supp}\tilde{\eta} \subset B_{2r}(p)$, $\tilde{\eta}\equiv 1$ em $B_r(p)$ e $|D\tilde{\eta}| \leqslant \frac{1}{r}$. Vemos também $\tilde{\eta}$ como uma função em M, deixando $\tilde{\eta}(x, u(x)) = \tilde{\eta}(x)$. De (1.29), temos

$$0 = \int_M \left\langle \nabla u, \nabla(u\tilde{\eta}^2)\right\rangle = \int_M |\nabla u|^2\tilde{\eta}^2 + 2\int_M u\tilde{\eta}\left\langle \nabla u, \nabla\tilde{\eta}\right\rangle.$$

Como $\langle \nabla u, \nabla(\tilde{\eta}\rangle \geqslant -|\langle\nabla u, \nabla\tilde{\eta}\rangle|$, temos

$$0 \geqslant \int_M |\nabla u|^2\tilde{\eta}^2 - 2\int_M u\tilde{\eta}\left|\langle \nabla u, \nabla\tilde{\eta}\rangle\right|.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
0 &\geqslant \int_M |\nabla u|^2\tilde{\eta}^2 - 2\int_M u\tilde{\eta}\,|\nabla u|\,|\nabla\tilde{\eta}| \\
&= \int_M |\nabla u|^2\tilde{\eta}^2 - 2\int_M 2\frac{\tilde{\eta}\,|\nabla u|}{2}u\,|\nabla\tilde{\eta}| \\
&\geqslant \int_M |\nabla u|^2\tilde{\eta}^2 - 2\int_M \left(\frac{|\nabla u|^2\tilde{\eta}^2}{4} + u^2|\nabla\tilde{\eta}|^2\right),
\end{aligned}$$

e então

$$0 \geqslant \int_M |\nabla u|^2\tilde{\eta}^2 - \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2\tilde{\eta}^2 - 2\int_M u^2|\nabla\tilde{\eta}|^2,$$

donde

$$\int_M |\nabla u|^2\tilde{\eta}^2 \leqslant 4\int_M u^2|\nabla\tilde{\eta}|^2. \tag{2.57}$$

Combinando isto com Bishop-Gromov (1.22), obtemos

$$\int_{B_r(p)} |\nabla u|^2\nu \leqslant \int_M |\nabla u|^2\tilde{\eta}^2 \leqslant 4\int_M u^2|\nabla\tilde{\eta}|^2 \leqslant 16\beta^2\int_{B_{2r}(p)}\nu$$

que combinado com (2.26), nos fornece

$$\int_{B_r(p)} |\nabla u|^2\nu \leqslant 16\beta^2(1+n\beta)\mathcal{H}^n(B_{2r}(p)).$$

Porém, ainda de Bishop-Gromov (1.22), temos $(2r)^{-n}\mathcal{H}^n(B_{2r}(p)) \leqslant r^{-n}\mathcal{H}^n(B_r(p))$ e então,

$$\int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 \nu \leqslant 16(1+n\beta)2^n\beta^2\mathcal{H}^n(B_r(p)). \tag{2.58}$$

Desde que $M \cap (B_r(\bar{p})) \subset (B_r(p) \times \mathbb{R}$, de (2.56), temos

$$\frac{|Du|_0^2}{1+|Du|_0^2} \leqslant \limsup_{r\to\infty} \fint_{M\cap(B_r(\bar{p}))} \frac{|Du|^2}{\nu^2},$$

combinando com (1.34), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{|Du|_0^2}{1+|Du|_0^2} &\leqslant \limsup_{r\to\infty} \fint_{M\cap(B_r(\bar{p}))} |\nabla u|^2 \\
&= \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{\mathcal{H}^n(M\cap(B_r(\bar{p}))} \int_{M\cap(B_r(\bar{p}))} |\nabla u|^2 \\
&\leqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{\mathcal{H}^n(M\cap(B_r(\bar{p}))} \int_{B_r(p))} |\nabla u|^2 \nu.
\end{aligned}$$

Combinado com (2.53) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{|Du|_0^2}{1+|Du|_0^2} &\leqslant \limsup_{r\to\infty} c\frac{1}{\mathcal{H}^n(B_r(p))} \int_{B_r(p))} |\nabla u|^2 \nu \\
&= c \limsup_{r\to\infty} \fint_{B_r(p))} |\nabla u|^2 \nu,
\end{aligned}$$

e então, utilizando (2.58) concluimos

$$\frac{|Du|_0^2}{1+|Du|_0^2} \leqslant c\beta^2. \tag{2.59}$$

Tomando $\beta \to \limsup_{x\to\infty} \frac{|u(x)|}{d(x,p)}$, deduzimos (2.49), que completa a prova. $\square$

Conclusão

A partir da estimativa gradiente do Teorema 2.2 apresentada no Capítulo 2 concluímos o principal resultado deste trabalho. O resultado seguirá de uma aplicação da desigualdade de Harnack e do seguinte resultado (ver [10, Lema 8]).

Lema 2.5. *Seja Σ uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa. Se u é uma função que define um gráfico mínimo sobre Σ e que satisfaz*

$$(i) \quad \sup |Du| < \infty \quad e \quad (ii) \quad \limsup_{\Sigma \ni x \to \infty} \frac{\max\{-u(x), 0\}}{d(x,p)} = 0$$

então u é constante.

Demonstração. Uma maneira de ver isso é usar [8, Teorema 8] e sua prova, segundo a qual, se u não é constante, qualquer blowdown $u_\infty : \Sigma_\infty \to \mathbb{R}$ de u correspondendo ao cone tangente $\Sigma_\infty = N_\infty \times \mathbb{R}$ satisfaz $u_\infty(y,t) = \|Du\|_\infty t$. Em particular, u tem um crescimento exatamente linear tanto de cima como de baixo. Fornecemos um argumento mais direto. Sem perda de generalidade podemos assumir que $u(o) = 0$, de modo que

$$\inf_{B_R(p)} u \leqslant 0 \qquad \forall\, R > 0.$$

Da hipótese (i), o operador $L = \nu\Delta_g$ é um operador uniformemente elíptico na forma de divergência na variedade completa Σ com curvatura de Ricci não negativa. Como $Lu = 0$, para cada $R > 0$ a função

$$u_R = u - \inf_{B_{2R}(p)} u$$

satisfaz $Lu_R = 0$ em Σ, $u_R \geqslant 0$ em $B_{2R}(p)$ e

$$\inf_{B_{2R}(p)} u_R = \inf_{B_R(p)} u - \inf_{B_{2R}(p)} u \leqslant - \inf_{B_{2R}(p)} u_R.$$

Como u_R é não negativa em $B_{2R}(p)$, da desigualdade de Harnack, temos

$$\sup_{B_R(p)} u_R \leqslant C \inf_{B_R(p)} u_R \leqslant -C \inf_{B_{2R}(p)} u$$

com $C > 0$ constante independente de R, e assim

$$\sup_{B_R(p)} u = \sup_{B_R(p)} u - \inf_{B_{2R}(p)} u \leqslant -(1+C) \inf_{B_{2R}(p)} u = o(R) \text{ quando } R \to \infty.$$

A partir disso e (ii) obtemos que $\dfrac{|u(x)|}{d(x,p)} = 0$ quando $x \to \infty$, e como $|Du| \in L^\infty(\Sigma)$ podemos concluir que u é constante (ver [8, Teorema 11]).

De fato, como $Lu = 0$ e L é uniformemente elíptico, temos uma desigualdade de Caccioppoli

$$\int_\Sigma \psi^2 |Du|^2 dv \leqslant C \int_\Sigma u^2 |D\psi|^2 dv \quad \forall \psi \in \mathrm{Lip}_c(\Sigma)$$

com $C > 0$ uma constante fixa. Fixe $\varepsilon > 0$. Já que $|u| = o(r)$, existe $R_0 > 0$ suficientemente grande para que $u^2 \leqslant \varepsilon R^2$ em B_{2R} para todo $R > R_0$. Aplicando a desigualdade de Caccioppoli com o função cut-off

$$\psi_R = \begin{cases} 1 & \text{em } B_R(p), \\ \frac{2R-r}{R} & \text{em } B_{2R}(p) \setminus B_R(p), \\ 0 & \text{em } \Sigma \setminus B_R(p) \end{cases}$$

obtemos

$$\int_{B_R(p)} |Du|^2 dv \leqslant C\varepsilon \mathrm{vol}(B_{2R}(p) \quad \forall R > R_0,$$

onde usamos a desigualdade de Bishop-Gromov 1.3. Tomando $R \to \infty$ (com $\varepsilon > 0$ fixado) obtemos

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}(B_R(p))} \int_{B_R(p)} |Du|^2 dv \leqslant 2^n C\varepsilon. \tag{2.60}$$

A função $|Du|^2$ é limitado e satisfaz

$$L|Du|^2 = v\Delta_g v^2 \geqslant v^2 \Delta_g v \geqslant (\|II\|^2 + \mathrm{Ric}_{\bar{\sigma}}(n,n))v^3 \geqslant 0$$

devido à equação de Jacobi e à condição $\mathrm{Ric} \geqslant 0$. Novamente, como L é operador uniformemente elíptico na forma de divergência em uma variedade com $\mathrm{Ric} \geqslant 0$, aplicamos [8, Proposição 22] para a função L-superharmônica não negativa e limitada $f = \sup_\Sigma |Du|^2 - |Du|^2$ obtemos a fórmula do valor médio do tipo Li

$$\sup_\Sigma |Du|^2 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}(B_R(p))} \int_{B_R(p)} |Du|^2 dv. \tag{2.61}$$

Combinando (2.60) e (2.61), obtemos

$$\sup_\Sigma |Du|^2 \leqslant 2^n C\varepsilon$$

isto é, $Du \equiv 0$ em Σ. Isso conclui a prova. □

Teorema 2.3. *Seja* Σ *uma variedade Riemanniana* Σ *não compacta, completa e com curvatura de Ricci não negativa. Se* $u\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ *define um gráfico mínimo em* Σ *e para algum* $p \in \Sigma$ *vale*

$$\limsup_{\Sigma \ni x \to \infty} \frac{\max\{-u(x), 0\}}{d(x,p)} = 0, \tag{2.62}$$

então u *é constante.*

Demonstração. Suponha que u é não constante. Para qualquer $r > 0$ e $\bar{x} = (x, t_x) \in \Sigma \times \mathbb{R}$, definamos

$$\mathcal{D}_{\bar{x},r} = \{(y,s) \in \Sigma \times \mathbb{R} | d(y,x) + |s - t_x| < r\},$$

e $\mathcal{B}_r(\bar{x}) = M \cap \mathcal{D}_{\bar{x},r}$. Para cada $s \leqslant \inf_{B_{4R}(p)} u$, denote $\bar{p}_s = (p, u(p) - s)$. A partir do princípio do máximo para (1.28), $u - s > 0$ em B_{4R}. Da desigualdade de Harnack 1.35, temos

$$\sup_{\mathcal{B}_{2r}(\bar{p}_s)} (u - s) \leqslant \vartheta \inf_{\mathcal{B}_{2r}(\bar{p}_s)} (u - s) \tag{2.63}$$

para alguma constante $\vartheta \geqslant 2$ dependendo somente de n.

Suponhamos que existe uma constante positiva $\beta_* < \frac{\beta_n}{4(\vartheta - 1)}$ com β_n definida como em (2.47) tal que

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{u(x)}{d(x,p)} \geqslant -\beta_*$$

para algum $p \in \Sigma$. Seja $\epsilon = \frac{\beta_n}{8\beta_*(\vartheta-1)} - \frac{1}{2} > 0$. Existe uma constante $r_\epsilon > 0$ tal que

$$u(x) \geqslant -(1+\epsilon)\beta_* \max\{d(x,p), r_\epsilon\}$$

para todo $x \in \Sigma$. Para cada $R \geqslant r_\epsilon$, seja $\hat{u}_R = u + 4(1+\epsilon)\beta_* R$ e $\hat{p}_R = (p, \hat{u}_R(p)) \in \Sigma \times \mathbb{R}$, então $\hat{u} > 0$ em $B_{4R}(p)$, segue de (2.63) que

$$\sup_{\mathcal{B}_{2r}(\hat{p}_R)} \hat{u}_R \leqslant \vartheta \inf_{\mathcal{B}_{2r}(\hat{p}_R)} \hat{u}_R \leqslant \vartheta \hat{u}_R(p). \tag{2.64}$$

Note que

$$\begin{aligned} (\vartheta - 1)\hat{u}_R(p) &= (\vartheta - 1)(u(p) + 4(1+\epsilon)\beta_* R) \\ &= (\vartheta - 1)u(p) + (\beta_n + 4(\vartheta - 1)\beta_*)\frac{R}{2}, \end{aligned}$$

donde segue

$$(\vartheta - 1)\hat{u}_R(p) < \beta_n R$$

para todo $R \geqslant r_\epsilon$ suficientemente grande. Observe que $B_R(p)\times(-R+\hat{u}_R(p), R+\hat{u}_R(p)) \subset \mathcal{D}_{\hat{p}_R,2R}$. De (2.64), concluimos que

$$\sup_{B_R(p)} \hat{u}_R < \beta_n R \tag{2.65}$$

para todo $R \geqslant r_\epsilon$ suficientemente grande. Assim, de (2.65) e da definição de $\hat{u}_R$, segue que

$$\sup_{B_R(p)} u < \sup_{B_R(p)} \hat{u}_R - 4\beta_* R < (\beta_n - 4\beta_*)R.$$

Logo, para $x \in \Sigma$ tal que $d(x,p) = R$ temos que

$$\frac{u(x)}{d(x,p)} < \beta_n - 4\beta_*,$$

donde segue que

$$\frac{|u(x)|}{d(x,p)} < \beta_n - 4\beta_*.$$

Assim, do Teorema 2.2, temos que existe uma constante $c > 0$ dependendo somente de n tal que

$$\sup_{x\in\Sigma} |Du|(x) \leqslant c \limsup_{x\to\infty} \frac{|u(x)|}{d(x,p)} \leqslant c(\beta_n - 4\beta_*).$$

O resultado segue então do Lema 2.5. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Almgren, F. J. Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of bernstein's theorem. *Annals of Mathematics 84*, 2 (1966), 277–292.

[2] Bombieri, E., De Giorgi, E., and Giusti, E. Minimal cones and the bernstein problem. *Ennio De Giorgi 291* (1969).

[3] Bombieri, E., De Giorgi, E., and Miranda, M. Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 32*, 4 (1969), 255–267.

[4] Bombieri, E., and Giusti, E. Harnack's inequality for elliptic differential equations on minimal surfaces. *Inventiones mathematicae 15*, 1 (1972), 24–46.

[5] Carmo, M. P. d. Geometria riemanniana. *Projeto Euclides - IMPA* (2005).

[6] Casteras, J.-B., Heinonen, E., and Holopainen, I. Existence and non-existence of minimal graphic and p-harmonic functions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics 150*, 1 (2020), 341–366.

[7] Cheeger, J., Gromov, M., and Taylor, M. Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the laplace operator, and the geometry of complete riemannian manifolds. *Journal of Differential Geometry 17*, 1 (1982), 15–53.

[8] Colombo, G., Gama, E. S., Mari, L., and Rigoli, M. Non-negative ricci curvature and minimal graphs with linear growth. *arXiv preprint arXiv:2112.09886* (2021).

[9] Colombo, G., Magliaro, M., Mari, L., and Rigoli, M. Bernstein and half-space properties for minimal graphs under ricci lower bounds. *International Mathematics Research Notices 2022*, 23 (2022), 18256–18290.

[10] Colombo, G., Mari, L., and Rigoli, M. On minimal graphs of sublinear growth over manifolds with non-negative ricci curvature. *arXiv preprint arXiv:2310.15620* (2023).

[11] De Giorgi, E. Una estensione del teorema di bernstein. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche 19*, 1 (1965), 79–85.

[12] Ding, Q. Liouville-type theorems for minimal graphs over manifolds. *Analysis & PDE 14*, 6 (2021), 1925–1949.

[13] Ding, Q. Poincaré inequality on minimal graphs over manifolds and applications. *arXiv preprint arXiv:2111.04458* (2021).

[14] Ding, Q. Area-minimizing hypersurfaces in manifolds of ricci curvature bounded below. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 2023*, 798 (2023), 193–236.

[15] Ding, Q. Liouville theorem for minimal graphs over manifolds of nonnegative ricci curvature. *arXiv preprint arXiv:2401.03394* (2024).

[16] Ding, Q., Jost, J., and Xin, Y. Minimal graphic functions on manifolds of nonnegative ricci curvature. *Communications on Pure and Applied Mathematics 69*, 2 (2016), 323–371.

[17] Finn, R. On equations of minimal surface type. *Annals of Mathematics 60*, 3 (1954), 397–416.

[18] Fischer-Colbrie, D., and Schoen, R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Communications on Pure and Applied Mathematics 33*, 2 (1980), 199–211.

[19] Fleming, W. H. On the oriented plateau problem. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 11* (1962), 69–90.

[20] Giaquinta, M., and Martinazzi, L. *An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs.* Springer Science & Business Media, 2013.

[21] Greene, R. E., and Wu, H.-H. *Function theory on manifolds which possess a pole*, vol. 699. Springer, 2006.

[22] Grigor'Yan, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the brownian motion on riemannian manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society 36*, 2 (1999), 135–249.

[23] Kobayashi, S., and Nomizu, K. *Foundations of differential geometry, volume 2*, vol. 61. John Wiley & Sons, 1996.

[24] Korevaar, N. An easy proof of the interior gradient bound for solutions to the prescribed mean-curvature equation. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (1986), vol. 45, AMER MATHEMATICAL SOC 201 CHARLES ST, PROVIDENCE, RI 02940-2213, pp. 81–89.

[25] Lee, J. M. *Introduction to Riemannian manifolds*, vol. 2. Springer, 2018.

[26] Li, P. *Geometric analysis*, vol. 134. Cambridge University Press, 2012.

[27] Moser, J. On harnack's theorem for elliptic differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics 14*, 3 (1961), 577–591.

[28] Petersen, P. *Riemannian geometry*, vol. 171. Springer, 2006.

[29] Pigola, S., Rigoli, M., and Setti, A. G. *Vanishing and finiteness results in geometric analysis: a generalization of the Bochner technique*, vol. 266. Springer Science & Business Media, 2008.

[30] Rosenberg, H. Minimal surfaces in $\mathsf{M}^2 \times \mathbb{R}$. *Illinois Journal of Mathematics 46*, 4 (2002), 1177–1195.

[31] Rosenberg, H., Schulze, F., and Spruck, J. The half-space property and entire positive minimal graphs in $\mathsf{M} \times \mathbb{R}$. *Journal of Differential Geometry 95*, 2 (2013), 321–336.

[32] Simons, J. Minimal varieties in riemannian manifolds. *Annals of Mathematics 88*, 1 (1968), 62–105.

[33] Wang, X.-J. Interior gradient estimates for mean curvature equations. *Mathematische Zeitschrift 228*, 1 (1998), 73–82.