Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o fenômeno de Concentração de Massa para a Equação de Schrödinger não-linear L^2-crítica

Danilo Soares Carneiro de Oliveira

Teresina - 2024

Danilo Soares Carneiro de Oliveira

Dissertação de Mestrado:

Sobre o fenômeno de Concentração de Massa para a Equação de Schrödinger não-linear L^2-crítica

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Mykael de Araujo Cardoso

Teresina - 2024

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre o fenômeno de concentração de massa para a equação de Schrödinger não-linear L^2-crítica

Danilo Soares Carneiro de Oliveira

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 31 de janeiro de 2024.

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. Mykael de Araujo Cardoso – Orientador

Gleison do N Santos
____
Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos – UFPI

Andressa Gomes
____
Prof. Drª. Andressa Gomes - UFPI

Luiz Gustavo Farah Dias
____
Prof. Dr. Luiz Gustavo Farah Dias - UFMG

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

O48s Oliveira, Danilo Soares Carneiro de.

Sobre o fenômeno de concentração de massa para a equação de Schrödinger não linear L^2-crítica / Danilo Soares Carneiro de Oliveira. -- 2024.

97 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.

"Orientador: Prof. Dr. Mikael de Araújo Cardoso."

1. Equações de Schrodinger. 2. Soluções de *Blow-up*. 3. Concentração de massa. I. Cardoso, Mikael de Araújo. II. Titulo.

CDD 515.354

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Aos meus pais Ana Maria e Luis Carneiro.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por permitir que todas as minhas conquistas fossem realizadas.

Agradeço aos meus pais Ana Maria e Luis Carneiro, pela melhor criação que um filho poderia receber. Os únicos que sabem o tamanho da luta e das dificuldades que passamos durante toda a nossa vida. Meus primeiros e melhores professores. Todo o meu esforço é a forma que eu encontrei de retribuir o que me foi dado por eles.

Agradeço ao meu irmão Vitor, que ainda é muito novo pra entender o quanto ele foi importante na minha jornada. A parte mais difícil de cada despedida.

Agradeço à minha namorada Vitória, a mulher mais inteligente que eu conheço e, sem sombra de dúvidas, a melhor amiga que eu já tive. Hoje em dia, eu não consigo lembrar como era o mundo antes dela. (Beetlejuice, what color is carrot?).

Agradeço aos amigos que fiz durante a graduação no IFPI campus Piripiri, especialmente o “Dream Team”, Helena Camila, Francisco Junior, Felipe Martins, e por fim Thiago Cavalcante, com quem eu compartilhava o sonho, que na época parecia impossível, de entrar no mestrado acadêmico na UFPI, e que depois, realizou esse sonho junto comigo.

Agradeço a todos os amigos que fiz na UFPI durante o Mestrado. Ana Júlia, Douglas Rafael, Eduardo, Emanuelly, Honório, Isaque, Jeffersson Galvão, José Alencar, José Rufino, Luis Estevão, Luzivânia, Vinícius, Wilkreffy, Gabriel, Sillas, Christopher, Dieme, Erisvaldo, João Vinicius, Jonatas, Pedro Rodrigues e Ruan. Foi um período de muito foco e dedicação, e a companhia, de todos eles, foi essencial para suportar toda esta jornada.

Agradeço em especial aos meus amigos, Lázaro, José Vitor, Andressa, Fauster e Suerlan pela ajuda nos estudos de Análise. Sem eles, eu não teria metade do conhecimento que adquiri durante o mestrado.

Agradeço aos professores Andressa Gomes, Gleison do Nascimento, Luiz Gustavo Farah e Roger Peres de Moura, por aceitarem compor a banca avaliadora deste trabalho.

Agradeço aos professores do programa de pós-graduação em Matemática da UFPI, em particular, aqueles com quem tive contato, Antonio Wilson, Halyson, Leandro, Paulo Alexandre, Ray, Rondinelle e Sandoel.

Agradeço especialmente aos professores, Cícero, Gleison, Ítalo, Joel e Mykael, por terem ministrados discilplinas incríveis, que eu tive a honra de compor a turma.

Agradeço aos professores do IFPI campus Piripiri, Alberto, Ivan, Valtércio, por serem os responsáveis pela minha formação matemática na graduação, ao professor Francisco Reis por ser o primeiro a me incentivar a ingressar no mestrado acadêmico e ao professor Marcos Nery por orientar meu TCC, e por me levar pessoalmente à UFPI pela primeira vez.

Por fim, agradeço ao meu orientador, Professor Mykael de Araujo Cardoso, por aceitar o desafio de guiar meus estudos durante a pós-graduação. Sem dúvidas, realizou um trabalho excepcional. Muito Obrigado!

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"*A confiança vem da preparação*".

Georges St-Pierre.

Resumo

No seguinte trabalho, estudamos algumas propriedades para soluções cujo tempo máximo de existência é finito, conhecidas como soluções de *blow-up*, do Problema de Valor Inicial (PVI) associado à equação de Schrödinger não-linear L^2-crítica

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + |u|^{\frac{4}{d}} u = 0, & x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d), & s > 0. \end{cases}$$

Encontramos uma cota ótima sobre a norma do dado inicial em $L^2(\mathbb{R}^d)$, para a formação de soluções de *blow-up* em $H^1(\mathbb{R}^d)$ devida a Weinstein [29]; Provamos um resultado devido á Weinstein [28] e posteriormente estudado por Hmidi e Kerani em [17], que afirma que soluções em $H^1(\mathbb{R}^d)$, que explodem em tempo finito, concentram uma certa quantidade de massa em torno de pontos do $\mathbb{R}^d$. Em seguida provamos que um fenômeno similar ocorre para $H^s(\mathbb{R}^2)$, com $s < 1$, também devido a Hmidi e Kerani [18]; Por fim, estudamos o comportamento de soluções de *blow-up* cujo dado inicial tem massa mínima e damos uma prova alternativa do resultado de Merle [21] a respeito da universalidade de soluções de massa mínima em $H^1(\mathbb{R}^d)$, utilizando as ideias de Hmidi e Kerani [17].

Palavras-chave: Equação de Schrödinger; Soluções de *Blow-up*; Concentração de massa.

Abstract

In the following work, we study some properties for solutions, which the maximal time of existence is finite, known as blow-up solutions, to the Initial Value Problem (IVP) associated to the L^2-critical nonlinear Schrödinger Equation

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + |u|^{\frac{4}{d}} u = 0, & x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d), & s > 0. \end{cases}$$

We find an optimal bound on the L^2-norm of the initial data, for the formation of blow-up solutions in $H^1(\mathbb{R}^d)$ due to Weinstein [29]; We prove a result, also due to Weinstein [28] and later studied by Hmidi and Kerani in [17], which establishes that, finite time, blow-up solutions concentrate a certain amount of mass arround points in $\mathbb{R}^d$. Next we prove that a similar phenomenon happens in $H^s(\mathbb{R}^2)$, with $s < 1$, also due to Hmidi and Kerani [18]; Finally, we study the behavior of blow-up solutions, in which the initial data has minimal L^2-norm and we give an alternative proof of the result of Merle [21] with respect to the universality of minimal mass solutions in $H^1(\mathbb{R}^d)$, using the ideas of Hmidi and Kerani [17].

Keywords: Schrödinger Equation; Blow-up Solutions; Mass concentration.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No presente trabalho, consideramos o seguinte problema de valor inicial (PVI) associado à equação de Schrödinger não-linear L^2-crítica

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + |u|^{\frac{4}{d}} u = 0, & x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0 \\ u(0,\cdot) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d), & s > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

onde, $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2$ é o operador de Laplace em $\mathbb{R}^d$, e $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. De acordo com Fibich [12], esta equação pode ser utilizada para modelar diversos fenômenos físicos, dentre eles, a propagação de raios lasers de alta intensidade em meios isotrópicos inflados, isto é, meios onde as propriedades eletromagnéticas, tais como o índice de refração, são iguais em todas as direções. É um fato conhecido que o problema (1.1) é localmente bem posto para $s \geqslant 0$ (veja Linares e Ponce [19], Cazenave[6] e Kato[15]), isto é, dado $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, existe um tempo $T > 0$ e uma única solução $u(t)$ do problema (1.1) tal que $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d)) \cap E$, onde E é um espaço de Banach auxiliar, e a aplicação dado-solução

$$\mathbb{F} : H^s(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d)) \cap E$$

é uma função contínua. De fato, pelo princípio de Duhamel, u é uma solução de (1.1) então, u também é solução da seguinte equação integral

$$u(t,x) = e^{it\Delta} u_0(x) + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^{\frac{4}{d}} u(s,x)\, ds \tag{1.2}$$

onde $e^{it\Delta} u_0(x) = \left(e^{-4\pi^2 i |\xi|^2 t} \widehat{u} \right)^{\vee}(x)$. Assim a boa colocação local do problema (1.1) se baseia em obter boa colocação local para o problema (1.2). Além disso, para todo

$t \in [0, T]$ as seguintes quantidades são conservadas

$$M[u(t)] = \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u(0,x)|^2 \, dx = M[u_0]$$

e

$$E[u(t)] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t,x)|^2 \, dx - \frac{d}{2d+4}\int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^{\frac{4}{d}+2} \, dx = E[u_0],$$

sempre que estiverem bem definidas. É natural questionar se sempre é possível estender arbitrariamente o tempo de existência da solução. De fato, da boa colocação local para $s > 0$, é possível mostrar que

- O tempo $T > 0$, de existência da solução obtida depende apenas da norma em $H^s(\mathbb{R}^d)$ do dado inicial.

- Se $T^* > 0$ é o tempo máximo de existência de uma solução do problema (1.1) então, ou $T^* = \infty$ ou $T^* < \infty$ e
$$\lim_{t \uparrow T^*} \|u(t,\cdot)\|_{H^s} = +\infty.$$

No caso em que $T^* < \infty$, dizemos que $u(t)$ é uma solução de *blow-up* em tempo finito ou uma solução que explode em tempo finito. Segundo, Sulem e Sulem [26], e Fibich[12], no contexto da propagação de raios laser, soluções de *blow-up* correspondem ao colapaso de ondas, isto é, auto aprisionamento dos raios laser durante a propagação.

A teoria de boa colocação local para dado inicial pequeno em L^2 nos dá que, existe um $\delta > 0$, tal que se

$$\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \delta$$

então o tempo de existência da solução de (1.1) se extende globalmente, no entanto para dados iniciais arbitrários, soluções de *blow-up* podem ocorrer. Em particular, em $H^1(\mathbb{R}^d)$, a teoria de existência de soluções de *blow-up* está ligada a noção de *ground state*, a solução única, positiva e radialmente decrescente da equação elíptica

$$\Delta Q - Q + |Q|^{\frac{4}{d}} Q = 0, \qquad \text{em } H^1(\mathbb{R}^d). \tag{1.3}$$

Em [29], Weinstein provou a seguinte versão refinada da desigualdade de Gagliardo-Niremberg

$$\|\psi\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} \leqslant C_d \|\psi\|_{L^2}^{\frac{4}{d}} \|\nabla\psi\|_{L^2}^2, \qquad \forall \psi \in H^1(\mathbb{R}^d),$$

com $C_d = \frac{d+2}{d}\|Q\|_{L^2}^{-\frac{4}{d}}$. Combinado com a conservação de energia, isso implica que $\|Q\|_{L^2}$ é a massa crítica para a formação de singularidades, isto é, para toda $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$$

a solução de (1.1) com dado inicial u_0 é uma solução global (Veja Teorema 3.2.13). Também essa cota é ótima, no sentido de que é possível construir soluções de (1.1) em $H^1(\mathbb{R}^d)$, que explodem em tempo finito e cuja norma em $L^2(\mathbb{R}^d)$ do dado inicial é igual à norma em $L^2(\mathbb{R}^d)$ do *groud state*. Por exemplo, utilizando a invariância conforme (Proposição 3.2.5), é possível construir

$$S(t,x) = (T^* - t)^{-\frac{d}{2}} e^{[(i/(T^*-t))+(-i|x|^2/T^*-t)]} Q\left(\frac{x}{T^* - t}\right) \tag{1.4}$$

uma solução de (1.1) com $\|S(0,\cdot)\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ que explode em tempo finito T^*. Em [21] Merle provou que $S(t)$ é a única solução de (1.1) em $H^1(\mathbb{R}^d)$ com massa mínima, a menos das simetrias da equação presentes na Proposição 3.2.5.

Nosso objetivo principal é estudar a concentração de massa para soluções de *blow-up* da equação (1.1), com $s = 1$ e $s < 1$. Mais especificamente os seguintes teoremas

Teorema 1.0.1. *Assuma* $s = 1$. *Seja* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *tal que a solução correspondente de* (1.1) *explode em tempo finito* $T^* > 0$ *e* $\lambda(t) > 0$ *uma função tal que* $\lambda(t)\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2} \longrightarrow \infty$ *quando* $t \uparrow T^*$. *Então, existe* $x(t) \in \mathbb{R}^d$ *tal que*

$$\liminf_{t\uparrow T^*} \int_{|x-x(t)|<\lambda(t)} |u(t,x)|^2 dx \geqslant \int Q^2$$

Teorema 1.0.2. *Assuma* $s > s_Q = \frac{1+\sqrt{11}}{5}$. *Seja* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *tal que a solução* u *de* (1.1) *explode em tempo finito* $T^* > 0$ *e* $\lambda(t) > 0$ *tal que* $\lambda(t)(T^* - t)^{-\frac{s}{2}} \longrightarrow \infty$ *quando* $t \uparrow T^*$. *Então, existe* $x(t) \in \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\limsup_{t\uparrow T^*} \int_{|x-x(t)|<\lambda(t)} |u(t,x)|^2 dx \geqslant \int Q^2.$$

O trabalho está organizado da seguinte forma. No segundo Capítulo listamos algumas noções básicas de Análise Funcional, Espaços L^p, Distribuições Temperadas e Espaços de Sobolev, que situarão o leitor ao longo do texto.

No Capítulo 3, estudamos alguns resultados clássicos de boa colocação local e global para a equação não-linear de Schrödinger, bem como as quantidades conservadas, as identidades viriais e propriedades importantes a respeito de soluções de *blow-up* em tempo finito, próximo ao tempo máximo de existência.

No Capítulo 4, provamos o Lema de Decomposição em Perfis e um Teorema de Compacidade em $H^1(\mathbb{R}^d)$ mostrado por Hmidi e Kerani [17]. Usamos estes resultados para mostrar uma concentração de massa para soluções de *blow-up* em $H^1(\mathbb{R}^d)$. Em seguida, introduzimos o I-metódo e provamos um resultado de quase conservação da energia estudado por Colliander et. al. em [8], [7], [9] e [10] a respeito de soluções de (1.1) com baixa regularidade, o qual utilizaremos para mostrar um resultado similiar em $H^s(\mathbb{R}^2)$ com $s < 1$.

Por fim, no capítulo 5, daremos uma caracterização de soluções de massa mínima, isto é, soluções tais que $\|u_0\|_2 = \|Q\|_2$. Mostraremos a universalidade do perfil de decomposição associado a soluções de massa mínima em $H^1(\mathbb{R}^d)$ e $H^s(\mathbb{R}^2)$ com $s < 1$, além de uma demonstração alternativa dada por Hmidi e Kerani em [17], para o resultado provado por Merle em [21], sobre a universalidade da solução de *blow-up* com massa mínima em $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Nesse capítulo serão apresentadas notações, definições e resultados básicos sobre espaços $L^p(\mathbb{R}^d)$, classe de Schwartz, distribuições temperadas e espaços de Sobolev que serão usados ao longo do texto. Para mais detalhes consulte Botelho et.al [3], Brezis [5], Cazenave [6], Grafakos [14], Linares e Ponce [19], e Reed e Simon[25].

2.1 Notações

- Usaremos C para denotar constantes que podem variar de uma linha para a outra.
- Denotaremos por $C(*,*,...,*)$ constantes que dependem apenas das quantidades que aparecem entre parenteses.
- Sejam A, B números reais positivos, diremos que $A \lesssim B$, quando existe uma constante $c > 0$, que não depende do conjunto onde A e B variam, tal que $A \leqslant cB$.
- Seja A um número real. Denotamos $A^{\pm}$, um número real tal que

  $$A^{\pm} = A \pm \varepsilon,$$

  para algum $\varepsilon > 0$.
- Dado um número $1 \leqslant p \leqslant \infty$ denotamos as quantidades p' e p^* tais que

  $$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad \text{e} \qquad p^* = \frac{pd}{d-p}.$$
- Dado $x \in \mathbb{R}^d$ denotamos

  $$\langle x \rangle^s = \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{s}{2}}.$$

- Usaremos d quando nos referirmos à dimensão do espaço $\mathbb{R}^d$.
- Denotamos B_R a bola unitária de centro 0 e raio R em $\mathbb{R}^d$.
- Dados os conjuntos E, F tais que E está propriamente contido em F. Diremos que $E \subsetneq F$.
- Dados os multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d), \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ e $x \in \mathbb{R}^d$, definimos $|\alpha| = \sum |\alpha_i|$, $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_d^{\beta_d}$ e $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$.
- $\nabla f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, ..., \partial_{x_d} f)$.
- Dada uma função $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ e $h \in \mathbb{R}^d$ denotamos por $\overline{f}$, $\widetilde{f}(x) = f(-x)$ e $\tau^h f(x) = f(x-h)$, o conjugado, a reflexão e translação de f por h, respectivamente.
- Dada uma função $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ denotamos por $\mathrm{Re}(f)$ sua parte real e $\mathrm{Im}(f)$ sua parte imaginária.
- Se E é um espaço vetorial normado e $x \in E$ denotamos a norma de x por $\|x\|_E$. Quando não houver dúvida sobre qual espaço está sendo considerado utilizaremos apenas $\|x\|$.
- Se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ denotamos a norma de f em $L^p(\mathbb{R}^d)$ por $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^p} = \|f\|_p$.
- Se E é um espaço topológico denotamos por E' seu espaço dual.
- Seja E é um espaço normado, $x \in E$ e $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência em E. Usaremos

  $$x_n \longrightarrow x$$

  para denotar que $\{x_n\}$ tende fortemente para x em E e usaremos

  $$x_n \rightharpoonup x$$

  para denotar que $\{x_n\}$ tende fracamente para x em E.
- Dados E, F espaços de Banach denotamos por $C(E; F)$ o espaço das funções contínuas de E em F, $C^\infty(E; F)$ o espaço das infinitamente deriváveis e $C_c^\infty(E; F)$ o espaço das funções que são infinitamente deriváveis e têm suporte compacto.

2.2 Propriedades de Topologia Fraca em Espaços de Banach

Proposição 2.2.1. *Seja E um espaço vetorial normado e* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência em E, então valem as seguintes afirmações*

1. *Se* $x_n \to x$ *em E, então* $x_n \rightharpoonup x$ *em E.*

2. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em E então* $\{\|x_n\|_E\}_{n=1}^{\infty}$ *é limitada e vale* $\|x\|_E \leqslant \liminf \|x_n\|_E$*.*

Dem. Veja Brezis [5, Proposição 3.5, página 58]. □

Proposição 2.2.2. *Sejam* $E \subseteq F$ *dois espaços de Banach tais que a inclusão* $i : E \longrightarrow F$ *é contínua, e* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência tal que* $x_n \rightharpoonup x$ *em E. Então* $x_n \rightharpoonup x$ *em F.*

Dem. Veja Brezis [5, Teorema 3.10, página 61]. □

Teorema 2.2.3. *Se E é um espaço de Banach reflexivo e* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência limitada em E, então existe* $x \in E$ *e uma subsequência* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *tal que* $x_{n_k} \rightharpoonup x$*.*

Dem. Veja Brezis [5, Teorema 3.18, página 69]. □

Definição 2.2.4. *Um espaço de Banach E é dito uniformemente convexo quando*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \delta > 0;$$
$$x, y \in E,\ \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1, \|x - y\| \geqslant \varepsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Teorema 2.2.5 (Milman-Pettis)**.** *Todo espaço de Banach, uniformemente convexo, é reflexivo.*

Dem. Veja Brezis [5, Teorema 3.31, página 77]. □

Proposição 2.2.6. *Seja E um espaço de Banach uniformemente convexo e* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e*

$$\limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|,$$

então $x_n \to x$*.*

Dem. Veja Brezis [5, Teorema 3.32, página 78]. □

Teorema 2.2.7. *Todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo.*

Dem. Veja Brezis [5, Proposição 5.1, página 132]. □

2.3 Espaços L^p

Dado $1 \leqslant p < \infty$ e uma função $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ mensurável á Lebesgue, definimos a quantidade

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

e denotamos por $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ o seguinte conjunto

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}; \|f\|_p < \infty\}.$$

Em seguida definimos a relação de equivalência

$$f \sim g \iff f = g, \qquad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^d,$$

e definimos o espaço $L^p(\mathbb{R}^d)$ como

$$L^p(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)/\sim .$$

Dada uma classe de equivalência $[f] \in L^p(\mathbb{R}^d)$ definimos

$$\|[f]\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $f \in [f]$. Adiante, no texto, não faremos distinção entre f e $[f]$ ou entre $\|f\|_p$ e $\|[f]\|_p$. Para $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}^d\} = \inf\{C > 0;\ |f(x)| \leqslant C \text{ q.t.p.}\}.$$

Teorema 2.3.1. *Os espaços $L^p(\mathbb{R}^d)$, munidos das normas $\|\cdot\|_p$, são espaços de Banach para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Dem. Veja Botelho [3, Teorema 1.2.3, página 10]. □

Proposição 2.3.2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $1 \leqslant p, q, \leqslant \infty$, com $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, se $f \in L^p$ e $g \in L^q$. Então $fg \in L^1$ e vale*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Dem. Veja Botelho [3, Teorema 1.2.1, página 8]. □

Proposição 2.3.3. *Sejam $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, com $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, se $f \in L^p$ e $g \in L^q$. Então $fg \in L^r$ e vale*

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Dem. É uma consequência direta da desigualdade de Hölder com índices $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$. □

Proposição 2.3.4. *Dados* $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$ *e* $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$, *se* $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$, *então*

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^{p_1}}^{\theta} \|f\|_{L^{p_0}}^{1-\theta}.$$

Dem. A prova é uma aplicação direta da desigualdade de Hölder para as funções $|f|^\theta$ e $|f|^{1-\theta}$. □

Proposição 2.3.5. *Dados* $1 \leqslant p_0 \leqslant p \leqslant p_1 \leqslant \infty$, *e* $f \in L^p$, *existem as funções* $f_0 \in L^{p_0}$ *e* $f_1 \in L^{p_1}$ *tais que*

$$f = f_0 + f_1.$$

Dem. Dado $\alpha > 0$ defina $f_0 = f \cdot \chi_{\{|f| > \alpha\}}$ e $f_1 = f - f_0$. □

Proposição 2.3.6. $L^2(\mathbb{R}^d)$ *é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Dem. Basta observar que a norma $\| \cdot \|_2$ provém do produto interno definido acima. □

De fato é possível mostrar que L^p é um espaço de Hilbert se e somente se $p = 2$.

2.4 Classe de Schwartz e Transformada de Fourier

Apresentaremos, nesta seção, a transformada de Fourier, ferramenta de suma importância no estudo de análise harmônica e equações diferenciais. Definiremos como um operador na classe Schwartz, um espaço de funções com alta regularidade e decaimento, o que auxiliará na dedução de resultados e propriedades mais fortes, no entanto observaremos que a classe de Schwartz é um subconjunto denso dos espaços $L^p(\mathbb{R}^d)$, o que vai nos permitir que as propriedades sejam válidas em espaços mais gerais.

2.4.1 Classe de Schwartz

Definição 2.4.1. *Dada uma função* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, *e multi-índices* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ *defina a quantidade*

$$\|\phi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta \partial^\alpha \phi(x)|,$$

e o conjunto $S(\mathbb{R}^d) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \|\phi\|_{\alpha,\beta} < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d\}$ *é chamado de classe de Schwartz.*

Definição 2.4.2. *Sejam* $\phi_1, \phi_2 \in S(\mathbb{R}^d)$. *Enumeramos o conjunto*

$$\mathbb{Z}_+^{2d} = \{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), ...\}$$

e definimos para cada $j \in \mathbb{N}$ *a métrica*

$$d_j(\phi_1, \phi_2) = \|\phi_1 - \phi_2\|_{\alpha_j, \beta_j}$$

e a métrica

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{d_j(\phi_1, \phi_2)}{1 + d_j(\phi_1, \phi_2)}.$$

Proposição 2.4.3. *A classe de Schwartz, munida da métrica acima, é um espaço métrico completo.*

Dem. Veja Reed e Simon [25, Teorema V.9, página 133]. □

Proposição 2.4.4. $S(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ *para todo* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Dem. O caso $p = \infty$ segue diretamente da definição, observando que se $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ então, ϕ é suave e tende a 0 quando $|x| \to \infty$ logo é limitada. Para $1 \leqslant p < \infty$, seja $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ e $\varepsilon > 0$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^p \frac{(1+|x|)^{n+\varepsilon}}{(1+|x|)^{n+\varepsilon}} dx \\
&\leqslant \|\phi(1+|\cdot|)^{\frac{n+\varepsilon}{p}}\|_\infty^p \int \frac{1}{(1+|x|)^{n+\varepsilon}} dx < \infty,
\end{aligned}$$

portanto $\phi \in L^p(\mathbb{R}^d)$. □

Mais ainda temos

Proposição 2.4.5. *Se* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ *e* $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência em* $S(\mathbb{R}^d)$ *tal que* $\phi_n \longrightarrow \phi$ *em* $S(\mathbb{R}^d)$, *então* $\phi_n \longrightarrow \phi$ *em* $L^p(\mathbb{R}^d)$, *para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Dem. Veja Grafakos [14, Proposição 2.2.6, página 106]. □

2.4.2 Transformada de Fourier em $S(\mathbb{R}^d)$

Definição 2.4.6. *Dada* $f \in S(\mathbb{R}^d)$ *definimos*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(x\cdot\xi)} f(x) dx.$$

Chamamos $\widehat{f}$ *de transformada de Fourier da função* f.

Proposição 2.4.7. *Dada* $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$*,* $y \in \mathbb{R}^d$*,* $b \in \mathbb{C}$*,* $\lambda > 0$ *e* α, β *multi-índices valem as seguintes propriedades*

1. $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$
2. $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$
3. $\widehat{bf} = b\widehat{f}$
4. $\widetilde{\widehat{f}} = \widehat{\widetilde{f}}$
5. $\widehat{\overline{f}} = \overline{\widetilde{\widehat{f}}}$
6. $\widehat{\tau^y f}(\xi) = e^{-2\pi i(x\cdot\xi)}\widehat{f}(\xi)$
7. $(e^{2\pi i(x\cdot y)}f(x))\widehat{\ } = \tau^y\widehat{f}(\xi)$
8. $\widehat{f(\lambda x)} = \lambda^{-d}\widehat{f}(\xi/\lambda)$
9. $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha\widehat{f}(\xi)$
10. $(\partial^\alpha\widehat{f}) = ((-2\pi ix)^\alpha f(x))\widehat{\ }(\xi)$
11. $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}^d)$
12. $\widehat{(f * g)} = \widehat{f}\cdot\widehat{g}$ *onde a convolução é definida por*

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y-x)dx$$

13. $\widehat{f\circ A}(\xi) = \widehat{f}(A\xi)$ *onde* A *é uma transformação ortogonal.*

Dem. Veja Grafakos [14, Proposição 2.2.11, página 110]. □

À luz do item 11 da Proposição 2.4.7 é natural se perguntar se faz sentido definir um operador inverso á transformada de Fourier na classe de Schwartz. De fato, é possível provar que a Transformada de Fourier é um isomorfismo na classe de Schwartz.

Definição 2.4.8. *Dada* $f \in S(\mathbb{R}^d)$ *definimos*

$$f^\vee(x) = \widehat{f}(-x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$*. A operação*

$$f \mapsto f^\vee,$$

é chamada de transformada de Fourier inversa.

Teorema 2.4.9. *Dadas* $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$ *temos*

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)g(x)dx$

2. ***(Inversão de Fourier)***
$$(f^{\vee})^{\wedge} = f = (\widehat{f})^{\vee}$$

3. ***(Identidade de Parseval)***
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}dx$$

4. ***(Identidade de Plancherel)***
$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$$

5. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)g^{\vee}(x)dx$

Dem. Veja Grafakos [14, Teorema 2.2.14, página 112]. □

Corolário 2.4.10. *A transformada de Fourier é um isomorfismo na classe de Schwartz.*

Dem. Veja Grafakos [14, Corolário 2.2.15, pagina 112]. □

2.5 O Espaço das Distribuições Temperadas

A Teoria de Distribuições tem como objetivo generelizar o conceito de funções, as interpretando como funcionais lineares atuando em um espaço de funções mais facilmente manipuláveis, chamado de Espaço de Funções Teste. No caso específico de Distribuições Temperadas, o Espaço de Funções Teste é a classe de Schwartz. Nesta seção definiremos a noção de Transformada de Fourier para Distribuições Temperadas. Em particular isso generaliza a definição anterior, para funções na classe de Schwartz, e engloba também funções em $L^p(\mathbb{R}^d)$. Para mais detalhes consulte Grafakos [14].

Definição 2.5.1. *Chamamos de espaço das distribuições temperadas, o espaço* $S'(\mathbb{R}^d)$ *dual topológico do espaço* $S(\mathbb{R}^d)$*, isto é, o conjunto de todos os funcionais* $F : S(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ *contínuos em relação à topologia de* $S(\mathbb{R}^d)$*, dada pela métrica da definição 2.4.2.*

Definição 2.5.2. *Dada* $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ *e* α *multi-índice, definimos a derivada distribucional de* u *de ordem* α*, como a seguinte distribuição temperada*
$$\partial^{\alpha}u(\phi) = (-1)^{|\alpha|}u(\partial^{\alpha}\phi), \qquad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Definição 2.5.3. *Seja* $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ *definimos a transformada de Fourier* $\widehat{u}$ *e a transformada inversa* $u^\vee$ *como*

$$\widehat{u}(\phi) = u(\widehat{\phi}) \qquad e \qquad u^\vee(\phi) = u(\phi^\vee),$$

para toda $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 2.5.4. *A transformada de Fourier é um isomorfismo em* $S'(\mathbb{R}^d)$

Dem. Veja Grafakos [14, Teorema 2.3.22, página 130]. □

Definição 2.5.5. *Dada* $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ *e* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ *definimos o produto de* u *por* ϕ *como a distribuição temperada* $u\phi$ *tal que*

$$u\phi(\psi) = u(\phi\psi), \qquad \forall \psi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Definição 2.5.6. *Dada* $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ *e* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ *definimos a convolução como a distribuição temperada* $u * \phi$ *tal que*

$$u * \phi(\psi) = u(\widetilde{\phi} * \psi), \qquad \forall \psi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Teorema 2.5.7. *Dada* $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ *e* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ *vale que*

$$\widehat{u * \phi} = \widehat{u}\widehat{\phi} \qquad e \qquad \widehat{u} * \widehat{\phi} = \widehat{u\phi}.$$

Dem. Veja Grafakos [14, Teorema 2.3.22, página 130]. □

Proposição 2.5.8. *Dada* $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ *existe uma sequência* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *de funções em* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *tal que* $f_n \longrightarrow u$ *em* $S'(\mathbb{R}^d)$, *isto é* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *é denso em* $S'(\mathbb{R}^d)$.

Dem. Veja Grafakos [14, Proposição 2.3.23, página 131]. □

Definição 2.5.9. *Uma aproximação da identidade é uma família* $\{k_n\}_{n=1}^\infty$, *em* $L^1(\mathbb{R}^d)$, *com as seguintes propriedades*

- *Existe uma constante* $c > 0$ *tal que* $\|k_n\|_{L^1} \leqslant c$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} k_n(x)dx = A$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;
- *Dado* $\delta > 0$, *temos*
$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\delta} k_n(x)dx = 0.$$

Teorema 2.5.10. *Seja* $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ *uma aproximação da identidade, e* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *contínua no ponto* $x_0 \in \mathbb{R}^d$. *Então*

$$\lim_{n\to\infty} k_n * f(x_0) = Af(x_0).$$

Dem. Veja Grafakos [14, Teorema 1.2.19, página 27]. □

2.6 Espaços de Sobolev

Nesta seção abordaremos os espaços de Sobolev do tipo $H^s(\mathbb{R}^d)$, $H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ e $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, espaços que medem a diferenciabilidade ou regularidade das funções em $L^p(\mathbb{R}^d)$, conceitos cruciais no estudo das equações diferenciais parciais.

Definição 2.6.1. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço de Sobolev de ordem s, denotado por $H^s(\mathbb{R}^d)$, como*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in S'(\mathbb{R}^d);\ \langle D\rangle^s f(x) = ((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f})^{\vee}(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

com a norma $\|\cdot\|_{H^s}$ definida por

$$\|f\|_{H^s} = \|\langle D\rangle^s f\|_{L^2}$$

Proposição 2.6.2. *1. Se $s < s'$ então $H^{s'}(\mathbb{R}^d) \subsetneq H^s(\mathbb{R}^d)$.*

2. $H^s(\mathbb{R}^d)$ é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ definido da seguinte maneira

$$\text{se } f, g \in H^s(\mathbb{R}^d) \text{ então } \langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^d} \langle D\rangle^s f(x)\overline{\langle D\rangle^s g(x)}dx$$

3. Para cada $s \in \mathbb{R}$ temos que $S(\mathbb{R}^d)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^d)$

4. Se $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, com $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$, então

$$\|f\|_{H^s} \leqslant \|f\|_{H^{s_1}}^{\theta}\|f\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}$$

Demonstração. Veja Linares e Ponce [19, Proposição 3.1, página 46]. □

Teorema 2.6.3. *Se k é um número inteiro positivo, então o espaço $H^k(\mathbb{R}^d)$ coincide com o espaço das distribuições que estão em $L^2(\mathbb{R}^d)$ e cujas derivadas distribucionais $\partial^\alpha f$ estão em $L^2(\mathbb{R}^d)$ para todo α multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$. Nesse caso as normas $\|f\|_{H^k}$ e $\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|\partial^\alpha f\|_2$ são equivalentes.*

Dem. Veja Linares e Ponce [19, Teorema 3.1, página 47]. □

Definição 2.6.4. *Seja $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos o espaço de Sobolev*

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^d) = \{f \in S'(\mathbb{R}^d);\ \langle D\rangle^s f(x) = ((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f})^{\vee}(x) \in L^p(\mathbb{R}^d)\}$$

com a norma $\|\cdot\|_{H^{s,p}}$ definida por

$$\|f\|_{H^{s,p}} = \|\langle D\rangle^s f\|_{L^p}$$

Definição 2.6.5. *Seja* $s \in \mathbb{R}$. *Definimos o espaço de Sobolev homogêneo de ordem* s, *denotado por* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, *como*

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) = \overline{\{f \in S(\mathbb{R}^d);\ D^s f(x) = (|\xi|^s \widehat{f})^{\vee}(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}}^{\|\cdot\|_{\dot{H}^s}}$$

com a norma $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ *definida por*

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \|D^s f\|_{L^2}$$

Teorema 2.6.6. *Se* $s \in (0, d/2)$ *então* $H^s(\mathbb{R}^d)$ *está continuamente imerso em* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *para* $p = \dfrac{2d}{d-2s}$, *isto é,* $s = d\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right)$. *Mais ainda, para* $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ *e* $s \in (0, d/2)$ *têm-se*

$$\|f\|_p \lesssim \|D^s f\|_2 \lesssim \|f\|_{H^s}$$

Dem. Veja Linares e Ponce [19, Teorema 3.3, página 49]. □

Teorema 2.6.7. *Se* $s \in (0, d/p)$ *então* $H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ *está continuamente imerso em* $L^q(\mathbb{R}^d)$ *para* $q = \dfrac{dp}{d-ps}$, *isso é* $s = d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)$.

Dem. Veja Bergh e Löfström [2, Teorema 6.5.1, página 153]. □

Teorema 2.6.8 (Regra de Leibniz). *Seja* $0 \leqslant s \leqslant 1$, $r \in [1, \infty)$, $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 \leqslant \infty$ *e* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j}$ *para* $j = 1, 2$. *Então*

$$\|D^s(fg)\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^{p_1}} \|D^s g\|_{L^{q_1}} + \|g\|_{L^{p_2}} \|D^s f\|_{L^{q_2}}.$$

Dem. Veja Kenig, Ponce e Vega [16, Teorema A8, página 85]. □

Teorema 2.6.9. *O espaço* $H^1_{rad}(\mathbb{R}^d) = \{f \in H^1(\mathbb{R}^d); f$ *é radial*$\}$ *está continuamente imerso em* $L^{\frac{4}{d}+2}(\mathbb{R}^d)$, *e a imersão é compacta.*

Dem. Veja Cazenave [6, Proposição 1.7.1, página 20]. □

Teorema 2.6.10 (Simetrização de Schwartz). *Dada* $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, *existe uma função* ψ_r *que satisfaz as seguintes propriedades*

- $\psi_r \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^d)$;
- $\|\psi_r\|_{L^p} = \|\psi\|_{L^p}$, *para todo* $1 \leqslant p \leqslant \infty$;
- $\|\nabla \psi_r\|_{L^2} \leqslant \|\nabla \psi\|_{L^2}$.

Dem. Veja Pólya e Szegö [23, Seção 3.2, Capítulo 3]. □

Capítulo 3

Equação de Schrödinger

Neste capítulo serão listados resultados gerais desenvolvidos no estudo da equação de Schrödinger linear e não-linear, como boa colocação local e global, invariância de soluções, Leis de Conservação e identidades Viriais, bem como resultados que auxiliarão diretamente na prova dos teoremas principais deste trabalho, a saber, a caracterização do *ground state*, como solução de um problema variacional, e taxas de crescimento da norma de *blow-up* próxima ao tempo máximo de existência.

3.1 Equação linear de Schrödinger

Consideramos o seguinte PVI

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0 \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Suponha que o dado inicial u_0 está em $S(\mathbb{R}^d)$ e que exista uma solução de (3.1), $u \in C^\infty(\mathbb{R}; S(\mathbb{R}^d))$. Tomando a transformada de Fourier em ambos os lados obtemos

$$\begin{cases} i\partial_t \widehat{u} - 4\pi^2|\xi|^2\widehat{u} = 0 \\ \widehat{u}(0,\cdot) = \widehat{u}_0. \end{cases}$$

Para cada $\xi \in \mathbb{R}^d$ temos uma equação diferencial ordinária. Assim a solução para a família de EDO's com parâmetro ξ acima é dada por

$$\widehat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u}_0(\xi).$$

Tomando a transformada inversa obtemos

$$u(t,x) = \left(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{u}_0\right)^{\vee}(x) := e^{it\Delta}u_0(x)$$

Dizemos que a função u encontrada acima é a solução fundamental do problema (3.1). De fato a mesma solução pode ser deduzida supondo $u_0 \in S'(\mathbb{R}^d)$ e $u \in C(\mathbb{R}; S'(\mathbb{R}^d))$. Para mais detalhes veja Cazenave [6, página 30].

3.2 Equação não-linear de Schrödinger

Consideramos agora o PVI

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \gamma|u|^{\alpha-1}u = 0, & x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0 \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

com $\alpha > 1$ e $\gamma = \pm 1$. Usando o princípio de Duhamel convencionamos que u é uma solução do problema acima, quando é solução da seguinte equação integral

$$u(t,x) = e^{it\Delta}u_0(x) + i\gamma\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u|^{\alpha-1}u(s,x)ds. \tag{3.3}$$

Para $1 < \alpha \leqslant 1 + \dfrac{4}{d-2s}$, através do Teorema do ponto fixo é possível provar a boa-colocação local em $H^s(\mathbb{R}^d)$ deste problema, fazendo uso de propriedades de integrabilidade, chamadas de estimativas de Strichartz.

Definição 3.2.1. *Diremos que um par* (p,r) *é admissível quando*

$$\begin{cases} 2 \leqslant p < \frac{2d}{d-2}, & d \geqslant 3 \\ 2 \leqslant p < \infty, & d = 2 \\ 2 \leqslant p \leqslant \infty, & d = 1 \end{cases} \quad e \quad \frac{2}{r} = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$$

Teorema 3.2.2 (Estimativas de Strichartz)**.** *Seja* $T > 0$*. Para todo par* (p,r) *admissível as seguintes propriedades valem*

1. *Para toda* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *têm-se* $e^{it\Delta}f \in L^r([0,T]; L^p(\mathbb{R}^d))$ *e*

$$\left\|e^{it\Delta}f\right\|_{L^r([0,T];L^p(\mathbb{R}^d))} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

2. *Se* $g \in L^{r'}([0,T]; L^{p'}(\mathbb{R}^d))$ *então*

$$\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}g(s,x)ds\right\|_{L^r([0,T];L^p(\mathbb{R}^d))} \lesssim \|g\|_{L^{r'}([0,T];L^{p'}(\mathbb{R}^d))}$$

3. *Se* $(p_0, r_0), (p_1, r_1)$ *são pares admissíveis e* $g \in L^{r_0'}([0,T]; L^{p_0'}(\mathbb{R}^d))$ *então*

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s,x) ds \right\|_{L^{r_1}([0,T];L^{p_1}(\mathbb{R}^d))} \lesssim \|g\|_{L^{r_0'}([0,T];L^{p_0'}(\mathbb{R}^d))}$$

Dem. Veja Cazenave [6, Teorema 2.3.3, página 33] □

Os dois próximos Teoremas serão particularmente importantes para a prova dos resultados de quase Conservação de Energia e Concentração de Massa no Capítulo 4. Como o objetivo do trabalho não é estudar os Teoremas de Boa-Colocação, daremos apenas um esboço da prova, baseado na demonstração presente em Linares e Ponce [19].

Teorema 3.2.3 (Boa colocação local em $H^1(\mathbb{R}^d)$). *Se* $\alpha = \frac{4}{d} + 1$*, então para cada* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$*, existe um tempo* $T = T(\|u_0\|_{H^1}, d, \gamma) > 0$ *e uma única solução* u *da equação integral (3.3) tal que*

$$u \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^r([0,T]; H^{1,p}(\mathbb{R}^d))$$

onde $(p, r) = \left(\frac{d(4+2d)}{d^2+4}, \frac{4+2d}{d-2} \right)$*. Além disso a aplicação dado-solução*

$$\mathbb{F} : H^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^r([0,T]; H^{1,p}(\mathbb{R}^d))$$

é contínua.

Dem. Para cada $T, M > 0$ considere o conjunto $E(T, M)$ dado por

$$\begin{aligned} E(T,M) = \{ & u \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^r([0,T]; H^{1,p}(\mathbb{R}^d)); \\ & \|u\|_T = \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{H^1} + \|u\|_{L^r([0,T];H^{1,p})} \leqslant M \} \end{aligned}$$

onde (p, r) são dados no enunciado, e considere a aplicação

$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta} u_0 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^{\alpha-1} u) ds.$$

Vamos mostrar que existem os valores $T, M > 0$ tais que Φ está bem definida de $E(T, M) \longrightarrow E(T, M)$ e é uma contração nesse espaço. Primeiro observe que, o par (p, r) é admissível. Logo, usando a desigualdade de Hölder e o Teorema 2.6.7 podemos estimar

$$\||u|^{\alpha-1} \nabla u\|_{p'} \leqslant \||u|^{\alpha-1}\|_l \|\nabla u\|_p = \|u\|_{(\alpha-1)l}^{\alpha-1} \|\nabla u\|_p \lesssim \|\nabla u\|_p^{\alpha}$$

onde

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{l} + \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{l} = 1 - \frac{2}{p}.$$

Logo,

$$1 = d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(\alpha-1)l}\right)$$

e assim obtemos

$$\||u|^{\alpha-1}u\|_{W^{1,p'}} \quad \lesssim \quad \|u\|^{\alpha}_{W^{1,p}}.$$

Combinando essas desigualdades com as estimativas de Strichartz temos

$$\|\Phi(u)\|_{L^r_t W^{1,p}_x} \quad \lesssim \quad \|u_0\|_{H^1} + T^{\delta}\left(\int_0^T \|u(t)\|^r_{W^{1,p}} dt\right)^{\frac{\alpha}{r}}$$

onde $\delta = 1 - \dfrac{\alpha+1}{r} = 1 - \dfrac{(d-2)(\alpha-1)}{4} = \dfrac{2}{d}$. Analogamente obtemos

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\Phi(u)(t)\|_{H^1} \lesssim \|u_0\|_{H^1} + T^{\frac{2}{d}}\left(\int_0^T \|u(t)\|^r_{W^{1,p}}\right)^{\frac{\alpha}{r}}.$$

Logo,

$$\|\Phi(u)\|_T \leqslant c\|u_0\|_{H^1} + cT^{\frac{2}{d}}\|u\|^{\alpha}_T.$$

Tomando $M = 2c\|u_0\|_{H^1}$ temos

$$\|\Phi(u)\|_T \leqslant \frac{M}{2} + cT^{\frac{2}{d}}M^{\alpha}.$$

Tomando $T = c_0\|u_0\|^{-2}_{H^1}$ temos

$$\|\Phi(u)\|_T \leqslant M$$

isso mostra que Φ está bem definida de $E(T,M)$ em $E(T,M)$. Consideramos, agora o espaço $E(T,M)$ munido da métrica

$$d(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u-v\|_{L^2} + \|u-v\|_{L^r_t L^p_x}$$

Tomamos $u, v \in E(T,M)$ e usamos a desigualdade 5.2.2 (veja o apêndice), para obter

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{L^r_t L^p_x} \quad \leqslant \quad 2cT^{\frac{2}{d}}M^{\alpha-1}\|u-v\|_{L^r_t L^p_x}$$

e analogamente

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{L^2} \leqslant 2cT^{\frac{2}{d}}M^{\alpha-1}\|u-v\|_{L^r_t L^p_x} \tag{3.4}$$

o que, pela escolha de T e M, garante que Φ é uma contração, portanto o Teorema do ponto fixo de Banach, nos dá que existe uma única $u = u(t)$ solução de

$$u(t,x) = e^{it\Delta}u_0(x) + i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u|^{\alpha-1}u(s,x)ds.$$

A dependência contínua dos dados iniciais é feita de maneira similar. □

Teorema 3.2.4 (Boa colocação local em $H^s(\mathbb{R}^2)$ com $0 < s < 1$). *Seja* $\alpha = 3$ *e* $0 < s < 1$. *Dado* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *existe um tempo* $T = T(\|u_0\|_{H^s}, d, \gamma) > 0$ *e uma única solução* u *da equação integral (3.3) tal que*

$$u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^r([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^2))$$

com $(p, r) = \left(\frac{4}{s+1}, \frac{4}{1-s}\right)$. *Além disso a aplicação dado-solução*

$$\mathbb{F} : H^s(\mathbb{R}^2) \longrightarrow C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^r([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^2))$$

é contínua.

Dem. Para cada $T, M > 0$ considere o conjunto $E(T, M)$ dado por

$$E(T,M) = \{u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^r([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^2));$$
$$\|u\|_T = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s} + \|u\|_{L^r_t H^{s,p}_x} \leqslant M\}$$

onde (p, r) são dados no enunciado, e considere a aplicação

$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta}u_0 + i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|^2u)ds.$$

Vamos mostrar que existem as constantes $T, M > 0$ tais que Φ está bem definida de $E(T, M) \longrightarrow E(T, M)$ e é uma contração nesse espaço. Primeiro observe que, o par (p, r) é admissível e que $(p', r') = \left(\frac{4}{3-s}, \frac{4}{s+3}\right)$. Em seguida, usando o Teorema 2.6.7 e a regra de Leibniz (Teorema 2.6.8) podemos estimar

$$\|D^s(|u|^2u)\|_{p'} \leqslant \||u|^2\|_l \|D^s u\|_p = \|u\|^2_{2l}\|D^s u\|_p \lesssim \|D^s u\|^3_p$$

onde

$$s = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2l}\right).$$

Logo, obtemos

$$\||u|^2u\|_{H^{s,p'}} \lesssim \|u\|^3_{H^{s,p}}.$$

Combinando estas desigualdades e as Estimativas de Strichartz (Teorema 3.2.2), temos

$$\|\Phi(u)\|_{L^r_t H^{s,p}_x} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \left[\left(\int_0^T \|u(t)\|^{3r'}_{H^{s,p}}dt\right)^{\frac{1}{3r'}}\right]^3. \tag{3.5}$$

Observe que

$$\frac{1}{3r'} = \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3r}\right).$$

Logo, usando Hölder no tempo temos

$$\left(\int_0^T \|u(t)\|_{H^{s,p}}^{3r'} dt\right)^{\frac{1}{3r'}} \leqslant T^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3r}} \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H^{s,p}}^{r} dt\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Substituindo em (3.5) temos

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_{L_t^r H_x^{s,p}} &\lesssim \|u_0\|_{H^s} + T^{1-\frac{4}{r}} \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H^{s,p}}^{r} dt\right)^{\frac{3}{r}} \\ &= \|u_0\|_{H^s} + T^{s} \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H^{s,p}}^{r} dt\right)^{\frac{3}{r}}.\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\Phi(u)(t)\|_{H^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + T^{s} \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H^{s,p}}^{r} dt\right)^{\frac{3}{r}}$$

e assim,

$$\|\Phi(u)\|_T \leqslant c\|u_0\|_{H^s} + cT^s\|u\|_T^3.$$

Tomando $M = 2c\|u_0\|_{H^s}$ temos

$$\|\Phi(u)\|_T \leqslant \frac{M}{2} + cT^s M^3.$$

Escolhendo $T = c_0\|u_0\|_{H^s}^{-\frac{2}{s}}$ temos

$$\|\Phi(u)\|_T \leqslant M.$$

Isso mostra que Φ está bem definida de $E(T,M)$ em $E(T,M)$. A prova de que Φ é uma contração e dependência continua dos dados iniciais é análoga ao teorema anterior.

□

De fato, existe uma teoria mais completa, que garante a boa-colocação do problema (1.1) para $s \geqslant 0$ em qualquer dimensão, no entanto, estes Teoremas não terão utilidade direta na prova dos resultados principais deste trabalho. Para demonstrações consulte Cazenave [6], Kato [15] e Linares e Ponce [19].

Proposição 3.2.5. *Se u é uma solução da (NLS) então as seguintes funções também são soluções*

1. $u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$ *com dado inicial* $u_{0_\lambda}(x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha-1}} u_0(\lambda x)$, *e* $\lambda > 0$.

2. $u_\theta(t,x) = e^{i\theta} u(t,x)$ *com* $\theta \in \mathbb{R}$.

3. $u_A(t,x) = u(t, Ax)$ *onde* A *é uma matrix ortogonal* $n \times n$.

4. $u_{a,b}(t,x) = u(t-b, x-a)$ *onde* $a \in \mathbb{R}^d$ *e* $b \in \mathbb{R}$.

5. $u_c(t,x) = e^{i(c\cdot x)} e^{-i|c|^2 t} u(t, x-2tc)$ *com o dado inicial* $e^{i(c\cdot x)} u_0(x)$

6. *Se* $\alpha = \dfrac{4}{d} + 1$ *então*
$$u_\omega(t,x) = \frac{1}{(\alpha+\omega t)^{d/2}} \exp\left(\frac{i\omega|x|^2}{4(\alpha+\omega t)}\right) u\left(\frac{x}{\alpha+\omega t}, \frac{\delta+\omega\theta}{\alpha+\omega t}\right)$$
com $\alpha\theta - \omega\delta = 1$

7. $u_7(t,x) = \overline{u(-t,x)}$

Dem. Linares e Ponce [19, página 94]. □

Observação 3.2.6. *Observe que o tempo* $T > 0$ *obtido nos Teoremas acima, depende apenas da norma, em* $H^s(\mathbb{R}^d)$ *do dado inicial. De fato, para* $s > 0$ *o tempo de existência da solução depende apenas da norma em* $H^s(\mathbb{R}^d)$ *do dado inicial e não da sua posição no espaço, ou seja, se* $u_0, v_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ *são tais que* $\|u_0\|_{H^s} = \|v_0\|_{H^s}$ *então* $T(\|u_0\|_{H^s}) = T(\|v_0\|_{H^s})$. *Mais ainda, se* $\|u_0\|_{H^s} \leqslant \|v_0\|_{H^s}$ *então* $T(\|u_0\|_{H^s}) \geqslant T(\|v_0\|_{H^s})$.

O próximo corolário é importante para as discussões sobre *blow-up* adiante.

Corolário 3.2.7 (Alternativa de *blow-up*)**.** *Seja* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s > 0$ *e* $T^* > 0$ *o tempo máximo de existência da solução* $u(t)$ *correspondente ao dado inicial* u_0. *Então* $T^* = \infty$ *ou* $T^* < \infty$ *e*
$$\lim_{t \uparrow T^*} \|u(t)\|_{H^s} = +\infty.$$

Dem. Defina
$$T^* = \sup\{T > 0; \quad \text{existe uma solução de (3.3) no intervalo de tempo } [0,T]\}.$$

Os Teoremas 3.2.3 e 3.2.4 nos dão que existe uma única solução u de (3.3), correspondente ao dado inicial u_0, tal que
$$u \in C([0,T^*); H^s(\mathbb{R}^d)) \cap E$$

onde E é um espaço de Banach auxiliar. Suponha que $T^* < \infty$ e que exista uma sequência $t_k \uparrow T^*$ e $M > 0$ tais que $\|u(t_k)\|_{H^s} \leqslant M$ para todo k. Pela observação acima, qualquer solução cujo dado inicial tenha norma em $H^s(\mathbb{R}^d)$ menor que M existe no intervalo $[0, T(M)]$, assim, se $u^k(t)$ é a solução de (3.3) com dado inicial $u^k(0) = u(t_k)$, temos que $u(t)$ existe no intervalo $[0, t_k + T(M)]$. Mas como $t_k \uparrow T^*$ e $T(M) > 0$, temos que $t_k + T(M) > T^*$ para todo k suficientemente grande, o que contradiz a maximalidade de T^*, portanto devemos ter $\lim\limits_{t \uparrow T^*} \|u(t)\|_{H^s} = \infty$, o que conclui a prova.

□

Com os resultados acima fica provada a boa colocação local da equação (1.1) em $H^s(\mathbb{R}^d)$ para $s \geqslant 0$. Uma vez estabelecida a boa colocação podemos falar de quantidades conservadas ao longo do tempo de existência da solução. Temos a seguinte proposição

Proposição 3.2.8. *Se* $u(t, x)$ *é solução do problema (3.3) num intervalo de tempo* $[0, T]$ *então para todo* t *nesse intervalo vale*

1. $M[u(t)] = \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u(0, x)|^2 \, dx = M[u_0]$

2. $E[u(t)] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 \, dx - \frac{\gamma}{\alpha + 1} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^{\alpha+1} \, dx = E[u_0]$

Dem. Suponha que $u(t, \cdot) \in S(\mathbb{R}^d)$ para todo $t \in [0, T]$ e que u seja solução da equação (3.2). Multiplicando a equação por $\overline{u}$, integrando em $\mathbb{R}^d$ e usando integração por partes temos

$$\begin{aligned} & i \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u} \partial_t u(t, x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u} \Delta u(t, x) dx + \gamma \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^{\alpha+1} dx \\ = \; & i \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u} \partial_t u dx - \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\nabla u} \nabla u dx + \gamma \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\alpha+1} dx = 0, \end{aligned}$$

e assim,

$$\operatorname{Im}\left(i \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u} \partial_t u dx \right) = 0.$$

Observe que

$$\partial_t(|u|^2) = \partial_t(u\overline{u}) = \overline{u}\partial_t u + u \partial_t \overline{u} = 2\operatorname{Re}\left(\overline{u}\partial_t u\right)$$

portanto

$$0 = \operatorname{Im}\left(i \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u} \partial_t u dx \right) = \operatorname{Re}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{u} \partial_t u dx \right) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |u(t, x)|^2 dx \right.$$

o que prova a conservação de massa para soluções em $S(\mathbb{R}^d)$. Para o caso geral seja $\varepsilon > 0$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Como a aplicação dado fluxo é contínua, existe $\delta > 0$ tal que, se $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ e $\|u_0 - v_0\|_{H^s} < \delta$ então, $\|u(t) - v(t)\|_{L^\infty_t H^s_x} < \varepsilon/3$. Seja então, $v_0 \in S(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|u_0 - v_0\|_{H^s} < \min\{\delta, \varepsilon/3\}$. Temos

$$|\|u(t)\|_2 - \|u_0\|_2| \leqslant |\|u(t)\|_2 - \|v(t)\|_2| + |\|v(t)\|_2 - \|v_0\|_2| + |\|v_0\|_2 - \|u_0\|_2| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário temos o resultado. Para a conservação de energia, multiplicamos a equação por $\partial_t \overline{u}$, integramos em $\mathbb{R}^d$ e usamos integração por partes para obter

$$\begin{aligned} & i\int |\partial_t u|^2 dx + \int \partial_t \overline{u} \Delta u dx + \gamma \int |u|^{\alpha-1} u \partial_t \overline{u}\, dx \\ = \; & i\int |\partial_t u|^2 dx - \int \nabla u \partial_t \overline{\nabla u} dx + \gamma \int |u|^{\alpha-1} u \partial_t \overline{u}\, dx = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{Re}\left(\int \nabla u \partial_t \overline{\nabla u} dx - \gamma \int |u|^{\alpha-1} u \partial_t \overline{u}\, dx\right) = 0.$$

Agora observe que

- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = \mathrm{Re}\left(\overline{\nabla u}\partial_t \nabla u\right)$ e
- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\gamma}{\alpha+1}|u|^{\alpha+1}\right) = \gamma \mathrm{Re}\left(|u|^{\alpha-1} u \partial_t \overline{u}\right).$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E[u(t)] &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{\gamma}{\alpha+1}\int |u|^{\alpha+1} dx\right] \\ &= \mathrm{Re}\left(\int \nabla u \partial_t \overline{\nabla u} dx - \gamma \int |u|^{\alpha+1} u \partial_t \overline{u}\, dx\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

provando, assim, a conservação de energia. □

Proposição 3.2.9 (Identidades de Virial)**.** *Se* $u(t)$ *é uma solução de (1.1) em* $H^1(\mathbb{R}^d)$, *no intervalo* $[0, T]$, *com* $|x|u_0(x) \in L^2$, *então* $|x|u(t, x) \in L^2$ *para todo* $t \in [0, T]$ *e valem as seguintes identidades*

1. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int |x|^2 |u(t, x)|^2 dx = 4\mathrm{Im}\left(\int \bar{u}(x \cdot \nabla u(t, x)) dx\right)$;
2. $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Im}\left(\displaystyle\int \bar{u}(x \cdot \nabla u(t, x)) dx\right) = 4E[u_0]$.

Dem. Da Proposição 3.2.8 temos que

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\mathrm{Re}\,(\overline{u}\partial_t u) = 2\mathrm{Im}(\overline{u}i\partial_t u) = -2\mathrm{Im}(\overline{u}\Delta u).$$

Multiplicando ambos os lados por $|x|^2$ e integrando em $\mathbb{R}^d$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\int |x|^2|u|^2 dx = -2\mathrm{Im}\left(\int |x|^2\overline{u}\Delta u dx\right).$$

Mas note que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{u}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}u\right] = \overline{u}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u + \left|\frac{\partial}{\partial x_i}u\right|^2,$$

e assim,

$$\mathrm{Im}(div(\overline{u}\nabla u)) = \mathrm{Im}(\overline{u}\Delta u).$$

Além disso, integrando por partes e usando o fato de $|x||u(x,t)| \in L^2$ temos que

$$\int |x|^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{u}\frac{\partial}{\partial x_i}u\right]dx = -\int \frac{\partial}{\partial x_i}|x|^2\,\overline{u}\frac{\partial}{\partial x_i}u dx$$

obtendo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int |x|^2|u(t,x)|^2 dx &= 2\mathrm{Im}\left(\int \overline{u}\nabla|x|^2\cdot\nabla u dx\right)\\ &= 4\mathrm{Im}\left(\int \overline{u}(x\cdot\nabla u)dx\right).\end{aligned}$$

Para a segunda igualdade usaremos o fatos de que $z-\overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$ e integração por partes para concluir que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Im}\left(\int \overline{u}(x\cdot\nabla u)dx\right) &= \mathrm{Im}\left\{\sum_{j=1}^{d}\int\left(\overline{\partial_t u}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot x_j\right) + \overline{u}\left(\frac{\partial u_t}{\partial x_j}\cdot x_j\right)\right)dx\right\}\\ &= \mathrm{Im}\left\{\sum_{j=1}^{d}\int\left(\overline{\partial_t u}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot x_j\right) - \partial_t u\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j}\cdot x_j\right) - \overline{u}\partial_t u\right)dx\right\}\\ &= \mathrm{Im}\left\{2\int \overline{\partial_t u}(\nabla u\cdot x)dx - d\int \overline{u}\partial_t u\,dx\right\}.\end{aligned}$$

Analisemos cada termo acima separadamente. Primeiro usamos que u é solução de (1.1) para obter

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left\{\int \overline{\partial_t u}(\nabla u\cdot x)dx\right\} &= \mathrm{Re}\left\{\int \overline{i\partial_t u}(\nabla u\cdot x)dx\right\}\\ &= -\mathrm{Re}\left\{\int \Delta u(\nabla\overline{u}\cdot x)dx + \int |u|^{\frac{4}{d}}u(\nabla\overline{u}\cdot x)dx\right\}\end{aligned}$$

assim, a integração por partes nos dá

$$\begin{aligned}\int \Delta u(\nabla \overline{u}\cdot x)dx &= \int \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j}\cdot x_j\right)dx\\ &= -\int \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j}\cdot x_j\right)dx.\end{aligned}$$

Usando a regra da cadeia e notando que $\frac{\partial}{\partial x_i}x_j = \delta_{ij}$ temos

$$\int \Delta u(\nabla \overline{u}\cdot x)dx = -\int \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_i x_j}\cdot x_j\right)dx - \int |\nabla u|^2 dx.$$

Tomando a parte real e integrando por partes novamente temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left\{\int \Delta u(\nabla \overline{u}\cdot x)dx\right\} &= -\int \sum_{i,j=1}^{d} x_j \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_i x_j}\right\}dx - \int |\nabla u|^2 dx\\ &= -\frac{1}{2}\int \sum_{i,j=1}^{d} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right)dx - \int |\nabla u|^2 dx\\ &= \frac{d}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx\\ &= \frac{d-2}{2}\int |\nabla u|^2 dx.\end{aligned}$$

Por outro lado, outra integração por partes nos dá

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left\{\int |u|^{\frac{4}{d}} u(\nabla \overline{u}\cdot x)dx\right\} &= \int \sum_{j=1}^{d} |u|^{\frac{4}{d}} x_j \mathrm{Re}\left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\int \sum_{j=1}^{d} |u|^{\frac{4}{d}} x_j\left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j} + \overline{u}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx\\ &= \frac{d}{4+2d}\int \sum_{j=1}^{d} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}|u|^{\frac{4}{d}+2}dx\\ &= -\frac{d^2}{4+2d}\int |u|^{\frac{4}{d}+2}dx.\end{aligned}$$

Para o segundo termo, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left\{\int \overline{u}\partial_t u dx\right\} &= -\mathrm{Re}\left\{\int \overline{u} i\partial_t u dx\right\}\\ &= \mathrm{Re}\left\{\int \overline{u}\Delta u dx + \int |u|^{\frac{4}{d}+2}dx\right\}\\ &= -\int |\nabla u|^2 dx + \int |u|^{\frac{4}{d}+2}dx.\end{aligned}$$

Juntando as informações temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d^2t}\int |x|^2|u(t,x)|^2dx &= \frac{d}{dt}4\mathrm{Im}\left(\int \bar{u}(x\cdot\nabla u(t,x))dx\right)\\
&= 4\mathrm{Im}\left\{2\int \overline{\partial_t u}(\nabla u\cdot x)dx - d\int \overline{u}\partial_t u\, dx\right\}\\
&= 4\left[2\int |\nabla u|^2dx + \frac{4d}{4+2d}\int |u|^{\frac{4}{d}+2}dx\right]\\
&= 16\left[\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2dx + \frac{d}{4+2d}\int |u|^{\frac{4}{d}+2}dx\right]\\
&= 16E[u_0]
\end{aligned}$$

□

Uma vez estabelecida a boa colocação local é natural se perguntar, sob que condições o tempo de existência da solução de (1.1) pode ser extendido arbitrariamente. A teoria está diretamente ligada à noção de *ground-state*, a solução única, positiva, radialmente decrescente da equação elíptica

$$\Delta Q - Q + |Q|^{\frac{4}{d}}Q = 0, \qquad \text{em } H^1(\mathbb{R}^d). \tag{3.6}$$

Nesta direção temos os seguintes resultados

Teorema 3.2.10. *Existe $\delta > 0$ tal que para toda $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ com*

$$\|u_0\|_2 < \delta$$

a solução de (1.1) *correspondente se estende globalmete.*

Dem. Veja Kato [15, Teorema 6.1]. □

Lema 3.2.11. *Se $Q : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, é uma solução fraca de*

$$\Delta Q - Q + |Q|^{\frac{4}{d}}Q = 0$$

em $H^1(\mathbb{R}^d)$, então $Q \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Além disso, se Q é positiva, então é única, a menos de translação, e existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tal que $Q(\cdot - x_0)$ é radialmente simétrica e decrescente.

Dem. Veja Tao [27, Corolário B.9, página 354].

□

Teorema 3.2.12 (Desigualdade de Gagliardo-Niremberg sharp)**.** *Para toda* $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$

$$\|\psi\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} \leqslant C_d \|\psi\|_{L^2}^{\frac{4}{d}} \|\nabla\psi\|_{L^2}^{2} \tag{3.7}$$

onde $C_d = \dfrac{d+2}{d}\|Q\|_2^{-\frac{4}{d}}$*. Em particular a igualdade é obtida quando* $\psi = Q$.

Dem. Defina o funcional

$$J(\psi) = \frac{\|\psi\|_{L^2}^{\frac{4}{d}} \|\nabla\psi\|_{L^2}^{2}}{\|\psi\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2}}$$

e observe que J está bem definido para $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Observe também que se denotarmos $\psi^{\lambda,\mu}(x) = \mu\psi(\lambda x)$, temos

$$J(\psi^{\lambda,\mu}) = J(\psi)$$

para toda $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Como $J \geqslant 0$ temos que, existe uma sequência $\{\psi_n\}_n$ minimizante, isto é

$$\alpha = \min_{\psi\in H^1} J(\psi) = \lim_{n\to\infty} J(\psi_n) < \infty.$$

Como para toda $\phi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ vale a desigualdade

$$-|\nabla\psi| \leqslant \nabla|\psi| \leqslant |\nabla\psi| \tag{3.8}$$

temos que $J(|\psi|) \leqslant J(\psi)$, e assim, podemos assumir que a sequência $\{\psi_n\}$ é positiva. Além disso pelo processo de simetrização de Schwartz (Teorema 2.6.10), podemos assumir também que a sequência $\{\psi_n\}$ é radial. Escolhendo-se os parâmetros $\lambda_n = \dfrac{\|\psi_n\|_2}{\|\nabla\psi_n\|_2}$, e $\mu_n = \dfrac{\|\psi_n\|_2^{\frac{d}{2}-1}}{\|\nabla\psi_n\|_2^{\frac{d}{2}}}$, e denotando $u_n = \psi_n^{\lambda_n,\mu_n}$, obtemos que

- $u_n(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$
- $u_n \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^d)$
- $\|u_n\|_2 = 1$ e $\|\nabla u_n\|_2 = 1$
- $J(u_n) \downarrow \alpha$ quando $n \to \infty$.

Como a sequência $\{u_n\}_n$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^d)$, a menos de uma subsequência, podemos assumir que existe $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$. Pelo Teorema 2.6.9 temos que u_n está em um compacto de $L^{\frac{4}{d}+2}$. Logo $u_n \longrightarrow u$ em $L^{\frac{4}{d}+2}$. Da convergência fraca, temos que $\|u\|_2 \leqslant 1$ e $\|\nabla u\|_2 \leqslant 1$. Logo,

$$\alpha \leqslant J(u) \leqslant \frac{1}{\|u\|_{\frac{4}{d}+2}^{\frac{4}{d}+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|u_n\|_{\frac{4}{d}+2}^{\frac{4}{d}+2}} = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \alpha.$$

Daí segue que $\|u\|_2 = \|\nabla u\|_2 = 1$, e portanto, pelo Teorema 2.2.6, $u_n \longrightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$. Observe que o funcional J é diferenciável longe da origem. Daí, se u é um ponto de mínimo do funcional devemos ter

$$\frac{d}{d\varepsilon}J(u+\varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \forall \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

e assim, se

$$J(u+\varepsilon\eta) = \frac{\left(\int |u+\varepsilon\eta|^2 dx\right)^{\frac{2}{d}} \int |\nabla(u+\varepsilon\eta)|^2 dx}{\int |u+\varepsilon\eta|^{\frac{4}{d}+2} dx}$$

derivando obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}J(u+\varepsilon\eta) &= \Bigg[\frac{2}{d}\left(\int |u+\varepsilon\eta|^2 dx\right)^{\frac{2}{d}-1} \cdot \int 2\mathrm{Re}(\overline{u+\varepsilon\eta}\cdot\eta)dx \cdot \int |\nabla(u+\varepsilon\eta)|^2 dx + \\ &\left(\int |u+\varepsilon\eta|^2 dx\right)^{\frac{2}{d}} \cdot \int 2\mathrm{Re}(\nabla(\overline{u+\varepsilon\eta})\nabla\eta)dx\Bigg]\left(\int |u+\varepsilon\eta|^{\frac{4}{d}+2}dx\right) - \\ &\left(\int |u+\varepsilon\eta|^2 dx\right)^{\frac{2}{d}}\left(\int |\nabla(u+\varepsilon\eta)|^2 dx\right)\int\left(\frac{4}{d}+2\right)|u+\varepsilon\eta|^{\frac{4}{d}}\mathrm{Re}(\overline{u+\varepsilon\eta}\cdot\eta)dx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}J(u+\varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} &= \Bigg[\frac{2}{d}\left(\int |u|^2 dx\right)^{\frac{2}{d}-1} \cdot \int 2\mathrm{Re}(\overline{u}\cdot\eta)dx \cdot \int |\nabla u|^2 dx + \\ &\left(\int |u|^2 dx\right)^{\frac{2}{d}} \cdot \int 2\mathrm{Re}(\nabla\overline{u}\nabla\eta)dx\Bigg]\left(\int |u|^{\frac{4}{d}+2}dx\right) - \\ &\left(\int |u|^2 dx\right)^{\frac{2}{d}}\left(\int |\nabla u|^2 dx\right)\int\left(\frac{4}{d}+2\right)|u|^{\frac{4}{d}}\mathrm{Re}(\overline{u}\cdot\eta)dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como $\|u\|_2 = \|\nabla u\|_2 = 1$, temos

$$\left[\frac{2}{d}\int 2\mathrm{Re}(\overline{u}\cdot\eta)dx + \int 2\mathrm{Re}(\nabla\overline{u}\nabla\eta)dx\right]\left(\int |u|^{\frac{4}{d}+2}dx\right) = \int\left(\frac{4}{d}+2\right)|u|^{\frac{4}{d}}\mathrm{Re}(\overline{u}\cdot\eta)dx.$$

Reorganizando os termos, e observando que $\alpha = \dfrac{1}{\|u\|_{\frac{4}{d}+2}^{\frac{4}{d}+2}}$, obtemos

$$\left[\frac{2}{d}\int \mathrm{Re}(\overline{u}\cdot\eta)dx - \int \mathrm{Re}(\Delta\overline{u}\cdot\eta)dx\right]\frac{1}{\alpha} = \int\left(\frac{2}{d}+1\right)|u|^{\frac{4}{d}}\mathrm{Re}(\overline{u}\cdot\eta)dx.$$

Logo, u satisfaz a equação

$$\Delta u - \frac{2}{d}u + \alpha(\frac{2}{d}+1)|u|^{\frac{4}{d}}u = 0,$$

no sentido fraco. Definimos $u^* = [\alpha(\frac{2}{d}+1)]^{\frac{d}{4}} u$, e temos que u^* satisfaz

$$\Delta u^* - \frac{2}{d} u^* + |u^*|^{\frac{4}{d}} u^* = 0.$$

Além disso, como $1 = \|u\|_2 = [\alpha(\frac{2}{d}+1)]^{-\frac{d}{4}} \|u^*\|_2$ temos $\alpha = \frac{d}{d+2}\|u^*\|_2^{\frac{4}{d}}$. Por fim, note que $Q(x) = \lambda^{\frac{d}{2}} u^*(\lambda x)$ com $\lambda = \left(\frac{2}{d}\right)^{\frac{1}{2}}$ satisfaz

$$J(Q) = \alpha = \frac{d}{d+2}\|Q\|_2^{\frac{4}{d}}$$

e Q é solução de (3.6) no sentido fraco, portanto, como Q é positiva, pelo Teorema 3.2.11, concluimos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tal que $Q(\cdot - x_0)$ é a única solução positiva radial de (3.6). □

Em particular se $s = 1$ temos

Teorema 3.2.13. *Para toda* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *com*

$$\|u_0\|_2 < \|Q\|_2$$

a solução de (1.1) *correspondente se extende globalmete.*

Dem. Pelo Corolário 3.2.7, é suficiente provar que $\|u(t)\|_{H^1}$ é uniformemente limitada em para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, pela conservação da energia e da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, temos que

$$\begin{aligned} \|\nabla u(t)\|_2^2 &= 2E[u_0] + \frac{d}{d+2}\|u(t)\|_{\frac{4}{d}+2}^{\frac{4}{d}+2} \\ &\leqslant 2E[u_0] + \|Q\|_2^{-\frac{4}{d}}\|u_0\|_2^{\frac{4}{d}}\|\nabla u(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Assim

$$\left(1 - \left(\frac{\|u_0\|_2}{\|Q\|_2}\right)^{\frac{4}{d}}\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 \leqslant 2E[u_0].$$

Sendo $\|u_0\|_2 < \|Q\|_2$, obtemos uma limitação uniforme de $\|\nabla u(t)\|_2$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e portanto para da Conservação de Massa obtemos a limitação de $\|u(t)\|_{H^1}$. □

Proposição 3.2.14. *Seja* $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *tal que* $E[\psi] = 0$ *e* $\|\psi\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$*, então, existem* $\theta \in [0, 2\pi)$, $\rho > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}^d$ *tais que* $\psi = \rho^{\frac{d}{2}} e^{i\theta} Q(\rho \cdot + x)$.

Dem. Se $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfaz $E[\psi] = 0$ temos

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} &= \frac{d+2}{d}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{d+2}{d}\frac{1}{\|Q\|_{L^2}^{\frac{4}{d}}}\|\psi\|_{L^2}^{\frac{4}{d}}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 \\ &= C_d\|\psi\|_{L^2}^{\frac{4}{d}}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Logo, ψ é um extremante do funcional J de Weinstein, definido no Teorema 3.2.12. Pela desigualdade (3.8), $|\psi|$ é também um extremante do funcional. Definimos, $\lambda_1 = \dfrac{\|\psi\|_2}{\|\nabla\psi\|_2}$ e

$$\psi_1 = \frac{1}{\|\psi\|_2}\lambda_1^{\frac{d}{2}}|\psi(\lambda_1\cdot)|,$$

temos que ψ_1 é um extremante do funcional com $\|\psi_1\|_2 = \|\nabla\psi_1\|_2 = 1$. Logo, pelo mesmo argumento usado no Teorema 3.2.12, temos que

$$\psi^* = \left[\frac{1}{\|\psi\|_{\frac{4}{d}+2}^{\frac{4}{d}+2}}\left(\frac{2}{d}+1\right)\right]^{\frac{d}{4}} \lambda_2^{\frac{d}{2}}\psi_1(\lambda_2\cdot),$$

é uma solução não-negativa de (3.6), onde $\lambda_2 = \left(\frac{2}{d}\right)^{\frac{1}{2}}$, e pelo Lema 3.2.11 concluimos que, existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$, tal que $\psi^* = Q(\cdot - x_0)$. Um cálculo simples nos dá

$$\left[\frac{1}{\|\psi\|_{\frac{4}{d}+2}^{\frac{4}{d}+2}}\left(\frac{2}{d}+1\right)\right]^{\frac{d}{4}} = \|\psi\|_2,$$

e assim, obtemos que

$$\psi^* = \lambda^{-\frac{d}{2}}|\psi(\lambda^{-1}\cdot)|,$$

onde $\lambda^{-1} = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. Logo,

$$|\psi| = \lambda^{\frac{d}{2}} Q(\lambda \cdot - x_0).$$

Agora observe que

$$\psi(x) = |\psi(x)|e^{i\theta(x)}.$$

Logo, utilizando que $E[\psi] = E[|\psi|] = 0$, concluimos que $\nabla\theta(x) = 0$ e portanto, para algum $\theta \in [0, 2\pi)$, temos que $\psi = \lambda^{\frac{d}{2}} e^{i\theta} Q(\lambda \cdot - x_0)$.

□

Proposição 3.2.15. *Assuma* $s = 1$. *Seja* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *tal que a solução correspondente de (1.1) exploda em tempo finito* $T^* > 0$. *Então existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2} \geqslant \frac{C}{(T^* - t)^{1/2}}$$

para todo $t \in [0, T^*)$.

Dem. Considere $t_0 < T^*$, e considere a equação (1.1) com dado inicial $u(t_0)$. Da boa colocação em $H^1(\mathbb{R}^d)$ obtemos que, existe $T > 0$ tal que a solução existe no intervalo $[t_0, T]$. Mais ainda, T é o tempo máximo para que

$$c\|u(t_0)\|_{H^1} + c(T - t_0)^{2/d}(2c\|u(t_0)\|_{H^1})^{4/d+1} \leqslant 2c\|u(t_0)\|_{H^1}.$$

Como u explode em tempo finito devemos ter $T^* > T$. Logo,

$$c\|u(t_0)\|_{H^1} + c(T^* - t_0)^{2/d}(2c\|u(t_0)\|_{H^1})^{4/d+1} \geqslant 2c\|u(t_0)\|_{H^1}.$$

usando a conservação de massa e isolando $\|\nabla u(t_0)\|_{L^2}$ temos

$$\|\nabla u(t_0)\|_{L^2} \geqslant \frac{C}{(T^* - t_0)^{1/2}}.$$

Como t_0 é arbitrário temos o resultado. □

Proposição 3.2.16. *Seja* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *tal que a solução correspondente de (1.1) exploda em tempo finito* $T^* > 0$. *Então existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|u(t)\|_{H^s} \geqslant \frac{C}{(T^* - t)^{s/2}}$$

Dem. A prova é análoga à da Proposição acima. □

Capítulo 4

Blow-up e Concentração de Massa

Neste Capítulo, serão provados os resultados principais do trabalho, a saber os Teoremas 4.1.4 e 4.2.21, a respeito do fenômeno de Concentração de Massa para soluções de (1.1), que explodem em tempo finito, em $H^1(\mathbb{R}^d)$ e $H^s(\mathbb{R}^2)$, respectivamente. As técnicas a serem utilizadas são um Teorema de Decomposição em Perfis e um Teorema de Compacidade em $H^1(\mathbb{R}^d)$ mostrados por Hmidi e Kerani em [17] e [18] e a Conservação da Energia da solução. Para $H^s(\mathbb{R}^2)$, com $s < 1$, a Energia da solução pode ser infinita, logo não é possível usar um argumento de conservação. No entanto, fazendo o uso do I-método, é possível obter uma solução modificada, que está em $H^1(\mathbb{R}^2)$, e pelo Teorema 4.2.18, devido a Colliander et. al. [9], obter a quase conservação da Energia Modificada, tornando, assim, possível usar argumentos similares aos usados na prova dos resultados em $H^1(\mathbb{R}^d)$ para provar a concentração de massa em $H^s(\mathbb{R}^2)$.

4.1 Concentração de Massa em $H^1(\mathbb{R}^d)$

Em [28], Weinstein apresentou uma demonstração do Teorema 4.1.4 utilizando a técnica de *Concentration Compactness* introduzido por Lions em [20], no entanto a prova apresenta argumentos bastante robustos. Em [17], Hmidi e Kerani obtiveram uma prova alternativa, e consideravelmente mais simples, do mesmo resultado, fazendo uso do Teorema a seguir, conhecido como *Profile Decomposition*. Em essência, o argumento se baseia em decompor uma sequência $\{v_n\}$ limitada em $H^1(\mathbb{R}^d)$, como a soma de uma família fixa de perfis $V^j \in H^1(\mathbb{R}^d)$, isto é, uma família que não depende do parâmetro n, transladada por sequências em $\mathbb{R}^d$, e desta maneira, obter informações da sequência original a partir de informações sobre os perfis. Além disso, consideramos um termo de resto, que fica pequeno, em algum sentido. Precisamente, temos

Teorema 4.1.1 (Profile Decomposition)**.** *Seja* $v = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ *uma família limitada em* $H^1(\mathbb{R}^d)$*. Então, existe uma subsequência de* $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ *(ainda denotada por* $\{v_n\}$*), uma família* $\{x^j\}_{n=1}^{\infty}$ *de sequências em* $\mathbb{R}^d$ *e uma sequência* $\{V^j\}_{j=1}^{\infty}$ *em* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *tais que*

1. *Para todo* $k \neq j, |x_n^k - x_n^j| \longrightarrow \infty$ *quando* $n \to \infty$.

2. *Para todo* $l \geqslant 1$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^d$,

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{l} V^j(x - x_n^j) + v_n^l(x)$$

com

$$\limsup_{n\to\infty} \|v_n^l\|_{L^p} \longrightarrow 0 \text{ quando } l \to \infty \tag{4.1}$$

para todo $p \in (2, 2^*)$.

Mais ainda, temos que,

$$\|v_n\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{l} \|V^j\|_{L^2}^2 + \|v_n^l\|_{L^2}^2 + o(1) \tag{4.2}$$

e

$$\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{l} \|\nabla V^j\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_n^l\|_{L^2}^2 + o(1) \tag{4.3}$$

onde $o(1)$ *é uma quantidade que tende a* 0 *quando* $n \to \infty$.

Dem. Seja $\Gamma(\mathbf{v})$ o conjunto das funções que são limites fracos, a menos de subsequências, obtidas das translações $v_n(\cdot + x_n)$ onde as $\{x_n\}$ são sequência em $\mathbb{R}^d$. Esse conjunto é não vazio, pois tomando $\{x_n\}_n = 0$ e observando que $H^1(\mathbb{R}^d)$ é um espaço reflexivo, temos que toda sequência limitada possui uma subsequência fracamente convergente. Denote

$$\eta(\mathbf{v}) = \sup\{\|V\|_{H^1}, V \in \Gamma(\mathbf{v})\}.$$

Sendo $\|v_n(\cdot + x_n)\|_{H^1} = \|v_n\|_{H^1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que, para toda $V \in \Gamma(\mathbf{v})$, existe $\{x_n\}_n$ em $\mathbb{R}^d$ tal que $v_n(\cdot + x_n) \rightharpoonup V$, e assim, $\|V\|_{H^1} \leqslant \liminf \|v_n\|_{H^1}$. Tomando o supremo sobre as normas de V obtemos que $\eta(\mathbf{v}) \leqslant \limsup \|v_n\|_{H^1}$. Mostraremos a existência de uma sequência $\{V^j\} \subset \Gamma(\mathbf{v})$ e uma família $\{\mathbf{x}^j\}$ de sequências em $\mathbb{R}^d$ tal que

$$k \neq j \Longrightarrow |x_n^k - x_n^j| \to \infty \text{ quando } n \to \infty$$

e, a menos de uma subsequência $\{v_n\}_n$ pode ser escrita como:

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{l} V^j(x - x_n^j) + v_n^l(x), \qquad \eta(\mathbf{v}^l) \longrightarrow 0 \text{ quando } l \to \infty$$

tal que as identidades (4.2) e (4.3) são válidas. De fato, se $\eta(\mathbf{v}) = 0$, tomando $\{V^j\} \equiv 0$ obtemos $v_n = v_n^l$ para todo $n, l \geqslant 1$. Logo, $\eta(\mathbf{v}^l) = \eta(\mathbf{v}) = 0$ para todo $l \geqslant 1$. Suponha, então $\eta(\mathbf{v}) \neq 0$. Escolha $V^1 \in \Gamma(\mathbf{v})$ tal que:

$$\|V^1\|_{H^1} \geqslant \frac{1}{2}\eta(\mathbf{v}) > 0$$

Por definição existe uma sequência $\mathbf{x}^1 = \{x_n^1\}$ tal que, a menos de subsequência

$$v_n(\cdot + x_n^1) \rightharpoonup V^1 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^d)$$

Definimos

$$v_n^1 = v_n - V^1(\cdot - x_n^1)$$

Como $v_n^1(\cdot + x_n^1) \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$, obtemos quando $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\|v_n\|_{L^2}^2 &= \left\langle v_n^1 + V^1(\cdot - x_n^1), v_n^1 + V^1(\cdot - x_n^1)\right\rangle \\
&= \left\langle v_n^1, v_n^1\right\rangle + \left\langle V^1(\cdot - x_n^1), V^1(\cdot - x_n^1)\right\rangle + \left\langle v_n^1, V^1(\cdot - x_n^1)\right\rangle + \left\langle V^1(\cdot - x_n^1), v_n^1\right\rangle \\
&= \|v_n^1\|_{L^2}^2 + \|V^1\|_{L^2}^2 + \int v_n^1(x)\overline{V^1(x - x_n^1)}dx + \int V^1(x - x_n^1)\overline{v_n^1(x)}dx \\
&= \|v_n^1\|_{L^2}^2 + \|V^1\|_{L^2}^2 + \int v_n^1(x + x_n^1)\overline{V^1(x)}dx + \int V^1(x)\overline{v_n^1(x + x_n^1)}dx \\
&= \|v_n^1\|_{L^2}^2 + \|V^1\|_{L^2}^2 + \int v_n^1(x + x_n^1)\overline{V^1(x)}dx + \overline{\int \overline{V^1(x)}v_n^1(x + x_n^1)dx} \\
&= \|v_n^1\|_{L^2}^2 + \|V^1\|_{L^2}^2 + o(1)
\end{aligned}$$

E por um cálculo análogo obtemos

$$\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 = \|\nabla v_n^1\|_{L^2}^2 + \|\nabla V^1\|_{L^2}^2 + o(1)$$

Agora substituimos $\mathbf{v}$ por $\mathbf{v}^1 = \{v_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ e repetimos o processo. Se $\eta(\mathbf{v}^1) = 0$ tomamos $V^j \equiv 0$ para $j \geqslant 2$ e obtemos o resultado. Se $\eta(\mathbf{v}^1) > 0$ obtemos V^2 e $\mathbf{x}^2$ tal que $\|V^2\|_{H^1} \geqslant \frac{1}{2}\eta(\mathbf{v}^1) > 0$ e $v_n^1(\cdot + x_n^2) \rightharpoonup V^2$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$. Definindo

$$v_n^2 = v_n^1 - V^2(\cdot - x_n^2),$$

obtemos $\mathbf{v}^2 = \{v_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $v_n^2(\cdot + x_n^2) \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ e portanto

$$\|v_n^1\|_{L^2}^2 = \|v_n^2\|_{L^2}^2 + \|V^2\|_{L^2}^2 + o(1)$$

$$\|\nabla v_n^1\|_{L^2}^2 = \|\nabla v_n^2\|_{L^2}^2 + \|\nabla V^2\|_{L^2}^2 + o(1)$$

Mais ainda temos

$$|x_n^1 - x_n^2| \longrightarrow \infty \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Do contrário teríamos que $|x_n^1 - x_n^2|$ é uma sequência limitada e portanto a menos de uma de uma subsequência podemos assumir que $x_n^1 - x_n^2 \longrightarrow x_0 \in \mathbb{R}^d$. Para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} v_n^1(x + (x_n^2 - x_n^1) + x_n^1)\overline{\phi(x)}dx = \int v_n^1(y + x_n^1)\overline{\phi(y - x_n^2 + x_n^1)}dy.$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left[v_n^1(x + (x_n^2 - x_n^1) + x_n^1) - v_n(x + x_n^1)\right] \overline{\phi(x)}dx \\
= &\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} v_n^1(y + x_n^1) \left[\overline{\phi(y - x_n^2 + x_n^1) - \phi(y)}\right] dx \\
= &\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} v_n^1(y + x_n^1) \left[\overline{\phi(y - x_n^2 + x_n^1) - \phi(y + x_0) + \phi(y + x_0) - \phi(y)}\right] dx \\
= &\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} v_n^1(y + x_n^1) \left[\overline{\phi(y - x_n^2 + x_n^1) - \phi(y + x_0)}\right] dx \\
\leqslant &\lim_{n\to\infty} \|v_n^1\|_{L^2} \|\phi(\cdot - x_n^2 + x_n^1) - \phi(\cdot + x_0)\|_{L^2} = 0
\end{aligned}$$

Onde, na última igualdade usamos o Teorema da Convergência Dominada, o fato de que $\|v_n^1\|_{L^2}$ é limitada e $v_n^1(\cdot + x_n^1) \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$. Daí basta observar que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ é denso em $(H^1)'$ para obter que $v_n^1(\cdot + x_n^2) \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$, e portanto, $V^2 = 0$, o que é um absurdo.

Por iteração contruimos as famílias $\{\mathbf{x}^j\}$ e $\{V^j\}$ de modo que

- $|x_n^{k+1} - x_n^k| \longrightarrow \infty$;
- $v_n^{k+1} = v_n^k - V^{k+1}(\cdot - x_n^{k+1})$;
- $v_n^k(\cdot + x_n^{k+1}) \rightharpoonup V^{k+1}$ e $v_n^{k+1}(\cdot + x_n^{k+1}) \rightharpoonup 0$;
- $\|v_n^k\|_{L^2}^2 = \|v_n^{k+1}\|_{L^2}^2 + \|V^{k+1}\|_{L^2}^2 + o(1)$;
- $\|\nabla v_n^k\|_{L^2}^2 = \|\nabla v_n^{k+1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla V^{k+1}\|_{L^2}^2 + o(1)$;

Para mostrar que as sequências obtidas são, de fato ortogonais, sejam $j, k \in \mathbb{N}$. Suponha, sem perda de generalidade que $j < k$. Como

$$v_n^k(\cdot + x_n^{k+1}) \rightharpoonup V^{k+1}$$

temos que

$$v_n^{k-1}(\cdot + x_n^{k+1}) - V^k(\cdot - x_n^k + x_n^{k+1}) \rightharpoonup V^{k+1}.$$

Da ortogonalidade de $\{x_n^k\}$ e $\{x_n^{k+1}\}$ temos que $V^k(\cdot - x_n^k + x_n^{k+1}) \rightharpoonup 0$. Logo

$$v_n^{k-1}(\cdot + x_n^{k+1}) \rightharpoonup V^{k+1}.$$

Repetindo este argumento $k-j$ vezes obtemos que

$$v_n^j(\cdot + x_n^k) \rightharpoonup V^k, \qquad\qquad \forall j < k.$$

Supondo que $|x_n^k - x_n^j|$ seja limitada obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} v_n^j(x + x_n^k)\overline{\phi(x)}dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} v_n^j(x + (x_n^k - x_n^j) + x_n^j)\overline{\phi(x)}dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} v_n^j(x + x_n^j)\overline{\phi(x)}dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

o que implica que $V^k = 0$. Absurdo! Logo $|x_n^j - x_n^k| \longrightarrow \infty$. Em particular, tomando $j = 0$, isso garante que $V^k \in \Gamma(\mathbf{v})$ para todo $k > 0$. Assim

$$\begin{aligned}
v_n &= V^1(\cdot - x_n^1) + v_n^1 \\
&= V^1(\cdot - x_n^1) + V^2(\cdot - x_n^2) + v_n^2 \\
&\vdots \\
&= \sum_{j=1}^{l} V^j(\cdot - x_n^j) + v_n^l
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
\|v_n\|_{L^2}^2 &= \|V^1\|_{L^2}^2 + \|v_n^1\|_{L^2}^2 + o(1) \\
&= \|V^1\|_{L^2}^2 + \|V^2\|_{L^2}^2 + \|v_n^2\|_{L^2}^2 + o(1) \\
&\vdots \\
&= \sum_{j=1}^{l} \|V^j\|_{L^2}^2 + \|v^l\|_{L^2}^2 + o(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 &= \|\nabla V^1\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_n^1\|_{L^2}^2 + o(1) \\
&= \|\nabla V^1\|_{L^2}^2 + \|\nabla V^2\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_n^2\|_{L^2}^2 + o(1) \\
&\vdots \\
&= \sum_{j=1}^{l} \|\nabla V^j\|_{L^2}^2 + \|\nabla v^l\|_{L^2}^2 + o(1)
\end{aligned}$$

Além disso, observe que $\{v_n\}_n$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^d)$, e logo, é limitada em $L^2(\mathbb{R}^d)$, assim

$$\sum_{j=1}^{l} \|V^j\|_{L^2}^2 \leqslant \|v_n\|_{L^2}^2 \leqslant C$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Tomando o limite quando $l \to \infty$ na desigualdade acima, temos que $\sum_{j=1}^{\infty} \|V^j\|_{L^2}^2$ é convergente, o que implica que $\|V^j\|_{L^2} \longrightarrow 0$, quando $j \to \infty$. Pelo mesmo motivo concluimos que $\|\nabla V^j\|_{L^2} \longrightarrow 0$ quando $j \to \infty$ e portanto $\|V^j\|_{H^1} \longrightarrow 0$ quando $j \to \infty$.

Por fim, observamos que, por construção, $\|V^{j+1}\|_{H^1} \geqslant \dfrac{1}{2}\eta(\mathbf{v}^{j+1})$, e assim, quando $l \to \infty$ temos $\eta(\mathbf{v}^l) \to 0$.

Para concluir a demonstração do lema falta mostrar (4.1). Para isso consideramos uma função $\chi_R \in S(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\widehat{\chi}_R(\xi) = 1, \text{ se } |\xi| < R, \qquad \widehat{\chi}_R(\xi) = 0 \text{ se } |\xi| > 2R.$$

Temos que

$$v_n^l = \delta * v_n^l = \chi_R * v_n^l + (\delta - \chi_R) * v_n^l,$$

onde δ denota a medida de dirac no ponto 0. Fixando $p \in (2, 2^*)$ e usando imersões de Sobolev obtemos

$$\begin{aligned}
\|(\delta - \chi_R) * v_n^l\|_{L^p} &\lesssim \|(\delta - \chi_R) * v_n^l\|_{\dot{H}^\beta} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}(1 - \widehat{\chi}(\xi))^2 |\widehat{v}_n^l(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{(B_R)^c} |\xi|^{2(\beta-1)}|\xi|^2(1 - \widehat{\chi}(\xi))^2 |\widehat{v}_n^l(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\int_{(B_R)^c} |\xi|^{2(\beta-1)}|\xi|^2 |\widehat{v}_n^l(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim R^{\beta-1}\|v_n^l\|_{H^1},
\end{aligned}$$

onde $\beta = d\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right) < 1$. Pela Proposição 2.3.4, tomando $\theta = 1 - \dfrac{2}{p}$, podemos estimar

$$\|\chi_R * v_n^l\|_{L^p} \leqslant \|\chi_R * v_n^l\|_{L^2}^{\frac{2}{p}} \|\chi_R * v_n^l\|_{L^\infty}^{1-\frac{2}{p}} \lesssim \|v_n^l\|_{L^2}^{\frac{2}{p}} \|\chi_R * v_n^l\|_{L^\infty}^{1-\frac{2}{p}}.$$

Agora, observe que

$$\limsup_{n\to\infty} \|\chi_R * v_n^l\|_{L^\infty} = \sup_{\{x_n\}\subset\mathbb{R}^d} \limsup_{n\to\infty} |\chi_R * v_n^l(x_n)|.$$

Então

$$|\chi_R * v_n^l(x_n)| = \left|\int \chi_R(x) v_n^l(x_n - x)dx\right| = \left|\int \chi_R(-x) v_n^l(x_n + x)dx\right|.$$

Em particular o lim sup de qualquer sequência pode ser atingido por uma subsequência, assim, tome $\{x_{n_k}\}$ tal que $\limsup |\chi_R * v_n^l(x_n)| = \lim_k |\chi_R * v_{n_k}^l(x_{n_k})|$. Da limitação de $v_{n_k}^l(\cdot + x_{n_k})$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$, temos que existe $V \in \Gamma(\mathbf{v}^l)$ e uma subsequência tal que

$$v_{n_k}^l(\cdot + x_{n_k}) \rightharpoonup V \qquad \text{em } H^s(\mathbb{R}^d),$$

e portanto

$$|\chi_R * v_n^l(x_n)| \leqslant \sup\left\{\left|\int \chi_R(-x)V(x)dx\right|, V \in \Gamma(\mathbf{v}^l)\right\}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$\limsup_{n\to\infty} |\chi_R * v_n^l(x_n)| \leqslant \sup\left\{\left|\int \chi_R(-x)V(x)dx\right|, V \in \Gamma(\mathbf{v}^l)\right\}.$$

Assim, pela definição de $\Gamma(\mathbf{v}^l)$ obtemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \|\chi_R * v_n^l\|_{L^\infty} \leqslant \sup\left\{\left|\int \chi_R(-x)V(x)dx\right|, V \in \Gamma(\mathbf{v}^l)\right\}$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\limsup_{n\to\infty} \|\chi_R * v_n^l\|_{L^\infty} \leqslant \|\chi_R\|_{L^2} \sup\left\{\|V\|_{L^2}, V \in \Gamma(\mathbf{v}^l)\right\}$$

Note que

$$\|\chi_R\|_{L^2} = \|\widehat{\chi}_R\|_{L^2} \leqslant \left(\int_{B_{2R}(0)} 1dx\right)^{\frac{1}{2}} = (m(B_{2R}(0))^{\frac{1}{2}} = C(R)$$

Assim, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \|\chi_R * v_n^l\|_{L^\infty} \leqslant C(R)\eta(\mathbf{v}^l), \qquad \forall l \geqslant 1$$

Finalmente temos

$$\|v_n^l\|_{L^p} \lesssim R^{\beta-1}\|v_n^l\|_{H^1} + C(R)^{1-\frac{2}{p}}\eta(\mathbf{v}^l)^{1-\frac{2}{p}}\|v_n^l\|_{L^2}^{\frac{2}{p}}$$

Como $\|v_n^l\|_{H^1}$ e $\|v_n^l\|_{L^2}$ são limitadas, $\beta < 1$ e

$$C(R)^{1-\frac{2}{p}} = (m(B_{2R}(0)))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} = (m(B_{2R}(0)))^{\frac{\beta}{d}} = (2R)^{\beta}(m(B_1(0)))^{\frac{\beta}{d}}$$

podemos fazer $l \to \infty$ e em seguida $R \to \infty$ para concluir que

$$\|v_n^l\|_{L^p} \longrightarrow 0 \text{ quando } l \to \infty.$$

□

Uma vez estabelecido o Teorema de *Profile Decomposition*, podemos utilizá-lo para obter o Teorema 4.1.2 a respeito de uma certa compacidade fraca em $H^1(\mathbb{R}^d)$, que se faz útil pelo seguinte motivo: Sabemos, pelo Teorema de Banach-Alaoglu que uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^d)$ possui uma subsequência convergente na topologia fraca do espaço, no entanto, a princípio não é possível obter nenhuma informação qualitativa a respeito do limite fraco obtido. O teorema a seguir, apresenta algumas hipóteses adicionais sob a sequência, a fim de obter informações adicionais sobre o limite fraco de uma subsequência. Mais precisamente, é possível obter uma cota inferior para sua norma em $L^2(\mathbb{R}^d)$, concluindo, em particular, que o limite não é nulo.

Teorema 4.1.2 (Compacidade). *Seja* $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência limitada em* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_{L^2} \leqslant M \qquad e \qquad \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|_{L^{\frac{4}{d}+2}} \geqslant m.$$

Então, existe uma sequência $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ *tal que, a menos de uma subsequência,*

$$v_n(\cdot + x_n) \rightharpoonup V \in H^1(\mathbb{R}^d)$$

com $\|V\|_{L^2} \geqslant \left(\frac{d}{d+2}\right)^{d/4} \frac{m^{\frac{d}{2}+1}}{M^{\frac{d}{2}}} \|Q\|_{L^2}$.

Dem. Pelo teorema anterior a sequência $\{v_n\}_n$ pode ser escrita, a menos de uma subsequência, como

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{l} V^j(x - x_n^j) + v_n^l(x)$$

tal que (4.1), (4.2) e (4.3) são válidas. Isso implica que

$$\|v_n\|_{L^{\frac{4}{d}+2}} \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{l} V^j(\cdot - x_n^j) \right\|_{L^{\frac{4}{d}+2}} + \|v_n^l\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}$$

Como $\dfrac{4}{d} + 2 \in (2, 2^*)$, tomando o $\limsup\limits_{n\to\infty}$ e em seguida $\lim\limits_{l\to\infty}$, em ambos os lados obtemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|v_n\|_{L^{\frac{4}{d}+2}} &\leqslant \lim_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{l} V^j(\cdot - x_n^j) \right\|_{L^{\frac{4}{d}+2}} + \lim_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|v_n^l\|_{L^{\frac{4}{d}+2}} \\
&= \lim_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{l} V^j(\cdot - x_n^j) \right\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\limsup_{n\to\infty} \|v_n\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} \leqslant \lim_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{l} V^j(\cdot - x_n^j) \right\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2}.$$

Mas observe que, a desigualdade elementar (veja Lema 5.2.3 no Apêndice)

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{l} a_j\right|^{\frac{4}{d}+2} - \sum_{j=1}^{l} |a_j|^{\frac{4}{d}+2}\right| \leqslant C\sum_{j\neq k} |a_j||a_k|^{\frac{4}{d}+1},$$

nos dá que, para cada $l > 0$ e cada $n > 0$

$$\begin{aligned}
&\left|\int\left|\sum_{j=1}^{l} V^j(x-x_n^j)\right|^{\frac{4}{d}+2} dx - \int\sum_{j=1}^{l}\left|V^j(x-x_n^j)\right|^{\frac{4}{d}+2} dx\right| \\
\leqslant\ & C\int\sum_{j\neq k}\left|V^j(x-x_n^j)\right|\left|V^k(x-x_n^k)\right|^{\frac{4}{d}+1} dx \\
=\ & C\int\sum_{j\neq k}\left|V^j(x)\right|\left|V^k(x+x_n^j-x_n^k)\right|^{\frac{4}{d}+1} dx.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, usando a ortogonalidade da família $\{\mathbf{x}^j\}$ e o fato de que $V^k(x+x_n^j-x_n^k) \rightharpoonup 0$, obtemos que, para cada $l > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int\left|\sum_{j=1}^{l} V^j(x-x_n^j)\right|^{\frac{4}{d}+2} dx - \int\sum_{j=1}^{l}\left|V^j(x-x_n^j)\right|^{\frac{4}{d}+2} dx\right| = 0.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left\|\sum_{j=1}^{l} V^j(\cdot-x_n^j)\right\|_{\frac{4}{d}+2}^{\frac{4}{d}+2} - \sum_{j=1}^{l}\|V^j\|_{\frac{4}{d}+2}^{\frac{4}{d}+2}\right| = 0$$

e portanto os termos mistos acima desaparecem e ficamos com

$$\limsup_{n\to\infty}\|v_n\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} \leqslant \lim_{l\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{l}\|V^j\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} = \lim_{l\to\infty}\sum_{j=1}^{l}\|V^j\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2}.$$

Dessa forma,

$$m^{\frac{4}{d}+2} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\|v_n\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\|V^j\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2}.$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Niremberg temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\|V^j\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} &\leqslant C_d\sum_{j=1}^{\infty}\|V^j\|_{L^2}^{\frac{4}{d}}\|\nabla V^j\|_{L^2}^2 \\
&\leqslant C_d\sup_j\left\{\|V^j\|_{L^2}^{\frac{4}{d}}\right\}\sum_{j=1}^{\infty}\|\nabla V^j\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

De (4.3) temos que

$$\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{l}\|\nabla V^j\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_n^l\|_{L^2}^2 + o(1),$$

e assim,

$$\limsup_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{l} \|\nabla V^j\|_{L^2}^2 + \limsup_{n\to\infty} \|\nabla v_n^l\|_{L^2}^2$$

e portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_{L^2}^2 \geqslant \sum_{j=1}^{l} \|\nabla V^j\|_{L^2}^2, \qquad \forall l \geqslant 1.$$

Fazendo $l \to \infty$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\nabla V^j\|_{L^2}^2 \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_{L^2}^2 \leqslant M^2$$

Portanto,

$$\sup_{j\geqslant 1} \|V^j\|_{L^2}^{\frac{4}{d}} \geqslant \frac{m^{\frac{4}{d}+2}}{C_d M^2}$$

Como a série $\sum_{j=1}^{\infty} \|V^j\|_{L^2}^2$ converge temos que o supremo acima é atingido por alguma V^{j_0} tal que

$$\|V^{j_0}\|_{L^2} \geqslant \frac{m^{1+\frac{d}{2}}}{(C_d)^{\frac{d}{4}} M^{\frac{d}{2}}} = \left(\frac{d}{d+2}\right)^{\frac{d}{4}} \frac{m^{1+\frac{d}{2}}}{M^{\frac{d}{2}}} \|Q\|_{L^2}$$

Por outro lado temos que

$$v_n(x + x_n^{j_0}) = V^{j_0}(x) + \sum_{j<j_0} V^j(x - x_n^j + x_n^{j_0}) + v_n^{j_0}(x + x_n^{j_0})$$

A ortogonalidade da família $\{\mathbf{x}^j\}$ nos dá que

$$V^j(\cdot - x_n^j + x_n^{j_0}) \rightharpoonup 0, \qquad \text{quando } n \to \infty \text{ em } H^s(\mathbb{R}^d),$$

para todo $j \neq j_0$. Logo, obtemos

$$v_n(\cdot + x_n^{j_0}) \rightharpoonup V^{j_0}, \qquad \text{quando } n \to \infty \text{ em } H^s(\mathbb{R}^d).$$

A sequência $\{x_n^{j_0}\}_{n=1}^{\infty}$ e a função V^{j_0} satisfazem as condições do teorema. □

Observação 4.1.3. *A cota inferior para V em $L^2(\mathbb{R}^d)$ é ótima. De fato tomando $v_n = Q$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que a sequência obtida satisfaz as hipóteses do teorema para*

$$m = \|Q\|_{L^{\frac{4}{d}+2}} \qquad e \qquad M = \|\nabla Q\|_{L^2}$$

Observe que

$$\|Q\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{2+d}{2}} = \left(\int Q^{\frac{4}{d}+2}\right)^{\frac{d}{4+2d}\cdot\frac{2+d}{2}} = \left(\int Q^{\frac{4}{d}+2}\right)^{\frac{d}{4}} = \left(\|Q\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2}\right)^{\frac{d}{4}}$$

Logo

$$\left(\frac{d}{d+2}\right)^{\frac{d}{4}}\frac{m^{1+\frac{d}{2}}}{M^{\frac{d}{2}}}\|Q\|_{L^2}=\left[\left(\frac{d}{d+2}\right)\frac{\|Q\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2}}{\|\nabla Q\|_{L^2}^2}\right]^{\frac{d}{4}}\|Q\|_{L^2}.$$

Sabemos que Q *é a função que atinge a igualdade na desigualdade de Gagliardo-Niremberg, e logo,*

$$\frac{\|Q\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2}}{\|\nabla Q\|_{L^2}^2}=\|Q\|_{L^2}^{\frac{4}{d}}C_d=\frac{\|Q\|_{L^2}^{\frac{4}{d}}}{\|Q\|_{L^2}^{\frac{4}{d}}}\left(\frac{d+2}{d}\right)=\frac{d+2}{d}$$

O que nos dá

$$\left[\left(\frac{d}{d+2}\right)\frac{\|Q\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2}}{\|\nabla Q\|_{L^2}^2}\right]^{\frac{d}{4}}\|Q\|_{L^2}=\left[\left(\frac{d}{d+2}\right)\left(\frac{d+2}{d}\right)\right]^{\frac{d}{4}}\|Q\|_{L^2}=\|Q\|_{L^2}.$$

Teorema 4.1.4 (Concentração de Massa em $H^1(\mathbb{R}^d)$)**.** *Assuma* $s=1$. *Seja* $u_0\in H^1(\mathbb{R}^d)$ *tal que a solução correspondente de (1.1) exploda em tempo finito* $T^*>0$, *e* $\lambda(t)>0$ *uma função tal que* $\lambda(t)\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2}\longrightarrow\infty$ *quando* $t\uparrow T^*$. *Então existe* $x(t)\in\mathbb{R}^d$ *tal que*

$$\liminf_{t\to T^*}\int_{|x-x(t)|<\lambda(t)}|u(t,x)|^2dx\geqslant\int Q^2$$

Dem. Seja $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência tal que $t_n\uparrow T^*$ e considere a sequência

$$\psi_n(x)=\rho_n^{d/2}u(t_n,\rho_n x)$$

onde

$$\rho_n=\frac{\|\nabla Q\|_{L^2}}{\|\nabla u(t_n,\cdot)\|_{L^2}}.$$

Observe que a sequência $\{\psi_n\}$ satisfaz

$$\begin{aligned}\|\psi_n\|_{L^2}^2 &= \int\rho_n^2|u(t_n,\rho_n x)|^2dx\\ &= \int|u(t_n,x)|^2dx\\ &= \|u_0\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

e como $\nabla\psi_n(x)=\rho_n^{d/2+1}\nabla u(t_n,\rho_n x)$, temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla\psi_n\|_{L^2}^2 &= \int\rho_n^{d+2}|\nabla u(t_n,\rho_n x)|^2dx\\ &= \int\rho_n^2|\nabla u(t_n,x)|^2dx\\ &= \rho_n^2\|\nabla u(t_n)\|_{L^2}^2\\ &= \|\nabla Q\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Também pela conservação de energia, temos

$$\begin{aligned}
|E(\psi_n)| &= \left|\frac{1}{2}\|\nabla\psi_n\|_{L^2}^2 - \frac{d}{4+2d}\|\psi_n\|_{L^{4/d+2}}^{4/d+2}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\rho_n^2\|\nabla u(t_n)\|_{L^2}^2 - \frac{d}{4+2d}\rho_n^2\|u(t_n)\|_{L^{4/d+2}}^{4/d+2}\right| \\
&= \rho_n^2\,|E(u(t_n))| \\
&= \rho_n^2\,|E(u_0)|\,.
\end{aligned}$$

Logo, como $\|\nabla u(t_n,\cdot)\|_{L^2} \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$, temos

$$|E(\psi_n)| \longrightarrow 0, \qquad\qquad n \longrightarrow \infty.$$

Em particular, isso nos dá que

$$\lim_{n\to\infty}\|\psi_n\|_{L^{4/d+2}}^{4/d+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{d+2}{d}\|\nabla\psi_n\|_{L^2}^2 = \frac{d+2}{d}\|\nabla Q\|_{L^2}^2, \tag{4.4}$$

e assim, a sequência $\{\psi_n\}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1.2 com

$$m = \left(\frac{d+2}{d}\|\nabla Q\|_{L^2}^2\right)^{\frac{d}{2d+4}} \qquad \text{e} \qquad M = \|\nabla Q\|_{L^2}.$$

Consequentemente, existe uma sequência $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ e um perfil $V \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\psi_n(\cdot + x_n) \rightharpoonup V \text{ em } H^1(\mathbb{R}^d),$$

ou seja,

$$\rho_n^{d/2}u(t_n, \rho_n\cdot + x_n) \rightharpoonup V \text{ em } H^1(\mathbb{R}^d).$$

Daí, segue da Proposição 2.2.2, que para todo $R > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n^d\int_{|x|<R}|u(t_n, \rho_n x + x_n)|^2dx \geqslant \int_{|x|<R}|V|^2dx.$$

Desse modo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|<R\rho_n}|u(t_n,x)|^2dx &\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{|x-x_n|<R\rho_n}|u(t_n,x)|^2dx \\
&\geqslant \int_{|x|<R}|V|^2dx.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese sobre $\lambda(t)$, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R\rho_n}{\lambda(t_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\|Q\|_{L^2}}{\|\nabla u(t_n,\cdot)\|_{L^2}}\frac{R}{\lambda(t_n)} = 0,$$

e assim,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|<\lambda(t_n)}|u(t_n,x)|^2dx &\geqslant \lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|<R\rho_n}|u(t_n,x)|^2dx\\ &\geqslant \int_{|x|<R}|V|^2dx.\end{aligned}$$

Esta desigualdade vale para todo $R>0$, logo, fazendo $R\to\infty$ e usando a caracterização do perfil V obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|<\lambda(t_n)}|u(t_n,x)|^2dx \geqslant \int Q^2dx$$

Como, para cada $t\in(0,T^*)$ a função

$$y\mapsto \int_{|x-y|<\lambda(t)}|u(t,x)|^2dx$$

é contínua e se anula no infinito, podemos definir a função $x(t)$ tal que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|<\lambda(t)}|u(t,x)|^2dx = \int_{|x-x(t)|<\lambda(t)}|u(t,x)|^2dx$$

obtendo-se que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x-x(t_n)|<\lambda(t_n)}|u(t_n,x)|^2dx \geqslant \int Q^2dx.$$

Por fim, sendo $\{t_n\}$ arbitrária temos

$$\liminf_{t\uparrow T^*}\int_{|x-x(t)|<\lambda(t)}|u(t,x)|^2dx \geqslant \int Q^2dx$$

o que conclui a prova. □

4.2 Concentração de massa em $H^s(\mathbb{R}^2)$

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar um teorema similar ao Teorema 4.1.4, mas para soluções em $H^s(\mathbb{R}^d)$, com $s<1$. Devido à baixa regularidade desse espaço, a análise se torna mais delicada, principalmente porque a energia da solução pode ser infinita, e assim, a lei de conservação de energia não se aplica. O instrumento usado para contornar esta dificuldade será o I-método, que consiste em definir um operador linear limitado de $H^s(\mathbb{R}^d)$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$, a fim de regularizar a solução. Utilizando o I-método, podemos recorrer ao uso da energia da solução modificada pelo operador, no entanto essa energia não é conservada quando o tempo varia. Apesar disso, provaremos um resultado de boa colocação modificada e quase conservação da energia modificada, no intervalo de tempo onde a solução existe. Em seguida usaremos essa quase conservação para provar a concentração de massa em $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Definição 4.2.1. *Definimos, para todo* $0 < s \leqslant 1$*, o operador suavizante* $I_N : H^s \longrightarrow H^1$ *tal que:*

$$\widehat{I_N u}(\xi) = m(\xi)\widehat{u}(\xi)$$

onde

$$m(\xi) = \begin{cases} 1, & \textit{se } |\xi| \leqslant N \\ \left(\frac{|\xi|}{N}\right)^{s-1}, & \textit{se } |\xi| \geqslant 3N \end{cases}$$

Com $m(\xi)$ *suave, radial e monótona em* $|\xi|$*.*

Proposição 4.2.2. *Valem as seguintes propriedades para* I_N

1. $\|I_N u\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{L^2}$
2. $\|u\|_{H^s} \leqslant \|I_N u\|_{H^1} \leqslant N^{1-s}\|u\|_{H^1}$

Dem. De fato,

$$\begin{aligned} \|I_N u\|_{L^2}^2 = \|\widehat{I_N u}\|_{L^2}^2 &= \|m \cdot \widehat{u}\|_{L^2}^2 \\ &= \int |m(\xi)\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leqslant \|m\|_{L^\infty}^2 \int |u(\xi)|^2 d\xi \\ &\leqslant \|\widehat{u}\|_{L^2}^2 = \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^s} = \|\langle D\rangle^s u\|_{L^2} = \left\|\left[(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}\right]^{\vee}\right\|_{L^2} &= \left\|(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}\right\|_{L^2} \\ &= \left\|(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} m\frac{\widehat{u}}{m}\right\|_{L^2} \\ &= \left\|(1+|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}} m\frac{\widehat{u}}{m}(1+|\cdot|^2)^{\frac{s-1}{2}}\right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Observe que

- Se $|x| < N$, então
$$\frac{(1+|x|^2)^{\frac{s-1}{2}}}{m(x)} = (1+|x|^2)^{\frac{s-1}{2}} \leqslant 1$$
- Se $|x| > 3N$, então
$$\frac{(1+|x|^2)^{\frac{s-1}{2}}}{m(x)} = \frac{(1+|x|^2)^{\frac{s-1}{2}}|x|^{1-s}}{N^{1-s}} \leqslant |x|^{s-1}\frac{|x|^{1-s}}{N^{1-s}} \leqslant 1.$$

Assim temos,

$$\begin{aligned}\left\|(1+|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}} m\frac{\widehat{u}}{m}(1+|\cdot|^2)^{\frac{s-1}{2}}\right\|_{L^2} &\leqslant \left\|(1+|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}} m\widehat{u}\right\|_{L^2}\\ &= \left\|\left[(1+|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}\widehat{I_N u}\right]^{\vee}\right\|_{L^2}\\ &= \|I_N u\|_{H^1}\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|I_N u\|_{H^1} &= \|I_N u\|_{L^2} + \|I_N u\|_{\dot{H}^1}\\ &= \|I_N u\|_{L^2} + \||\cdot|m\widehat{u}\|_{L^2}\\ &= \|I_N u\|_{L^2} + \||\cdot|^{1-s}|\cdot|^{s} m\widehat{u}\|_{L^2}\end{aligned}$$

Mas note que

- Se $|x| < N$, então
$$|x|^{1-s}m(x) \leqslant N^{1-s}$$
- Se $|x| > 3N$, então
$$|x|^{1-s}m(x) = \frac{|x|^{1-s}|x|^{s-1}}{N^{s-1}} = N^{1-s}.$$

Logo

$$\|I_N u\|_{H^1} = \|I_N u\|_{L^2} + \|I_N u\|_{\dot{H}^1} \leqslant \|u\|_{L^2} + N^{1-s}\|u\|_{\dot{H}^s} \leqslant N^{1-s}\|u\|_{H^s}$$

o que prova a proposição. □

A seguir, provaremos os resultados de quase conservação de energia presentes em [9], relevantes para a demonstração dos teoremas principais deste capítulo e do próximo. Para tal, precisaremos fazer uso do I-método como ferramenta suavizante de uma solução em $H^s(\mathbb{R}^2)$, em seguida decompor sua Transformada de Fourier em frequências concentradas em anéis diádicos e fazer uma análise, caso a caso, de cada frequência localizada. Os teoremas abaixo serão essenciais no estudo das interações entre as soluções com frequências altas e baixas.

Definição 4.2.3. *Dado* $T > 0$*, definimos a norma de Strichartz de uma função* $u : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ *como*

$$\|u\|_{S^0_T} := \sup_{(p,r)} \|u\|_{L^r_t L^p_x}$$

tal que o par (p, r) *é admissível.*

A seguir enunciaremos dois lemas, que serão usados nas demonstrações dos Teoremas 4.2.7–4.2.9, e cujas demonstrações iremos omitir, pois envolvem conceitos como teoria de espaços de Banach invariantes por translação, o que exigiria uma construção que foge da proposta deste trabalho. São eles

Lema 4.2.4. *Para todo* $T, \delta > 0$ *e* $u, v : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$*, existe uma constante* $c(\delta) > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} \|u \cdot v\|_{L^2_t L^2_x} \leqslant \;& c(\delta) \left(\|D^{-\frac{d-1}{2}+\delta} u(0)\|_{L^2} + \|D^{-\frac{d-1}{2}+\delta}(i\partial_t + \Delta)u\|_{L^1_t L^2_x} \right) \\ \times \;& \left(\|D^{\frac{d-1}{2}-\delta} v(0)\|_{L^2} + \|D^{\frac{d-1}{2}-\delta}(i\partial_t + \Delta)v\|_{L^1_t L^2_x} \right) \end{aligned}$$

Dem. Veja [8, Lema 3.4, página 14]. □

Lema 4.2.5. *Seja* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *tal que* $\eta(x) = 1$ *se* $|x| < 1$ *e* $\eta(x) = |x|^{-1}$ *se* $|x| > 3$*. Defina para cada* $N \geqslant 1$ *e* $\alpha \geqslant 0$ *o operador* $\widehat{F_N^\alpha f} = \eta(\frac{\xi}{N})^\alpha \widehat{f}$*. Se* Z, X_1, X_2, X_3 *são espaços de Banach invariantes por translação,* $T : X_1 \times X_2 \times X_3 \longrightarrow Z$ *é um operador tri-linear e existe* $\alpha_0 > 0$ *tal que vale a desigualdade*

$$\|F_1^\alpha T(u_1, u_2, u_3)\|_Z \lesssim \|u_1\|_{X_1} \|u_1\|_{X_2} \|F_1^\alpha u_3\|_{X_3}$$

para todo $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$*, então vale a desigualdade*

$$\|F_N^\alpha T(u_1, u_2, u_3)\|_Z \lesssim \|u_1\|_{X_1} \|u_1\|_{X_2} \|F_N^\alpha u_3\|_{X_3}$$

para todo $N \geqslant 1$ *e* $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$*, a constante da última desigualdade não depende de* N*.*

Dem. Veja [10, Lema 12.1, página 30]. □

Definição 4.2.6. *Dado* $N \in \{2^k;\ k \in \mathbb{N}\}$ *definimos o operador de projeção de Littlewood-Palley por*

$$\widehat{\mathbb{P}_N u} = \chi_{\{\frac{1}{2}N < |\xi| < 2N\}} \cdot \widehat{u}(\xi)$$

e denotamos $u_N = \mathbb{P}_N u$*.*

Teorema 4.2.7. *Se* $u(t)$ *é uma solução de (1.1) com* $d = 2$ *no intervalo de tempo* $[0, T]$ *e* $N_1 \geqslant N_2$ *então temos*

$$\|u_{N_1} \cdot u_{N_2}\|_{L^2_t L^2_x} \leqslant C \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{\frac{1}{2}-} \|u\|^2_{S^0_T}$$

Dem. No Lema 4.2.4, tome $d = 2$, $u = u_{N_2}$, $v = u_{N_1}$ e fixe $\delta > 0$ tão pequeno quanto necessário. Observamos que

$$\begin{aligned}\|D^{-\frac{d-1}{2}+\delta}u_{N_2}(0)\|_2 &= \||\cdot|^{-\frac{1}{2}+\delta}\widehat{u_{N_2}}(0)\|_2 \\ &\lesssim (N_2)^{-\frac{1}{2}+}\|\widehat{u}(0)\|_2 \\ &= (N_2)^{-\frac{1}{2}+}\|u(0)\|_2 \\ &\leqslant (N_2)^{-\frac{1}{2}+}\|u\|_{S^0_T}\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato de que $(2,\infty)$ é um par admissível. Por outro lado

$$\begin{aligned}\|D^{-\frac{d-1}{2}+\delta}(i\partial_t+\Delta)u_{N_2}\|_{L^1_tL^2_x} &= \|D^{-\frac{1}{2}+\delta}(|u|^2u)_{N_2}\|_{L^1_tL^2_x} \\ &\lesssim (N_2)^{-\frac{1}{2}+}\||u|^2u\|_{L^1_tL^2_x} \\ &= (N_2)^{-\frac{1}{2}+}\|u\|^2_{L^3_tL^6_x}\|u\|_{L^3_tL^6_x} \\ &\leqslant (N_2)^{-\frac{1}{2}+}M^2\|u\|_{L^3_tL^6_x} \\ &\lesssim (N_2)^{-\frac{1}{2}+}\|u\|_{S^0_T}\end{aligned}$$

onde M está definido como no Teorema 3.2.4 e $(6,3)$ é um par admissível. Uma análise similar nos dá

$$\|D^{\frac{d-1}{2}-\delta}u_{N_1}(0)\|_{L^2} \lesssim (N_1)^{\frac{1}{2}-}\|u\|_{S^0_T}$$

e

$$\|D^{\frac{d-1}{2}-\delta}(i\partial_t+\Delta)u_{N_1}\|_{L^1_tL^2_x} \lesssim (N_1)^{\frac{1}{2}-}\|u\|_{S^0_T}$$

portanto pelo Lema 4.2.4 temos o resultado. □

A seguir, mostraremos o resultado de Boa-Colocação Modificada, que relaciona o Tempo de existência da solução do Problema (1.1) em $H^s(\mathbb{R}^2)$ com a norma de $I_N u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Lembre-se que $\widehat{\langle D\rangle^s u}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi)$.

Teorema 4.2.8 (Boa-Colocação Modificada)**.** *Seja* $d = 2$ *e* $0 < s < 1$. *Dado* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *existe um tempo* $\widetilde{T} = \widetilde{T}(\|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2}) > 0$ *e uma única solução* u *de (1.1) tal que*

$$u \in C([0,\widetilde{T}]; H^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^r([0,\widetilde{T}]; H^{s,p}(\mathbb{R}^2))$$

onde $(p,r) = \left(\dfrac{4}{s+1}, \dfrac{4}{1-s}\right)$. *Além disso a solução obtida satisfaz*

$$\|I_N\langle D\rangle u\|_{S^0_{\widetilde{T}}} \leqslant C\|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2} \tag{4.5}$$

Dem. O argumento é similar ao da prova do Teorema 3.2.4, exceto pela escolha de T e M, assim, evindenciaremos apenas as diferenças. Para cada $T, M > 0$ considere o conjunto $E(T, M)$ dado por

$$E(T,M) = \{u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d)) \cap L^r([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^2));$$
$$\|u\|_T = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s} + \|u\|_{L^r_t H^{s,p}_x} \leqslant M\}$$

onde (p, r) são dados no enunciado, e considere a aplicação

$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta}u_0 + i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|^2u)ds.$$

Da demonstração do Teorema 3.2.4 temos

$$\|\Phi(u)\|_T \leqslant c\|u_0\|_{H^s} + cT^s\|u\|_T^3.$$

Nesse momento, diferentemente do Teorema 3.2.4, tomamos $\tilde{M} = 2c\|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2}$ e temos

$$\|\Phi(u)\|_T \leqslant \frac{\tilde{M}}{2} + cT^s\tilde{M}^3.$$

Tomando $\tilde{T} = c_0\|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2}^{-\frac{2}{s}}$ temos

$$\|\Phi(u)\|_T \leqslant \tilde{M}.$$

Isso mostra que Φ está bem definida de $E(\tilde{T}, \tilde{M})$ em $E(\tilde{T}, \tilde{M})$. Por fim nos resta provar a estimativa (4.5). Primeiro observamos que, adotando a notação do Lema 4.2.5, temos que, se $N = 1$, então $\eta(x) \sim \langle x\rangle^{-1}$. Logo, usando a regra de Leibniz (Teorema 2.6.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\|F_1^\alpha\langle D\rangle(|u|^2u)\|_{L^1_tL^2_x} &\lesssim \|\langle D\rangle^{1-\alpha}(|u|^2u)\|_{L^1_tL^2_x}\\
&\lesssim \|u\|_{L^3_tL^6_x}\|u\|_{L^3_tL^6_x}\|\langle D\rangle^{1-\alpha}u\|_{L^3_tL^6_x}\\
&\lesssim \|u\|_{L^3_tL^6_x}\|u\|_{L^3_tL^6_x}\|F_1^\alpha\langle D\rangle u\|_{L^3_tL^6_x}\\
&\lesssim \|u\|_{L^3_tL^6_x}\|u\|_{L^3_tL^6_x}\|F_1^\alpha u\|_{L^3_tH^{1,6}_x}
\end{aligned}$$

para todo $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, onde na última desigualdade usamos a comutatitatividade dos operadores definidos como multiplicadores de Fourier. Usamos o Lema 4.2.5 para obter

$$\begin{aligned}
\|I_N\langle D\rangle(|u|^2u)\|_{L^1_tL^2_x} &= \|F_N^{1-s}\langle D\rangle(|u|^2u)\|_{L^1_tL^2_x}\\
&\lesssim \|u\|_{L^3_tL^6_x}\|u\|_{L^3_tL^6_x}\|F_N^{1-s}u\|_{L^3_tH^{1,6}_x} \qquad (4.6)\\
&\lesssim \|u\|^2_{L^3_tL^6_x}\|I_N\langle D\rangle u\|_{L^3_tL^6_x}\\
&\lesssim \tilde{M}^2\|I_N\langle D\rangle u\|_{S^0_T}.
\end{aligned}$$

Combinando essas desigualdades temos

$$\begin{aligned}\|I_N\langle D\rangle u\|_{S^0_{\tilde{T}}} &\lesssim \|I_N\langle D\rangle u_0\|_2 + \|I_N\langle D\rangle(|u|^2u)\|_{L^1_tL^2_x}\\ &\lesssim \|I_N\langle D\rangle u_0\|_2 + \tilde{M}^2\|I_N\langle D\rangle u\|_{S^0_{\tilde{T}}}\end{aligned}$$

e observando que Φ é uma contração temos que $c\tilde{M}^2 < 1$, logo

$$\|I_N\langle D\rangle u\|_{S^0_{\tilde{T}}} \lesssim \|I_N\langle D\rangle u_0\|_2$$

o que conclui a prova. □

Teorema 4.2.9. *Assuma* $d = 2$. *Se* $u(t)$ *é solução de (1.1) no tempo de existência* $[0, \tilde{T}]$ *e* $N_1 \geqslant N_2$, *então para todo* N *temos*

$$\|I_N\langle D\rangle u_{N_1} \cdot I_N\langle D\rangle u_{N_2}\|_{L^2_tL^2_x} \leqslant C\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}-} \|I_N\langle D\rangle u\|^2_{S^0_{\tilde{T}}}$$

Dem. A demonstração é análoga ao do Teorema 4.2.7, tomando, no Lema 4.2.4, $d = 2$, $u = I_N\langle D\rangle u_{N_2}$, $v = I_N\langle D\rangle u_{N_1}$ e usando a desigualdade (4.6). □

Observação 4.2.10. *A prova do teorema acima é análoga se substiuirmos quaisquer das* u_{N_j} *por* $\overline{u_{N_j}}$.

Proposição 4.2.11. *Dados* $M, N \geqslant 1$ *temos que*

$$\|I_N u_M\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant C\|I_N\langle D\rangle u_M\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

onde a constante $C > 0$ *não depende de* M.

Dem. Dado $x \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\begin{aligned}|I_N u_M(x)| &\leqslant \int_{\frac{1}{2}M<|\xi|<2M} m(\xi)|\widehat{u_M}(\xi)|d\xi\\ &= \int_{\frac{1}{2}M<|\xi|<2M} \frac{1}{\langle\xi\rangle}\langle\xi\rangle m(\xi)|\widehat{u_M}(\xi)|d\xi\\ &\lesssim \frac{1}{M}\left|\left\{\frac{1}{2}M < |\xi| < 2M\right\}\right| \|\langle\cdot\rangle m\widehat{u_M}\|_2\\ &\lesssim \frac{1}{M}M\|I_N\langle D\rangle u_M\|_2\\ &= \|I_N\langle D\rangle u_M\|_2.\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre os $x \in \mathbb{R}^2$ temos o resultado. □

Proposição 4.2.12 (Fórmula de Parseval)**.** *Dadas* $f_1, \dots, f_j \in S(\mathbb{R}^d)$ *vale que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x) \cdots f_j(x) dx = \int_{*_j} \widehat{f_1}(\xi_1) \cdots \widehat{f_j}(\xi_j) d\xi$$

onde $*_j = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_j) \in \mathbb{R}^{dj}; \sum_{i=1}^{j} \xi_i = 0 \right\}$ *e* $d\xi$ *é a medida de superfície neste hiperplano.*

Dem. Façamos indução em j. Para $j = 2$, pelo item 5 do Teorema 2.4.9, temos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) g^{\vee}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(-\xi) d\xi.$$

Fazendo a mudança de variável $\xi_1 = \xi$ e $\xi_2 = -\xi$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx = \int_{\xi_1 + \xi_2 = 0} \widehat{f}(\xi_1) \widehat{g}(\xi_2) d\xi$$

onde $d\xi$ é a medida da reta $\{\xi_1 + \xi_2 = 0\}$. Suponha então que o resultado é válido para algum $j > 2$ e sejam $f_1, \dots, f_j, f_{j-1}$ funções. Definindo $g = f_j \cdot f_{j+1}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x) \cdots f_j(x) \cdot f_{j+1}(x) dx &= \int_{\xi_1 + \cdots + \tilde{\xi}_j = 0} \widehat{f_1}(\xi_1) \cdots \widehat{g}(\tilde{\xi}_j) d\tilde{\xi} \\
&= \int_{\xi_1 + \cdots + \tilde{\xi}_j = 0} \widehat{f_1}(\xi_1) \cdots \widehat{f_j} * \widehat{f_{j+1}}(\tilde{\xi}_j) d\tilde{\xi} \\
&= \int_{\xi_1 + \cdots + \tilde{\xi}_j = 0} \widehat{f_1}(\xi_1) \cdots \int \widehat{f_j}(\eta) \cdot \widehat{f_{j+1}}(\tilde{\xi}_j - \eta) d\eta d\tilde{\xi}.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\xi_j = \eta$ e $\xi_{j+1} = \tilde{\xi}_j - \eta$ temos $\tilde{\xi}_j = \xi_j + \xi_{j+1}$ e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x) \cdots f_j(x) \cdot f_{j+1}(x) dx &= \int_{\xi_1 + \cdots + \xi_{j+1} = 0} \widehat{f_1}(\xi_1) \cdots \widehat{f_j}(\xi_j) \cdot \widehat{f_{j+1}}(\xi_{j+1}) d\xi_j d\tilde{\xi} \\
&= \int_{\xi_1 + \cdots + \xi_{j+1} = 0} \widehat{f_1}(\xi_1) \cdots \widehat{f_j}(\xi_j) \cdot \widehat{f_{j+1}}(\xi_{j+1}) d\xi
\end{aligned}$$

onde $d\xi$ é a medida de superfície do hiperplano $\{\xi_1 + \dots \xi_{j+1} = 0\}$.

□

Proposição 4.2.13. *Se* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 0$ *e* $u(t)$ *é solução de (1.1) correspondente, no tempo de existência máximo* $0 < T^* < \infty$, *então:*

$$C(T^* - t)^{-\frac{s}{2}} \leqslant \|I_N u(t)\|_{H^1}$$

Para algum $C > 0$.

Dem. Basta usar a taxa de *blow-up* obtida no Proposição 3.2.16 , e a Proposição 4.2.2, para obter

$$C(T^* - t)^{-\frac{s}{2}} \leqslant \|u(t)\|_{H^s} \leqslant \|I_N u(t)\|_{H^1}$$

□

Definição 4.2.14. *O parâmetro de blowup associado à norma em* $H^s(\mathbb{R}^2)$ *da solução é*

$$\Lambda(t) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|u(\tau)\|_{H^s}$$

Definimos também o parâmetro de blow-up modificado por

$$\Sigma(t) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|I_N u\|_{H^1}$$

Teorema 4.2.15. *Existe um* $s_Q \leqslant \frac{1+\sqrt{11}}{5}$ *tal que para todo* $s > s_Q$ *existe um* $p(s) < 2$ *tal que se* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *e* $u(t)$ *é solução de* (1.1) *correspondente, no tempo de existência máximo* $0 < T^* < \infty$*, então para todo* $T < T^*$ *existe um* $N = N(T)$ *tal que:*

$$|E[I_{N(T)} u(T)]| \leqslant C_0(\Lambda(T))^{p(s)} \tag{4.7}$$

com $C_0 = C_0(s, T^*, \|u_0\|_{H^s})$*. Mais ainda,* $N(T) = C(\Lambda(T))^{\frac{p(s)}{2(1-s)}}$.

Observação 4.2.16. *Em [9]* $p(s)$ *é dado explicitamente por:*

$$p(s) = \frac{6 + \frac{2}{s}}{2^- - (4 + \frac{2}{s})(1 - s)} 2(1 - s).$$

Para provar o Teorema 4.2.15 deveremos fazer o uso do resultado do Teorema 4.2.18 a respeito da quase conservação da Energia Modificada.

Observação 4.2.17. *Na prova do próximo teorema estabelecemos as seguintes notações:*

- *Dizemos que* $A \lesssim B$ *se existir uma constante* $c > 2$*, universal, isto é, que não dependa de* A *ou* B*, apenas da formulação do teorema, e tal que* $A \leqslant cB$.
- *Dizemos que* $A \sim B$ *se* $A \lesssim B$ *e* $B \lesssim A$.
- *Dizemos que* $A \ll B$ *se existir* $c > 2$ *tal que* $cA < B$.

Teorema 4.2.18. *Se* $u(t)$ *é solução de (1.1) no tempo de existência* $[0, \tilde{T}] \subset \mathbb{R}$*, então para todo* $N \geqslant 1$ *temos*

$$\sup_{t \in [0, \tilde{T}]} |E[I_N u(t)]| \leqslant |E[I_N u(0)]| + CN^{-\frac{3}{2}^+} \|I_N \langle D \rangle u(0)\|_2^4 + CN^{-2^+} \|I_N \langle D \rangle u(0)\|_2^6.$$

Dem. Em vista de (4.5) é suficiente limitar $E[I_N u(t)] - E[I_N u(0)]$ uniformemente em $[0, \tilde{T}]$ em termos de $\|I_N \langle D\rangle u\|_{S^0_{\tilde{T}}}$. Observe que a quantidade a ser limitada, representa o quanto a Energia da solução modificada varia no intervalo $[0, t]$,e que é conservada quando $s = 1$. De maneira similar a Proposição 3.2.8, podemos aplicar o operador I_N à equação (1.1) e obter

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E[I_N u(t)] &= -\mathrm{Re}\left(\int \overline{I_N \partial_t u}(\Delta I_N u + |I_N u|^2 I_N u)dx\right) \\
&= -\mathrm{Re}\left(\int \overline{I_N \partial_t u}(\Delta I_N u + i I_N \partial_t u + |I_N u|^2 I_N u)dx\right) \\
&= -\mathrm{Re}\left(\int \overline{I_N \partial_t u}(-I_N(|u|^2 u) + |I_N u|^2 I_N u)dx\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\int \overline{I_N \partial_t u}(I_N(|u|^2 u) - |I_N u|^2 I_N u)dx\right).
\end{aligned}$$

Se considerarmos as não-linearidade $g(z) = |z|^2 z$, temos $g(I_N u) \neq I_N g(u)$ em geral, logo, a variação da Energia Modificada é limitada em termos da diferença entre a não-linearidade aplicada na solução modificada e o operador I aplicado na não-linearidade. Integrando em t temos

$$\begin{aligned}
|E[I_N u(t)] - E[I_N u(0)]| &= \left|\int_0^t \frac{d}{dt}E[I_N u(t)]dt\right| \\
&= \left|\int_0^t \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{I_N \partial_t u}(I_N(|u|^2 u) - |I_N u|^2 I_N u)dx\right) dt\right| \quad (4.8)\\
&\leqslant \left|\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{I_N \partial_t u}(I_N(|u|^2 u) - |I_N u|^2 I_N u)dx\right) dt\right|
\end{aligned}$$

e usando o Lema 4.2.12, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \overline{I_N \partial_t u}|I_N u|^2 I_N u dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{I_N \partial_t u} \cdot I_N u \cdot \overline{I_N u} \cdot I_N u dx \\
&= \int_{*4} \widehat{\overline{I_N \partial_t u}}(\xi_1) \cdot \widehat{I_N u}(\xi_2) \cdot \widehat{\overline{I_N u}}(\xi_3) \cdot \widehat{I_N u}(\xi_4) d\xi
\end{aligned}$$

e de maneira similar á demonstração da Proposição 4.2.12 obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \overline{I_N \partial_t u}(I_N(|u|^2 u)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{I_N \partial_t u}(I_N(|u|^2 u)dx \\
&= \int_{\xi_1 + \tilde{\xi_1}} \widehat{\overline{I_N \partial_t u}}(\xi_1) \cdot m(\tilde{\xi_1})\widehat{|u|^2 u}(\tilde{\xi_1}) d\xi_1 \\
&= \int_{\xi_1 + \tilde{\xi_1}} \widehat{\overline{I_N \partial_t u}}(\xi_1) \cdot m(\tilde{\xi_1})(\widehat{|u|^2} * \widehat{u})(\tilde{\xi_1}) d\xi_1 \\
&= \int_{\xi_1 + \tilde{\xi_1}} \widehat{\overline{I_N \partial_t u}}(\xi_1) \cdot m(\tilde{\xi_1}) \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{|u|^2}(\tilde{\xi_1} - \eta)\widehat{u}(\eta) d\eta d\xi_1
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\eta = \xi_2$ e $\tilde{\xi_1} - \eta = \tilde{\xi_2}$ temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \overline{I_N \partial_t u}(I_N(|u|^2 u)dx &= \int_{\xi_1+\xi_2+\tilde{\xi_2}} \widehat{\overline{I_N \partial_t u}}(\xi_1) m(\xi_2+\tilde{\xi_2})\widehat{u}(\xi_2)\cdot \widehat{|u|^2}(\tilde{\xi_2})d\xi_2 d\xi_1 \\ &= \int_{\xi_1+\xi_2+\tilde{\xi_2}} \widehat{\overline{I_N \partial_t u}}(\xi_1) m(\xi_2+\tilde{\xi_2})\widehat{u}(\xi_2)\cdot (\widehat{u} * \widehat{\overline{u}})(\tilde{\xi_2})d\xi_2 d\xi_1 \\ &= \int_{\xi_1+\xi_2+\tilde{\xi_2}} \widehat{\overline{I_N \partial_t u}}(\xi_1) m(\xi_2+\tilde{\xi_2})\widehat{u}(\xi_2)\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u}(\tilde{\xi_2}-\eta)\widehat{\overline{u}}(\eta)d\eta\end{aligned}$$

Fazendo novamente uma mudança de variável $\eta = \xi_3$ e $\xi_4 = \tilde{\xi_2} - \eta$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{I_N \partial_t u}(I_N(|u|^2 u)dx = \int_{*4} m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)\widehat{\overline{I_N \partial_t u}}(\xi_1)\widehat{u}(\xi_2)\widehat{\overline{u}}(\xi_3)\widehat{u}(\xi_4)d\xi$$

multiplicando e divindo a expressão dentro da integral por $m(\xi_2)\cdot m(\xi_3)\cdot m(\xi_4)$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{I_N \partial_t u}(I_N(|u|^2 u)dx = \int_{*4} \frac{m(\xi_1)}{m(\xi_2)\cdot m(\xi_3)\cdot m(\xi_4)}\widehat{\overline{I_N \partial_t u}}(\xi_1)\widehat{I_N u}(\xi_2)\widehat{\overline{I_N u}}(\xi_3)\widehat{I_N u}(\xi_4)d\xi$$

assim a expressão (4.8) fica limitada por

$$\leqslant \left|\int_0^t \int_{*4} \left(1 - \frac{m(\xi_1)}{m(\xi_2)\cdot m(\xi_3)\cdot m(\xi_4)}\right)\widehat{\overline{I_N \partial_t u}}(\xi_1)\widehat{I_N u}(\xi_2)\widehat{\overline{I_N u}}(\xi_3)\widehat{I_N u}(\xi_4)d\xi dt\right|.$$

Logo

$$|E[I_N u(t)] - E[I_N u(0)]| \leqslant E_1 + E_2,$$

onde

$$E_1 = \left|\int_0^t \int_{*4} \left(1 - \frac{m(\xi_1)}{m(\xi_2)\cdot m(\xi_3)\cdot m(\xi_4)}\right)\widehat{\overline{I_N \Delta u}}(\xi_1)\widehat{I_N u}(\xi_2)\widehat{\overline{I_N u}}(\xi_3)\widehat{I_N u}(\xi_4)d\xi dt\right|$$

e

$$E_2 = \left|\int_0^t \int_{*4} \left(1 - \frac{m(\xi_1)}{m(\xi_2)\cdot m(\xi_3)\cdot m(\xi_4)}\right)\widehat{\overline{I_N |u|^2 u}}(\xi_1)\widehat{I_N u}(\xi_2)\widehat{\overline{I_N u}}(\xi_3)\widehat{I_N u}(\xi_4)d\xi dt\right|.$$

Considere agora $N_1, \dots, N_6 \in \{2^k; k \in \mathbb{N}\}$ e seja $u_j = u_{N_j}$ como na Definição 4.2.6. Para abreviar a notação utilizaremos, sem risco de confusão, $m_j = m(\xi_j)$ e $I_N u = Iu$. O restante da prova consiste em estimar os termos E_1 e E_2, concentrados no suporte das u_j em termos do parâmetros N_j, e obter uma limitação somável, a fim de estimar a integral em todo o espaço. Consideramos ainda que as $\widehat{u_{N_j}}$ são reais, não-negativas. Do contrário estimamos separadamente sua parte real e imaginária, e sua parte positiva e negativa. Como o teorema exige uma limitação para todo $N \geqslant 1$, o argumento se baseia em considerar todos os diferentes casos de N e comparar o seu tamanho em relação aos N_j. Para tal, usamos os seguintes lemas

Lema 4.2.19. *Seja* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *e* $u(t)$ *a solução correspondente de (1.1) no intervalo* $[0, \tilde{T})$. *Então*

$$\left|\int_0^t \int_{*_4} \left(1 - \frac{m_1}{m_2 \cdot m_3 \cdot m_4}\right) \widehat{\overline{I\Delta u_1}}(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_3}}(\xi_3)\widehat{Iu_4}(\xi_4)d\xi dt\right|$$
$$\leqslant N^{-\frac{3}{2}^+}\|I_N\langle D\rangle u\|^4_{S^0_{\tilde{T}}}\prod_{j=1}^4 N_j^{0-}.$$

Dem. Primeiro notamos que por conta da Observação 4.2.10, os conjugados complexos acima não vão interferir nas estimativas. Além disso, o símbolo que multiplica o integrando é simétrico em relação aos fatores m_2, m_3 e m_4 e assim, não há perda de generalidade em supor $N_2 \geqslant N_3 \geqslant N_4$. Definimos, à priori, uma constante universal $K = 24$.

Caso 1: $N > KN_2$

Nesse caso, observamos que no hiperplano $*4$ temos $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$, e $\frac{1}{2}N_j \leqslant |\xi_j| \leqslant 2N_j$. Logo

$$\frac{1}{2}N_1 \leqslant |\xi_1| \leqslant |\xi_2| + |\xi_3| + |\xi_4| \leqslant 6N_2,$$

então

$$N_1 \leqslant 12N_2 < \frac{12}{K}N,$$

logo

$$2N_1 = \frac{K}{12}N_1 < N.$$

Pela definição de $m(\xi)$ temos que $m(\xi_1) = m(\xi_2) = m(\xi_3) = m(\xi_4) = 1$, o que nos dá

$$\left|\int_0^t \int_{*_4} \left(1 - \frac{m_1}{m_2 \cdot m_3 \cdot m_4}\right) \widehat{\overline{I\Delta u_1}}(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_3}}(\xi_3)\widehat{Iu_4}(\xi_4)d\xi dt\right| = 0$$

e obtemos a limitação desejada trivialmente.

Caso 2: $KN_2 \geqslant N > KN_3$

Nesse caso, $N > KN_3 \geqslant KN_4$, o que nos dá $m_3 = m_4 = 1$, e $N_2 > N_3 \Rightarrow N_2 \geqslant 2N_3$ (lembre que os N_j são potências de 2), e logo,

$$\frac{1}{2}N_1 \leqslant |\xi_1| \leqslant |\xi_2| + |\xi_3| + |\xi_4| \leqslant 4N_3 + 2N_2 \leqslant 4N_2,$$

e portanto

$$N_1 \leqslant 8N_2,$$

assim, pelo Teorema do Valor Médio temos

$$\left|1-\frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}\right| \leqslant \left|\frac{m(\xi_2)-m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)}\right| \leqslant \left|\frac{\nabla m(\xi_2)\cdot(\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)}\right|.$$

Como

$$|\xi_3+\xi_4| \leqslant |\xi_3|+|\xi_4| \lesssim N_3 \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{\nabla m(\xi_2)}{m(\xi_2)}\right| \lesssim \frac{1}{N_2}$$

temos

$$\left|1-\frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}\right| \lesssim \frac{N_3}{N_2}.$$

Por outro lado, levando em conta que o suporte das u_j se concentra em torno de N_j temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{*4} \widehat{\overline{I\Delta u_1}}(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_3}}(\xi_3)\widehat{Iu_4}(\xi_4)\right| &= \left|\int_{*4} |\xi_1|^2\widehat{\overline{Iu_1}}(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_3}}(\xi_3)\widehat{Iu_4}(\xi_4)\right| \\
&= \left|\int_{*4} \frac{|\xi_1|^2}{\langle\xi_1\rangle}\langle\xi_1\rangle\widehat{\overline{Iu_1}}(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_3}}(\xi_3)\widehat{Iu_4}(\xi_4)\right| \\
&\lesssim N_1\left|\int_{*4} \widehat{\overline{I\langle D\rangle u_1}}(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_3}}(\xi_3)\widehat{Iu_4}(\xi_4)\right|
\end{aligned}$$

Analogamente, renormalizamos as u_j restantes para obter que a quantidade

$$\left|\int_0^t\int_{*4}\left(1-\frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}\right)\widehat{\overline{I\Delta u_1}}(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_3}}(\xi_3)\widehat{Iu_4}(\xi_4)d\xi dt\right|$$

é limitada, a menos de constante por

$$\frac{N_3}{N_2}N_1\left(N_2\cdot\langle N_3\rangle\cdot\langle N_4\rangle\right)^{-1}\left|\int_0^t\int_{*4}\prod_{j=1}^{4}\widehat{I\langle D\rangle u_j}(\xi_j)\right|.$$

Usando novamente a Proposição 4.2.12 e Hölder no tempo e espaço, obtemos que a expressão acima é limitada por

$$\frac{N_3}{N_2}N_1\left(N_2\cdot\langle N_3\rangle\cdot\langle N_4\rangle\right)^{-1}\|I\langle D\rangle u_1\cdot I\langle D\rangle u_3\|_{L^2_tL^2_x}\|I\langle D\rangle u_2\cdot I\langle D\rangle u_4\|_{L^2_tL^2_x}$$

que, por sua vez pode ser estimada, pelo Teorema 4.2.9, obtendo

$$\frac{N_3}{N_2}N_1\left(N_2\cdot\langle N_3\rangle\cdot\langle N_4\rangle\right)^{-1}\left(\frac{N_3N_4}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}-}\|I_N\langle D\rangle u\|^4_{S^0_T}$$

Utilizamos, agora as estimativas obtidas para N e N_j, para simplificar a cota acima.

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{N_3}{N_2}N_1\left(N_2\cdot\langle N_3\rangle\cdot\langle N_4\rangle\right)^{-1}\left(\frac{N_3N_4}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}-} &\lesssim N_2^{-\frac{3}{2}+}N_2^{-1}N_3^{\frac{1}{2}-}\langle N_4\rangle^{-\frac{1}{2}-}N_1^{\frac{1}{2}-}\\
&\lesssim N^{-\frac{3}{2}+}N_2^{-1}N_3^{\frac{1}{2}}N_3^{0-}\langle N_4\rangle^{-\frac{1}{2}-}N_1^{\frac{1}{2}-}\\
&\lesssim N^{-\frac{3}{2}+}N_2^{-1}N_2^{\frac{1}{2}}N_3^{0-}\langle N_4\rangle^{-\frac{1}{2}-}N_2^{\frac{1}{2}-}N_1^{0-}\\
&= N^{-\frac{3}{2}+}N_1^{0-}N_2^{0-}N_3^{0-}\langle N_4\rangle^{0-}\\
&= N^{-\frac{3}{2}+}\prod_{j=1}^{4}N_j^{0-}
\end{aligned}$$

assim chegando na desigualdade desejada.

Caso 3: $KN_3 \geqslant N$ e $N_1 \sim N_2$

Primeiro devemos obter a seguinte estimativa

$$\left|1-\frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}\right| \leqslant \frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}$$

De fato usando o Lema 5.2.4 (veja o Apêndice) temos

$$\begin{aligned}
\frac{|\xi_2|^{s-1}|\xi_3|^{s-1}|\xi_4|^{s-1}}{N^{s-1}N^{s-1}N^{s-1}} &\leqslant \frac{|\xi_2|^{3(s-1)}}{N^{3(s-1)}}+\frac{|\xi_3|^{3(s-1)}}{N^{3(s-1)}}+\frac{|\xi_4|^{3(s-1)}}{N^{3(s-1)}}\\
&\leqslant \left(\frac{|\xi_2|+|\xi_3|+|\xi_4|}{N}\right)^{3(s-1)}\\
&\leqslant \left(\frac{|\xi_2|+|\xi_3|+|\xi_4|}{N}\right)^{s-1}\\
&\leqslant \left(\frac{|\xi_1|}{N}\right)^{s-1}.
\end{aligned}$$

Em particular isso garante que $m_2\cdot m_3\cdot m_4 \leqslant m_1 \leqslant 2m_1$. Logo

$$0 \leqslant 1 \leqslant \frac{2m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4},$$

e

$$-\frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4} \leqslant 1-\frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4} \leqslant \frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}$$

o que nos garante a estimativa desejada. Veja também que

$$\begin{aligned}
\frac{m_1}{m_2m_3m_4}N_1\left(N_2N_3\langle N_4\rangle\right)^{-1}\left(\frac{N_3N_4}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}-} &= \frac{m_1N_1}{m_2N_2^{\frac{3}{2}-}m_3N_3^{\frac{1}{2}+}m_4\langle N_4\rangle^{\frac{1}{2}+}N_1^{\frac{1}{2}-}}\\
&\lesssim \frac{m_1N_2}{m_2N_2^{\frac{3}{2}-}m_3N_3^{\frac{1}{2}+}m_4\langle N_4\rangle^{\frac{1}{2}+}N_1^{\frac{1}{2}-}}\\
&= \frac{m_1}{m_2N_2^{\frac{1}{2}-}m_3N_3^{\frac{1}{2}+}m_4\langle N_4\rangle^{\frac{1}{2}+}N_1^{\frac{1}{2}-}}
\end{aligned}$$

mas longe da origem temos

$$m(\xi)|\xi|^{\frac{1}{2}} = \frac{|\xi|^{s-1}}{N^{s-1}}|\xi|^{\frac{1}{2}} = N^{1-s}|\xi|^{s-\frac{1}{2}}$$

que é crescente quando $s > 1/2$ e limitada inferiormente por 1. Por outro lado se $j = 2, 3$ então

$$m_j N_j^{\frac{1}{2}} = |\xi_j|^{s-1} N^{1-s} N_j^{\frac{1}{2}} \gtrsim N^{\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$\frac{m_1}{m_2 N_2^{\frac{1}{2}-} m_3 N_3^{\frac{1}{2}+} m_4 \langle N_4\rangle^{\frac{1}{2}+} N_1^{\frac{1}{2}-}} \lesssim \frac{1}{N N_1^{\frac{1}{2}-}} = N^{-\frac{3}{2}+} N^{\frac{1}{2}-} N_1^{-\frac{1}{2}}$$

Como nesse caso temos $N_1 \sim N_2 \geqslant N_3 \gtrsim N$, então

$$N^{-\frac{3}{2}+} N^{\frac{1}{2}-} N_1^{-\frac{1}{2}} \lesssim N^{-\frac{3}{2}+} N_3^{\frac{1}{2}-} N_3^{-\frac{1}{2}+} N_1^{0-} \lesssim N^{-\frac{3}{2}+} N_1^{0-} N_2^{0-} N_3^{0-} N_4^{0-}.$$

Do mesmo modo do caso anterior podemos renormalizar as u_j, usar Hölder no tempo e no espaço e o Teorema 4.2.9 para obter

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t \int_{*4} \left(1 - \frac{m_1}{m_2 \cdot m_3 \cdot m_4}\right) \widehat{\overline{I\Delta u_1}}(\xi_1) \widehat{Iu_2}(\xi_2) \widehat{\overline{Iu_3}}(\xi_3) \widehat{Iu_4}(\xi_4) d\xi dt\right| \\
&\qquad \leqslant N^{-\frac{3}{2}+} \|I_N \langle D\rangle u\|_{S_T^0}^4 \prod_{j=1}^4 N_j^{0-}
\end{aligned}$$

Caso 4: $KN_3 \geqslant N$ e $N_3 \sim N_2$

Abordamos esse caso de maneira similar ao caso 3. Usamos novamente a desigualdade

$$\left|1 - \frac{m_1}{m_2 \cdot m_3 \cdot m_4}\right| \leqslant \frac{m_1}{m_2 \cdot m_3 \cdot m_4}$$

e observamos que

$$\frac{1}{2} N_1 \leqslant |\xi_1| \leqslant |\xi_2| + |\xi_3| + |\xi_4| \leqslant 6N_2 \lesssim N_3.$$

Logo $N_1 \lesssim N_3$, e assim,

$$\begin{aligned}
\frac{m_1}{m_2 m_3 m_4} N_1 \left(N_2 N_3 \langle N_4\rangle\right)^{-1} \left(\frac{N_1 N_4}{N_2 N_3}\right)^{\frac{1}{2}-} &= \frac{m_1 N_1^{\frac{3}{2}-}}{m_2 N_2^{\frac{3}{2}-} m_3 N_3^{\frac{3}{2}-} m_4 \langle N_4\rangle^{\frac{1}{2}+}} \\
&\lesssim \frac{N_1^{\frac{3}{2}-}}{m_2 N_2^{\frac{3}{2}-} m_3 N_3^{\frac{3}{2}-}} \\
&= \frac{N_1^{\frac{3}{2}-}}{m_2 N_2^{\frac{1}{2}-} m_3 N_3^{\frac{1}{2}-} N_2 N_3} \\
&\lesssim \frac{N_1^{\frac{3}{2}-}}{N N_2 N_3}.
\end{aligned}$$

Usamos novamente as estimativas entre N, N_1 e N_3, para conseguir

$$\begin{aligned}
\frac{N_1^{\frac{3}{2}-}}{NN_2N_3} &\lesssim \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}N_2} \\
&= N^{-\frac{3}{2}+}\frac{N^{1-}}{N_2} \\
&\lesssim N^{-\frac{3}{2}+}N_3^{0-} \\
&\lesssim N^{-\frac{3}{2}+}N_1^{0-}N_2^{0-}N_3^{0-}N_4^{0-} \\
&= N^{-\frac{3}{2}+}\prod_{j=1}^{4}N_j^{0-}.
\end{aligned}$$

Novamente renormalizando as u_j, usando Hölder no tempo e espaço, e agrupando, desta vez

$$\|I\langle D\rangle u_2 \cdot I\langle D\rangle u_1\|_{L_t^2L_x^2} \qquad \text{e} \qquad \|I\langle D\rangle u_3 \cdot I\langle D\rangle u_4\|_{L_t^2L_x^2}$$

e usando a Proposição 4.2.9, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\int_{*4}\left(1-\frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}\right)\widehat{\overline{I\Delta u_1}}(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_3}}(\xi_3)\widehat{Iu_4}(\xi_4)d\xi dt\right| \\
&\qquad\qquad \leqslant N^{-\frac{3}{2}+}\|I_N\langle D\rangle u\|_{S_T^0}^4\prod_{j=1}^{4}N_j^{0-}
\end{aligned}$$

o que conclui o caso 4. De fato isso é suficiente para concluir a demonstração do lema, pois se tivermos $N_3 \ll N_2$ então isso obriga $N_1 \sim N_2$, portanto os quatro casos acima cobrem todas as possibilidades.

□

Para estimar o termo E_2 fazemos uma mudança de variável para obter

$$E_2 = \left|\int_0^t\int_{\tilde{\xi_1}+\xi_4+\xi_5+\xi_6=0}\left(1-\frac{m(\tilde{\xi_1})}{m_4\cdot m_5\cdot m_6}\right)\widehat{\overline{I_N|u|^2u}}(\tilde{\xi_1})\widehat{I_Nu}(\xi_4)\widehat{\overline{I_Nu}}(\xi_5)\widehat{I_Nu}(\xi_6)d\xi dt\right|$$

e observamos que

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\xi_1}+\xi_4+\xi_5+\xi_6=0}\widehat{\overline{I_N|u|^2u}}(\tilde{\xi_1})d\xi &= \int_{\tilde{\xi_1}+\xi_4+\xi_5+\xi_6=0}m(\tilde{\xi_1})(\widehat{\overline{u}}*\widehat{u}*\widehat{\overline{u}})(\tilde{\xi_1})d\xi \\
&= \int_{\tilde{\xi_1}+\xi_4+\xi_5+\xi_6=0}m(\tilde{\xi_1})\int_{\mathbb{R}^d}(\widehat{\overline{u}}*\widehat{u})(\tilde{\xi_1}-\eta)\widehat{\overline{u}}(\eta)d\eta d\xi
\end{aligned}$$

Fazendo $\eta = \xi_3$ e $\tilde{\xi_2} = \tilde{\xi_1} - \eta$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\xi_1}+\xi_4+\xi_5+\xi_6=0}\widehat{\overline{I_N|u|^2u}}(\tilde{\xi_1})d\xi &= \int_{\tilde{\xi_2}+\xi_3+\xi_4+\xi_5+\xi_6=0}m(\tilde{\xi_2}+\xi_3)(\widehat{\overline{u}}*\widehat{u})(\tilde{\xi_2})\widehat{\overline{u}}(\xi_3)d\xi_3 d\xi \\
&= \int_{*6}m(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\widehat{\overline{u}}(\xi_1)\widehat{u}(\xi_2)\widehat{\overline{u}}(\xi_3)d\xi
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é obtida de forma análoga. Denotamos, então, $m_{123} = m(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$ e N_{123} tal que

$$\frac{1}{c} N_{123} \leqslant |\xi_1 + \xi_2 + \xi_3| \leqslant c N_{123}$$

para alguma constante $c \geqslant 2$ e temos o seguinte lema.

Lema 4.2.20. *Seja* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *e* $u(t)$ *a solução correspondente de (1.1) no intervalo* $[0, \tilde{T})$. *Então*

$$\left| \int_0^t \int_{*6} \left(1 - \frac{m_{123}}{m_4 \cdot m_5 \cdot m_6}\right) m_{123} \left(\widehat{\overline{u_1}}(\xi_1) \widehat{u_2}(\xi_2) \widehat{\overline{u_3}}(\xi_3)\right) \widehat{Iu_4}(\xi_4) \widehat{\overline{Iu_5}}(\xi_5) \widehat{Iu_6}(\xi_6) d\xi dt \right|$$
$$\leqslant N^{-2^+} \|I_N \langle D \rangle u\|^6_{S^0_{\tilde{T}}} \prod_{j=1}^{6} N^{0-}.$$

Dem. A prova será feita através de uma análise caso a caso, similar á do Lema 4.2.19, novamente observando que não há perda de generalidade em supor $N_1 \geqslant N_2 \geqslant N_3$ e $N_4 \geqslant N_5 \geqslant N_6$. Fixamos, novamente, a contante universal $K = 12c$ e temos

Caso 1: $N > KN_4$

Nesse caso observamos que

$$\frac{1}{c} N_{123} \leqslant |\xi_1 + \xi_2 + \xi_3| \leqslant |\xi_4| + |\xi_5| + |\xi_6| \leqslant 6N_4,$$

e assim,

$$N_{123} \leqslant 6cN_2 < \frac{6c}{K} N,$$

o que nos dá

$$2N_1 = \frac{K}{6c} N_1 < N.$$

Pela definição de $m(\xi)$ temos que $m_{123} = m(\xi_4) = m(\xi_5) = m(\xi_6) = 1$ o que nos dá

$$\left| \int_0^t \int_{*6} \left(1 - \frac{m_{123}}{m_4 \cdot m_5 \cdot m_6}\right) m_{123} \left(\widehat{\overline{u_1}}(\xi_1) \widehat{u_2}(\xi_2) \widehat{\overline{u_3}}(\xi_3)\right) \widehat{Iu_4}(\xi_4) \widehat{\overline{Iu_5}}(\xi_5) \widehat{Iu_6}(\xi_6) d\xi dt \right| = 0$$

e obtemos a limitação desejada trivialmente.

Caso 2: $KN_4 \geqslant N > KN_5$

Como garantimos $N > KN_5 \geqslant KN_6$ temos $m_5 = m_6 = 1$. Logo, pelo Teorema do valor médio temos

$$\left|1 - \frac{m_{123}}{m_4 \cdot m_5 \cdot m_6}\right| \leqslant \left|\frac{m(\xi_4) - m(\xi_4 + \xi_5 + \xi_6)}{m_4}\right| \leqslant \left|\frac{\nabla m(\xi_4) \cdot (\xi_5 + \xi_6)}{m_4}\right| \lesssim \frac{N_5}{N_4}.$$

Assim

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{*6}\left(1-\frac{m_{123}}{m_4\cdot m_5\cdot m_6}\right)m_{123}\left(\widehat{\overline{u_1}}(\xi_1)\widehat{u_2}(\xi_2)\widehat{\overline{u_3}}(\xi_3)\right)\prod_{j=4}^{6}\widehat{Iu_j}(\xi_j)d\xi\right|\\
\lesssim\;& \frac{N_5}{N_4}\left|\int_{*6} m_{123}\left(\widehat{\overline{u_1}}(\xi_1)\widehat{u_2}(\xi_2)\widehat{\overline{u_3}}(\xi_3)\right)\prod_{j=4}^{6}\widehat{Iu_j}(\xi_j)d\xi\right|\\
\lesssim\;& (\langle N_1\rangle\langle N_2\rangle)^{-1}\frac{N_5}{N_4}\left|\int_{*6} m_{123}\left(\widehat{\langle D\rangle\overline{u_1}}(\xi_1)\widehat{\langle D\rangle u_2}(\xi_2)\widehat{\overline{u_3}}(\xi_3)\right)\prod_{j=4}^{6}\widehat{Iu_j}(\xi_j)d\xi\right|\\
=\;& (\langle N_1\rangle\langle N_2\rangle)^{-1}\frac{N_5}{N_4}\left|\int_{\tilde{\xi_1}+\xi_4+\xi_5+\xi_6}\frac{m(\tilde{\xi_1})}{m_1m_2m_3}(\widehat{I\langle D\rangle\overline{u}_1}*\widehat{I\langle D\rangle u_2}*\widehat{I\overline{u_3}})(\tilde{\xi_1})\prod_{j=4}^{6}\widehat{Iu_j}(\xi_j)d\xi\right|.
\end{aligned}
$$

Por hora, vamos retirar as funções m_{123} e $m_1m_2m_3$ da integral a fim de compactar a notação. A rigor todo o cálculo a seguir deveria ser feito dentro da integral. Renormalizamos apenas os termos u_4 e u_5 e usamos a localização de $|\xi_4|$ e $|\xi_5|$ para obter

$$
\begin{aligned}
=\;& (\langle N_1\rangle\langle N_2\rangle)^{-1}\frac{N_5}{N_4}\left|\int_{\tilde{\xi_1}+\xi_4+\xi_5+\xi_6}\frac{m(\tilde{\xi_1})}{m_1m_2m_3}(\widehat{I\langle D\rangle\overline{u}_1}*\widehat{I\langle D\rangle u_2}*\widehat{I\overline{u_3}})(\tilde{\xi_1})\prod_{j=4}^{6}\widehat{Iu_j}(\xi_j)d\xi\right|\\
\lesssim\;& (\langle N_1\rangle\langle N_2\rangle N_4\langle N_5\rangle)^{-1}\frac{N_5}{N_4}\frac{m_{123}}{m_1m_2m_3}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} I\langle D\rangle\overline{u_1}I\langle D\rangle u_2I\overline{u_3}\prod_{j=4}^{6}I\langle D\rangle u_j\right|\\
\leqslant\;& (\langle N_1\rangle\langle N_2\rangle N_4\langle N_5\rangle)^{-1}\frac{N_5}{N_4}\frac{m_{123}}{m_1m_2m_3}\|I\langle D\rangle\overline{u_1}I\langle D\rangle u_2I\overline{u_3}Iu_6\|_{L^2_tL^2_x}\|I\langle D\rangle u_4\cdot I\langle D\rangle u_5\|_{L^2_tL^2_x}\\
\lesssim\;& (\langle N_1\rangle\langle N_2\rangle N_4\langle N_5\rangle)^{-1}\frac{N_5}{N_4}\left(\frac{N_5}{N_4}\right)^{\frac{1}{2}-}\frac{m_{123}}{m_1m_2m_3}\|I\langle D\rangle\overline{u_1}I\langle D\rangle u_2I\overline{u_3}Iu_6\|_{L^2_tL^2_x}\|I\langle D\rangle u\|^2_{S^0_T}
\end{aligned}
$$

onde nas últimas duas desigualdades usamos Hölder e o Teorema 4.2.9. Agora usamos novamente Hölder e a Proposição 4.2.11 nas funções Iu_3 e Iu_6, para obter

$$
\begin{aligned}
\|I\langle D\rangle\overline{u_1}I\langle D\rangle u_2I\overline{u_3}Iu_6\|_{L^2_tL^2_x} &\leqslant \|I\langle D\rangle\overline{u_1}I\langle D\rangle u_2\|_{L^2_tL^2_x}\|Iu_3\|_{L^\infty_tL^\infty_x}\|Iu_6\|_{L^\infty_tL^\infty_x}\\
&\lesssim \|I\langle D\rangle\overline{u_1}\|_{L^4_tL^4_x}\|I\langle D\rangle u_2\|_{L^4_tL^4_x}\|I\langle D\rangle u_3\|_{L^\infty_tL^2_x}\|I\langle D\rangle u_6\|_{L^\infty_tL^2_x}
\end{aligned}
$$

e como os pares $(4,4)$ e $(2,\infty)$ são admissíveis, temos

$$
\|I\langle D\rangle\overline{u_1}I\langle D\rangle u_2I\overline{u_3}Iu_6\|_{L^2_tL^2_x}\lesssim\|I\langle D\rangle u\|^4_{S^0_T}.
$$

Por fim, nos resta limitar as quantidades envolvendo os termos m_j e N_j acima. De fato temos

$$
\begin{aligned}
\frac{m_{123}}{m_1m_2m_3}(\langle N_1\rangle\langle N_2\rangle)^{-1} &= \frac{m_{123}}{m_1m_2m_3}(\langle N_1\rangle\langle N_2\rangle)^{-1}\frac{\langle N_3\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle N_3\rangle^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{m_{123}\langle N_3\rangle^{\frac{1}{2}}}{m_1\langle N_1\rangle^{\frac{1}{2}}m_2\langle N_2\rangle^{\frac{1}{2}}m_3\langle N_3\rangle^{\frac{1}{2}}\langle N_1\rangle^{\frac{1}{2}}\langle N_2\rangle^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Como no caso 3 do lema anterior temos $m_j\langle\xi_j\rangle^{\frac{1}{2}}$ limitado inferiormente por 1 e $m(\xi) \leqslant 1$. Além disso $N_2 \geqslant N_3$, logo

$$\frac{m_{123}\langle N_3\rangle^{\frac{1}{2}}}{m_1\langle N_1\rangle^{\frac{1}{2}}m_2\langle N_2\rangle^{\frac{1}{2}}m_3\langle N_3\rangle^{\frac{1}{2}}\langle N_1\rangle^{\frac{1}{2}}\langle N_2\rangle^{\frac{1}{2}}} \leqslant \langle N_1\rangle^{-\frac{1}{2}}.$$

Agora limitamos

$$\begin{aligned}
(\langle N_1\rangle\langle N_2\rangle N_4\langle N_5\rangle)^{-1}\frac{N_5}{N_4}\left(\frac{N_5}{N_4}\right)^{\frac{1}{2}-}\frac{m_{123}}{m_1m_2m_3} &\lesssim \langle N_1\rangle^{-\frac{1}{2}}(N_4\langle N_5\rangle)^{-1}\frac{N_5}{N_4}\left(\frac{N_5}{N_4}\right)^{\frac{1}{2}-}\\
&= \langle N_1\rangle^{-\frac{1}{2}}\frac{N_5^{\frac{1}{2}-}}{N_4^{\frac{5}{2}-}}\\
&\lesssim \langle N_1\rangle^{-\frac{1}{2}}\frac{N_5^{\frac{1}{2}-}}{N_4^{\frac{5}{2}-}N_4^{0+}}\\
&\lesssim N_5^{-2+}(N_1N_2\ldots N_6)^{0-}\\
&\lesssim N^{-2+}(N_1N_2\ldots N_6)^{0-}
\end{aligned}$$

portanto obtendo

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\int_{*6}\left(1-\frac{m_{123}}{m_4\cdot m_5\cdot m_6}\right)m_{123}\left(\widehat{\overline{u_1}}(\xi_1)\widehat{u_2}(\xi_2)\widehat{\overline{u_3}}(\xi_3)\right)\widehat{Iu_4}(\xi_4)\widehat{\overline{Iu_5}}(\xi_5)\widehat{Iu_6}(\xi_6)d\xi dt\right|\\
&\qquad\leqslant N^{-2+}\|I_N\langle D\rangle u\|^6_{S^0_T}\prod_{j=1}^{6}N^{0-}
\end{aligned}$$

Caso 3: $KN_5 \geqslant N > KN_6$.

Como no caso 3 do lema anterior usaremos a estimativa

$$\left|1-\frac{m_{123}}{m_4\cdot m_5\cdot m_6}\right| \leqslant \frac{m_{123}}{m_4\cdot m_5\cdot m_6},$$

e seguimos os mesmos passos do caso 2 acima para obter,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\int_{*6}\left(1-\frac{m_{123}}{m_4\cdot m_5\cdot m_6}\right)m_{123}\left(\widehat{\overline{u_1}}(\xi_1)\widehat{u_2}(\xi_2)\widehat{\overline{u_3}}(\xi_3)\right)\widehat{Iu_4}(\xi_4)\widehat{\overline{Iu_5}}(\xi_5)\widehat{Iu_6}(\xi_6)d\xi dt\right|\\
&\qquad\leqslant \langle N_1\rangle^{-\frac{1}{2}}(N_4N_5)^{-1}\left(\frac{N_5}{N_4}\right)^{\frac{1}{2}-}\frac{m_{123}}{m_4\cdot m_5\cdot m_6}\|I_N\langle D\rangle u\|^6_{S^0_T}.
\end{aligned}$$

Agora observe que, como no lema anterior, para $j = 4, 5$ temos

$$m_jN_j^{\frac{1}{2}} \gtrsim N^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, reorganizando os termos, usando as limitações sobre N e N_j e observando que nesse caso $m_6 = 1$ temos

$$\begin{aligned}
\langle N_1\rangle^{-\frac{1}{2}}(N_4N_5)^{-1}\left(\frac{N_5}{N_4}\right)^{\frac{1}{2}-}\frac{m_{123}}{m_4\cdot m_5\cdot m_6} &= \frac{m_{123}}{m_4N_4^{\frac{1}{2}-}m_5N_5^{\frac{1}{2}+}m_6N_4\langle N_1\rangle^{\frac{1}{2}}}\\
&\lesssim \frac{1}{NN_4\langle N_1\rangle^{\frac{1}{2}}}\\
&\lesssim \frac{1}{NN_4^{0-}N_4^{0+}\langle N_1\rangle^{\frac{1}{2}}}\\
&\lesssim N^{-2+}(N_1N_2\dots N_6)^{0-}
\end{aligned}$$

o que conclui o caso 3.

Caso 4: $KN_6 \geqslant N$. Analogamente ao caso anterior obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\int_{*6}\left(1-\frac{m_{123}}{m_4\cdot m_5\cdot m_6}\right)m_{123}\left(\widehat{\overline{u_1}}(\xi_1)\widehat{u_2}(\xi_2)\widehat{\overline{u_3}}(\xi_3)\right)\widehat{Iu_4}(\xi_4)\widehat{\overline{Iu_5}}(\xi_5)\widehat{Iu_6}(\xi_6)d\xi dt\right|\\
&\qquad\leqslant \langle N_1\rangle^{-\frac{1}{2}}(N_4N_5)^{-1}\left(\frac{N_5}{N_4}\right)^{\frac{1}{2}-}\frac{m_{123}}{m_4\cdot m_5\cdot m_6}\|I_N\langle D\rangle u\|^6_{S^0_T}
\end{aligned}$$

no entanto, neste caso temos

$$m_jN_j^{\frac{1}{2}} \gtrsim N^{\frac{1}{2}}$$

para $j = 4, 5, 6$. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle N_1\rangle^{-\frac{1}{2}}(N_4N_5)^{-1}\left(\frac{N_5}{N_4}\right)^{\frac{1}{2}-}\frac{m_{123}}{m_4\cdot m_5\cdot m_6} &= \frac{m_{123}N_6^{\frac{1}{2}}}{m_4N_4^{\frac{1}{2}-}m_5N_5^{\frac{1}{2}+}m_6N_6^{\frac{1}{2}}N_4\langle N_1\rangle^{\frac{1}{2}}}\\
&\lesssim \frac{N_6^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{3}{2}}\langle N_1\rangle^{\frac{1}{2}}N_4}\\
&\lesssim \frac{N_6^{\frac{1}{2}}}{N^{2-}N^{-\frac{1}{2}+}N_4\langle N_1\rangle^{\frac{1}{2}}}\\
&\lesssim \frac{N_6^{\frac{1}{2}}}{N^{2-}N_4^{\frac{1}{2}+}\langle N_1\rangle^{\frac{1}{2}}}\\
&\leqslant N^{-2+}N_4^{0-}\langle N_1\rangle^{-\frac{1}{2}}\\
&\lesssim N^{-2+}(N_1N_2\dots N_6)^{0-}
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do lema. □

Com o resultado dos Lemas 4.2.19 e 4.2.20 podemos estimar a variação de energia. Considere $k = (k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbb{Z}^4$ e $N_j^k = 2^{k_j}$. Pela decomposição de Littlewood-Palley temos

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\int_{*_4}\left(1-\frac{m(\xi_1)}{m(\xi_2)\cdot m(\xi_3)\cdot m(\xi_4)}\right)\widehat{\overline{I_N\Delta u}}(\xi_1)\widehat{I_N u}(\xi_2)\widehat{\overline{I_N u}}(\xi_3)\widehat{I_N u}(\xi_4)d\xi dt\right|\\
= &\left|\int_0^t\int_{*_4}\sum_{k\in\mathbb{Z}^4}\left(1-\frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}\right)\widehat{\overline{I\Delta u_{N_1^k}}}(\xi_1)\widehat{Iu_{N_2^k}}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_{N_3^k}}}(\xi_3)\widehat{Iu_{N_4^k}}(\xi_4)d\xi dt\right|
\end{aligned}
$$

Observamos agora que basta considerar os termos N_j maiores que 1, isto é, os termos da forma $N_j = 2^k$ com $k \in \mathbb{N}$, pois abaixo disso a definição de $m(\xi)$ nos dá

$$\left(1-\frac{m(\xi_1)}{m(\xi_2)\cdot m(\xi_3)\cdot m(\xi_4)}\right)=0$$

e obtemos a cota trivialmente. Logo,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\int_{*_4}\sum_{k\in\mathbb{Z}^4}\left(1-\frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}\right)\widehat{\overline{I\Delta u_{N_1^k}}}(\xi_1)\widehat{Iu_{N_2^k}}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_{N_3^k}}}(\xi_3)\widehat{Iu_{N_4^k}}(\xi_4)d\xi dt\right|\\
\lesssim &\left|\int_0^t\int_{*_4}\sum_{k\in\mathbb{N}^4}\left(1-\frac{m_1}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}\right)\widehat{\overline{I\Delta u_{N_1^k}}}(\xi_1)\widehat{Iu_{N_2^k}}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_{N_3^k}}}(\xi_3)\widehat{Iu_{N_4^k}}(\xi_4)d\xi dt\right|\\
\lesssim\ & N^{-\frac{3}{2}+}\|I_N\langle D\rangle u\|^4_{S^0_T}\sum_{k\in\mathbb{N}^4}\prod_{j=1}^4 (N_j^k)^{0-}\\
=\ & N^{-\frac{3}{2}+}\|I_N\langle D\rangle u\|^4_{S^0_T},
\end{aligned}
$$

e da mesma maneira obtemos

$$E_2 \lesssim N^{-2^+}\|I_N\langle D\rangle u\|_{S^0_T}$$

o que conclui a prova do teorema. □

Demonstração do Teorema 4.2.15. Se $s \geqslant 1$ tomamos $N(T) = +\infty$ e temos $I_N(T) =$ Identidade, para todo T. Como a energia em $H^s(\mathbb{R}^d)$, $s \geqslant 1$ é conservada e portanto limitada, o resultado segue trivialmente. Restringimos então a atenção para $s < 1$.

Considere $\alpha_1 = 3/2^-$ e $\alpha_2 = 2^-$. Fixe $s \in (s_Q, 1)$ e $T > 0$ próximo de T^*. Seja $\delta = c(\Sigma(T))^{-\frac{2}{s}}$ (Lembre-se da Definição 4.2.14). Note que δ é o tempo de existência da solução com dado inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$, onde $\|I_N u_0\|_{H^1} = \Sigma(T)$, que é o maior valor que $\|I_N u(t)\|_{H^1}$ assume até o tempo T. Logo o intervalo $[0,T]$ pode ser particionado em J intervalos, de tamanho menor ou igual a δ, onde o resultado do Teorema 4.2.18 vale uniformemente, isto é, $[0,T] = \bigcup_{j=1}^{J} I_j$ onde $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, com

$$\|I_N\langle D\rangle u(t_j)\|_2 \leqslant \Sigma(T)$$

e

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[t_{j-1},t_j]}|E[I_N u(t)]| &\lesssim |E[I_N u(t_{j-1})]| + N^{-\alpha_1}\|I_N\langle D\rangle u(t_{j-1}))\|_2^4 + N^{-\alpha_2}\|I_N\langle D\rangle u(t_{j-1})\|_2^6 \\ &\lesssim |E[I_N u(t_{j-1})]| + N^{-\alpha_1}\Sigma(T)^4 + N^{-\alpha_2}\Sigma(T)^6.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}|E[I_N u(t)]| &\lesssim \sum_{j=1}^{J}\sup_{t\in[t_{j-1},t_j]}|E[I_N u(t)]| \\ &= \sup_{t\in[t_{J-1},t_J]}|E[I_N u(t)]| + \sum_{j=1}^{J-1}\sup_{t\in[t_{j-1},t_j]}|E[I_N u(t)]| \\ &\lesssim \sum_{j=1}^{J-1}\sup_{t\in[t_{j-1},t_j]}|E[I_N u(t)]| + N^{-\alpha_1}\Sigma(T)^4 + N^{-\alpha_2}\Sigma(T)^6 \\ &\vdots \\ &\lesssim |E[I_N u(0)]| + J(N^{-\alpha_1}\Sigma(T)^4 + N^{-\alpha_2}\Sigma(T)^6)\end{aligned}$$

observe que $J = C\frac{T}{\delta}$ e $T < T^*$. Logo,

$$\sup_{t\in[0,T]}|E[I_N u(t)]| \lesssim |E[I_N u(0)]| + \frac{T^*}{\delta}(N^{-\alpha_1}\Sigma(T)^4 + N^{-\alpha_2}\Sigma(T)^6).$$

Pela escolha de δ e usando a Proposição 4.2.2 obtemos

$$|E[I_N u(T)]| \lesssim N^{2(1-s)} + N^{-\alpha_1}\Sigma(T)^{4+\frac{2}{s}} + N^{-\alpha_2}\Sigma(T)^{6+\frac{2}{s}}.$$

Ainda pela Proposição 4.2.2 temos

$$|E[I_N u(T)]| \lesssim N^{2(1-s)} + N^{-\alpha_1+(4+\frac{2}{s})(1-s)}\Lambda(T)^{4+\frac{2}{s}} + N^{-\alpha_2+(6+\frac{2}{s})(1-s)}\Lambda(T)^{6+\frac{2}{s}}.$$

Como essa estimativa é válida para todo N podemos tomar $N = N(\Lambda(T))$ como

$$N = \Lambda^{\frac{6+\frac{2}{s}}{\alpha_2-(4+\frac{2}{s})(1-s)}},$$

obtemos que o primeiro e o terceiro termo da desigualdade acima são iguais e o segundo termo tem um grau menor do que os outros, portanto,

$$|E[I_N(T)u(T)]| \lesssim \Lambda(T)^{p(s)}$$

onde $p(s) = \dfrac{6+\frac{2}{s}}{\alpha_2 - (4+\frac{2}{s})(1-s)}$. Para concluir, a fim de ter $p(s) < 2$, devemos ter

$$10s^2 + (\alpha_2 - 6)s - 4 > 0.$$

Substituindo $\alpha_2 = 2^-$ temos

$$s > s_Q = \frac{1+\sqrt{11}}{5}$$

o que nos dá o resultado. $\square$

Teorema 4.2.21. *Assuma* $d = 2$ *e* $s > s_Q$. *Seja* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *tal que a solução correspondente* u *de (1.1) exploda em tempo finito* $T^* > 0$. *Então existe uma sequência* $t_n \uparrow T^*$ *tal que a seguinte afirmação é verdadeira: Existe* $V \in H^s(\mathbb{R}^d)$ *com* $\|V\|_{L^2} \geqslant \|Q\|_{L^2}$ *e uma sequência* $\{\rho_n, x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$ *satisfazendo:*

$$\rho_n \leqslant A(T^* - t_n)^{\frac{s}{2}}$$

Para algum $A > 0$, *tal que*

$$\rho_n u(t_n, \rho_n \cdot + x_n) \rightharpoonup V \qquad \text{em } H^s(\mathbb{R}^2)$$

Dem. Escolha $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $t_n \uparrow T^*$ e valha:

$$\|u(t_n)\|_{H^s} = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t_n} \|u(\tau)\|_{H^s} = \Lambda(t_n)$$

Tal sequência existe porque $\limsup_{t \to T^*} \|u(t)\|_{H^s} = \infty$. Durante a demonstração consideramos $N = N(t_n)$ dado pelo Teorema 4.2.15. Escolhendo

$$\psi_n = \rho_n I_N u(t_n, \rho_n x)$$

onde

$$\rho_n = \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}}{\|I_N u(t_n, \cdot)\|_{H^1}}$$

A Proposição 4.2.2 nos dá

$$\rho_n \leqslant \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}}{\|u(t_n, \cdot)\|_{H^s}} = \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}}{\Lambda(t_n)}$$

Do Propposição 3.2.16, podemos concluir que

$$C(T^* - t)^{-\frac{s}{2}} \leqslant \|I_N u(t)\|_{H^1},$$

logo,

$$C(T^* - t)^{\frac{s}{2}} \geqslant \frac{1}{\|I_N u(t)\|_{H^1}},$$

assim

$$\|\nabla Q\|_{L^2} C(T^* - t_n)^{\frac{s}{2}} \geqslant \rho_n,$$

e portanto

$$A(T^* - t_n)^{\frac{s}{2}} \geqslant \rho_n.$$

Observe que a sequência $\{\psi_n\}$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\|\psi_n\|_{L^2}^2 &= \int \rho_n^2 |I_N u(t_n, \rho_n x)|^2 dx \\
&= \int |I_N u(t_n, x)|^2 dx \\
&= \|I_N u(t_n)\|_{L^2}^2 \leqslant \|u(t_n)\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

e como $\nabla\psi_n = \rho_n^2 \nabla I_N u(t_n, \rho_n x)$ temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla\psi_n\|_{L^2}^2 &= \int |\nabla\psi_n(x)|^2 dx \\
&= \int \rho_n^4 |\nabla I_N u(t_n, \rho_n x)|^2 dx \\
&= \int \rho_n^2 |\nabla I_N u(t_n, x)|^2 dx \\
&= \rho_n^2 \|\nabla I_N u(t_n)\|_{L^2}^2 \\
&= \|\nabla Q\|_{L^2}^2 \frac{\|\nabla I_N u(t_n)\|_{L^2}^2}{\|I_N u(t_n)\|_{H^1}^2}.
\end{aligned}$$

Observe que pelo Teorema 4.2.15, a escolha de $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ garante que $N(t_n)$ seja crescente, obtendo, então, que $\|I_N u(t_n)\|_{L^2}$ é uma sequência crescente, e pela Proposição 4.2.2 é limitada. Como $\|\nabla I_N u(t_n)\|_{L^2}^2 \longrightarrow \infty$, temos que

$$\|\psi_n\|_{L^2} \leqslant \|u_0\|_{L^2} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \|\nabla\psi_n\|_{L^2} = \|\nabla Q\|_{L^2}.$$

Mais ainda, pelo Teorema 4.2.15 temos que:

$$\begin{aligned}
|E(\psi_n)| &= \left| \frac{1}{2}\|\nabla\psi_n\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\|\psi_n\|_{L^4}^4 \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}\rho_n^2 \|\nabla I_N u(t_n)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\rho_n^2 \|I_N u(t_n)\|_{L^4}^4 \right| \\
&= \rho_n^2 \left| E(I_{N(t_n)} u(t_n)) \right| \\
&\leqslant \rho_n^2 C_0(\Lambda(t_n))^{p(s)} \\
&\leqslant \frac{C_0(\Lambda(t_n))^{p(s)}}{\Lambda(t_n)^2} \\
&= C_0(\Lambda(t_n))^{p(s)-2}.
\end{aligned}$$

Como $\|u(t_n)\|_{H^s} \longrightarrow \infty$ e $p(s) < 2$, temos que

$$E(\psi_n) \longrightarrow 0 \qquad\qquad n \to \infty.$$

Em particular, isso nos dá que

$$\lim_{n\to\infty}\|\psi_n\|_{L^4}^4=\lim_{n\to\infty}2\|\nabla\psi_n\|_{L^2}^2=2\|\nabla Q\|_{L^2}^2 \tag{4.9}$$

Assim, a sequência $\{\psi_n\}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1.2 com $m=\left(2\|\nabla Q\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{4}}$ e $M=\|\nabla Q\|_{L^2}$. Observe que

$$\left(\frac{d}{d+2}\right)^{\frac{d}{4}}\frac{m^{\frac{d}{2}+1}}{M^{\frac{d}{2}}}\|Q\|_{L^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(2\|\nabla Q\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\|\nabla Q\|_{L^2}}\|Q\|_{L^2}=\|Q\|_{L^2}.$$

Assim, pelo Teorema 4.1.2, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^d$ tal que

$$\psi_n(\cdot+x_n)\rightharpoonup V \qquad \text{em } H^1(\mathbb{R}^2),$$

onde $\|V\|_{L^2}\geqslant\|Q\|_{L^2}$. Pela definição de $\{\psi_n\}$ temos que

$$\rho_n I_N u(t_n,\rho_n x+x_n)=V+\varepsilon_n,$$

onde $\varepsilon_n\rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. No entanto para todo $\bar{s}<s$ têm-se que

$$\begin{aligned}
\|\rho_n(I_N u(t_n)-u(t_n))(\rho_n x+x_n)\|_{\dot{H}^{\bar{s}}}^2 &= \|\rho_n(I_N u(t_n)-u(t_n))(\rho_n x)\|_{\dot{H}^{\bar{s}}}^2\\
&= \rho_n^2\int|\xi|^{2\bar{s}}|\left(I_N u(t_n)-u(t_n)(\rho_n\cdot)\right)\hat{}\,(\xi)|^2d\xi\\
&= \rho_n^2\int|\xi|^{2\bar{s}}|\rho_n^{-2}\left(I_N u(t_n)-u(t_n)\right)\hat{}\,(\xi/\rho_n)|^2d\xi\\
&= \rho_n^2\int|\xi\rho_n|^{2\bar{s}}|\rho_n^{-2}\left(I_N u(t_n)-u(t_n)\right)\hat{}\,(\xi)|^2\rho_n^2d\xi\\
&= \rho_n^{2\bar{s}}\int|\xi|^{2\bar{s}}|\left(I_N u(t_n)-u(t_n)\right)\hat{}\,(\xi)|^2d\xi\\
&= \rho_n^{2\bar{s}}\|I_N u(t_n)-u(t_n)\|_{\dot{H}^{\bar{s}}}^2
\end{aligned}$$

Observe que $|\xi|^{\bar{s}-s}(1-m(\xi))\leqslant N(t_n)^{\bar{s}-s}$ para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|I_N u(t_n)-u(t_n)\|_{\dot{H}^{\bar{s}}} &= \left(\int|\xi|^{2\bar{s}}(1-m(\xi))^2|\hat{u}(t_n)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int|\xi|^{2(\bar{s}-s)}(1-m(\xi))^2|\xi|^{2s}|\hat{u}(t_n)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant N^{\bar{s}-s}\|u(t_n)\|_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|\rho_n(I_N u(t_n)-u(t_n))(\rho_n x+x_n)\|_{\dot{H}^{\bar{s}}} &\leqslant \rho_n^{\bar{s}}N^{\bar{s}-s}\|u(t_n)\|_{H^s}\\
&\lesssim (\Lambda(t_n))^{\frac{p(s)(\bar{s}-s)}{2(1-s)}+1-\bar{s}}
\end{aligned}$$

Usando a fórmula explícita para $p(s)$ obtemos que

$$\frac{p(s)(\bar{s}-s)}{2(1-s)}+1-\bar{s}<0 \Longleftrightarrow \bar{s}<\tilde{s}:=\frac{s+1}{4-2s}$$

Nessas condições temos que

$$\|\rho_n(I_N u(t_n)-u(t_n))(\rho_n x+x_n)\|_{H^{\tilde{s}-}(\mathbb{R}^2)} \longrightarrow 0. \tag{4.10}$$

Logo,

$$\rho_n u(t_n,\rho_n x+x_n)=V+h_n \tag{4.11}$$

onde $h_n \rightharpoonup 0$ em $H^{\tilde{s}-}$, o que conclui a prova do teorema.

□

Teorema 4.2.22. *Nas hispóteses do Teorema acima seja* $\lambda(t)>0$ *tal que* $\dfrac{(T^*-t)^{\frac{s}{2}}}{\lambda(t)} \longrightarrow 0$ *quando* $t \uparrow T^*$. *Então existe* $x(t)\in\mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\limsup_{t\to T^*}\int_{|x-x(t)|<\lambda(t)}|u(t,x)|^2dx \geqslant \int Q^2$$

Dem. Pelo Teorema 4.2.21, existe uma sequência $t_n \to T^*$, uma sequência $\{\rho_n,x_n\}\in\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}^2$ e um perfil $V\in H^1(\mathbb{R}^2)$ tais que $\|V\|_{L^2}\geqslant\|Q\|_{L^2}$,

$$\rho_n u(t_n,\rho_n x+x_n)\rightharpoonup V$$

em $H^{\tilde{s}-}$ e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_n}{(T^*-t_n)^{\frac{s}{2}}}\leqslant A,$$

para algum $A>0$. Daí segue da Proposição 2.2.2 que para todo $R>0$

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n^2\int_{|x|<R}|u(t_n,\rho_n x+x_n)|^2dx \geqslant \int_{|x|<R}|V|^2dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^2}\int_{|x-y|<R\rho_n}|u(t_n,x)|^2dx &\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{|x-x_n|<R\rho_n}|u(t_n,x)|^2dx\\ &\geqslant \int_{|x|<R}|V|^2dx.\end{aligned}$$

Como $\dfrac{(T^*-t)^{\frac{s}{2}}}{\lambda(t)}\to 0$ quando $t\to T^*$ temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R\rho_n}{\lambda(t_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{R\rho_n}{(T^*-t_n)^{\frac{s}{2}}}\frac{(T^*-t_n)^{\frac{s}{2}}}{\lambda(t_n)}=0,$$

portanto

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^2}\int_{|x-y|<\lambda(t_n)}|u(t_n,x)|^2dx \geqslant \lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^2}\int_{|x-y|<R\rho_n}|u(t_n,x)|^2dx$$
$$\geqslant \int_{|x|<R}|V|^2dx.$$

Esta desigualdade vale para todo $R>0$. Assim, fazendo $R\to\infty$, pelo Teorema 4.2.21, obtemos

$$\limsup_{t\uparrow T^*}\sup_{y\in\mathbb{R}^2}\int_{|x-y|<\lambda(t)}|u(t,x)|^2dx \geqslant \int Q^2dx$$

Como, para cada $t\in(0,T^*)$ a função

$$y\mapsto\int_{|x-y|<\lambda(t)}|u(t,x)|^2dx$$

é contínua e se anula no infinito, podemos definir a função $x(t)$ tal que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^2}\int_{|x-y|<\lambda(t)}|u(t,x)|^2dx = \int_{|x-x(t)|<\lambda(t)}|u(t,x)|^2dx$$

obtendo

$$\limsup_{t\uparrow T^*}\int_{|x-x(t)|<\lambda(t)}|u(t,x)|^2dx \geqslant \int Q^2dx$$

o que conclui a prova. □

Capítulo 5

Soluções de *Blow-up* com Massa Mínima

Nos capítulos anteriores, observamos que existe uma cota pré-estabelecida sobre a norma em $L^2(\mathbb{R}^d)$ do dado inicial de uma solução, a fim de que ela seja uma solução de *blow-up* em tempo finito. Em $H^1(\mathbb{R}^d)$ explicitamos essa cota como sendo $\|Q\|_{L^2}$. O objetivo deste capítulo é estudar o comportamento de soluções, cujo dado inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ é tal que $\|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$. Mostraremos os resultados de Weinstein [28] novamente usando as técnicas provados por Hmidi e Kerani [17],[18], a respeito da universalidade do perfil de decomposição encontrado no Teorema 4.1.2 quando o dado inicial tem massa mínima, isto é, provaremos que nestas condições $V = Q$ e a convergência encontrada nos Teoremas 4.1.4 e 4.2.21 é forte. Daremos, também uma demonstração alternativa, usando as ideias de Hmidi e Kerani, do resultado mostrado por Merle em [21], que afirma que existe uma única solução de *blow-up* em $H^1(\mathbb{R}^d)$ com massa mínima, a menos de simetrias da equação.

5.1 Soluções de *Blow-up* em $H^1(\mathbb{R}^d)$ com Massa Mínima

Teorema 5.1.1. *Assuma* $s = 1$. *Seja* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *com* $\|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ *tal que a solução* u *de (1.1) exploda em tempo finito* $T^* > 0$. *Então existem as famílias* $\rho(t)$, $\theta(t)$, *e* $x(t)$ *tais que* $\{\rho(t), \theta(t), x(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^d$ *e*

$$\rho(t)^{d/2} e^{\theta(t)} u(t, \rho(t)x + x(t)) \longrightarrow Q$$

forte em $H^1(\mathbb{R}^d)$, *quando* $t \uparrow T^*$.

Dem. Com a notação do Teorema 4.1.4, obtemos

$$\|V\|_{L^2} \leqslant \liminf \|\psi_n\|_{L^2} \leqslant \|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}.$$

Como já provamos que $\|V\|_{L^2} \geqslant \|Q\|_{L^2}$, obtemos $\|V\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$. O fato de que $\psi_n(\cdot + x_n) \rightharpoonup V$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ garante que

$$\psi_n(\cdot + x_n) \longrightarrow V, \quad \text{em} \quad L^2.$$

Utilizando a desigualdade de Gagliardo Niremberg e a limitação de $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ temos

$$\begin{aligned} \|\psi_n - V\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} &\leqslant C_d \|\psi_n - V\|_{L^2}^{\frac{4}{d}} \|\nabla\psi_n - \nabla V\|_{L^2}^2 \\ &\leqslant C_d \|\psi_n - V\|_{L^2}^{\frac{4}{d}} (\|\nabla\psi_n\|_{L^2} + \|\nabla V\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\psi_n(\cdot + x_n) \longrightarrow V, \quad \text{em} \quad L^{4/d+2}.$$

Ainda por Gagliardo-Niremberg e combinado com (4.4) temos

$$\begin{aligned} \frac{d+2}{d}\|\nabla Q\|_{L^2}^2 &= \lim_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} \\ &= \|V\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} \\ &\leqslant C_d \|V\|_{L^2}^{\frac{4}{d}} \|\nabla V\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{d+2}{d}\|\nabla V\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\|\nabla Q\|_{L^2} \leqslant \|\nabla V\|_{L^2}.$$

No entanto, a caracterização de V como limite fraco da sequência $\{\psi_n\}$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ nos dá

$$\|\nabla V\|_{L^2} \leqslant \liminf \|\nabla\psi_n\|_{L^2} = \|\nabla Q\|_{L^2}$$

obtendo-se então, pela Proposição 2.2.6, que

$$\psi_n(\cdot + x_n) \longrightarrow V, \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^d)$$

e $E[V] = 0$. Em suma, obtemos $\|V\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ e $E[V] = 0$. Pelo Corolário 3.2.14 garantimos que existe $\theta \in [0, 2\pi)$, $\rho > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tais que

$$V(x) = \rho^{\frac{d}{2}} e^{i\theta} Q(\rho x + x_0).$$

Além disso $\|\nabla V\|_{L^2} = \|\nabla Q\|_{L^2}$, garante que $\rho = 1$, o que nos dá

$$V(x) = e^{i\theta} Q(x + x_0).$$

□

Com o auxílio do teorema anterior e lema a seguir, provado por Banica em [1], daremos uma demonstração alternativa, baseando-se nas ideias de Hmidi e Kerani [17], do resultado provado por Merle em [21], a respeito da universalidade de soluções de massa mínima em $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Lema 5.1.2. *Se ϕ é uma função real e $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ é tal que $\|v\|_2 = \|Q\|_2$, então*

$$\left| \int \mathrm{Im}(v\nabla\bar{v})\nabla\phi dx \right| \leqslant \left(2E[v] \int |v|^2 |\nabla\phi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dem. Pela desigualdade de Gagliardo-Niremberg, se $\|f\|_2 = \|Q\|_2$, então

$$\|f\|_{\frac{4}{d}+2} \leqslant \frac{d+2}{d} \|\nabla f\|_2.$$

Logo, se α é um numero real temos $0 \leqslant E[e^{i\alpha\phi}v]$. Por outro lado

$$\begin{aligned} E[e^{i\alpha\phi}v] &= \frac{1}{2}\int |i\alpha\nabla\phi e^{i\alpha\phi}v + e^{i\alpha\phi}\nabla v|^2 dx - \frac{d}{4+2d}\int |v|^{\frac{4}{d}+2} dx \\ &= \frac{\alpha^2}{2}\int |\nabla\phi|^2|v|^2 dx + \alpha \mathrm{Re}\left(\int i\alpha\nabla\phi e^{i\alpha\phi} v \cdot \overline{e^{i\alpha\phi}\nabla v} dx \right) + E[v] \\ &= \frac{\alpha^2}{2}\int |\nabla\phi|^2|v|^2 dx + \alpha \mathrm{Im}\left(\int \alpha\nabla\phi v \cdot \overline{\nabla v} dx \right) + E[v]. \end{aligned}$$

Observando a expressão acima como uma função de α positiva, concluimos que o determinante deve ser não positivo portanto,

$$0 \leqslant \left(\int \mathrm{Im}(v\nabla\bar{v})\nabla\phi dx \right)^2 - 2E[v] \int |v|^2 |\nabla\phi|^2 dx,$$

obtendo-se a desigualdade desejada. □

Teorema 5.1.3. *Assuma $s = 1$. Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ com $\|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ tal que a solução u de (1.1) exploda em tempo finito $T^* > 0$. Então*

$$u(t,x) = (T^* - t)^{-\frac{d}{2}} e^{[(i/(T^*-t)) + (-i|x|^2/4(T^*-t))]} Q\left(\frac{x}{T^* - t} \right)$$

a menos de simetrias da equação presentes na Proposição 3.2.5.

Dem. Se provarmos que dado $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ nas condições dadas, existem $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $y, x_0 \in \mathbb{R}^d$, tais que

$$u_0(x) = e^{\frac{-i|x-x_0|}{4T^*}} \rho^{d/2} e^{i\theta} Q(\rho x + y)$$

pela unicidade de soluções, obtemos o resultado, visto que u_0 seria o dado inicial da solução $u(t, x)$ dada no enunciado. Defina, o conjunto

$$\mathcal{A} = \{\rho^{d/2} e^{i\theta} Q(\rho \cdot +y); \quad \rho > 0,\ \theta \in [0, 2\pi),\ y \in \mathbb{R}^d\}.$$

Vamos provar que se $\|u_0\|_2 = \|Q\|_2$, então $e^{\frac{i|x-x_0|^2}{4T^*}} u_0 \in \mathcal{A}$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^d$. De fato, dada uma sequência de tempos $t_n \to T^*$, do Teorema 5.1.1, temos que

$$\rho_n^{d/2} e^{i\theta_n} u(t_n, \rho_n \cdot +x_n) \longrightarrow Q \qquad \text{em } H^1(\mathbb{R}^d)$$

com $x_n \in \mathbb{R}^d$ e $\rho_n \to 0$. Observe que, definindo

$$k_n = |u(t_n, \cdot - x_n)|^2,$$

temos

- Existe uma constante $c > 0$ tal que $\|k_n\|_{L^1} \leqslant c$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} k_n(x)dx = \|Q\|_2^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- Dado $\delta > 0$, temos
$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\delta} k_n(x)dx = 0.$$

onde a última propriedade se deve à propriedade de Concentração de Massa, mostrada no Teorema 4.1.4. Pelo Teorema 2.5.10 temos que, dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ vale

$$k_n * \phi(x) \longrightarrow \|Q\|_2^2 \phi(x),$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} k_n * \phi(x_n) - \|Q\|_2^2 \phi(x_n) = 0,$$

mas

$$\int k_n(x_n - y)\phi(y)dy = \int |u(t_n, -y)|^2 \phi(y)dy.$$

Em particular, se ϕ é radial isso nos dá

$$\int \phi(x)|u(t_n, x)|^2 dx - \|Q\|_2^2 \phi(x_n) \longrightarrow 0. \tag{5.1}$$

A menos de subsequência, podemos assumir que $|x_n| \to \infty$ ou $x_n \to x_0$, e a menos de translação podemos assumir $x_0 = 0$. Consideramos uma função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\phi(x) = |x|^2 \text{ se } |x| < 1 \quad \text{e} \quad |\nabla\phi(x)|^2 \leqslant C\phi(x)$$

e para todo $p > 0$ definimos

$$\phi_p(x) = p^2\phi\left(\frac{x}{p}\right), \qquad g_p(t) = \int \phi_p(x)|u(t,x)|^2 dx.$$

Usando-se o Lema 5.1.2 e a definição de ϕ_p, um cálculo análogo ao da Proposição 3.2.9, com ϕ_p no lugar de $|x|^2$, nos dá

$$\begin{aligned} |g_p'(t)| &= \left|\int 2\mathrm{Im}(\bar{u}\nabla u)\nabla\phi_p dx\right| \\ &\leqslant \left(8E[u]\int |u|^2|\nabla\phi_p|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant CE[u_0]^{\frac{1}{2}}\sqrt{g_p(t)} \\ &= C(u_0)\sqrt{g_p(t)} \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T^*)$ e pelo Teorema do Valor Médio temos

$$\left|\sqrt{g_p(t_n)} - \sqrt{g_p(t)}\right| = \left|\frac{g_p'(\bar{t})}{2\sqrt{g_p(\bar{t})}}\right| |t_n - t| \leqslant C(u_0)|t_n - t|. \tag{5.2}$$

Onde $\bar{t}$ é um número entre t e t_n. Em vista de 5.1 vemos que

- Se $|x_n| \to \infty$ então

$$\lim_{n\to\infty} g_p(t_n) = \lim_{n\to\infty} \|Q\|_2\phi_p(x_n) = 0$$

  pois ϕ_p tem suporte compacto.

- Se $x_n \to 0$ então

$$\lim_{n\to\infty} g_p(t_n) = \lim_{n\to\infty} \|Q\|_2\phi_p(x_n) = 0$$

  pois $\phi_p(0) = 0$.

Logo, fazendo $n \to \infty$ em (5.2) temos

$$g_p(t) \leqslant C(u_0)(T^* - t)^2 \qquad \forall t \in [0, T^*).$$

Assim, para cada t fixo podemos fazer $p \to \infty$ para obter

$$\int |x|^2|u(t,x)|^2 dx \leqslant C(u_0)(T^* - t)^2. \tag{5.3}$$

Considere agora $r(t) = 8t^2 E[e^{\frac{i|x|^2}{4t}} u_0(x)]$. Como

$$\begin{aligned} E[e^{\frac{i|x|^2}{4t}} u_0(x)] &= \frac{1}{2}\int \left|\nabla\left(e^{\frac{i|x|^2}{4t}} u_0(x)\right)\right|^2 dx - \frac{d}{4+2d}\int |u_0|^{\frac{4}{d}+2} dx \\ &= \frac{1}{2}\int \left|\frac{iu_o \cdot x}{2t} e^{\frac{i|x|^2}{4t}} + \nabla u_0 e^{\frac{i|x|^2}{4t}}\right|^2 dx - \frac{d}{4+2d}\int |u_0|^{\frac{4}{d}+2} dx \\ &= \frac{1}{2}\int \left|\frac{iu_o \cdot x}{2t} + \nabla u_0\right|^2 dx - \frac{d}{4+2d}\int |u_0|^{\frac{4}{d}+2} dx \\ &= \frac{1}{8t^2}\int |x|^2 |u_0|^2 dx + \frac{1}{2}\int \mathrm{Re}\left(\langle \frac{iu_0 \cdot x}{t}, \nabla u_0\rangle\right) dx + E[u_0], \end{aligned}$$

temos

$$r(t) = \int |x|^2 |u_0|^2 dx + 4t^2 \int \mathrm{Re}\left(\langle \frac{iu_0 \cdot x}{t}, \nabla u_0\rangle\right) dx + 8t^2 E[u_0].$$

Portanto, pela identidade de virial (Proposição 3.2.9) temos

$$r''(t) = 16E[u_0] = \frac{d^2}{dt^2}\int |x|^2 |u(t,x)|^2 dx.$$

Como $r(0) = r'(0) = 0$, combinando essa igualdade e (5.3) obtemos

$$r(t) = 8t^2 E[e^{\frac{i|x|^2}{4t}} u_0] = \int |x|^2 |u(t,x)|^2 dx \leqslant C(u_0)(T^* - t)^2.$$

Com isso e (5.1) obtemos que

$$\liminf_{n\to\infty} \|Q\|_2 |x_n|^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} C(u_0)(T^* - t_n)^2 = C(u_0)T^*.$$

Daí, não podemos ter $|x_n| \to \infty$, ou seja $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Por fim deixamos $t \to T^*$ para obter

$$E[e^{\frac{i|x|^2}{4T^*}} u_0] = 0$$

e pelo Teorema 3.2.14, concluimos que $e^{\frac{i|x|^2}{4T^*}} u_0 = \rho^{\frac{d}{2}} e^{i\theta} Q(\rho x + y)$, portanto $e^{\frac{i|x|^2}{4T^*}} u_0 \in \mathcal{A}$.

□

5.2 Soluções de *Blow-up* em $H^s(\mathbb{R}^2)$ com Massa Mínima

Teorema 5.2.1. *Assuma* $d = 2$ *e* $s > s_Q$. *Seja* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *com* $\|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ *tal que a solução* u *de (1.1) exploda em tempo finito* $T^* > 0$. *Então existe uma sequência* $t_n \uparrow T^*$ *satisfazendo:*

$$\rho_n \leqslant A(T^* - t_n)^{\frac{s}{2}}$$

Para algum $A > 0$, *e uma sequência* $\{\rho_n, \theta_n, x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^d$ *tal que:*

$$\rho_n e^{\theta_n} u(t_n, \rho_n x + x_n) \longrightarrow Q$$

forte em $H^{\tilde{s}-}$ *onde* $\tilde{s} = \dfrac{s+1}{4-2s}$.

Demonstração. Na notação do Teorema 4.2.21, obtemos

$$\|V\|_2 \leqslant \liminf \|\psi_n\|_2 \leqslant \|u_0\|_2 = \|Q\|_2.$$

Como já temos $\|V\|_2 \geqslant \|Q\|_2$, obtemos $\|V\|_2 = \|Q\|_2$. O fato de que $\psi_n(\cdot + x_n) \rightharpoonup V$, em $H^1(\mathbb{R}^d)$ garante que

$$\psi_n(\cdot + x_n) \longrightarrow V, \text{ em } L^2$$

logo pela desigualdade de Gagliardo-Niremberg e a limitação de ψ_n em $H^1(\mathbb{R}^d)$ temos

$$\begin{aligned} \|\psi_n - V\|_{L^4} &\leqslant 2\|\psi_n - V\|_{L^2}^2 \|\nabla\psi_n - \nabla V\|_{L^2}^2 \\ &\leqslant 2\|\psi_n - V\|_{L^2}^2 (\|\nabla\psi_n\|_{L^2}^2 + \|\nabla V\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

logo

$$\psi_n(\cdot + x_n) \longrightarrow V, \text{ em } L^4.$$

Ainda por Gagliardo-Niremberg e combinado com (4.9), temos

$$\begin{aligned} 2\|\nabla Q\|_{L^2}^2 &= \lim_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{L^4}^4 \\ &= \|V\|_{L^4}^4 \\ &\leqslant 2\|V\|_{L^2}^2 \|\nabla V\|_{L^2}^2 \\ &= 2\|\nabla V\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\|\nabla Q\|_{L^2} \leqslant \|V\|_{L^2}$$

no entanto, da convergência fraca temos

$$\|\nabla V\|_{L^2} \leqslant \liminf \|\nabla\psi_n\|_{L^2} = \|\nabla Q\|_{L^2}$$

obtendo que $\psi_n(\cdot + x_n) \longrightarrow V$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ e $E[V] = 0$. No fim, conseguimos $\|V\|_2 = \|Q\|_2$ e $E[V] = 0$. Pela Proposição 3.2.14, garantimos que existem $\theta \in [0, 2\pi)$, $\rho > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$V(x) = \rho e^{i\theta} Q(\rho x + x_0).$$

Além disso, $\|\nabla V\|_2 = \|\nabla Q\|_2$, garante que $\rho = 1$, o que nos dá

$$V(x) = e^{i\theta} Q(x + x_0).$$

Em vista de (4.10) e (4.11) obtemos que

$$\rho_n u(t_n, \rho_n \cdot + x_n) \longrightarrow e^{i\theta} Q(\cdot + x_0)$$

em $H^{\tilde{s}-}(\mathbb{R}^d)$, o que conclui o teorema. $\square$

Apêndice

Algumas Desigualdades Técnicas

Lema 5.2.2. *Sejam* $u, v \in \mathbb{C}$ *e* $\alpha > 0$*, então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$||u|^\alpha u - |v|^\alpha v| \leqslant C(|u|^\alpha + |v|^\alpha)|u - v|$$

Dem. **Caso 1**: Se $u = 0$ ou $v = 0$ a desigualdade é trivial.
Caso 2: Se $u, v \neq 0$ e $0 \notin [u, v]$, então podemos definir a função $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\phi(t) = |(1-t)u + tv|^\alpha [(1-t)u + tv].$$

Como $\phi(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$ temos que ϕ é diferenciável e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \alpha |(1-t)u + tv|^{\alpha-2} \mathrm{Re}\left(\overline{(1-t)u + tv} \cdot (v - u)\right)[(1-t)u + tv] \\ &\quad + |(1-t)u + tv|^\alpha (v - u) \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} |\phi'(t)| &\leqslant C|(1-t)u + tv|^\alpha |v - u| \\ &\leqslant C\left((1-t)|u| + t|v|\right)^\alpha |v - u| \\ &\leqslant C((1-t)(|u| + |v|) + t(|u| + |v|))^\alpha |v - u| \\ &= C(|u| + |v|)^\alpha |v - u| \\ &= C(|u|^\alpha + |v|^\alpha)|v - u|. \end{aligned}$$

Daí, podemos usar a Desigualdade do Valor Médio para concluir que para algum $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ temos

$$\begin{aligned} ||u|^\alpha u - |v|^\alpha v| &= |\phi(0) - \phi(1)| \\ &= |\phi'(\theta)| \\ &\leqslant C(|u|^\alpha + |v|^\alpha)|v - u| \end{aligned}$$

o que conclui a desigualdade.

Caso 3; Se $0 \in [u, v]$ então definimos, para $\varepsilon > 0$ o vetor

$$v_\varepsilon = v + \varepsilon \cdot z$$

onde z é um vetor não nulo, perpendicular á $u - v$. Pelo caso anterior temos

$$||u|^\alpha u - |v_\varepsilon|^\alpha v_\varepsilon| \leqslant C(|u|^\alpha + |v_\epsilon|^\alpha)|v_\varepsilon - u|$$

logo fazendo $\varepsilon \to 0^+$ obtemos a desigualdade desejada. □

Lema 5.2.3. *Seja* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *e* $\alpha > 0$*, existe* $C > 0$ *tal que*

$$\left| \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \right|^{\alpha+2} - \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\alpha+2} \right| \leqslant C \sum_{j \neq k} |a_j|^{\alpha+1} |a_k|$$

Dem. Para $n = 2$ temos

$$|a_1 + a_2|^{\alpha+2} - |a_1|^{\alpha+2} - |a_2|^{\alpha+2} \leqslant (|a_1| + |a_2|)^{\alpha+2} - |a_1|^{\alpha+2} - |a_2|^{\alpha+2}$$

Se $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$ então a desigualdade é trivial. Suponha então que $a_1, a_2 \neq 0$ e sem perda de generalidade suponha que $|a_1| \leqslant |a_2|$. Definimos, então, $t = \frac{|a_1|}{|a_2|}$ e a função $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(t) = (t + 1)^{\alpha+2} - t^{\alpha+2} - 1 - Ct - Ct^{\alpha+1}$$

onde a constante $C > 0$ será escolhida posteriormente. Derivando ϕ obtemos

$$\phi'(t) = (\alpha + 2)(t + 1)^{\alpha+1} - (\alpha + 2)t^{\alpha+1} - C - (\alpha + 1)Ct^\alpha.$$

Observe que $0 \leqslant t \leqslant 1$ nos dá $(t + 1)^{\alpha+1} \leqslant 2^{\alpha+1} \Rightarrow (\alpha + 2)(t + 1)^{\alpha+1} \leqslant (\alpha + 2)2^{\alpha+1}$. Tomando $C = (\alpha + 2)2^{\alpha+2}$ temos

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= (\alpha+2)(t+1)^{\alpha+1} - (\alpha+2)t^{\alpha+1} - C - (\alpha+1)Ct^\alpha \\
&= (\alpha+2)(t+1)^{\alpha+1} - (\alpha+2)t^{\alpha+1} - (\alpha+2)2^{\alpha+2} - (\alpha+1)(\alpha+2)2^{\alpha+2}t^\alpha \\
&\leqslant (\alpha+2)2^{\alpha+2} - (\alpha+2)t^{\alpha+1} - (\alpha+2)2^{\alpha+2} - (\alpha+1)(\alpha+2)2^{\alpha+2}t^\alpha \\
&= -(\alpha+2)t^{\alpha+1} - (\alpha+1)(\alpha+2)2^{\alpha+2}t^\alpha \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

logo $\phi(t)$ é não crescente para $t \in [0, 1]$ e $\phi(0) = 0$ o que nos dá $\phi(t) \leqslant 0$. Substituindo $t = \frac{|a_1|}{|a_2|}$ temos o resultudado. O caso geral com n termos segue por indução.

□

Lema 5.2.4. *Sejam* $a_1, \dots, a_n$ *reais não-negativos, e* $\theta < 0$. *Vale a desigualdade*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^{\theta} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j^{\theta}$$

Dem. É claro que a desigualdade é equivalente a provar que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Suponha então que $\sum a_j = 1$. Em particular $a_j \leqslant 1$ para todo j, logo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_j^{\theta} &\geqslant \sum_{j=1}^{n} a_j = 1 \\
\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} &\leqslant 1 = \sum_{j=1}^{n} a_j
\end{aligned}$$

obtendo a desigualdade desejada. Sejam agora $a_1, \dots, a_n$ quaisquer e defina

$$b_j = \frac{a_j}{\sum a_j}$$

Temos $\sum b_j = 1$ logo, pelo caso anterior

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} &\leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j \\
\Rightarrow \frac{1}{\sum a_j}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} &\leqslant \frac{1}{\sum a_j}\sum_{j=1}^{n} a_j \\
\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} &\leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j
\end{aligned}$$

o que conclui a prova.

□

Referências Bibliográficas

[1] Banica, V., *Remarks on the blow-up for the Schrödinger equation with critical mass on a plane domain.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 139–170, 2004.

[2] Bergh, J., e Löfström, J., *Interpolation Spaces.* Springer. New York, 1976.

[3] Botelho, G., Pellegrino e D., Teixeira, E., *Fundamentos da análise funcional.* SBM, 2012.

[4] Bourgain, J., *Refinements of Strichartz' inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity.* I.M.R.N., (5) 253–283, 1998.

[5] Breziz, H., *Functional analysis, Sobolev space and partial differentional equantions.* Springer Science and Bussiness Media, 2010.

[6] Cazenave, T., *Semilinear Schrödinger equations.* Volume 10 de *Courant Lecture Notes in Mathematics.* New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[7] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. e Tao, T., *Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation.* Math. Res. Lett., (9) 659–682, 2002.

[8] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. e Tao, T., *Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in* $\mathbb{R}^3$. Ann. of Mathematics, (2) 767–865, 2008.

[9] Colliander, J., Raynor, S., Sulem, C. e Wright, J. D., *Ground state mass concentration in the* L^2*-critical nonlinear Schrodinger equation below* H^1. Math. Res. Lett., (12) 357–375, 2005.

[10] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. e Tao, T., *Multilinear estimates for periodic KdV equations, and applications*. J. Funct. Anal., (211) 173–218, 2004.

[11] Farah, L. G., *Global well-posedness and blow-up on the energy space for the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation*. Journal of Evolution Equations, 1(16) 193–208, 2016.

[12] Fibich, G., *The nonlinear Schrödinger equation, singular solutions and optical collapse*. Volume 192 de *Apllied Mathematical Science*. Springer, Cham, 2015.

[13] Glassey, R.T., *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*. J. Math. Phys. 18, no 9, 1794–1797, 1977.

[14] Grafakos, L., *Classical Fourier analysis*. Volume 249 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 3.ed. 2014.

[15] Kato, T., *On nonlinear Schödinger equations. II.* H^s *solutions and uncoditional well-posedness*. J. Anal. Math., (67) 281–306, 1995.

[16] Kenig, C., Ponce, G. e Vega, L., *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via contraction principle*. Comm. Pure Appl. Math., (46) 527–620, 1993.

[17] Hmidi, T. e Keraani, S., *Blowup theory for the critical nonlinear Schödinger equations revisited. International Mathematics Research Notices*, (45) 2815–2828, 2005.

[18] Hmidi, T. e Keraani, S., *Remarks on the blowup for the* L^2*-critical nonlinear Schödinger equations*. J. Anal. Math., (38) 1035–1047, 2006.

[19] Linares, F. e Ponce, G., *Introduction to nonlinear dispersive equations. Universitext. Springer*. New York, second edition, 2015.

[20] Lions, P.-L.,, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The compact case*. Part 1, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non linéaire, 109–145, 1984.

[21] Merle, F., *Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power*. Duke Math J., (69) 427–454, 1993.

[22] Merle, F. e Raphael, P., *On universality of blow-up profile for* L^2 *critical nonlinear Schrödinger equation.* Invent. Math., 565–672, 2004.

[23] Pólya, G., Szegö, G., *Isoperimetric inequalities in mathematical physics.* University Press. Princeton: Princeton, 1951.

[24] Shan, M., Wang, B., Zhang, L., *Resonant Decompositions and Global Well-posedness for 2D Zakharov-Kuznetsov Equation in Sobolev spaces of Negative Indices.* arXiv:2003.07515v1 [math.AP]

[25] Reed, M. e Simon, B., *Methods of modern mathematical physics. II Fourier analysis, self adjointness.* Academic, New York-London, 1975.

[26] Sulem, C. e Sulem, P.-L., *The nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collapse.* Volume 139 de *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[27] Tao, T., *Nonlinear Dispersive Equations, Local and Global Analysis.* Volume 106 de *Regional Conference Series in Mathemathics.* New Mexico University, New Mexico; American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[28] Weinstein, M. I., *On the structure of singularities in solutions to the nonlinear dispersive evolution equations.* Comm. Partial Differential Equations, (11) 545–565, 1984.

[29] Weinstein, M. I., *Nonlinear Schrödinger Equations and sharp interpolations estimates.* Comm. Math. Phys., (87) 567–576, 1984.