Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Sobre a estabilização para a equação de Zakharov-Kuznetsov n-dimensional com amortecimento localizado

Dieme Pereira da Silva

Teresina - 23 de setembro de 2024

Dieme Pereira da Silva

Tese de Doutorado:

Sobre a estabilização para a equação de Zakharov-Kuznetsov n-dimensional com termo de amortecimento localizado

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de doutor em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos
Co-Orientador:
Prof. Dr. Roger Peres de Moura

Teresina - 23 de setembro de 2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S586s Silva, Dieme Pereira da.
Sobre a estabilização para equação de Zakharov-Kuznetsov n-dimensional com amortecimento localizado / Dieme Pereira da Silva. -- 2024.
57 f.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Piauí. Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
“Orientador: Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos. Coorientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura.”

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equação diferencal não-linear . 3. Termo de Amortecimento. 4. Teoria de Estabilização. 5. Princípio de Continuação Única. I. Santos, Gleison do Nascimento. II. Moura, Roger Peres de. II. Título.

CDD 515.353

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre a estabilização para a equação de Zakharov-Kuznetsov n-dimensional com amortecimento localizado

Dieme Pereira da Silva

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 31 de julho de 2024.

Banca Examinadora:

Gleison N Santos

Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos – Orientador

Isaías Pereira de Jesus

Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus – UFPI

Prof. Dr. Mykael de Araujo Cardoso – UFPI

Roger Peres de Moura

Prof. Dr. Roger Peres de Moura – UFPI

Luciano Cipriano da Silva

Prof. Dr. Luciano Cipriano da Silva – IFRN

Prof. Dr. Roberto de Almeida Capistrano Filho - UFPE

Maria de Oliveira Silva (In memoriam).

Agradecimentos

Uma tese de doutorado ou qualquer outro trabalho nem sempre é elaborado por uma única pessoa, mas um trabalho coletivo. Por isso, sou abençoado por Deus, pois colocou as pessoas certas, no momento adequado. Então, só me resta agradecê-lo por tudo e por todas as bençãos.

Agradeço ainda a minha esposa, Kamilla, por ter paciência e me apoiar nos momentos mais críticos e difíceis do período, principalmente na reta final curso. Agradeço também a minha família, Ivana (mãe), Jonas(pai) e irmãos(Jarques, Dina e Jarinete) por me dá o suporte finaceiro e emocional, principalmente no início desse doutorado.

A parte de construção desse trabalho só foi possível graças ao apoio incondicional de uma série de pessoas. Uma delas é meu orientador, prof. Gleison, por quem sou grato pelos ensinamentos, conversas e discurssões que muitas vezes parecia dificeis, mas que se mostraram necessária. Agradeço também aos membros da banca, prof. Isaias, prof. Mykael, prof. Luciano e prof. Roberto Capistrano e prof. Roger, que me auxiliaram com sugestões. Em especial, gostaria de agradecer ao professor Roger Peres Moura pelas sugestões e por ser a primeira pessoa quem me deu oportunidade de evoluir e aprender com os meus erros (Disciplina de Fundamentos).

Agradeço ainda aos meus professores da UFPI, Halysson, Rondinelle, Jeferson Leite, José Francisco e Newton. Agradeço também aos meus amigos da UFPI, Pedro Paulo, Toin, João Vinícius, Pedro Rodrigues, Erisvaldo, Márcio, Christopper, Ruan, Nilson, Ricael, Denilson e Edilson, pela parceria e conversas. Em especial, agradeço ao Pedro Paulo pela amizade e parceria nos estudos desde a graduação.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho, estudamos a propriedade de estabilização para equação de Zakharov-Kuznetsov(ZK) não-linear n-dimensional. Inicialmente provamos que a energia associada à equação (ZK) n-dimensional decai exponencialmente quando adicionamos um Termo de Amortecimento. Para isso, combinamos o uso do Termo de Amortecimento com o resultado de continuação única. No caso do resultado de continuação única para equação (ZK) n-dimensional adaptamos as idéias introduzidas por J. Bourgain.

Palavras Chaves: Estabilização; Equação de Zakharov-Kuznetsov; Termo de Amortecimento, Teoria de Estabilização; Continuação Única

Abstract

In this work, we study the stabilization property for the nonlinear n-dimensional Zakharov-Kuznetsov (ZK) equation. Initially, we prove that the energy associated with the n-dimensional (ZK) equation decays exponentially when a damping term is added. To achieve this, we combine the use of the damping term with the unique continuation result. In the case of the unique continuation result for the n-dimensional (ZK) equation, we adapt the ideas introduced by J. Bourgain.

Key Words: Estabilization; Zakharov-Kuznetsov Equation; ; Damping Term, Dissipation-Observabilityy Term; Unique Continuation.

Sumário

Notações

1. $A \lesssim B$ implica que existe uma constante $C > 0$, tal que $A \leqslant C \cdot B$.

2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um cubo dado por

$$\Omega = [0, L] \times \cdots \times [0, L],$$

onde $L > 0$.

3. O produto interno em $\mathbb{R}^n$ será dentado por $(,\cdot,)$.

4. A norma em $\mathbb{R}^n$ será denotada por $\|\cdot\|$.

5. Dado $z \in \mathbb{C}$, denotaremos por $\mathsf{Re} z$, a parte real do número complexo z.

6. $\{U(t)\}_{t \geqslant 0}$ denotará um grupo.

Introdução

Neste trabalho, iremos estabelecer resultados de continuação única e estabilização para equação de Zakharov-Kuzenetsov (ZK) do tipo

$$\partial_t u + \partial_{x_1} \Delta u + u \partial_{x_1} u = 0 \tag{1}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função real e $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbf{I}$, sendo $\mathbf{I}$ um intervalo não degenerado da reta.

A equação (1) é uma versão n-dimensional da equação de Korteweg-de Vries. Além do do seu valor teórico, essa equação modela o comportamento de uma onda longa de baixa amplitude em um plasma sujeito a um campo uniforme em espaços de dimensão 3 (para mais detalhes [48]). Em [24], D. Lannes, F. Linares e J. Saut provaram que a equação (1) surge como limite do Sistema de Poisson nas dimensões $n = 2$ e $n = 3$.

A equação (1) foi exaustivamente estudada, principalmente no contexto da boa colocação, para os casos $n = 2$ e $n = 3$. Em dimensão $n = 2$, A. V. Faminski [15] provou a boa colocação local no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2)$. F. Linares, A. Pastor e J.-C. Saut provaram em [26] a boa colocação local para equação (1) em $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, para $s > \frac{3}{2}$, onde $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Além desses trabalhos citados anteriormente, há uma quantidade considerável de artigos relacionados à boa colocação para a equação (1) definida em dimensão $n = 2$ e $n = 3$. Veja [41], [18],[34],[16],[44],[29],[24] e [35]. Para o caso multidimensional, veja S. Herr e Kinoshita, em [19].

Embora a equação (1) não seja totalmente integrável como acontece com a equação de Korteweg-de Vries, ela tem uma estrutura hamiltoniana e possui as seguintes quantidades conservadas: O hamiltoniano dado por

$$H(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^2 + \frac{u^3}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u_0|^2 + \frac{u_0^3}{3} \right) dx = H(0), \tag{2}$$

e a energia dada por

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_0^2 dx = E(u(0)). \tag{3}$$

Apesar de a energia ser conservada no domínio $\mathbb{R}^n$, verifica-se que em domínios limitados, tal quantidade pode apresentar uma dissipação interna. Para muitos modelos de equações diferenciais parciais como equação de Korteweg-de Vries, equação de Kadomtsev-Peshiativilli e a equação Kawahara tem-se que essa dissipação apresenta uma propriedade de estabilização, isto é, a energia decai exponencialmente. Para mais detalhes veja [17],[32], [1],[10], [46],[36],[25],[11],[47] e [36].

Para estabelecer o resultado de estabilização usa-se o método descrito na Seção 1.3. Esse método tem como ingrediente principal uma desigualdade de observabilidade, isto é, uma desigualdade do tipo (1.21). Para a equação de Korteweg-de Vries, L. Rosier estabeleceu uma desigualdade de observabilidade para domínios com restrição no seu tamanho (para mais detalhes ver [42]). Como consequência, G. P. Mezala, C. F. Vasconcello e E. Zuazua provaram em [32] a estabilização para equação de Korteweg-de Vries com restrições no domínio. Em [10], G. Doronin e N. Larkin provaram um resultado de estabilização para a equação de Zakharov-Kuznetsov não-linear em domínios com restrições.

Para provar um resultado de estabilização em domínios sem restrições de tamanho, argumenta-se como em [32], isto é, reformula-se o problema com o auxilio de uma função chamada Termo de Amortecimento localizado e prova-se uma desigualdade de observabilidade para o problema reformulado. O Termo de Amortecimento localizado é uma função $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ tal que $a(x) > 0$ para $x \in \Omega_1 \subsetneq \Omega$.

Para provar a desigualdade de observabilidade segue-se o roteiro da Seção 1.3. Mais precisamente deve-se provar um resultado do tipo enunciado no Lema 3.1.4. Para tal fim, argumenta-se por contradição e chega-se a uma igualdade do tipo

$$a(x)v^2 = 0, \quad q.t.p \quad em \quad \Omega \times (0,T)$$

onde v é uma solução da equação

$$\partial_t v + \partial_{x_1}\Delta v + v\partial_{x_1} v + a(x)v = 0. \tag{4}$$

Assumindo que a função $a(x)$ atua (i.e. $a(x,y) > 0$) no complementar de um compacto $\Gamma \subseteq \Omega$, obtém-se que $v \equiv 0$ em Γ^c. Com isso pode-se estender v a uma solução de (4) no

$\mathbb{R}^n$ com suporte compacto. Aí surge naturalmente a questão da continuação única, que garantirá que $v \equiv 0$, o que conduzirá a um absurdo.

Nessa primeira parte do trabalho consideraremos $\Omega = [0, L] \times \cdots \times [0, L] \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Dado $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ tal que $a(x) \geqslant a_0 > 0$ para $x \in \Gamma^c$, onde Γ é um compacto, considere a equação

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_{x_1}\Delta u + u\partial_{x_1}u + a(x)u = 0 \text{ em } \ \Omega \times (0, T), \\ u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\big|_{x_i=0} = u(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n)\big|_{x_i=L} = 0, \ i = 1, \ldots, n \\ \partial_{x_i}u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\big|_{x_1=L} = 0, \ i = 1, \ldots, n \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{em } \ \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Para o problema (5), a energia associada é dada por:

$$E(u(t)) = \int_\Omega u^2(x, t)dx. \tag{6}$$

Do Lema 3.1.1 Observamos que

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) < 0, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Daí, vemos que a energia é decrescente. Gostaríamos de investigar a taxa de decaimento da energia $E(u)$.

Em [36] os autores A. Campos, R. de Moura e G. Santos provaram, usando o método *Dissipação-Observabilidade*, um resultado de estabilização para a equação (1), em um retângulo $\Omega = [0, L] \times [0, L]$ contido em $\mathbb{R}^2$. Ficou em aberto saber se o resultado de estabilização ainda é valido para equação de Zakharov-Kuznetsov em domínios Ω contidos em $\mathbb{R}^n$, com $3 \leqslant n \leqslant 6$. Foi colocado que a principal dificuldade a ser superada era obter um resultado de continuação única para o caso multidimensional. Assim, estabelecendo o resultado de continuação única e seguindo o argumento do caso bidimensional, garante o resultado de estabilização para a equação (1) definida em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $3 \leqslant n \leqslant 6$.

Ainda neste trabalho, investigaremos a validade do resultado de estabilização para a equação (1) definida em domínios Ω contidos em $\mathbb{R}^n$, para $n > 6$. A demonstração desse segue da mesma forma que o caso bidimensional, utlizando a Teoria de estabilização. Entretanto, além da dificuldade para estabelecer o resultado de continuação única, esse problema apresenta uma dificuldade extra. Isso se deve pois, para provarmos a desigualdade de observabilidade, necessita-se também de uma estimativa de energia do tipo

$$\|u\|_{L^2(0,T:H^1(\Omega))} \lesssim \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{7}$$

Para provarmos a estimativa (7), é necessário mostrar que a seguinte inclusão é verdadeira:

$$L^1(0,T:L^3(\Omega)) \subset L^2(0,T:L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T:H^1(\Omega)). \tag{8}$$

Para ZK bidimensional os autores provaram a inclusão similar (8). Para isso, utilizaram a desigualdade de Gagliardo-Nireberg anisotrópica com a configuração:

$$\|u\|^3_{L^3(\Omega} \leqslant \|u\|^2_{L^2(0,T:L^2(\Omega))}\|\nabla u\|_{L^2(0,T:L^2(\Omega))}. \tag{9}$$

Entretanto, a desigualdade de Gagliardo-Nireberg, na configuração apresentada pela estimativa (9), é válida apenas em domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para $1 \leqslant n \leqslant 6$. Assim, considerando a necessidade da inclusão (8) e com objetivo de provar a desigualdade de observabilidade para equação (1) definidas em domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geqslant 3$, utilizaremos uma versão refinada da desigualdade de Galiardo Nirenberg (ver Teorema 1.1.4).

No presente trabalho provaremos o seguinte resultado:

Teorema 0.0.1. *Suponha* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *com* $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant R$*, para algum* $R > 0$ *então energia* $E(u)$ *associada ao PVI* (5) *definida em* (6) *decai exponencialmente, isto é, existem constante* $C_1 > 0$ *e* $\delta > 0$ *tal que*

$$E(u(t)) \leqslant C_1 E(u(0))e^{-\delta t}, \tag{10}$$

para todo $t \geqslant 0$.

Como já mencionado, a propriedade de continuação única (UCP) é um dos ingredientes chave para obter um resultado de estabilização, ou mesmo resultado de controlabilidade. O problema de continuação única tem sido exaustivamente estudado para vários modelos de equações dispersivas, como por exemplo a equação de Korteweg-de Vries (veja [49]), equação BO-ZK (veja [12]), equação Kawara (veja [39]), equação de Schrödinger (veja [8]). Outros trabalhos foram publicados para diversas outras equações, veja [23],[36],[5],[9]. A equação (1) também tem sido objeto de estudos nesse sentido, por exemplo, M. Panthee provou um resultado de UCP para equação(1) em dimensão $n = 2$. Em dimensão $n = 3$, os autores, Bustamante, Urrea e Meíja, provaram em [5] um resultado de UCP para equação (1) usando a desigualdade de Carleman.

Em [37], M. Panthee provou um resultado de UCP para ZK bidimensional. Para isso, o autor utilizou uma técnica estabelecida por Bourgain em [3]. Precisamente, ele argumentou da seguinte maneira: dado $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, suficientemente suave e satisfazendo

$$\mathbf{supp\ u(t)} \subset [-\mathbf{B}, \mathbf{B}] \times [-\mathbf{B}, \mathbf{B}], \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{I},$$

então $u \equiv 0$.

Seguindo, o método estabelecido por Bourgain em [3] e a adaptações contidas no trabalho de Panthee em [37] provaremos um resultado de continuação única para equação (1) em $\mathbb{R}^n$, para $n \geqslant 3$. Mais precisamente, dado $u(t) \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > \frac{n}{2}$, solução do PVI

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_{x_1}\Delta u + u\partial_{x_1} u = 0 \ \ em \ \ \mathbb{R}^n \times \mathbf{I} \\ u(x,0) = u_0(x) \ em \ \ \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{11}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função real e $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbf{I}$, e $\mathbf{I}$ é um intervalo não-degenerado, e satisfazendo

$$\textbf{supp } \mathbf{u}(\mathbf{t}) \subset \mathcal{B}, \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{I},$$

para algum conjunto compacto $\mathcal{B}$ então $u \equiv 0$. Em outras palavras, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 0.0.2. *Seja $u = u(x,t)$ uma solução suficientemente suave para o problema (11) e $I = [-T,T]$ um intervalo não-trivial. Se para algum $B > 0$*

$$\textbf{supp } \mathbf{u}(\mathbf{t}) \subset \mathcal{B}, \quad \forall \ \mathbf{t} \in I.$$

onde $\mathcal{B} = [0,B] \times \cdots \times [0,B]$ então $u \equiv 0$.

Como ja mencionamos anteriormente, para provar o Teorema 0.0.2, iremos seguir as idéias contidas em [3] e [37]. Dentre os resultados necessários, o mais sutíl e que apresenta a maior dificuldade de se estender para o caso multidimensional é o Lemma 2.1.3. Ele estabelece que existe uma constante positiva c tal que para $\lambda \in \mathbb{R}^n$, com $|\lambda| \ggg 1$, vale:

$$m(\lambda) > c\,(m * m)\,(\lambda). \tag{12}$$

Para provar (12), seguiremos a mesmas ideias de Bourgain em [3], ou seja, argumentaremos por contradição, isto é, supomos que:

$$m(\bar{\lambda}) \leqslant c \int_{W_1} m(\lambda - \bar{\lambda}) m(\lambda) d\lambda + \int_{W_1^c} m(\lambda - \bar{\lambda}) m(\lambda) d\lambda. \tag{13}$$

onde $W_1 := \{\lambda \in \mathbb{R}^n : |\bar{\lambda}_k - \lambda_k| < \bar{\lambda}_k \ \ e \ \ |\lambda_k| < \bar{\lambda}_k, \forall k = 1,2,\ldots,n\}$.

Veremos que devido a definição do conjunto W_1, tem-se um pouco mais de trabalho para estimar (13), principalmente quanto a estimativa superior da integral sobre o complementar do conjunto W_1. Para mais detalhes, veja o Lema 2.1.3.

O trabalho será dividido em 4 capitulos: No capítulo 1 apresentaremos noções preliminares e resultados auxiliares para demostrar os resultados de estabilização e continuação única. No capítulo 2, apresentaremos o resultado de continuação única e lemas auxiliares. No capítulo 3 será estabelecido o resultado de estabilização. Por último, estabeleceremos, no apêndice, a teoria de existência para equação (5).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos apresentar algumas definições e resultados básicos que serão utilizados posteriormente para uma melhor compreensão dos conteúdos abordados.

1.1 Resultados preliminares

Netsa seção, iremos enunciar alguns resultados que serão úteis ao longo relacionadas as Equações Diferenciais Parciais cujas demonstrações serão omitidas. Esses resultados serão usados no decorrer do trabalho.

Teorema 1.1.1. *(Teorema do ponto fixo de Banach)*
Sejam (X, d) *um espaço métrico completo e* $\varphi : X \longrightarrow X$ *uma aplicação satisfazendo:*

i) $\varphi(X) \subset X$,

ii) φ *é uma contração, isto é, existe uma constante* $0 < c < 1$ *tal que*

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant c d(x, y).$$

Então, φ *possui um único ponto fixo, isto é, existe um único ponto* $x \in X$ *tal que*

$$\varphi(x) = x.$$

Teorema 1.1.2. *(Desigualdade de Young com Epsilon)*
Sejam a *e* b *números reais númeors reais não negativos,* $p, q \geqslant 1$, *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então*

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{C(\varepsilon) b^q}{q},$$

em que $\varepsilon > 0$ *e* $C(\varepsilon)$ *são constantes positivas.*

Demonstração. Veja [13]. □

Teorema 1.1.3. *(Teorema de Compacidade de Aubin-Lions) Sejam* X*,* B *e* Y *espaços de Banach com* $X \subset B \subset Y$ *,* X *e* Y *reflexivos. Suponhamos que* X *está compactamente imerso em* B *e* B *está continuamente imerso em* Y *. Então*

$$W = \left\{ v \in L^{p_0}(0, T : X), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1(0,T:Y)} \right\}$$

onde $1 < p_i < \infty$ *com* $i = 0, 1$*, munido da norma*

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0,T:X)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T:Y)}$$

é um espaço compactamente imerso em $L^{p_0}(0, T : B)$*.*

Demonstração. Veja [30]. □

Teorema 1.1.4. *Sejam* β *e* $\alpha^{(j)}$ *multi-indices* n*-dimensionais,* $j = 1, 2, \ldots, N$*, com componentes inteiras não-negativas. Suponha que* $1 < p_j < \infty, 1 < q < \infty$ *e* $0 < \mu_j < 1$*, satisfazendo*

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_j = 1, \quad \frac{1}{q} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j}{p_j} \quad \text{e} \quad \beta - \frac{1}{q} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(\alpha_j - \frac{1}{p_j}\right). \tag{1.1}$$

Então, para $f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*, vale*

$$\|D^\beta f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \prod_{j=1}^{N} \|D^{\alpha^{(j)}} f\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.2}$$

Demonstração. Veja o Teorema 15.7 em [2]. □

Teorema 1.1.5. *(Teorema de Holmgren) Considere problema de Cauchy*

$$\begin{cases} F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leqslant k}) = 0 \\ \partial_\nu^i u = \phi_i, \quad \text{em} \quad S, \quad \text{com} \quad i = 0, 1, ..k - 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Se no problema (1.3) a equação é linear com coeficientes analíticos, S *é não-característica e os dados* ϕ_i *são funções quaisquer , então, dado um compacto de* S *existe uma vizinhança na qual existe no máximo uma solução.*

Demonstração. Para mais detalhes veja, por exemplo, [21] ou [31]. □

Observação 1.1.1. *O teorema de Holmgren mostra que no caso de equações lineares com coeficientes analíticos, a unicidade da solução vale também sem a analiticidade dos dados (o que é muito importante nas aplicações já que muitas vezes as equações que descrevem os problemas físicos são de fato lineares com coeficientes constantes e a superfície dos dados pode ser simplesmente um hiperplano, mas a hipótese de analiticidade dos dados é excessivamente restritiva). Veja [31]*

1.2 Resultados preliminares para continuação única

Nesta seção, iremos enunciar alguns resultados necessários para a prova do resultado de continuação única da equação de Zakharov-Kuznetsov não-linear. Conforme discutido na introução, nossa argumentação se baseia nas idéias introduzidas por Bourgain em [3]. Além de seguir o mesmo caminho escolhido por Bourgain, utilizaremos os resultados consolidados pelo autor em [3]. Os resultados apresentados aqui servirão de apoio para demonstração dos resultados da Seção 2.1.

Lema 1.2.1. *Seja* $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função inteira, limitada e integrável no eixo real, e satisfazendo:*

$$|\psi(\lambda + i\sigma)| \lesssim e^{B|\sigma|}, \quad \forall \lambda, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Então, para $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$ *vale:*

$$|\psi'(\lambda_1)| \lesssim B \sup_{\lambda' \geqslant \lambda_1} |\psi(\lambda')\big[1 + \log \sup_{\lambda' \geqslant \lambda_1} |\psi(\lambda')\big] \tag{1.4}$$

Demonstração. Veja [3]. □

Sendo $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função satisfazendo as mesmas hipótese do Lema 1.2.1, temos o seguinte resultado.

Lema 1.2.2. *Suponhamos que* σ *satisfaz*

$$|\sigma| \leqslant \left[B \sup_{\lambda' \geqslant \lambda_1} |\psi(\lambda')\big[1 + \log \sup_{\lambda' \geqslant \lambda_1} |\psi(\lambda')\big]\right]^{-1}.$$

Então, para $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ *vale:*

$$\sup_{\lambda' \geqslant \lambda_1} |\psi(\lambda' + i\sigma)| \lesssim 2 \sup_{\lambda' \geqslant \lambda_1} |\psi(\lambda')| \tag{1.5}$$

e

$$\sup_{\lambda' \geqslant \lambda_1} |\psi'(\lambda')| \leqslant B \sup_{\lambda' \geqslant \lambda_1} |\psi(\lambda')| \left[1 + \log \sup_{\lambda' \geqslant \lambda_1} |\psi(\lambda')\right]. \tag{1.6}$$

Demonstração. Veja [3]. □

Além dos lemas mencionados anteriormente, a demonstração do resultado de continuação única exige outras ferramentas importantes, a saber.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Paley-Winner). *Se* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *com suporte em* $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant M\}$, *então* $\widehat{f}$ *tem uma extensão analítica em* $\mathbb{C}^n$. *Além disso, dado* $k \in \mathbb{Z}_+$, *tem-se que*

$$\left|\widehat{f}(\lambda + i\sigma)\right| \leqslant c_k \frac{e^{2\pi M|\sigma|}}{(1 + |\lambda + i\sigma|)^k}, \tag{1.7}$$

para todo $\lambda + i\sigma \in \mathbb{C}^n$. *Reciprocamente, se* $F(\lambda + i\sigma)$ *é uma função analítica em* $\mathbb{C}^n$ *satisfazendo* (1.7), *então* F *é a transformada de Fourier de alguma função* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *com suporte em* $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant M\}$.

Demonstração. veja [27], Exercício 9 do Capítulo 1. Alternativamente, a demonstração pode ser encontrada em textos avançados de Análise Complexa. □

O corolário a seguir será usado diretamente na demonstração do Lema 2.1.3.

Corolário 1.2.1. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \neq 0$ *e com suporte compacto, então para todo* $\epsilon > 0$

$$\widehat{f}(\xi) \notin L^1(e^{\epsilon\|\xi\|}d\xi).$$

Demonstração. Veja [27]. □

1.3 Teoria de Estabilização

Nesta seção, iremos enunciar de forma pontual alguns resultados e definição da teoria de estabilização. Esses resultados serão necessários serão necessários para estabelecer o resultado principal desse trabalho.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ considere o problema abstrato

$$\begin{cases} \partial_t u = \mathcal{A}u + Lv, \text{ em } \Omega \times I \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

onde $\mathcal{A}$ é um operador linear gerador de um semigrupo contínuo $S(t)_{t\geqslant 0}$ em um espaço de hilbert $\mathbf{H}$, e $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathbf{H})$, onde $\mathcal{U}$ é um espaço de hilbert. Dado $K \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathbf{H})$, seja $\mathcal{A}_K z = \mathcal{A}u + LKv$, onde $\mathcal{D}(\mathcal{A}_K) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$, e $\mathcal{A}_K$ é gerador do semigrupo $S_K(t)_{t\geqslant 0}$

Definição 1.3.1. *Dizemos que o sistema (1.8) é exponencialmente estabilizável se existir um operador (***Feedback***)* $K \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathbf{H})$ *tal que o operador* $\mathcal{A}_K$ *é exponencialmente estabilizavel, isto é, existe´m constantes* $c > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que*

$$\|S_K(t)\| \leqslant ce^{-\delta t} \tag{1.9}$$

Provar que um problema de valor inicial é exponencialmente estabilizavél necessita de alguns ingredientes. Dentre eles que os operadores $\mathcal{A}$ e L satisfaçam as seguintes afirmações:

i) Se $\mathcal{A}$ é um operador antisimétrico (**Skew-Adjoint**) linear deinido em $\mathbf{H}$ com resolvente compacto, então $\mathcal{A}$ é gerador de um grupo de automofismos $e^{t\mathcal{A}}$ em $\mathbf{H}$, e para cada $u_0 \in \mathbf{H}$, a equação (1.8) tem uma única solução u satisfazendo

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}} = \|u_0\|_{\mathbf{H}}. \quad (\textbf{Quantidades Conservadas})$$

ii) $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, e existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|Lu\|_{\mathcal{U}} \leqslant c\|\mathcal{A}u_0\|_{\mathbf{H}}, \text{ para todo } u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{1.10}$$

iii) Existe um intervalo não degenerado I e uma constante positiva C_I tal que a solução de (1.8) satisfaz a desigualdade

$$\|Lu\|_{L^2(I:\mathcal{U})} \leqslant c_I\|u_0\|_{\mathbf{H}} \text{ para todo } u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{1.11}$$

O operador L é chamado operador de observabilidade.

iv) Existe um intervalo limitado I' e uma constante c' tal que a solução de (1.8) satisfaz a desigualdade

$$\|u_0\|_{\mathbf{H}} \leqslant c\|Lu\|_{L^2(I';\mathcal{U})}, \text{ para todo } u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{1.12}$$

A desigualdade (1.12) é chamada Desigualdade de Observabilidade para o problema (1.8).

Assim, assumindo que os operadores $\mathcal{A}$ e L satisfaçam os itens $i), ii), iii)$ e $iv)$, e dados $\mathcal{A}^*$ e L^* o operador adjunto de $\mathcal{A}$ e L, respectivamente. Então prova-se o seguinte resultado de estabilização:

Teorema 1.3.1. *Assuma que* $i), ii), iii)$ *e* $iv)$ *verdadeiros, e dado* $\delta > 0$ *fixo arbitrário. Entao existe* $F : \mathbf{H}' \longrightarrow \mathcal{U}'$ *e uma constante* $C > 0$ *tais que o problema*

$$\begin{cases} \partial_t v = \mathcal{A}^* v + L^* F v \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

tem uma solução fracamente contínua $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{H}'$, *e a solução satisfaz a estimativa*

$$\|v(t)\|_{\mathbf{H}'} \leqslant C\|V_0\|_{\mathbf{H}'} e^{-\delta t} \tag{1.14}$$

para todo $v_0 \in \mathbf{H}'$ *e todo* $t \geqslant 0$.

Para mais detalhes consulte [7] e [43].

Nesse trabalho, iremos considerar o espaço de hilbert $\mathbf{H} = L^2(\Omega)$, onde Ω é subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$. Sob essas condições, usaremos o Método Unicidade Hilbertiana e propriedade de semigrupos para explicitar sob quais condições a equação (1.8) é estabilizável exponencialmente.

Assumindo $\mathbf{H} = L^2(\Omega)$, tem-se que energia associada a equação (1.8) é dada por:

$$E(u(t)) = \int_\Omega u^2 dx. \tag{1.15}$$

A partir da definição de energia, a estimativa (1.14) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$E(u(t)) \leqslant CE(u(0))e^{-\delta t}. \tag{1.16}$$

Nesse caso, provando que o Teorema 1.3.1 é verdadeiro, diremos que a energia $E(u)$ associada a equação (1.8) decaí exponencialmente.

Suponha que a equação (1.8) esteja defnida com condições de bordo adequada e que exista um feedback $K \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ tal que a energia satisfaça

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -Q(u(t)) < 0, \tag{1.17}$$

onde $Q(u(t)) = \displaystyle\int_\Omega 2u(\mathcal{A}_K(u) + \mathcal{L}Ku)dx > 0$. A fim de provarmos que a energia decai exponencialmente, procederemos da seguinte forma: Primeiro, integramos a equação (1.17) em $[0, T]$, isto é,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}E(u(t))dt = -\int_0^T Q(u(t))dt, \tag{1.18}$$

o que implica em :

$$E(u(T)) = E(u(0)) - \int_0^T Q(u(t))dt. \tag{1.19}$$

Em seguida, multiplicamos (1.19) por uma constante $C > 0$, obtendo

$$\begin{aligned}(1+C)E(u(T)) &= CE(u(0)) + E(u(0)) - C\int_0^T Q(u(t))dt - \int_0^T Q(u(t))dt \\ &\leqslant CE(u(0)) + E(u(0)) - C\int_0^T Q(u(t))dt. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Daí, vemos que, para obtermos a desigualdade (1.16), é suficiente provarmos a seguinte desigualdade:

$$E(u(0)) \leqslant C\int_0^T Q(u(t))dt. \tag{1.21}$$

A desigualdade (1.21) é uma versão da desigualdade de observabilidade explicitada no item iv). Assim, provando (1.21), obtemos que

$$E(u(T)) \leqslant \frac{C}{1+C}E(u(0)) = \alpha E(u(0)), \tag{1.22}$$

onde $\alpha = \frac{C}{C+1} \leqslant 1$. Portanto, pela teoria de Semigrupo, prova-se que (1.22) implica em (1.16).

De fato, dado $u(x,t) = S(t)u_0$ uma solução da equação (1.8) com dado inicial

$$u(x,0) = u_0 \in L^2(\Omega).$$

Então, para $t > 0$, seja $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon \in (0,T)$ tal que

$$t = nT + \epsilon.$$

Daí, pela propriedade de semigrupo, a solução u é dada por

$$u(x,t) = S(t)u_0 = S(nT+\epsilon)u_0 = S(\epsilon)(S(T)^n u_0).$$

Logo,

$$E(u(t)) = \|S(t)u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \alpha\|S(T)^n u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \alpha^{n+1}\|u_0\|_{L^2\Omega)}. \tag{1.23}$$

Como $0 < \alpha < 1$, tem-se que

$$\alpha = e^{\log\alpha} = e^{-\delta T}$$

onde $\delta = -\frac{\log \alpha}{T} > 0$.

Portanto, de (1.23), segue que

$$E(u(t)) \leqslant \alpha e^{-\frac{\epsilon}{n}} e^{-\delta t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} = C_1 e^{-\delta t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.24}$$

Assim, observamos que para provar a estabilização para equação (1.8) é suficiente provar a desigualdade (1.21). No entanto, provar a desigualdade de observabilidade nem sempre é algo simples. O resultado a seguir facilita a demonstração.

Lema 1.3.1. *Seja* u *uma solução para o problema* (1.8)*, então*

$$E(u(0)) \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T E(u(t))dt + \int_0^T Q(u(t)). \tag{1.25}$$

Demonstração. Multiplicando (1.8) por $(T-t)u$ e integrando em $\Omega \times [0,T]$, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega (T-t)u\partial_t u dxdt = \int_0^T \int_\Omega (T-t)u(Bu + Au)dxdt. \tag{1.26}$$

Integrando por partes, obtemos que

$$-\frac{T}{2}E(u(0)) + \frac{1}{2}\int_0^T E(u(t))dt = -\int_0^T \int_\Omega (T-t)u(Bu + Au)dxdt. \tag{1.27}$$

Daí,

$$E(u(0)) = \frac{1}{T}\int_0^T E(u(t))dt + 2\int_0^T \int_\Omega \frac{(T-t)}{T}u(Bu + Au)dxdt. \tag{1.28}$$

Assim, como $T - t \leqslant T$ para todo $0 \leqslant t \leqslant T$ e $-Q(u(t)) < 0$ segue que

$$E(u(0)) \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T E(u(t))dt + 2\int_0^T \int_\Omega u(\mathcal{B}u - \mathcal{A}u)dxdt. \tag{1.29}$$

$\square$

Observe que, sendo (1.25) verdadeira, tem-se que a desigualdade de observabilidade (1.21) é válida se a seguinte estimativa

$$\int_0^T E(u(t))dt \leqslant C\int_0^T Q(u(t))dt \tag{1.30}$$

for verdadeira. Veja o lema a seguir.

Lema 1.3.2. *Seja* u *solução da equação* (1.8)*. Se para algum* $C > 0$ *vale a estimativa*

$$\int_0^T E(u(t))dt \leqslant C\int_0^T Q(u(t))dt \tag{1.31}$$

então a desigualdade de observabilidade (1.21) *é verdadeira.*

1.4 Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção, abordaremos conceitos pontuais e propriedades relevantes da teoria de semigrupo. Essas propriedades serão utilizada na prova do resultado de boa-colocação local da equaçã (1).

Definição 1.4.1. *Seja* X *um espaço de Banach. Uma família* $S(t) : X \longrightarrow X$ *de operadores, com* $0 \leqslant t < \infty$*, chama-se de semigrupo, quando satifaz:*

1. $S(0) = I$*, onde* $I : X \longrightarrow X$ *é o operador identidade;*

2. $S(t+s) = S(t)S(s)$ *para todo* $t, s \geqslant 0$.

Definição 1.4.2. *Um semigrupo de operadores lineares limitados,* $S(t) : X \to X$*, é fortemente contínuo quando,*

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)x = x, \quad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

Um semigrupo fortemente contínuo é também chamado C_0-semigrupo.

Definição 1.4.3. *O operador linear* $T : D(T) \longrightarrow X$ *é gerador infinitesimal do semigrupo* $S(t)$*, se*

$$D(T) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\}$$

e

$$Tx = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt} S(t)x \bigg|_{t=0}.$$

Teorema 1.4.1. *Sejam* $S(t)$ *e* $R(t)$ C_0*-semigrupos com geradores infinitesimais* A *e* B*, respectivamente. Se* $A = B$*, então* $S(t) = R(t)$ *para todo* $t \leqslant 0$.

Demonstração. Veja [38]. □

Teorema 1.4.2. *Seja* $S(t)$ *um* C_0 *semigrupo, então existem* $M \geqslant 1$ *e* $\alpha \geqslant 0$ *tais que*

$$\|S(t)\| \leqslant Me^{\alpha t}$$

para todo $0 \leqslant t < \infty$.

Demonstração. Veja [38]. □

Teorema 1.4.3. *Seja* $S(t)$ *um* C_0 *semigrupo e* $\mathbf{T}$ *seu gerador infinitesimal. Então para* $x \in X$*, temos*

$$\int_0^t S(s)x ds \in \mathcal{D}(\mathbf{T}) \tag{1.32}$$

e vale

$$\mathbf{T}\left(\int_0^t S(s)x ds\right) = S(t)x - x. \tag{1.33}$$

Demonstração. Veja [38], Capítulo 1, Teorema 2.4. □

Definição 1.4.4. *Seja* X *um espaço de Banach e seja* X' *o dual topólogico. Um operador linear* $\mathbf{T} : \mathcal{D}(\mathbf{T}) \longrightarrow X$ *é um operador dissipativo quando,*

$$\langle \mathbf{T}x, x^* \rangle \leqslant 0,$$

para todo $x \in X$ *e para todo* $x^* \in X'$.

Teorema 1.4.4. (Lumer-Phillips) *Seja* $\mathbf{T} : \mathcal{D}(\mathbf{T}) \longrightarrow X$ *densamente definido em* X.

i) Se $\mathbf{T}$ *é dissipativo e existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que a imagem de* $\lambda_0 I - \mathbf{T}$ *é igual* X*, isto é,*

$$R(\lambda_0 I - \mathbf{T}) = X,$$

então T *é um gerador infinitesimal de um semigrupo decontrações* C_0 *em* X.

ii) Se T *é um gerador infinitesimal de contrações* C_0 *em* X*, então* $R(\lambda I - \mathbf{T}) = X$ *para todo* $\lambda > 0$ *e* $\mathbf{T}$ *é dissipativo. Além disso, para todo* $x \in \mathcal{D}(T)$ *e todo* $x^* \in \mathcal{F}(x)$*,*

$$\mathrm{Re}\langle \mathbf{T}u, x^* \rangle \leqslant 0.$$

Corolário 1.4.1. *Seja* $\mathbf{T}$ *um operadorlinear fechado densamente definido. Se* $\mathbf{T}$ *e seu adjunto* $\mathbf{T}^*$ *são dissipativos, então* $\mathbf{T}$ *é o gerador infinitesimal de um semigrupo* C_0 *das contrações em* X.

Dado $x \in X$. Considere um problema de valor inicial (PVI) não-homogêneo

$$\begin{cases} \partial_t u = \mathbf{T}u + f(t) \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{1.34}$$

onde $f : X \times [0, T] \longrightarrow X$ é uma função e $\mathbf{T} : D(\mathbf{T}) \longrightarrow X$ é um operador linear.

Definição 1.4.5. *Considerando a função* $f(t) \equiv 0$, *temos que o problema* (1.34) *é chamado problema de valor inicial homogêneo, isto é,*

$$\begin{cases} \partial_t u = \mathbf{T}u \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{1.35}$$

Observação 1.4.1. *Sendo* $\mathbf{T}$ *um operador linear e gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo dado por* $\{S(t)\}$, *tem-se que o problema de valor inicial homogêneo tem solução dada por*

$$u(t) = S(t)x, \tag{1.36}$$

onde $x \in \mathcal{D}(\mathbf{T})$ *e a solução satisfaz*

$$\|S(t)x\| \leqslant \|x\|. \tag{1.37}$$

Observação 1.4.2. *Para obter soluções mais regulares para o PVI* (1.35), *basta tomar dados iniciais mais regulares.*

Teorema 1.4.5. *Sejam* $\mathbf{T}$ *o gerador infinitesimal de um* C_0 *semigrupo* $S(t)$, $f \in L^1(0, T : X)$ *contínua* $(0, T)$ *e*

$$v(t) = \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.38}$$

O problema de valor inicial (1.34) *tem uma solução* u *em* $(0, T)$, *para cada* $x \in \mathcal{D}(\mathbf{T})$ *se uma das condições for satisfeita:*

i) $v(t)$ *é continuamente diferenciável em* $(0, T)$.

ii) $v(t) \in \mathcal{D}(\mathbf{T})$, *para* $0 < t < T$ *e* $\mathbf{T}v(t)$ *é contínua em* $(0, T)$.

Demonstração. Veja [38], Capítulo 4, Teorema 2.4. □

Teorema 1.4.6. *Seja* $\mathbf{T}$ *o gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo* $S(t)$. *Se* $f \in L^1(0, T : X)$, *então o PVI* (1.34) *tem no máximo uma solução. Além disso, se o PVI possuir solução, então ela é dada por*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{1.39}$$

Demonstração. Ver [38], Corolário 2.2. □

Capítulo 2

Continuação única para ZK não-linear n-dimensional

Neste capítulo, iremos estabelecer uma propriedade de continuação única para a equação de Zakharov-Kuznetsov (ZK) não-linear $n-$dimensional (1), que será fundamental para a obtenção do resultado principal do nosso trabalho. O que faremos aqui é estender para o caso $n-$dimensional, $n \geqslant 3$, o resultado obtido por M. Panthee [37] para a equação ZK bidimensional. Tanto aqui como em Panthee [37], a técnica é uma adaptação do método introduzido por J. Bourgain em [3] para o estudo da referida propriedade em equações dispersivas não-lineares unidimensionais em que a ordem da derivada mais alta da parte linear da equação é pelo menos duas unidades a mais qua a da parte não-linear.

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_{x_1}\Delta u + u\partial_{x_1} u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times I \\ u(x,0) = u_0(x), \text{ em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e a função real $u : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é não-degenerado, onde $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, com $s > \frac{n}{2}$. Sobre a boa-colocação deste problema, sugerimos a referência [19].

Seguindo de perto as idéias de J. Bourgain [3],e de M. Panthee [37], demonstraremos que se u é uma solução suficientemente suave da equação (2.1) com suporte compacto, para todo t pertencente a um intervalo não-degenerado, então u deve ser identicamente nula, ou seja, $u \equiv 0$. Mais precisamente, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.0.1. *Consideremos* $u = u(x,t)$ *uma solução suficientemente suave para o problema* (2.1) *e seja* $I = [-T, T]$ *um intervalo não-degenerado. Se para algum* $B > 0$,

$$\mathbf{supp}\ \mathbf{u}(\mathbf{t}) \subset \mathcal{B} := [\mathbf{0}, \mathbf{B}] \times \cdots \times [\mathbf{0}, \mathbf{B}], \quad \forall \mathbf{t} \in I. \tag{2.2}$$

então $u \equiv 0$.

O argumento de prova será por contradição, isto é, iremos supor que a solução u de suporte compacto do PVI (2.1) seja não nula para algum $t \in I$. Em seguida, observaremos que pela fórmula de Duhamel: u é solução da equação (2.1) se, e somente se, u é solução da equação integral

$$u(x, t_1) = S(t_2)u(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} U(t_1 - \tau)u\partial_{x_1}u(\tau)d\tau, \tag{2.3}$$

com $t_1, t_2 \in I$ e $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ é o grupo dado por

$$S(t)\varphi(x) = \{e^{iP(\lambda)t}\widehat{\varphi}(\lambda)\}^{\vee}(x)$$

e $P(\lambda)$ é o polinômio dado por

$$P(\lambda) = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2,$$

com $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Então, é suficiente aplicar o argumento de contradição sobre a solução da equação integral (2.3).

Como $u(t)$ tem suporte compacto, então pelo Teorema de Paley-Wiener a transformada de Fourier de u admite uma extensão analítica em $\mathbb{C}^n$, ou seja,

$$\widehat{u(t)}(\lambda + i\sigma) = e^{iP(\lambda+i\sigma)t}\widehat{u}_0(\lambda + i\sigma) - \int_0^t e^{i(t-\tau)P(\lambda+i\sigma)}(\widehat{u\partial_{x_1}u})(\tau)(\lambda + i\sigma)d\tau. \tag{2.4}$$

Aplicando o módulo em ambos os lados da equação (2.4) e fazendo algumas manipulações algébricas, obteremos a seguinte desiguadade:

$$\begin{aligned} e^{-\mathrm{Re}\{iP(\lambda+i\sigma)\}(t_2-t_1)}|\widehat{u(t_2)}(\lambda+i\sigma)| \geqslant |\widehat{u}(t_1)(\lambda)| - \frac{|\lambda_1|}{2}\int_{t_1}^{t_2} |e^{i(t_1-\tau)P(\lambda+i\sigma)}\widehat{(u^2)(\tau)}(\lambda)|d\tau \\ -|\widehat{u}(t_1)(\lambda+i\sigma) - \widehat{u}(t_1)(\lambda)| \\ -\frac{|\lambda_1|}{2}\int_{t_1}^{t_2} |e^{i(t_1-\tau)P(\lambda+i\sigma)}\widehat{(u^2)(\tau)}(\lambda+i\sigma) - \widehat{(u^2)(\tau)}(\lambda)|d\tau \\ = I - II - III, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathrm{I} =&: |\widehat{u}(t_1)(\lambda)| - \frac{|\lambda_1|}{2}\int_{t_1}^{t_2} |e^{i(t_1-\tau)P(\lambda+i\sigma)}\widehat{(u^2)(\tau)}(\lambda)|d\tau \\ \mathrm{II} =&: |\widehat{u}(t_1)(\lambda+i\sigma) - \widehat{u}(t_1)(\lambda)|, \\ \mathrm{III} =&: \frac{|\lambda_1|}{2}\int_{t_1}^{t_2} |e^{i(t_1-\tau)P(\lambda+i\sigma)}\widehat{(u^2)(\tau)}(\lambda+i\sigma) - \widehat{(u^2)(\tau)}(\lambda)|d\tau. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nós pretenderemos obter o mesmo tipo de contradição obtida na prova do Teorema 1.1 em [37]. Desse modo é suficiente o lado direito da estimativa (2.5), isto é, provar a seguinte estimativa:

$$\mathrm{I} - \mathrm{II} - \mathrm{III} \gtrsim e^{-\frac{\|\lambda\|}{Q}}. \tag{2.7}$$

Assim, para obter a contradição, e consequentemente, provar o Teorema 2.0.1, necessitaremos que alguns resultados auxiliáres. Na próxima seção iremos estabelecer esses resultados.

2.1 Resultados preliminares para propriedade de continuação única

Nesta seção, vamos estabelecer resultados preliminares necessários para a prova do Teorema 2.0.1. Começaremos defnindo alguns conceitos importantes.

Definição 2.1.1. *Seja u a solução de (2.1). Para cada $\lambda \in \mathbb{R}^n$ denotaremos por U^* uma função real definida:*

$$U^*(\lambda) = \sup_{t\in I} |\widehat{u(t)}(\lambda)|, \tag{2.8}$$

onde $\widehat{u(t)}$ é a Transformada de Fourier da função u.

A partir da defnição anterior, defniremos a seguinte função:

Definição 2.1.2. *Seja u a solução de (2.1). Para cada $\lambda \in \mathbb{R}^n$ denotaremos por $m(\lambda)$ uma função real definida:*

$$m(\lambda) = \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} U^*(\lambda'), \tag{2.9}$$

onde $\omega_\lambda = \{\lambda' \in \mathbb{R}^n : |\lambda_i'| \geqslant |\lambda_i|, \quad \text{com} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Neste trabalho, seguiremos a mesma sequência de Lemas apresentada em [37], com o objetivo de estender os resultados estabelecidos por M. Panthee para funções $m(\lambda)$ com $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Em particular, começaremos demonstrando que, se a solução u do PVI (2.1) for suficientemente suave e tiver suporte compacto contido em $\mathcal{B}$, a sua transformada de Fourier $\widehat{u(t)} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, possui crescimento exponencial.

Lema 2.1.1. *Seja $u = u(x,t)$ solução de (2.1), suficientemente suave. Se para algum $B > 0$,*

$$\textbf{supp}\ \ \mathbf{u}(\mathbf{t}) \subset \mathcal{B}, \forall \mathbf{t} \in I,$$

então para todo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$|\widehat{u(t)}(\lambda + i\sigma)| \lesssim e^{cB\|\sigma\|},$$

onde c é uma constante positiva.

Demonstração. A demonstração segue de maneira análoga aos casos undimensional e bidimensional discutidos [3] e [37], respectivamente. De fato, para $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned} |\widehat{u(t)}(\lambda + i\sigma)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x\cdot(\lambda + i\sigma))} u(x,t)dx \right| \\ &\leqslant \int_{\mathcal{B}} e^{(x\cdot\sigma)} |u(x,t)| dx. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como u tem suporte compacto, então pela desigualdade e Cauchy-Schawarz

$$(x \cdot \sigma) \leqslant \|x\| \|\sigma\| \leqslant B\|\sigma\|.$$

Daí, sendo u é solução de (2.1), segue de (2.10) e da última desigualdade que :

$$\begin{aligned} |\widehat{u(t)}(\lambda + i\sigma)| &\leqslant \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} e^{B\|\sigma\|} \\ &\leqslant \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} e^{B\|\sigma\|} \\ &\lesssim e^{cB\|\sigma\|}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

□

Sendo u uma solução suficientemente suave para o PVI (2.1), provaremos um resultado que auxiliará na prova do Lema 2.1.3.

Lema 2.1.2. *Seja $u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R}^n))$ para $s > \frac{n}{2}$, para $n \geqslant 3$, uma solução suficientemente suave para (2.1) com* **supp** $\mathbf{u}(\mathbf{t}) \subset \mathcal{B}$ *para todo $t \in I$. Então, existe uma constante $B > 0$ tal que*

$$m(\lambda) \lesssim \frac{B}{1 + \|\lambda\|^{2s}}. \tag{2.12}$$

Demonstração. A demonstração segue o mesmo roteiro do caso bidimensional, estabelecido em [37]. De fato, seja u solução para o PVI (2.1) com suporte compacto contido em $\mathcal{B}$. Então, para todo $t \in I$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned} |\widehat{u(t)}(\lambda)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(x,t)dx \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|dx \\ &\leqslant |\mathcal{B}| \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $|\mathcal{B}|$ é a medida do conjunto.

Como a equação (2.1) possui quantidades conservadas, em particular a energia:

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Então,

$$|\widehat{u(t)}(\lambda)| \lesssim 1. \tag{2.14}$$

Consequentemente,

$$U^*(\lambda) = \sup_{t \in I} |\widehat{u(t)}(\lambda)| \leqslant C. \tag{2.15}$$

Por outro lado, pela boa colocação do PVI (2.1), temos que:

$$\|D^s u\|_{L^\infty(I:L^2(\mathbb{R}^n))} < \infty. \tag{2.16}$$

Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e (2.16), obtemos:

$$\begin{aligned} \|\lambda\|^s |\widehat{u(t)}(\lambda)| &= |\widehat{D^s u(t)}(\lambda)| \\ &\leqslant |\mathcal{B}| \|D^s u\|_{L^\infty(I:L^2(\mathbb{R}^n))} \leqslant C_2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Portanto,

$$|\widehat{u(t)}(\lambda)| \leqslant \frac{C_2}{\|\lambda\|^s}. \tag{2.18}$$

Como $u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R}^n))$ para $s > \frac{n}{2}$, para $n \geqslant 3$, vale :

$$|\widehat{u(t)}(\lambda)| \leqslant \frac{C_2}{\|\lambda\|^{4s}}. \tag{2.19}$$

Assim, pelas estimativas (2.14) e (2.19),

$$U^*(\lambda) \leqslant \frac{C_3}{1 + \|\lambda\|^{4s}}. \tag{2.20}$$

Portanto, para $\lambda' \in \mathbb{R}^n$ com $|\lambda_i'| \geqslant |\lambda_i|$ com $i = 1, 2, \dots n$, implica que

$$1 + \|\lambda'\|^{4s} \geqslant 1 + \|\lambda\|^{4s}.$$

Logo,

$$m(\lambda) = \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} U^*(\lambda') \leqslant \frac{C_2}{1 + \|\lambda'\|^{4s}} \leqslant \frac{C_2}{1 + \|\lambda\|^{4s}}. \tag{2.21}$$

O que prova o resultado. $\square$

O lema a seguir é essencial para a demonstração do Teorema 2.0.1, pois fornece uma estimativa inferior para $m(\lambda)$. Em particular, mostraremos que:

$$m(\lambda) > c(m * m)(\lambda) + e^{-\frac{\|\lambda\|}{Q}},$$

onde c é uma constante positiva e Q um parêmetro suficientemente grande. A demonstração do lema seguirá de perto a mesma sequência de argumentos usado na demonstração do Lema 1 em [3].

Lema 2.1.3. *Seja u uma função de suporte compacto, onde $u(t) \neq 0$, para algum $t \in I$. Existe uma constante $c > 0$ tal que para qualquer Q suficientemente grande, existe $\lambda \in \mathbb{R}^n$ com $\|\lambda\| \gg 1$, satisfazendo*

$$m(\lambda) > e^{-\frac{\|\lambda\|}{Q}}, \tag{2.22}$$

$$m(\lambda) > c(m * m)(\lambda). \tag{2.23}$$

Demonstração. Suponhamos por contradição que uma das desigualdades (2.22) ou (2.23) não seja válida para $\lambda \in \mathbb{R}^n$ com $\|\lambda\| > \lambda_0$, onde $\lambda_0 \gg 1$. Pelo Lema 2.1.2, temos que:

$$m(\lambda) < \frac{B}{1 + \|\lambda\|^{4s}}, \tag{2.24}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}^n$, com $s > \frac{n}{2}$. Assim, para $\|\lambda\| \leqslant \lambda_0$, temos que:

$$m(\lambda) < \frac{2Be^{-\frac{\|\lambda\|}{2(\lambda_0 + Q)}}}{1 + \|\lambda\|^{2s}}, \tag{2.25}$$

para algum $Q \gg 1$. Observe que, se mostramos que a desigualdade (2.25) é válida para todo $\lambda \in \mathbb{R}^n$, obteremos a contradição e consequentemente provaremos o Lema. Isso ocorre, pois assumindo a validade da estimativa (2.25), então obteremos que:

$$|\widehat{u(t)}(\lambda)| \leqslant m(\lambda) \leqslant \frac{2Be^{-\frac{\|\lambda\|}{2(\lambda_0 + Q)}}}{1 + \|\lambda\|^{2s}}. \tag{2.26}$$

Em seguida, usaremos a contrapositiva do Corolário 1.2.1 com ϵ satisfazendo:

$$\varepsilon \leqslant -\frac{\|\lambda\|}{2(\lambda_0+Q)}.$$

Assim, avaliando a $\widehat{u(t)}$ na norma $L^1(\mathbb{R}^n)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\|\widehat{u(t)}\|_{L^1\left(e^{\epsilon\|\lambda\|}d\lambda\right)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u(t)}(\lambda) e^{\epsilon\|\lambda\|} d\lambda \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2Be^{-\frac{\|\lambda\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{1+\|\lambda\|^{2s}} e^{\epsilon\|\lambda\|} d\lambda \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2B}{1+\|\lambda\|^{2s}} d\lambda. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Como $2s \geqslant n$, segue que $\widehat{u(t)} \in L^1(e^{\epsilon\|\lambda\|}d\lambda)$. Portanto, pelo Corolário 1.2.1, implicará que $u \equiv 0$, o que será uma contradição, pois $u(t) \neq 0$, para algum $t \in I$.

Suponhamos por contradição que (2.25) não seja válido para algum $\lambda \in \mathbb{R}^n$ com $\|\lambda\| > \lambda_0$, ou seja, existe um subconjunto $A \subsetneq \mathbb{R}^n$ definido por

$$A := \left\{\lambda \in \mathbb{R}^n : m(\lambda) \geqslant \frac{2Be^{-\frac{\|\lambda\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{1+\|\lambda\|^{2s}}\right\}.$$

Seja $\lambda' \in A$ tal que $\|\lambda'\| = \min_{\lambda\in A} \|\lambda\| > \lambda_0$. Se (2.22) não for válida para $\lambda = \lambda'$, então

$$m(\lambda') \leqslant e^{-\frac{\|\lambda'\|}{Q}}. \tag{2.28}$$

Multiplicando a estimativa (2.28) por (2.24), obtemos que:

$$[m(\lambda')]^2 \leqslant e^{-\frac{\|\lambda'\|}{Q}} \frac{B}{1+\|\lambda'\|^{4s}}. \tag{2.29}$$

Logo,

$$m(\lambda') < \frac{B}{\sqrt{1+\|\lambda'\|^{4s}}} e^{-\frac{\|\lambda'\|}{2(Q+\lambda_0)}} < \frac{2B}{1+\|\lambda'\|^{2s}} e^{-\frac{\|\lambda'\|}{2(Q+\lambda_0)}}, \tag{2.30}$$

o que é uma contradição, pois $\lambda' \in A$. Agora, suponhamos que a desigualdade (2.23) não seja verdadeira para $\lambda = \lambda'$. Então, para toda constante $c > 0$, temos:

$$\begin{aligned} m(\lambda') &\leqslant cm * m(\lambda') \\ &= \int_{W_1} m(\lambda-\lambda') m(\lambda) d\lambda + \int_{W_1^c} m(\lambda-\lambda') m(\lambda) d\lambda \\ &:= I + II, \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde,

$$I = \int_{W_1} m(\lambda - \lambda')m(\lambda)d\lambda \ \text{ e } \ II := \int_{W_1^c} m(\lambda - \lambda')m(\lambda)d\lambda,$$

e o conjunto W_1 é dado por:

$$W_1 := \{\lambda \in \mathbb{R}^n : |\lambda_k - \lambda'_k| < |\lambda'_k|, \forall k = 1, 2, \dots n\} \cap \{\lambda \in \mathbb{R}^n : |\lambda_k| < |\lambda'_k|, \forall k = 1, 2, \dots n\}.$$

Para completar a demonstração, é necessário analisar separadamente os termos I e II, e como consequência, mostraremos que $m(\lambda')$ satisfaz uma estimativa do tipo (2.25). O que será uma contradição, pois $\lambda' \in A$.

Comecemos pela análise do termo I. Suponha que $\lambda \in W_1$. Nesse caso, valem as seguintes desigualdades para todo $k = 1, 2, \dots, n$: $|\lambda_k - \lambda'_k| < |\lambda'_k|$ e $|\lambda_k| < |\lambda'_k|$. Portanto, pela equação (2.25), conclui-se que:

$$m(\lambda) < \frac{2Be^{-\frac{\|\lambda\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{1 + \|\lambda\|^{2s}} \tag{2.32}$$

e

$$m(\lambda - \lambda') < \frac{2B_1e^{-\frac{\|\lambda-\lambda'\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{1 + \|\lambda - \lambda'\|^{2s}}. \tag{2.33}$$

onde B e B_1 são constantes. Portanto, usando as estimativas (2.32) e (2.34), podemos estimatimar para I da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I &\leqslant \int_{W_1} m(\lambda - \lambda')m(\lambda)d\lambda \\ &\leqslant \int_{W_1} \frac{2B_1e^{-\frac{\|\lambda-\lambda'\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{1 + \|\lambda - \lambda'\|^{2s}} \cdot \frac{2Be^{-\frac{\|\lambda\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{1 + \|\lambda\|^{2s}} d\lambda \\ &\leqslant 2B_1 2Be^{-\frac{\|\lambda'\|}{2(\lambda_0+Q)}} \int_{W_1} \frac{1}{1 + \|\lambda - \lambda'\|^{2s}} \cdot \frac{1}{1 + \|\lambda\|^{2s}} d\lambda. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Daí, concluimos que:

$$I \leqslant \frac{2B_1B_2Ke^{-\frac{\|\lambda'\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{1 + \|\lambda'\|^{2s}} \int_{W_1} \frac{1}{1 + \|\lambda\|^{2s}} d\lambda \lesssim c\frac{B_1B_2K\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \frac{e^{-\frac{\|\lambda'\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{1 + \|\lambda'\|^{2s}}. \tag{2.35}$$

Resta analisar II. Primeiramente, observemos que o complementar do conjunto W_1 é dado por:

$$\begin{aligned} W_1^c =: &\{\lambda \in \mathbb{R}^n : |\lambda_k - \lambda'_k| < |\lambda'_k|, \forall k = 1, 2, \dots n\}^c \cup \{\lambda \in \mathbb{R}^n : |\lambda_k| < |\lambda'_k|, \forall k = 1, 2, \dots n\}^c \\ =: &V_1 \cup V_2. \end{aligned}$$

Desse modo, podemos escrever os conjunto V_1 e V_2 da seguinte maneira: $V_1 = V_1^1 \cup (V_1^1)^c$ e $V_2 = V_2^1 \cup (V_2^1)^c$, onde V_1^1 é dado por

$$V_1^1 = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : |\lambda_k - \lambda'_k| \geqslant |\lambda'_k|, \forall k = 1, 2, \ldots n\},$$

e o conjunto V_2^1 é dado por:

$$V_2^1 =: \left\{\lambda \in \mathbb{R}^n : |\lambda_k| \geqslant |\lambda'_k|, \forall k = 1, 2, \ldots n\right\}.$$

Por outro lado, observamos que, pela própria definição, a função $m(\lambda)$ satisfaz a propriedade de monotonicidade quando definida sobre os conjuntos V_1^1 e V_2^1. Mais especificamente,

$$m(\lambda - \lambda') \leqslant m(\lambda') \quad e \quad m(\lambda) \leqslant m(\lambda'), \tag{2.36}$$

para $\lambda \in V_1^1$ ou $\lambda \in V_2^1$, respectivamente. Desse modo, usando as estimativas em (2.36),

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \int_{W_1^c} m(\lambda - \lambda') m(\lambda) d\lambda \\
&= \int_{V_1 \cup V_2} m(\lambda - \lambda') m(\lambda) d\lambda \\
&\leqslant \int_{V_1^1 \cup V_2^1} m(\lambda - \lambda') m(\lambda) d\lambda + \int_{(V_1^1)^c \cup (V_2^1)^c} m(\lambda - \lambda') m(\lambda) d\lambda \\
&\leqslant 2m(\lambda') \int_{\mathbb{R}^n} m(\lambda) d\lambda + \int_{(V_1^1)^c \cup (V_2^1)^c} m(\lambda - \lambda') m(\lambda) d\lambda \\
&=: c2m(\lambda') \int_{\mathbb{R}^n} m(\lambda) d\lambda + \mathrm{III},
\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde

$$\mathrm{III} := \int_{(V_1^1)^c \cup (V_2^1)^c} m(\lambda - \lambda') m(\lambda) d\lambda.$$

Observemos ainda que a expressão

$$c2m(\lambda') \int_{\mathbb{R}^n} m(\lambda) d\lambda$$

poderá ser acoplada ao lado esquerdo da estimativa (2.37). Portanto, para concluirmos a demonstração da desigualdade (2.25) é suficiente estimar III da mesma forma que I.

Para isso, observemos primeiramente que os conjuntos$(V_1^1)^c$ e $(V_2^1)^c$ satisfaz as seguintes propriedades: dado $\lambda \in (V_1^1)^c$ existe um conjunto de índice não vazio $\mathbf{I} \subsetneq \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$$|\lambda_k - \lambda'_k| < |\lambda'_k|, \quad para \quad k \in \mathbf{I}.$$

De forma análoga, para $\lambda \in (V_2^1)^c$, existe um conjunto de índice não vazio $\mathbf{J} \subsetneq \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que

$$|\lambda_k| < |\lambda_k'|, \quad para \quad k \in \mathbf{J}.$$

Assim, a função $m(\lambda)$, quando definida sobre o conjunto $\lambda \in (V_1^1)^c \cup (V_2^1)^c$, satisfaz uma estimativa análoga à dada por (2.25). Mais especificamente, a função $m(\lambda)$ satisfaz as seguintes estimativas. Para $\lambda \in (V_1^1)^c$, vale:

$$m(\lambda) \leqslant \frac{2^n B_3 e^{-\frac{\sum_{k\in\mathbf{J}}|\lambda_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}^c}|\lambda_k'|}{2(\lambda_0+Q)}}}{\prod_{k\in\mathbf{J}}(1+|\lambda_k|^{2s})\prod_{k\in\mathbf{J}^c}(1+|\lambda_k'|^{2s})}. \tag{2.38}$$

Onde B_3 é uma constante. De modo análogo a (2.38), segue que $m(\lambda - \lambda')$ satisfaz:

$$m(\lambda-\lambda') \leqslant \frac{2^n B_4 e^{-\frac{\sum_{k\in\mathbf{I}}|\lambda_k-\lambda_k'| + \sum_{k\in\mathbf{I}^c}|\lambda_k'|}{2(\lambda_0+Q)}}}{\prod_{k\in\mathbf{I}}(1+|\lambda_k-\lambda_k'|^{2s})\prod_{k\in\mathbf{I}^c}(1+|\lambda_k'|^{2s})}. \tag{2.39}$$

onde B_4 é uma constante. Agora, ao multiplicarmos a estimativa (2.38) pela estimativa (2.39), obtemos:

$$m(\lambda)m(\lambda-\lambda') \leqslant \frac{4^n B_3 B_4 e^{-\frac{\sum_{k\in\mathbf{I}^c\cup\mathbf{J}^c}|\lambda_k'| + \sum_{k\in\mathbf{J}}|\lambda_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}}|\lambda_k-\lambda_k'|}{2(\lambda_0+Q)}}}{\prod_{k\in\mathbf{I}}(1+|\lambda_k-\lambda_k'|^{2s})\prod_{k\in\mathbf{I}^c\cup\mathbf{J}^c}(1+|\lambda_k'|^{2s})\prod_{k\in\mathbf{J}}(1+|\lambda_k|^{2s})}. \tag{2.40}$$

Para concluir a demonstração é suficiente provar que III satisfaz uma estimativa do tipo (2.35). Pela estimativa (2.40), vemos que é suficiente mostrarmos que a seguinte desigualdade:

$$\sum_{k\in\mathbf{I}^c\cup\mathbf{J}^c}|\lambda_k'| + \sum_{k\in\mathbf{I}}|\lambda_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}}|\lambda_k-\lambda_k'| \geqslant \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k'|. \tag{2.41}$$

é válida para quaisquer subconjuntos de índices $\mathbf{I}, \mathbf{J} \subsetneq \{1, 2, \ldots, n\}$. Dessa forma, obteremos o resultado desejado.

Para verificar que a desigualdade (2.41) é verdadeira, dividiremos a demonstração em diferentes casos, observando que, independentemente dos conjuntos $\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}$, a desigualdade se mantém.

1º caso: $\mathbf{I} = \mathbf{J}$.

Como $\mathbf{I}, \mathbf{J} \subsetneq \{1, 2, \ldots, n\}$, temos que $\mathbf{I}^c = \mathbf{J}^c$. Portanto,

$$\sum_{k \in \mathbf{I}^c \cup \mathbf{J}^c} |\lambda'_k| = 2 \sum_{k \in \mathbf{I}^c} |\lambda'_k|. \tag{2.42}$$

Por outro lado, usando a desigualdade triangular em λ'_k para todo $k \in \mathbf{I} \cup \mathbf{J}$, temos:

$$|\lambda'_k| \leqslant |\lambda'_k - \lambda_k| + |\lambda_k|.$$

Logo,

$$\sum_{k \in \mathbf{I}} |\lambda_k| + \sum_{k \in \mathbf{J}} |\lambda_k - \lambda'_k| \geqslant \sum_{k \in \mathbf{I}} |\lambda'_k|. \tag{2.43}$$

Assim, de (2.42) e (2.43), garantimos que a desigualdade (2.41) é verdadeira.

2º caso: $\mathbf{I} \neq \mathbf{J}$, onde $\mathbf{I} \subsetneq \mathbf{J}$ ou $\mathbf{J} \subsetneq \mathbf{I}$.

Primeiramente, consideremos o caso em que $\mathbf{I} \subsetneq \mathbf{J}$. O caso contrário é análogo. Como $\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}$ são finitos, podemos, sem perda de generalidade, supor que o conjunto $\mathbf{J}$ é igual ao conjunto $\mathbf{I}$ acrescido de um elemento não pertencente ao conjunto $\mathbf{I}$. Especificamente, assumiremos que $\mathbf{J} = \mathbf{I} \cup \{k_0\} \subsetneq \{1, 2, \ldots, n\}$, onde $k_0 \in \mathbf{J} \setminus \mathbf{I}$. Assim, a expressão (2.41) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbf{I}^c \cup \mathbf{J}^c} |\lambda'_k| + \sum_{k \in \mathbf{I}} |\lambda_k| + \sum_{k \in \mathbf{J}} |\lambda_k - \lambda'_k| = \sum_{k \in \mathbf{I}^c} |\lambda'_k| + \sum_{k \in \mathbf{I}} \Big[|\lambda_k| + |\lambda_k - \lambda'_k| \Big] + |\lambda_{k_0} - \lambda'_{k_0}| \\ + \sum_{k \in \mathbf{J}^c} |\lambda'_k|. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Assim, como no **1º** caso, usaremos a desigualdade triangular para obtermos:

$$\sum_{k \in \mathbf{I}} [|\lambda_k| + |\lambda_k - \lambda'_k|] \geqslant \sum_{k \in \mathbf{I}} |\lambda'_k|. \tag{2.45}$$

Por outro lado, o complementar do conjunto $\mathbf{J}$ é dado por:

$$\mathbf{J}^c = (\mathbf{I} \cup \{k_0\})^c = \mathbf{I}^c \cap \{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{k_0\} = \mathbf{I}^c \backslash \{k_0\}.$$

Como $\mathbf{I} = \mathbf{J} \backslash \{k_0\}$, temos que a análise sobre λ'_k com $k \in \mathbf{I}^c \cup \mathbf{J}^c$ é análoga ao **1º** caso, ou seja, vale:

$$\sum_{k \in \mathbf{J}^c} |\lambda'_k| + \sum_{k \in \mathbf{I}^c} |\lambda'_k| = |\lambda'_{k_0}| + 2 \sum_{k \in \mathbf{J}^c} |\lambda'_k|. \tag{2.46}$$

Além disso, como $k_0 \in \mathbf{I}^c$, temos que $|\lambda_{k_0} - \lambda'_{k_0}| \geqslant |\lambda'_{k_0}|$. Portanto, utilizando (2.45) e (2.46) ganharemos a seguite a estimativa inferior para (2.44):

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{I}^c\cup\mathbf{J}^c}|\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}}|\lambda_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}}|\lambda_k - \lambda'_k| &\geqslant \sum_{k\in\mathbf{I}^c}|\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}}\Big[|\lambda_k| + |\lambda_k - \lambda'_k|\Big] + |\lambda_{k_0} - \lambda'_{k_0}| \\ &+ \sum_{k\in\mathbf{J}^c}|\lambda'_k| \\ &\geqslant 2|\lambda'_{k_0}| + 2\sum_{k\in\mathbf{J}^c}|\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}}|\lambda'_k| \\ &\geqslant \sum_{k\in\mathbf{I}^c}|\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}}|\lambda'_k. \end{aligned} \tag{2.47}$$

O que prova (2.41).

3 º Caso: Os conjuntos de índices $\mathbf{I}, \mathbf{J} \subsetneq \{1, 2, \ldots, n\}$ são disjuntos, isto é, $\mathbf{I} \cap \mathbf{J} = \emptyset$.

Neste caso, procederemos da seguinte forma: Primeiramente, observamos que o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\{1, 2, \ldots, n\} = \mathbf{I} \cup \mathbf{I}^c \quad e \quad \{1, 2, \ldots, n\} = \mathbf{J} \cup \mathbf{J}^c.$$

Como os complementares dos conjuntos de índices, $\mathbf{I}^c$ e $\mathbf{J}^c$, não são disjuntos, escreveremos cada um da seguinte forma: $\mathbf{I}^c = \mathbf{J} \cup (\mathbf{I}^c \backslash \mathbf{J})$ e $\mathbf{J}^c = \mathbf{I} \cup (\mathbf{J}^c \backslash \mathbf{I})$, onde estas uniões são disjuntas. Assim, as somas dos termos $|\lambda'_k|$ sobre os conjuntos $\mathbf{I}^c$ e $\mathbf{J}^c$ podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\sum_{k\in\mathbf{I}^c}|\lambda'_k| = \sum_{k\in\mathbf{J}}|\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}^c\backslash\mathbf{I}}|\lambda'_k| \quad \text{e} \quad \sum_{k\in\mathbf{J}^c}|\lambda'_k| = \sum_{k\in\mathbf{I}}|\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}^c\backslash\mathbf{I}}|\lambda'_k|. \tag{2.48}$$

Com base nessas igualdades, poderemos reescrever o lado direito da estimativa (2.41) conforme definição dos conjuntos $\mathbf{I}^c$ e $\mathbf{J}^c$. Ao utilizar as igualdades dadas em (2.48), obteremos:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{I}}\lambda_k + \sum_{k\in\mathbf{I}^c}|\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}}|\lambda_k - \lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}^c}|\lambda'_k| &= \sum_{k\in\mathbf{I}}|\lambda_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}}|\lambda_k - \lambda'_k| \\ &+ \sum_{k\in\mathbf{J}}|\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}^c\backslash\mathbf{J}}|\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}}|\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}^c\backslash\mathbf{I}}|\lambda'_k|. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Agora, podemos analisar o lado direito da igualdade (2.49), já que alguns somatórios estão definidos sobre os mesmos conjuntos de índices. Primeiramente, observaremos que, para

$k \in \mathbf{I}$, as normas de λ_k satisfazem a desigualdade $|\lambda_k| \geqslant |\lambda_k|$. Assim, obteremos:

$$\sum_{k\in\mathbf{I}} |\lambda_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}} |\lambda'_k| \geqslant 2\sum_{k\in\mathbf{I}} |\lambda'|. \tag{2.50}$$

Por outro lado, para $k \in \mathbf{J}$ a norma de $\lambda_k - \lambda'_k$ satisfaz a seguinte estimativa $|\lambda_k - \lambda'_k| \geqslant |\lambda'_k|$. Utilizando essa estimativa, obteremos:

$$\sum_{k\in\mathbf{J}} |\lambda_k - \lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}} |\lambda'_k| \geqslant 2\sum_{k\in\mathbf{J}} |\lambda'_k|. \tag{2.51}$$

Portanto, a partir de (2.49), (2.50) e (2.51), concluímos que a desigualdade (2.41) é válida.

4º Caso: Os conjutos de índices $\mathbf{I}, \mathbf{J} \subsetneq \{1, 2, \dots, n\}$ satisfazem: $\mathbf{I} \cap \mathbf{J} \neq \emptyset$, mas $\mathbf{I} \not\subseteq \mathbf{J}$ e $\mathbf{J} \not\subseteq \mathbf{I}$.

Nesse caso, iremos proceder maneira semelhante ao **3º** caso. Especificamente, escreveremos os conjuntos **I** e **J** da segunte maneira:

$$\mathbf{I} = (\mathbf{I}\backslash\mathbf{I}\cap\mathbf{J}) \cup (\mathbf{I}\cap\mathbf{J}) \;\; e \;\; \mathbf{J} = (\mathbf{J}\backslash\mathbf{I}\cap\mathbf{J}) \cup (\mathbf{I}\cap\mathbf{J}), \tag{2.52}$$

onde essas uniões são disjuntas. A partir das definições dos conjuntos **J** e **I**, escreveremos os seus respectivos complementares da seguinte forma:

$$\mathbf{I}^c = [\mathbf{J}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})] \cup [\mathbf{J}^c\backslash(\mathbf{I}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J}))] \;\; \text{e} \;\; \mathbf{J}^c = [\mathbf{I}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})] \cup [\mathbf{I}^c\backslash(\mathbf{J}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J}))]. \tag{2.53}$$

Com base nas igualdades (2.52) e (2.53), poderemos escrever o lado direito da estimativa (2.41), o que nos permitirá uma análise semelhante à realizada **3º** caso. Precisamente, poderemos expressar o lado direito de (2.41) desse modo:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{I}} |\lambda_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}^c} |\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}^c} |\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}} |\lambda_k - \lambda'_k| &= \sum_{k\in\mathbf{I}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})} |\lambda_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})} |\lambda_k - \lambda'_k| \\ &+ \sum_{k\in(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})} |\lambda_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})} |\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}^c\backslash(\mathbf{I}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J}))} |\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})} |\lambda'_k| \\ &+ \sum_{k\in\mathbf{I}^c\backslash(\mathbf{J}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J}))} |\lambda'_k| + \sum_{k\in(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})} |\lambda_k - \lambda'_k|. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Assim, como no **3º** caso, o lado direito da igualdade (2.54) está expressado de forma que poderemos agrupar os somatórios dois a dois para estabelecer uma estimativa inferior, provando assim a estimativa (2.41). Isso é possível porque esses somátorios estão definidos sobre os mesmo conjuntos de índices.

Começaremos analisando os somátórios que estão defnidos sobre o conjunto $\mathbf{I}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})$. Notemos que, a desigualdade $|\lambda_k| \geqslant |\lambda'_k|$ é verdadeira para todo $k \in \mathbf{I}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})$. Daí, obteremos que:

$$\sum_{k\in\mathbf{I}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})}|\lambda_k| + \sum_{k\in\mathbf{I}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})}|\lambda'_k| \geqslant 2\sum_{k\in\mathbf{I}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})}|\lambda'_k|. \tag{2.55}$$

Analogamente, a desigualdade $|\lambda_k| \geqslant |\lambda'_k|$ é válida para todo $k \in \mathbf{J}\backslash(\mathbf{I}\cup\mathbf{J})$. Assim, poderemos estimar os somátórios definidos sobre o conjunto $\mathbf{J}\backslash(\mathbf{I}\cup\mathbf{J})$:

$$\sum_{k\in\mathbf{J}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})}|\lambda_k-\lambda'_k| + \sum_{k\in\mathbf{J}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})}|\lambda'_k| \geqslant 2\sum_{k\in\mathbf{J}\backslash(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})}|\lambda'_k|. \tag{2.56}$$

Finalmente, nos resta analisar os somaátorios que estão definidos sobre o conjunto $(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})$. Utilizando a desigualdade trinagular, obtremos:

$$\sum_{k\in(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})}|\lambda_k-\lambda'_k| + \sum_{k\in(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})}|\lambda_k| \geqslant \sum_{k\in(\mathbf{I}\cap\mathbf{J})}|\lambda'_k|. \tag{2.57}$$

Portanto, utilizando as estimativas (2.56), (2.55) e (2.57), concluímos a demonstração da estimativa (2.41), sob as hipóteses assumidas para os conjuntos $\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}$ no caso **3º** .

Assim, a partir das análises realizadas anteriormente, concluimos que a estimativa (2.41) é verdadeira, permitindo estimatimar superiormente III.

De fato, utilizando a estimativa (2.41), obtemos uma estimativa superior para a expressão no lado direito de (2.40), consequentemente o produto $m(\lambda)m(\lambda-\lambda')$ pode ser estimado superiormente:

$$m(\lambda)m(\lambda-\lambda') \leqslant \frac{4^n B_3 B_4 e^{-\frac{\|\lambda'\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{\prod\limits_{k\in\mathbf{I}}(1+|\lambda_k-\lambda'_k|^{2s})\prod\limits_{k\in\mathbf{I}^c\cup\mathbf{J}^c}(1+|\lambda'_k|^{2s})\prod\limits_{k\in\mathbf{J}}(1+|\lambda_k|^{2s})}. \tag{2.58}$$

Consequentemente, III pode ser estimado superiormente como a seguir:

$$\mathrm{III} \leqslant c4^n B_2 B_1 e^{-\frac{\|\lambda'\|}{2(\lambda_0+Q)}}\int_{(V_1^1)^c\cup(V_2^1)^c}\frac{1}{\prod\limits_{k\in\mathbf{I}}(1+|\lambda_k-\lambda'_k|^{2s})\prod\limits_{k\in\mathbf{I}^c\cup\mathbf{J}^c}(1+|\lambda'_k|^{2s})\prod\limits_{k\in\mathbf{J}}(1+|\lambda_k|^{2s})}d\lambda. \tag{2.59}$$

Argumentando de maneira similar a (2.35), obteremos que:

$$\mathrm{III} \lesssim c\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}}\frac{4^n B_3 B_4 e^{-\frac{\|\lambda'\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{1+\|\lambda'\|^{2s}}. \tag{2.60}$$

Portanto, de (2.60) concluímos que

$$\begin{aligned} II &\leqslant m(\lambda') \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+\|\lambda\|^{2s}} d\lambda + III \\ &\lesssim c \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}} m(\lambda') + B_3 \frac{4^n B_2 B_1 e^{-\frac{\|\lambda'\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{1+\|\lambda'\|^{2s}}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Assim, escolhendo $c >$ suficientemente pequeno, segue por (2.61) e (2.35),

$$m(\lambda') \lesssim \frac{2Be^{-\frac{\|\lambda'\|}{2(\lambda_0+Q)}}}{1+\|\lambda'\|^{2s}}. \tag{2.62}$$

O que é uma contradição, pois $\lambda' \in A$. Assim, a desigualdade (2.25) é verdadeira para todo $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Com isso, obtemos o resultado desejado e consequentemente podemos usar o Corolário 1.2.1 para obtermos a contradição. Com isso, concluimos a demonstração do resultado.

$\square$

A desigualdade (2.22), no Lema 2.1.3, estabelece uma estimativa inferior para a função $m(\lambda)$. Para prosseguirmos com o argumento por contradição, é necessário estabelecer resultados que assegurem a validade da seguinte estimativa:

$$I - II - III \gtrsim m(\lambda),$$

onde $I, -II$ e $-III$ estão definidos em (2.6). Para tanto, vamos estabelecer alguns resultados que garantam a estimativa mencionada. As hipóteses do Teorema 2.0.1 asseguram que a Transformada de Fourier da solução de (2.1), a função $\widehat{u(t)}(\lambda+i\sigma)$ é uma função inteira. Portanto, pela desigualdade do valor médio, temos:

$$|\widehat{u(t)}(\lambda+i\sigma) - \widehat{u(t)}(\lambda)| \leqslant |\nabla(\widehat{u(t)}(\sigma)||\sigma|.$$

Assim, é suficiente demonstrar que a seguinte estimativa é válida:

$$|\nabla(\widehat{u(t)}(\sigma)||\sigma| \lesssim m(\lambda).$$

Inspirado nas ideias de Bourgain em [3] e Panthee em [37], vamos estabelecer algumas estimativas necessárias para avaliar $|\nabla(\widehat{u(t)}(\cdot)|$.

Lema 2.1.4. *Seja $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Para todo $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}^n$ vale:*

$$|\varphi(\lambda+i\sigma)| \lesssim e^{c\|\sigma\|^B}; \tag{2.63}$$

2. As seções de φ, isto é, as funções $\varphi_j : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$\varphi_j(\lambda_j + i\sigma_j) = \varphi(z_1, \ldots, \lambda_j + i\sigma_j, \ldots, z_n), \tag{2.64}$$

são limitadas e integráveis nos eixo real.

Então, para $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positivo, tem-se:

$$\|\nabla \varphi(\lambda_1, \ldots., \lambda_n)\| \lesssim B \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda')| \left[1 + \log\left(\sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda')|\right)\right]. \tag{2.65}$$

Demonstração. O resultado aqui apresentado é uma extesão do Lema 2.5 de [37] à dimensão $n > 2$. Aplicando o Lema 1.2.1 a cada função φ_j definida em (2.64), tem-se

$$\left|\varphi_j'(\lambda_j)\right| \lesssim B \sup_{|\lambda_j'| \geqslant \lambda_j} |\varphi(\lambda_j')| \left[1 + \log\left(\sup_{|\lambda_j'| \geqslant \lambda_j} |\varphi(\lambda_j')|\right)\right] \tag{2.66}$$

para cada $j = 1, \ldots n$. Como

$$\nabla \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\varphi_1'(\lambda_1), \ldots, \varphi_n'(\lambda_n)), \tag{2.67}$$

segue de (2.64) que

$$\begin{aligned} \|\nabla \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\| &\leqslant B \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ B \sup_{|\lambda_j'| \geqslant \lambda_j} |\varphi(\lambda_j')| \left[1 + \log\left(\sup_{|\lambda_j'| \geqslant \lambda_j} |\varphi(\lambda_j')|\right)\right]\right\} \\ &\lesssim B \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda')| \left[1 + \log\left(\sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda')|\right)\right], \end{aligned} \tag{2.68}$$

o que é o resultado. □

Para estabelecer o próximo resultado, iremos considerar $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo as hipóteses do Lema 2.1.4.

Corolário 2.1.1. *Para $\bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \ldots, \bar\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ considere o conjunto $\omega_{\bar\lambda} = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : |\lambda_k| \geqslant \bar\lambda_k, \text{onde } \ k = 1, 2, \ldots, n\}$. Seja $\lambda' + i\sigma = (\lambda_1' + i\sigma_1, \ldots, \lambda_n' + i\sigma_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que:*

$$|\sigma| \leqslant B^{-1}\left[1 + |\log \sup_{\lambda' \in \omega_{\bar\lambda}} |\varphi(\lambda')|\right]^{-1}. \tag{2.69}$$

Então

$$\sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda' + i\sigma)| \leqslant 2^n \sup_{\lambda' \in \omega_{\bar\lambda}} |\varphi(\lambda')| \tag{2.70}$$

e

$$\sup_{\lambda' \in \omega_{\bar\lambda}} |\nabla \varphi(\lambda' + i\sigma)| \lesssim B \sup_{\lambda' \in \omega_{\bar\lambda}} |\varphi(\lambda')| \left[1 + \left|\log \sup_{\lambda' \in \omega_{\bar\lambda}} |\varphi(\lambda')|\right|\right]. \tag{2.71}$$

Demonstração. Inicialmente, mostraremos a estimativa (2.70). De fato, seja $\lambda'+i\sigma \in \mathbb{C}^n$, onde $\lambda' + i\sigma = (\lambda_1' + i\sigma_1, \dots, \lambda_n' + i\sigma_n)$. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, defina

$$\varphi_j : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{onde} \quad \varphi_j(\lambda_j + i\sigma_j) = \varphi(\lambda_1 + i\sigma_1, \dots, \lambda_j + i\sigma_j, \dots, \lambda_n + i\sigma_n).$$

Observe que φ_j satisfaz as hipóteses do Lema 1.3.1, então para $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$, temos

$$\sup_{|\lambda_j'|\geqslant\bar{\lambda}_j} |\varphi_j(\lambda_j' + i\sigma_j)| \leqslant 2 \sup_{|\lambda_j'|\geqslant\bar{\lambda}_j} |\varphi_j(\lambda_j')|. \tag{2.72}$$

para todo $1 \leqslant j \leqslant n$, ou seja,

$$\sup_{|\lambda_j'|\geqslant\bar{\lambda}_j} |\varphi(\lambda_1 + i\sigma_1, \dots, \lambda_j + i\sigma_j, \dots, \lambda_n + i\sigma_n)| \leqslant 2 \sup_{|\lambda_j'|\geqslant\bar{\lambda}_j} |\varphi_j(\lambda_1 + i\sigma_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n + i\sigma_n)|. \tag{2.73}$$

Daí, assumindo qua desigualdade (2.73) para $j = 1$, e aplicando o supremo para $|\lambda_2| \geqslant \bar{\lambda}_2$, temos que:

$$\begin{aligned}\sup_{|\lambda_2'|\geqslant\bar{\lambda}_2} \sup_{|\lambda_1'|\geqslant\bar{\lambda}_1} |\varphi(\lambda_1' + i\sigma_1, \lambda_2 + i\sigma_2, \dots, z)| &\leqslant 2 \sup_{|\lambda_2'|\geqslant\bar{\lambda}_2} \sup_{|\lambda_1'|\geqslant\bar{\lambda}_1} |\varphi(\lambda_1', \lambda_2 + i\sigma_2, \dots, z)| \\ &\leqslant 2^2 \sup_{|\lambda_2'|\geqslant\bar{\lambda}_2} \sup_{|\lambda_1'|\geqslant\bar{\lambda}_1} |\varphi(\lambda_1', \lambda_2, \dots, z)| \end{aligned} \tag{2.74}$$

onde $z = (\lambda_3' + i\sigma, \dots, \lambda_n' + i\sigma_n)$. Repetindo o argumento, isto é, aplicando o supremo em (2.74) para $|\lambda_j'| \geqslant \bar{\lambda}_j$, com $j = 3, 4, \dots, n$, obtemos que:

$$\sup_{\lambda'\in\omega_{\bar{\lambda}}} |\varphi(\lambda' + i\sigma)| \leqslant 2^n \sup_{\lambda'\in\omega_{\bar{\lambda}}} |\varphi(\lambda')|. \tag{2.75}$$

Provaremos agora a desigualdade (2.71).

Definindo a função $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(z+i\sigma)$, temos, que $\tilde{\varphi}$ é uma função inteira e, por (2.70), temos:

$$\begin{aligned}|\tilde{\varphi}(z + i\sigma')| &= |\varphi(\lambda + i(\sigma + \sigma'))| \\ &\lesssim e^{c_1 B\|\sigma'+\sigma\|} \\ &\lesssim e^{c_1 B\|\sigma'\|}. \end{aligned} \tag{2.76}$$

A estimativa (2.76) nos diz que $\tilde{\varphi}$ satisfaz a condição (2.63) do Lema 2.1.4. Consequentemente,

$$\|\nabla\tilde{\varphi}(z)\| \lesssim B \sup_{\lambda'\in\omega_\lambda} |\tilde{\varphi}(\lambda')|[1 + |\log \sup_{\lambda'\in\omega_\lambda} |\tilde{\varphi}(\lambda')|]. \tag{2.77}$$

para todo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tal que $\lambda_j > 0, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Daí, pela definição de $\tilde{\varphi}$ e por (2.70),

$$\|\nabla\varphi(\lambda + i\sigma)\| \lesssim B \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda' + i\sigma)| \left[1 + \left|\log \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda' + i\sigma)|\right|\right] \tag{2.78}$$

$$\lesssim B2^n \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda')| \left[1 + \left|\log 2^n \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda')|\right|\right]$$

$$\lesssim B \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda')| \left[1 + n\log 2 + \left|\log \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda')|\right|\right] \tag{2.79}$$

$$\lesssim B \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda')| \left[1 + + \left|\log \sup_{\lambda' \in \omega_\lambda} |\varphi(\lambda')|\right|\right]. \tag{2.80}$$

Portanto, aplicando o supremo sobre a desigualdade (2.78) para $\lambda' \in \omega_\lambda$, segue o resultado. □

Lema 2.1.5. *Seja* $t \in \mathbf{I}$ *e considere* $\varphi(z) = \widehat{u(t)}(z)$, σ *como no Corolário* (2.1.1). *Então para* $|\sigma'| \leqslant |\sigma|$, *vale que*

$$\|\nabla\varphi(\lambda - \lambda' + i\sigma')\| \lesssim B[m(\lambda) + m(\lambda - \lambda')][1 + |\log m(\lambda)|]. \tag{2.81}$$

Demonstração. Comecemos primeiro definido, a partir de φ, a função

$$\tilde{\phi}(z) = \phi(z + i\sigma') = \widehat{u(t)}(z + i\sigma').$$

Então, pela definição de supremo, temos que:

$$\|\nabla\varphi(\lambda - \lambda' + i\sigma')\| \leqslant \sup_{\lambda \in \mathbb{C}^n} \|\nabla\varphi(\lambda)\|. \tag{2.82}$$

Dados $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$, vetores em $\mathbb{R}^n$, consideremos, para cada $j = 1, \ldots, n$ $\tilde{\lambda}_j = \min\{|\lambda_j|, |\lambda_j - \lambda'_j| : j = 1, 2, ..n.\}$, Então,

$$\|\nabla\varphi(\lambda - \lambda' + i\sigma')\| \leqslant \sup_{\lambda' \in \omega_{\tilde{\lambda}}} \|\nabla\varphi(\lambda' + i\sigma')\| = \sup_{\lambda' \in \omega_{\tilde{\lambda}}} \|\nabla\tilde{\varphi}(\lambda')\|. \tag{2.83}$$

Daí, como $\|\sigma'\| \leqslant \|\sigma\|$ e σ satisfaz (2.69), segue da estimativa (2.65) do Corolário 2.1.1 que

$$\|\nabla\varphi(\lambda - \lambda 1 + i\sigma)\| \lesssim B \sup_{\lambda' \in \omega_{\tilde{\lambda}}} |\varphi(\lambda')| \left[1 + \left|\log[\sup_{\lambda' \in \omega_{\tilde{\lambda}}} |\varphi(\lambda')|]\right|\right]$$

$$\lesssim m(\tilde{\lambda}) \left[1 + \left|\log[\sup_{\lambda' \in \omega_{\tilde{\lambda}}} |\varphi(\lambda')|]\right|\right]. \tag{2.84}$$

Por fim, notemos que

$$m(\tilde{\lambda}) \leqslant m(\lambda) + m(\lambda - \lambda'). \tag{2.85}$$

Consequentemente, por (2.84) temos:

$$\|\nabla\varphi(\lambda - \lambda 1 + i\sigma)\| \lesssim Bm(\lambda)\left[1 + \log m\lambda)\right]. \tag{2.86}$$

O que prova o resultado.

□

2.2 Demonstração do Teorema 2.0.1

A demonstração do Teorema 2.0.1 seguirá a abordagem delineada na introdução deste capítulo, utilizando os resultados apresentados na Seção 2.1.

Suponha por contradição que u satisfaz (2.2) mas que exista $t \in I$ tal que $u(t) \neq 0$.

Como u satisfaz (2.1), temos para $t_1, t_2 \in I$, que

$$u(x, t_2) = U(t_2 - t_1)u(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} U(t_2 - \tau)u \cdot \partial_{x_1} u, d\tau. \tag{2.87}$$

Aplicando a transformada de Fourier à equação (2.87), chegamos a equação

$$\widehat{u(t_2)}(\lambda) = e^{iP(\lambda)\Delta t}\widehat{u(t_1)}(\lambda) - \frac{i\xi_1}{2}\int_{t_1}^{t_2} e^{iP(\lambda)(t_2 - s)}\widehat{u^2(t_1)}(\lambda)ds. \tag{2.88}$$

onde $\lambda = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $P(\lambda) = \xi_1^3 + \sum_{k=2}^n \xi_1\xi_k^2$ e $\Delta t = t_2 - t_1$.

Podemos reescrever (2.88) como

$$\widehat{u(t_2)}(\lambda) = e^{iP(\lambda)\Delta t}\left[\widehat{u(t_1)}(\lambda) - \frac{i\xi_1}{2}\int_{t_1}^{t_2} e^{iP(\lambda)(t_1 - s)}\widehat{u^2(t_1)}(\lambda)ds\right]. \tag{2.89}$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = s - t_1$ em (2.89), temos :

$$\widehat{u(t_2)}(\lambda) = e^{iP(\lambda)\Delta t}\left[\widehat{u(t_1)}(\lambda) - \frac{i\xi_1}{2}\int_0^{\Delta t} e^{-\tau iP(\lambda)}u^2\widehat{(t_1 + \tau)}(\lambda)d\tau\right]. \tag{2.90}$$

Por hipótese u tem suporte compacto. Então, pelo Teorema de Paley-Wiener (Teorema 1.2.1), $\widehat{u}$ tem uma extensão inteira, ou seja, uma extensão analítica em $\mathbb{C}^n$, e, partir (2.90) podemos escrever:

$$\widehat{u(t_2)}(\lambda + i\sigma) = e^{i\tilde{P}(\lambda + i\sigma)\Delta t}\left[\widehat{u(t_1)}(\lambda + i\sigma) - \frac{i(\xi + i\alpha)}{2}\int_0^{\Delta t} e^{-\tau\tilde{P}(\lambda + i\sigma)}u^2\widehat{(t_1 + \tau)}(\lambda + i\sigma)d\tau\right], \tag{2.91}$$

onde $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$ e o polinômio $\tilde{P}$ agora é dado por

$$\tilde{P}(\lambda + i\sigma) = (\xi_1 + i\sigma_1)^3 + \sum_{k=2}^{n} (\xi_1 + i\sigma_1)(\xi_k + i\sigma_k)^2 \tag{2.92}$$

$$= \xi_1^3 + 3i\xi_1^2\sigma_1 - 3\xi_1\sigma_1^2 - i\sigma_1^3$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (\xi_1\xi_k^2 + 2\xi_k\xi_1\sigma_k i - \sigma_k^2\xi_1 + i\sigma_1\xi_k^2 - 2\xi_k\sigma_k\sigma_1 - i\sigma_1\sigma_k^2) \tag{2.93}$$

$$= \xi_1^3 - 3\xi_1\sigma_1^2 + \sum_{k=2}^{n} (\xi_1\xi_k^2 - \sigma_k^2\xi_1 - 2\xi_k\sigma_k\sigma_1) \tag{2.94}$$

$$+ i(3\xi_1^2\sigma_1 - \sigma_1^3 + \sum_{k=2}^{n} (2\xi_k\xi_1\sigma_k + \sigma_1\xi_k^2 - \sigma_1\sigma_k^2)) \tag{2.95}$$

$$:= P_1(\lambda, \sigma) + iP_2(\lambda, \sigma). \tag{2.96}$$

Como u satisfaz o Lema 2.1.1, obtemos daquele lema aplicado à identidade (2.91), a seguinte identidade:

$$e^{cB\|\sigma\|} e^{\Delta t \tilde{P}_2(\lambda,\sigma)} \geqslant |\widehat{u(t)}(\lambda + i\sigma)| - \frac{|\xi_1|}{2} \int_0^{\Delta t} e^{-\tau P_2(\lambda,\sigma)} |\widehat{u(t_1 + \tau)}(\lambda + i\sigma)| d\tau. \tag{2.97}$$

Escolhamos $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|\xi\| \sim \max\{|\xi_k| : k = 1, \ldots, n\} \gg 1 \text{ e } \ \xi_1\xi_k > 0 \text{ para } k = 2, \ldots, n. \tag{2.98}$$

Vamos escolher $\sigma = \sigma(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo:

$$\begin{cases} \|\sigma\|_\infty \sim \max\{|\sigma_k| : k = 1, \ldots, n\} \ll 1 \\ \Delta t \sigma_k < 0, \ \text{parak} = 1, \ldots, n, \\ \frac{1}{|\xi_1|} \leqslant |\sigma_k| \text{ e } \frac{1}{|\xi_k|} \leqslant |\sigma_k|, \ \text{para} \ \ k = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{2.99}$$

Com estas escolhas, temos que

$$\Delta t P_2(\lambda, \sigma) \leqslant \Delta t \tilde{P}_2(\lambda, \sigma), \tag{2.100}$$

onde

$$\tilde{P}_2(\lambda, \sigma) = 3\xi_1\sigma_1 + 2\xi_1 \sum_{k=2}^{n} \xi_k\sigma_k + \sigma_1 \sum_{k=2}^{n} \xi_k^2. \tag{2.101}$$

Consequentementa, podemos inferir de (2.92) e (2.101)

$$e^{\Delta t \tilde{P}_2(\lambda,\sigma)} \gtrsim |\widehat{u(t_1)}(\lambda + i\sigma)| - \frac{|\xi_1|}{2} \int_0^{\Delta t} e^{\tau \tilde{P}_2(\lambda,\sigma)} |\widehat{u^2(t_1 + \tau)}(\lambda + i\sigma)| d\tau. \tag{2.102}$$

Com as escolhas (2.98) e (2.99), temos:

$$\begin{aligned}
\Delta t\tilde{P}_2(\lambda,\sigma) &= \Delta t\left(3\xi_1\sigma_1 + 2\xi_1\sum_{k=2}^{n}\xi_k\sigma_k + \sigma_1\sum_{k=2}^{n}\xi_k^2\right)\\
&= -3\xi_1^2|\Delta t\sigma_1| - 2\sum_{k=2}^{n}\xi_1\xi_k||\Delta t\sigma_k| - \sum_{k=2}^{n}\xi_2\\
&= -|\Delta t|\left(3\xi_1^2|\sigma_1| + 2\sum_{k=2}^{n}\xi_1\xi_k||\sigma_k| + \sum_{k=2}^{n}\xi_2\right)\\
&:= -|\Delta t|q(\lambda,\sigma), \qquad (2.103)
\end{aligned}$$

onde $q(\lambda,\sigma) = 3\xi_1^2|\sigma_1| + 2\sum_{k=2}^{n}|\xi_1\xi_k||\sigma_k| + \sum_{k=2}^{n}\xi_k^2$.

Além disso, se $\Delta t > 0$ segue de (2.99) $\sigma_k > 0$ para $k = 1, 2\ldots, n$, e consequentemente,

$$\int_0^{\Delta t} e^{\tau\tilde{P}_2(\lambda,\sigma)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\sigma)|d\tau = \int_0^{|\Delta t|} e^{-\tau q(\lambda,\sigma)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\sigma)|d\tau. \qquad (2.104)$$

Já quando $\Delta t < 0$, temos por (2.99) que $\sigma_k > 0$ para $k = 1, 2\ldots, n$, e consequentemente,

$$\int_0^{\Delta t} e^{\tau\tilde{P}_2(\lambda,\sigma)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\sigma)|d\tau = \int_0^{\Delta t} e^{\tau\left(3\xi_1\sigma_1+2\xi_1\sum_{k=2}^{n}\xi_k\sigma_k+\sigma_1\xi_k^2\right)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\sigma)|d\tau. \qquad (2.105)$$

Agora fazendo a mudança de variável $\tau \longmapsto -\tau$ em (2.105), temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\Delta t} e^{\tau\tilde{P}_2(\lambda,\sigma)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\sigma)|d\tau &=\\
&= -\int_0^{-\Delta t} e^{-\tau\left(3\xi_1\sigma_1+2\xi_1\sum_{k=2}^{n}\xi_k\sigma_k+\sigma_1\xi_k^2\right)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\sigma)|d\tau\\
&= -\int_0^{-\Delta t} e^{-\tau\left(3\xi_1\sigma_1+2\xi_1\sum_{k=2}^{n}\xi_k\sigma_k+\sigma_1\xi_k^2\right)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\sigma)|d\tau\\
&= -\int_0^{|\Delta t|} e^{-\tau q(\lambda,\sigma)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\sigma)|d\tau. \qquad (2.106)
\end{aligned}$$

Portanto, de (2.105) e (2.106) deduzimos que

$$\left|\int_0^{\Delta t} e^{\tau\tilde{P}_2(\lambda,\sigma)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\sigma)|d\tau\right| = \left|\int_0^{|\Delta t|} e^{-\tau q(\lambda,\sigma)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\sigma)|d\tau\right|. \qquad (2.107)$$

Consequentemente, de (2.102), (2.103) e (2.107) concluimos que

$$e^{\Delta t q(\lambda,\sigma)} \gtrsim |\widehat{u(t_1)}(\lambda+i\sigma)| - \frac{|\xi_1|}{2}\int_0^{|\Delta t|} e^{-\tau q(\lambda,\sigma)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\sigma)|d\tau. \qquad (2.108)$$

Consideremos, sem perda de generalidade, o caso $\Delta t > 0$. Neste caso, inferimos da estimativa (2.108) que

$$
\begin{aligned}
e^{-q(\lambda,\sigma)\Delta t} \gtrsim & |\widehat{u(t_1)}(\lambda)| - \frac{|\xi_1|}{2}\int_0^{|\Delta t|} e^{-q(\lambda,\sigma)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda)|d\tau \\
& - |\widehat{u(t_1)}(\lambda+i\sigma) - \widehat{u(t_1)}(\lambda)| \\
& - \frac{|\xi_1|}{2}\int_0^{|\Delta t|} e^{-\tau q(\lambda,\sigma)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda+i\xi) - \widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda)|d\tau \\
:= & \mathrm{I} - \mathrm{II} - \mathrm{III}.
\end{aligned} \tag{2.109}
$$

Vamos analisar separadamente I, II e III. Primeiramente, vamos exibir uma estimativa por baixo para I. Observemos que pela definição de $m(\lambda)$ e $U^*(\lambda)$ existe $\tilde{\lambda} \in \omega_\lambda$ tal que

$$m(\lambda) = U^*(\tilde{\lambda}).$$

Como $U^*(\tilde{\lambda}) \leqslant m(\tilde{\lambda}) \leqslant m(\lambda)$, obteremos que

$$U^*(\tilde{\lambda}) = m(\tilde{\lambda}).$$

Por outro lado, pelo Lema 2.1.2,

$$|\widehat{u(t)}(\lambda)| \leqslant m(\lambda) < \frac{B}{1+\|\lambda\|^{4s}}, \quad \text{para todo } t \in [0,T].$$

Daí, se aplicarmos o limite quando $\|\lambda\| \longmapsto \infty$, obteremos que

$$\lim_{\|\lambda\|\longmapsto\infty} |\widehat{u(t)}(\lambda)| = 0.$$

Assim, como a aplicação $t \longmapsto |\widehat{u(t)}$ é continua, existe $t_1 \in \mathbf{I}$ tal que

$$|\widehat{u(t)}(\tilde{\lambda})| = U^*(\tilde{\lambda}).$$

Portanto, pelo Lema 2.1.3 concluímos que pode-se escolher $\lambda \in \mathbb{R}^n$ com $|\lambda|$ suficientemente grande e algum $t_1 \in \mathbf{I}$, satisfazendo:

$$|\widehat{u(t_1)}(\lambda)| = U^*(\lambda) = m(\lambda) > c(m*m)(\lambda) + e^{-\frac{|\lambda|}{Q}}. \tag{2.110}$$

Com as observações acima

$$\begin{aligned}
I &= m(\lambda) - \frac{|\xi_1|}{2}\int_0^{|\Delta t|} e^{-\tau q(\lambda,\sigma)}|\widehat{u^2(t_1+\tau)}(\lambda)|d\tau \\
&\geqslant m(\lambda) - \frac{|\xi_1|}{2}\int_0^{|\Delta t|} e^{-\tau q(\lambda,\sigma)}|\widehat{u(t_1+s)}(\lambda)| * |\widehat{u(t_1+\tau)}(\lambda)|d\tau \\
&\geqslant m(\lambda) - \frac{|\xi_1|}{2}(U^* * U^*)(\lambda)\int_0^{|\Delta t|} e^{-\tau q(\lambda,\sigma)}d\tau \\
&\geqslant m(\lambda) - \frac{|\xi_1|}{2}(m * m)(\lambda)\int_0^{|\Delta t|} e^{-\tau q(\lambda,\sigma)}d\tau \\
&\geqslant m(\lambda) - \frac{|\xi_1|}{2}(m * m)(\lambda)\frac{1-e^{-|\Delta t| q(\lambda,\sigma)}}{q(\lambda,\sigma)} \\
&\geqslant m(\lambda) - \frac{|\xi_1|}{2}(m * m)(\lambda)\frac{1}{q(\lambda,\sigma)}. \qquad (2.111)
\end{aligned}$$

Como

$$q(\lambda,\sigma) = 3\xi_1^2|\sigma_1| + 2\sum_{k=2}^{n}\xi_1\xi_k||\sigma_k| + \sum_{k=2}^{n}\xi_k^2 \geqslant 2|\xi_1\xi_2\sigma_k^2|,$$

segue que

$$\frac{|\xi_1|}{q(\lambda,\sigma)} \leqslant \frac{|\xi_1|}{2|\xi_1\xi_2\sigma_2|}. \qquad (2.112)$$

Pela estimativa (2.111),(2.112) e Lema 2.1.3 (Estimativa (2.23)), obteremos que:

$$I \geqslant m(\lambda) - \frac{|\xi_1|}{2}(m * m)(\lambda)\frac{1}{q(\lambda,\sigma)} \geqslant \frac{m(\lambda)}{2}. \qquad (2.113)$$

Agora, estimaremos II. Por (2.110),

$$|\widehat{u(t_1)}(\lambda)| = \sup_{\lambda'\in\omega_\lambda} U^*(\lambda') = m(\lambda).$$

Como a função $\widehat{u(t_1)}(\cdot)$ é inteira, deduzimos da desigualdade do valor médio que

$$II = |\widehat{u(t_1)}(\lambda + i\sigma) - \widehat{u(t_1)}(\lambda)| \leqslant \sup_{\lambda\in\omega_\lambda} |\nabla\widehat{u(t_1)}(\lambda' + i\sigma)|\|\sigma\|. \qquad (2.114)$$

Daí, escolhendo σ como no Corolário 2.1.1, chegamos à estimativa

$$II \leqslant B\|\sigma\|\,[m(\lambda)(1 + |\log(m\lambda)|] \leqslant \frac{m(\lambda)}{5}. \qquad (2.115)$$

Para finalizar, nos resta estimar III. Primeiro, pelo Lema 2.1.5 e Lema 2.1.3 e σ como no Corolário 2.1.1, temos:

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{u^2(t_1+s)}(\lambda+i\sigma)-\widehat{u^2(t_1+s)}(\lambda)|\\
&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u(t_1+s)}(\lambda'-\lambda+i\sigma)\widehat{u(t_1+s)}(\lambda')-\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u(t_1+s)}(\lambda'-\lambda)\widehat{u(t_1+s)}(\lambda')d\lambda'\right|\\
&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u(t_1+s)}(\lambda'-\lambda+i\sigma)-\widehat{u(t_1+s)}(\lambda'-\lambda)||\widehat{u(t_1+s)}(\lambda')|d\lambda'\\
&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\sigma||\nabla\widehat{u(t_1+s)}(\lambda'-\lambda+i\sigma')||\widehat{u(t_1+s)}(\lambda')|d\lambda'\\
&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\sigma||\nabla\widehat{u(t_1+s)}(\lambda'-\lambda+i\sigma')|m(\lambda')d\lambda'\\
&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}[m(\lambda)+m(\lambda'-\lambda)]m(\lambda')d\lambda'\\
&\leqslant c_1m(\lambda)+(m*m)(\lambda)\\
&\leqslant(c_1+c^{-1})m(\lambda).
\end{aligned}\tag{2.116}
$$

Assim, procedendo como na obtenção (2.111), temos que:

$$
\begin{aligned}
III&=\frac{|\xi_1|}{2}(c+c_1^{-1})m(\lambda)\int_0^{|\Delta t|}e^{-\tau q(\lambda,\sigma)}d\tau\\
&\leqslant\frac{|\xi_1|}{2}(c+c_1^{-1})m(\lambda)\frac{1-e^{-|\Delta t|q(\lambda,\sigma)}}{2|\xi_1\xi_2\sigma_2|}\lesssim\frac{1}{5}m(\lambda).
\end{aligned}\tag{2.117}
$$

Assim, por (2.109), (2.111), (2.115) e (2.117), junto com a estimativa (2.22) no Lema 2.1.3, temos

$$
e^{-|\Delta t|q(\lambda,\sigma)}\geqslant\frac{m(\lambda)}{2}-\frac{2m(\lambda)}{5}=\frac{m(\lambda)}{5}>e^{-\frac{\|\lambda\|}{Q}}.\tag{2.118}
$$

Sabemos das escolhas 2.99 que $|\xi_1\sigma_k|\gg 1$, para $k=1,\ldots,n$. Daí,

$$
\begin{aligned}
e^{-\Delta t q(\lambda,\sigma)}&=e^{-\Delta t\left(3\xi_1^2|\sigma_1|+2\sum_{k=2}^n\xi_1\xi_k||\sigma_k|+\sum_{k=2}^n\xi_2\right)}\\
&\leqslant e^{-|\Delta t|\left(\xi_1|+\sum_{k=2}^n|\xi_k|\right)}=e^{-|\Delta t|\|\lambda\|}.
\end{aligned}\tag{2.119}
$$

Consequentemente, de (2.118) e (2.119), Obtemos

$$
e^{-|\Delta t|\|\lambda\|}\gtrsim e^{\frac{-\|\lambda\|}{Q}},\tag{2.120}
$$

o que é um absurdo, para Q grande tal que $|\Delta t|\geqslant c\frac{1}{Q}$, e $\|\lambda\|$ suficientemente grande.

Capítulo 3

Estabilização para equação ZK com Termo de Amortecimento

Neste capítulo, estudaremos o problema de estabilização da equação de Zakharov-Kuznetsov em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Especificamente, buscaremos estabelecer um resultado análogo ao Teorema 1.3.1. Para isso, utilizaremos a teoria de estabilização delineada na Seção 1.3.

Na Seção 1.3, em particular na Definição 1.3.1, observamos que o problema de valor inicial (PVI) associado à equação de Zakharov-Kuznetsov é exponencialmente estabilizável (ou seja, possui *Decaimento Exponencial*) se existir um feedback K tal que o operador $\mathbf{T}K$ seja exponencialmente estabilizável, onde $\mathbf{T}u = -\partial_{x_1}\Delta u$. Neste estudo, consideraremos o seguinte feedback: uma função $a = a(x) \in L^\infty(\Omega)$, tal que $a(x) \geqslant a_0 > 0$ para todo $x \in \Gamma^c$, onde Γ é um subconjunto compacto de Ω, conhecido como Termo de Amortecimento. Dessa forma, formularemos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_{x_1}\Delta u + u\partial_{x_1} u + a(x)u = 0 \text{ em } \ \Omega \times (0,T), \\ u(x_1,\dots,x_i,x_n,t)\big|_{x_i=0} = u(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n,t)\big|_{x_i=L} = 0, \ i = 1,\dots,n, \\ \partial_{x_i} u(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n,t)\big|_{x_1=L} = 0, \ i = 1,\dots,n \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \ \ \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$, $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real.

Considerando o mesmo termo de amortecimento $a(x)$ e as mesmas condições de contorno do PVI (3.1), podemos estabelecer um resultado de estabilização para a equação de Zakharov-Kuznetsov linear, definida em domínios limitados. Assim, analisaremos o PVI associado à equação de Zakharov-Kuznetsov, que é dado por:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_{x_1}\Delta u + a(x)u = 0 \text{ em } \quad \Omega \times (0,T), \\ u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n,t)\big|_{x_i=0} = u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n,t)\big|_{x_i=L} = 0,\ i = 1,\ldots,n \\ \partial_{x_i}u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n,t)\big|_{x_1=L} = 0,\ i = 1,\ldots,n \\ u(x,0) = u_0(x), \quad em \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Aqui, provaremos que a energia associada ao PVI (3.1) e ao PVI (3.2) decai exponencialmente. Para estabelecer esses resultados, utilizaremos a *Teoria de Estabilização*, conforme enunciada na Seção 1.3. Especificamente, nas Seções 3.1 e 3.2, desenvolveremos os elementos necessários para demonstrar os resultados de estabilização para as versões não linear e linear da equação ZK, considerando a presença do termo de amortecimento.

3.1 Resultados Preliminares para ZK não-linear

Nesta seção, enunciaremos alguns resultados necessários para aplicação da Teoria de Estabilização. Como discutido na Seção 1.3, o método tem como resultado principal a desigualdade de observabilidade. A demonstração dessa desigualdade para o PVI (3.1) utiliza, como ponto central, o resultado de continuação única provado na Seção 2.1, Teorema 0.0.2. Portanto, para algum $\delta > 0$, consideraremos

$$\mathcal{Z} = \prod_{i=0}^{n} (\delta, L-\delta)$$

de tal forma que $\Gamma \subset \mathcal{Z}$, mantendo a validade do resultado de continuação única. Em seguida, estabeleceremos outros resultados, seguindo a mesma sequência apresentada na Seção 1.3.

Dada u solução do problema de valor inicial (3.1), definamos

$$Q(u(t)) = \prod_{j=2}^{n} \int_0^L \sum_{i=1}^{n} [\partial_{x_i} u(0,\bar{x},t)]^2 dx_j + \int_\Omega 2a(x)u^2 dx, \tag{3.3}$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ e $\bar{x} = (x_2, x_3, \ldots, x_n)$. A energia $E(u)$, associada ao PVI (3.1), definida por

$$E(u(t)) = \int_\Omega u^2 dx. \tag{3.4}$$

O Lema seguinte afirma que ela é decrescente.

Lema 3.1.1. *A energia* $\mathsf{E}(u)$ *assoiada ao PVI* (3.1) *é decrescente.*

Demonstração. De fato, Multiplicando a equação (3.1) por u e integrando em Ω, obtemos:

$$0 = \int_\Omega u\partial_t dx + \int_\Omega u\partial_{x_1}\Delta u dx + \int_\Omega u^2\partial_{x_1} u dx + \int_\Omega a(x)u^2 dx = \mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III} + \mathbf{IV}. \tag{3.5}$$

onde,

$$\mathbf{I} := \int_\Omega u\partial_t dx,\ \mathbf{II} := \int_\Omega u\partial_{x_1}\Delta u dx,\ \mathbf{III} := \int_\Omega u^2\partial_{x_1} u dx \text{ e } \mathbf{IV} := \int_\Omega a(x)u^2. \tag{3.6}$$

Analisaremos separadamente $\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}$ e $\mathbf{IV}$. Usando a integração por partes e as condições de bordo do PVI (3.1), obteremos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{II} = \int_\Omega u\partial_{x_1}\Delta u dx &= -\int_\Omega \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u\partial_{x_1}\partial_{x_i} u dx \\
&= -\int_\Omega \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \partial_{x_1}[\partial_{x_i} u]^2 dx \\
&= -\frac{1}{2}\prod_{j=2}^n \int_0^L \sum_{i=1}^n \left[\int_0^L \partial_{x_1}[\partial_{x_i} u]^2(x_1,\bar{x},t)dx_1\right] dx_j \\
&= -\frac{1}{2}\prod_{j=2}^n \int_0^L \sum_{i=0}^n [\partial_{x_i} u]^2(L,\bar{x},t) - [\partial_{x_i} u]^2(0,\bar{x},t) dx_j \\
&= \frac{1}{2}\prod_{j=2}^n \int_0^L \sum_{i=0}^n (\partial_{x_i} u)^2(0,\bar{x},t) dx_j.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Também vale que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{III} = \int_\Omega u^2\partial_{x_1} u dx &= \int_\Omega \frac{\partial_{x_1}(u^2)}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}\prod_{j=2}^n \int_0^L \sum_{i=1}^n \left[\int_0^L \partial_{x_1}(u^2)(x_1,\bar{x},t)dx_1\right] dx_j \qquad (3.8) \\
&= \frac{1}{2}\prod_{j=2}^n \int_0^L \sum_{i=1}^n \left[u^2(L,\bar{x},t) - u^2(0,\bar{x},t)\right] dx_j = 0. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathbf{I} = \int_\Omega u\partial_t u dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t(u^2)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathsf{E}(u(t)). \tag{3.10}$$

Portanto, segue de (3.5), (3.7),(3.8) e (3.10)

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}(u(t)) = -2\mathbf{II} - 2\mathbf{III} - 2\mathbf{IV} = -Q(u(t)) < 0. \tag{3.11}$$

□

Para obter a desigualdade de observabilidade para o PVI (3.1), usaremos argumento de compacidade*(Teorema de Compacidade de Aubin-Lions)* e um resultado de continuação única(Teorema 2.0.1). Antes disso, mostraremos que a solução do PVI (3.1) é limitada em $L^2(0,T:H^1(\Omega))$.

Lema 3.1.2. *Seja* $u_0 \in L^2(\Omega)$. *Então existem* $C = C(L,T)$ *e* $C_1 = C_1(L,T,\delta)$, *tal que a solução* u *para* (3.1) *satisfaz*

$$\|u\|^2_{L^2(0,T:H^1(\Omega))} \leqslant CLE(u(0)) + C_1(\delta)TE(u_0)^{6\mu_3} + C(\epsilon)TE(u(0))^{\sum_{j=3}^{n} 3\mu_i}, \tag{3.12}$$

onde $0 < \mu_j < 1$, *com* $j = 1, \ldots, N$ *são constantes satisfazendo* $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mu_j = 1$.

Demonstração. Com efeito, ao multiplicarmos a equação associada ao PVI (3.1) por $x_1 u$, e em seguida integrarmos em $\Omega \times [0,T]$, obteremos que:

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega x_1 u \partial_t u dxdt + \int_0^T \int_\Omega x_1 u \partial_{x_1} \Delta u dxdt + \int_0^T \int_\Omega x_1 u^2 \partial_{x_1} u dxdt& \\ + \int_0^T \int_\Omega x_1 u a(x) u dxdt = 0.&\end{aligned} \tag{3.13}$$

Integrando por partes e usando as condições de bordo, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega x_1 u \partial_t u dxdt &= \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega x_1 \partial_t (u^2) dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega x_1 \int_0^T \partial_t (u^2) dtdx \\ &= \frac{1}{2}\|x_1^{\frac{1}{2}} u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|x_1^{\frac{1}{2}} u_0\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega x_1 u \partial_{x_1} \Delta u dxdt &= -\int_0^T \int_\Omega \sum_{i=0}^{n} x_1 \partial_{x_i} u \partial_{x_1} \partial_{x_i} u dxdt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \sum_{i=0}^{n} x_1 \partial_{x_1} (\partial_{x_i} u)^2 dxdt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T \prod_{j=2}^{n} \int_0^L \left[\int_0^T \sum_{i=0}^{n} x_1 \partial_{x_1} (\partial_{x_i} u)^2 dx_1\right] dx_j dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \prod_{j=2}^{n} \int_0^L \left[\int_0^T \sum_{i=0}^{n} (\partial_{x_i} u)^2 dx_1\right] dx_j dt = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \sum_{i=0}^{n} (\partial_{x_i} u)^2 dxdt,\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega x_1 u^2 \partial_{x_1} u dx dt &= \frac{1}{3}\int_0^T \int_\Omega \left[\int_0^L x_1 \partial_{x_1}(u^3) dx_1\right] d\bar{x} dt \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^T \int_\Omega \left[\int_0^L u^3 dx_1\right] d\bar{x} dt \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^T \int_\Omega u^3 dx dt. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Substituindo (3.14) e (3.15) em (3.13), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|x_1^{\frac{1}{2}} u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} \|\partial_{x_i} u\|^2_{L^2(0,T:L^2(\Omega))} &= \frac{1}{2}\|x_1^{\frac{1}{2}} u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&\frac{1}{3}\int_0^T \|u\|^3_{L^3(\Omega))} - \int_0^T \int_\Omega a(x) u^2 dx. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Para concluir a demonstração do Lema, precisaremos estimar a solução u na norma $L^1(0,T : L^3(\Omega))$. Para alcançar esse objetivo, aplicaremos uma versão da imersão de Sobolev. Mais especificamente, utilizaremos o Teorema 1.1.4. Para isso, faremos as seguintes escolhas no contexto do Teorema 1.1.4:

$$
\begin{cases}
\beta = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_j = 0,\ \text{para } j = 2, 3, \dots, N \\
p_j = 2, \quad j = 1, 2, \dots, N.
\end{cases}
$$

A partir destas escolhas, poderemos estimar a norma de u em $L^3(\Omega)$ da seguinte maneira:

$$
\|u(t)\|_{L^3(\Omega)} \leqslant C\|\partial_{x_1} u(t)\|^{\frac{1}{6}}_{L^2(\Omega)} \prod_{j=2}^{N} \|u(t)\|^{\mu_j}_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.18)
$$

Agora, usando a Desigualdade de Young (Teorema 1.1.2) no lado direito da estimativa (3.18), obteremos:

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|^3_{L^3(\Omega)} &\leqslant C\|\partial_{x_1} u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \|u(t)\|^{3\mu_2}_{L^2(\Omega)} \prod_{j=3}^{N} \|u(t)\|^{3\mu_j}_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \epsilon\|\partial_{x_1} u\|_{L^2(\Omega)} \|u(t)\|^{6\mu_2}_{L^2(\Omega)} + \frac{c(\epsilon)}{2C^2} \prod_{j=3}^{N} \|u(t)\|^{6\mu_j}_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \delta\|\partial_{x_1} u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c(\delta)}{2\epsilon^2}\|u(t)\|^{12\mu_2}_{L^2(\Omega)} + \frac{c(\epsilon)}{2C^2} \prod_{j=3}^{N} \|u(t)\|^{6\mu_j}_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Como a energia $E(u)$ é decrescente, isto é, $E(u(t)) \leqslant E(u(0))$, poderemos estimar, finalmente, estimar a solução u na norma $L^1(0,T : L^3(\Omega))$. Especificamente, a seguinte estimativa é válida:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}\int_0^T \|u(t)\|^3_{L^3(\Omega)} dt &\leqslant \frac{\delta}{3}\|\partial_{x_1} u(t)\|^2_{L^2(0,T:L^2(\Omega))} \\
&+ T\frac{C(\delta)}{6\epsilon^2} E(u(0))^{6\mu_2} + T\frac{C(\epsilon)}{6C^2} E(u(0))^{\sum_{j=3}^{n} 3\mu_j}. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Para concluir a demonstração é necessário acoplar o termo $\frac{\delta}{3}\|\partial_{x_1}u(t)\|^2_{L^2(0,T:L^2(\Omega))}$ ao lado esquer da igualdade (3.17). Para isso, escolheremos δ na desigualdade de Young satisfazendo: $\frac{\delta}{3} \leqslant \frac{1}{2}$. Em seguida, aplicando a estimativa (3.20) em (3.17),

$$\|u\|_{L^2(0,T:H^1(\Omega))} \leqslant \frac{L}{2}E(u_0)+ \\ T\frac{C(\delta)}{6\epsilon^2}E(u(0))^{6\mu_2} + T\frac{C(\epsilon)}{6C^2}E(u(0))^{\sum_{j=3}^{n}3\mu_j}. \tag{3.21}$$

O que prova o resultado. □

Como discutido na Seção 1.3, obter uma desigualdade de observabilidade é uma tarefa delicada. Portanto, seguindo a abordagem adotada no Lema 1.3.1, estabeleceremos o seguinte resultado.

Lema 3.1.3. *Seja* u *solução de* (3.1)*, então*

$$E(u(0)) \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T E(u(t))dt + \int_0^T Q(u(t))dt. \tag{3.22}$$

Demonstração. Após multiplicarmos o PVI (3.1) por $(T-t)u$ e integrarmos em $\Omega \times [0,T]$, chegaremos à igualdade:

$$\int_0^T\int_\Omega (T-t)u\partial_t u dxdt + \int_0^T\int_\Omega (T-t)u\partial_{x_1}\Delta u dxdt + \int_0^T\int_\Omega (T-t)u^2\partial_{x_1}u dxdt \\ + \int_0^T\int_\Omega (T-t)a(x)u^2 dxdt = 0. \tag{3.23}$$

Integrando (3.23) por partes e usando as condições de bordo, obtemos:

$$-T\int_\Omega u^2(x,0)dx + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega u^2 dxdt + \int_0^T\int_\Omega (T-t)a(x)u^2 dxdt \\ +\frac{1}{2}\int_0^T\prod_{j=2}^{n}\int_0^L (T-t)\sum_{i=1}^{n}(\partial_{x_1}\partial_{x_i}u(0,\bar{x},t))^2 dx_j dt = 0. \tag{3.24}$$

Portanto, segue o resultado. □

Como a estimativa (3.22) é verdadeira, obteremos a degualdade de observabilidade para o PVI (3.1), se provarmos o seguinte resultados.

Lema 3.1.4. *Seja* $Q(u(t))$ *definido em* (3.3)*. Então para todo* $T, R > 0$ *existe uma constante* $C = C(R,T) > 0$ *tal que*

$$\int_0^T E(u(t))dt \leqslant C\int_0^T Q(u(t))dt, \tag{3.25}$$

para toda solução de (3.1) *com* $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant R$.

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que a desigualdade (3.25) não seja verdadeira. Isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in L^\infty(0, T : L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T : H^1(\Omega))$ tal que $\|u_n(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant R$ e satisfazendo

$$\|u_n\|_{L^2(0,T:L^2(\Omega))} > n \int_0^T Q(u(t))dt. \tag{3.26}$$

Como $\|u_n(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant R$, pela estimativa (3.12) temos que $\|u_n\|_{L^2(0,T:L^2(\Omega))} \leqslant C$. Aplicando o limite na estimativa (3.26), quando $n \longmapsto \infty$, obteremos que:

$$\int_0^T Q(u_n(t))dt \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{3.27}$$

Defina as sequências $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ e $(v_n)_{n \geqslant 1}$, dadas por:

$$\lambda_n = \|u_n\|_{L^2(0,T:L^2(\Omega))} \ \text{ e } \ v_n = \frac{u_n}{\lambda_n},$$

respectivamente. Então, pela própria definição da sequência $(v_n)_{n \geqslant 1}$,

$$\|v_n\|_{L^2(0,T:L^2(\Omega))} = 1. \tag{3.28}$$

Agora, como $\|u_n(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant R$. Então, usando a estimativa (3.12) obteremos que $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ é limitada. Portanto, admite uma subsequência convergente. Sem perda de generalidade, consideraremos a própria sequência λ_n como sendo a subsequência convergente, ou seja, $\lambda_n \longrightarrow \lambda \geqslant 0$. Observemos ainda, que pela propria definição de v_n, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência v_n satisfaz o seguinte PVI

$$\begin{cases} \partial_t v_n + \partial_{x_1} \Delta v_n + \lambda_n v_n \partial_{x_1} v_n + a(x) v_n = 0 \ \text{ em } \Omega \times \mathbb{R} \\ v_n(x,t)\big|_{x_i = 0} = v_n(x,t)\big|_{x_i = L} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n. \\ \partial_{x_i} v_n(L, \bar{x}, t) = 0, i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{3.29}$$

onde $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, $\bar{x} = (x_2, \ldots, x_n)$, $x = (x_1, \bar{x})$ e o dado inicial é dado por:

$$v_n(x, 0) = \frac{u_n(x, 0)}{\lambda_n}.$$

Além disso, o funcional $Q(v_n)$ converge para 0, quando $n \longmapsto \infty$. Para isso, usaremos a mesmas estimativas usadas em (3.27). Especificamente, pelas da estimativas (3.20) e (3.26), segue que

$$\int_0^T Q(v_n(t))dt \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{3.30}$$

Daí, como $\|\nu_n(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C$, aplicaremos o Lema 3.1.3 (Estimativa (3.18)) para obter a seguinte estimativa:

$$\|\nu_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C, \quad \forall\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.31}$$

Para prosseguir com o argumento de contradição, utilizaremos o argumento de compacidade de Aubin-Lions. Para isso, é necessário provar que a solução ν_n para o PVI (3.29) seja limitada no espaço

$$L^2(0,T:H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T:H^{-2}(\Omega)).$$

Primeiramente, pelo Lema 3.1.1(estimativa (3.12)), temos que

$$\|\nu_n\|_{L^2(0,T:H^1(\Omega))} \leqslant C. \tag{3.32}$$

Portanto, ν_n é limitada no espaço $L^2(0,T:H^1(\Omega)$. Resta provar que ν_n é limitada em $H^1(0,T:H^{-2}(\Omega))$. Para isso, usaremos argumento de daulidade.

Iniciaremos provando que $\partial_{x_1}\partial^2_{x_i}\nu_n$ é limitado em $H^1(0,T:H^{-2}(\Omega))$ para todo $i = 1,2,\dots,n,$. Para isso, usaremos a estimativa (3.32) para obter a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\|\partial_{x_1}\partial^2_{x_i}\nu_n(t)\|_{H^{-2}(\Omega)} &= \sup_{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}=1} |(\partial_{x_1}\partial^2_{x_i}\nu_n(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}=1} |(\partial_{x_1}\nu_n,\partial^2_{x_i}\varphi)_{L^2(\Omega)}| \\ &\leqslant \|\nu_n(t)\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Agora, usaremos o Teorema 1.1.4 com as mesma escolhas feitas na demonstração do Lema 3.1.2 para obtermos:

$$\begin{aligned}\|\nu_n(t)\partial_x\nu_n(t)\|_{H^{-2}(\Omega)} &= \sup_{\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}=1} (\partial_{x_1}(u^2),\varphi)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}=1} (u^2,\partial_{x_1}\varphi)_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \sup_{\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}=1} \left\{\|u^2(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_{x_1}\varphi\|_{L^2(\Omega)}\right\} \\ &\leqslant \|\partial_{x_1}\nu_n(t)\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \prod_{j=2}^{n} \|\nu_n(t)\|^{\mu_j}_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Para concluir a demonstração da estimativa (3.34), é suficiente usarmos a Desigualdade de Young com Epsilon (*Teorema 1.1.2*) juntamente com o Lema 3.1.2.

Finalmente, a partir da estimativa (3.32), podemos afirmar que, se $a \in L^\infty(\Omega)$, então $a(x)v_n$ é limitado em $L^2(0,T:H^{-2}(\Omega))$.

Portanto, concluimos que $\partial_t v_n$ é limitado em $L^2(0,T:H^{-2}(\Omega))$. Consquentemente, v_n é limitado em

$$L^2(0,T:H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T:H^{-2}(\Omega)). \tag{3.35}$$

Portanto, existe uma subsequência $(v_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente para uma função v em $L^2(0,T:H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T:H^{-2}(\Omega))$, isto é,

$$v_{n_j} \rightharpoonup v \quad em \quad L^2(0,T:H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T:H^{-2}(\Omega)). \tag{3.36}$$

Como $H^1_0(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega) \subset H^{-2}(\Omega)$, segue que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ é relativamente compacta em $L^2(0,T:L^2(\Omega))$, logo pelo Teorema de Compacidade de Aubin-Lions,

$$v_{n_j} \to v, \quad \text{forte} \quad \text{em} \quad L^2(0,T:L^2(\Omega)). \tag{3.37}$$

Daí, como $\|v_{n_j}\|_{L^2(0,T:L^2(\Omega))} = 1$, tem-se que

$$\|v\|_{L^2(0,T:L^2(\Omega))} = 1. \tag{3.38}$$

Por outro lado, aplicando a semicontinuidade inferior do funcional $Q(u)$, obteremos:

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{j\to\infty} \int_0^T Q(v_{v_j}(t))dt \geqslant \int_0^T Q(v(t))dt = \int_0^T \int_\Omega a(x)v^2 dxdt \\ + \int_0^T \prod_{j=2}^{n} \int_0^L \sum_{i=2}^{n} [\partial_{x_1}\partial_{x_i} u(0,\bar{x},t)]^2 dx_j, \end{aligned} \tag{3.39}$$

e isso implicará que $a(x)v^2 = 0$ em $\Omega \times (0,T)$. Como $a(x) > 0$ em Γ^c, o que implica que $v = 0$ em $\Gamma^c \times (0,T)$. Agora, utilizando a convergência dada em (3.37), concluimos que v satisfaz

$$\partial_t v + \partial_{x_1}\Delta v + \lambda v \partial_{x_1} v + a(x)v = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \tag{3.40}$$

onde $\lambda \geqslant 0$. Para concluir a demonstração, dividiremos a prova em dois casos: $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.

Se $\lambda = 0$, então v satisfaz

$$\partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_{x_1}\Delta v = 0. \tag{3.41}$$

Neste caso, o Teorema de Holmgren(*Teorema* 1.1.5) garante que $v = 0$ em $\Omega \times (0, T)$, o que resulta em uma contradição, pois v satisfaz (3.38).

Se $\lambda > 0$, então v satisfaz

$$\partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_{x_1} \Delta v + \lambda v \partial_{x_1} v = 0. \tag{3.42}$$

Considere uma extenção suave para v dada por,

$$w(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & \text{se} \quad (x,y,z,t) \in \mathcal{Z} \times (0,T), \\ 0, & \text{se} \quad (x,t) \in (\mathbb{R}^n - \mathcal{Z}) \times (0,T). \end{cases}$$

Como $\Gamma \subset \mathcal{Z}$, tem-se que w satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_{x_1} \Delta w + \lambda w \partial_{x_1} w = 0, & \text{em} \;\; \mathbb{R}^n \times (0,T). \\ w(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{3.43}$$

onde

$$\varphi(x) = \begin{cases} v(x,0), & se \quad x \in \mathcal{Z} \\ 0, & se \quad x \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}, \end{cases}$$

compactamente suportada em $H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s > \frac{n}{2}$, para $n \geqslant 3$. Os autores S. Herr and Kinoshita provaram em [19] que a equação (3.43) possui uma solução suave. Então, aplicando o resultado de continuação única (*Teorema* 2.0.1), $w = 0$ em $\mathbb{R}^n \times (0,T)$, isso implica que $v = 0$ em $\Omega \times (0,T)$, o que é uma contradição, pois v satisfaz (3.38). □

3.2 Resultados Preliminares para ZK linear

Nesta seção, estabeleceremos alguns resultados essenciais para a demonstração de um teorema de estabilização para a equação ZK linear com termo de amortecimento. Mais precisamente, provaremos a mesma sequência de resultados apresentada na Seção 3.1 e usaremos a teoria de estabilização mencionada na Seção 1.3 para obter o resultado.

A energia $E(u)$ associada ao PVI (3.43) é definida de forma análoga à energia associada ao PVI (3.1), ou seja,

$$E(u(t)) = \int_\Omega u^2 dx. \tag{3.44}$$

Além disso, como o PVI (3.43) está definido com as mesma condições de contorno que o PVI (3.1) e utilizamos o mesmo termo de amortecimento $a(x)$, vemos que na verdade, o PVI (3.43) é um caso particular do problema (3.1). Logo, consideraremos o mesmo funcional $Q(u)$ definida em (3.3). Dessa forma, a demonstrações dos lemas necessários para aplicar a teoria de estabilização para Zk linear serão similares às estabelecidas na Seção 3.1. Então, para evitar repetição de argumentos, iremos omitir essas demonstrações.

Lema 3.2.1. *A energia associada ao PVI (3.2) é decrescente.*

Demonstração. A demonstração segue da mesma maneira que o Lema 3.1.1. Então basta multiplicar a equação (3.2) por u e integrar por partes, e obteremos

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -Q(u(t)) \leqslant 0. \tag{3.45}$$

□

Lema 3.2.2. *Dado $u_0 \in L^2(\Omega)$, então a solução u do PVI (3.2), satisfaz*

$$\|u\|^2_{L^2(0,T:H^1(\Omega))} \leqslant (L+T)E(u(0)). \tag{3.46}$$

Demonstração. Multiplicando (3.2) por $x_1 u$ e integrando por partes em $\Omega \times (0,T)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\|x_1 u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} \|\partial_{x_i} u\|^2_{L^2(0,T:L^2(\Omega))} = \frac{1}{2}\|x_1 u_0\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$-\int_0^T \int_\Omega a(x)u^2 dx. \tag{3.47}$$

Portanto, segue o resultado. □

Lema 3.2.3. *Seja u solução de (3.2), então*

$$E(u(0)) \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T E(u(t))dt + \int_0^T Q(u(t))dt. \tag{3.48}$$

Lema 3.2.4. *Seja $Q(u(t))$ deifinido em (3.3). Então para todo $T, R > 0$ existem uma constante $C = C(R,T) > 0$ tal que*

$$\int_0^T E(u(t))dt \leqslant C\int_0^T Q(u(t))dt \tag{3.49}$$

para toda solução de (3.1) linear com $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant R$.

Demonstração. A demonstração segue o mesmo o mesmo argumento que a demonstração do Lema 3.1.4, entretanto não há necessidade de usar o teorema de continuação única provado nesse texto, é suficiente usar o Teorema de Holmgren (*Teorema 1.1.5*). □

3.3 Teorema Principal

Nesta seção, iremos enunciar e provar o resultado de estabilização para as equações (3.1) e (3.2). Aplicaremos a teoria estabelecida Seção 3.1. O resultado de estabilização é o seguinte:

Teorema 3.3.1. *Suponha* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *com* $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant R$ *para algun* $R > 0$, *então energia* $E(u)$ *associada ao PVI* (3.1), *definida em* (3.4), *decai exponencialmente, isto é, existem* $C_1 > 0$ *e* $\delta > 0$ *tal que*

$$E(u(t)) \leqslant C_1 E(u(0)) e^{-\delta t}, \tag{3.50}$$

para todo $t \geqslant 0$.

Demonstração. Seja $R > 0$ e suponha que $u_0 \in L^2(\Omega)$ satisfaz:

$$\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant R,$$

então pelo Lema 3.1.4, temos que:

$$\int_0^T E(u(t)) \leqslant C \int_0^T Q(u(t))dt.$$

Logo, pelo Lema 3.1.3, vale que:

$$\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{T} C \int_0^T Q(u(t))dt + \int_0^T Q(u(t))dt = C_1 \int_0^T Q(u(t))dt,$$

Portanto, pelo Lema 1.3.2 a solução u para (3.1) satisfaz uma desigualdade de Observabilidade. Portanto, pela Teoria de estabilização a energia $E(u)$ decai exponencialmente. □

Utilizando os resultados mencionados na Seção 3.2, conclui-se que a solução u satisfaz uma desigualdade de observabilidade. Assim, aplicando a teoria de estabilização discutida na Seção 1.3 e repetindo o raciocínio apresentado no Teorema 3.3.1, verificamos que o resultado de estabilização também é válido para a equação linear de ZK com termo de amortecimento. Mais precisamente, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 3.3.2. *Suponha* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *com* $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant R$ *para algun* $R > 0$, *então energia* $E(u)$, *associada ao PVI* (3.2), *definida em* (3.44) *decai exponencialmente, isto é, existem* $C_1 > 0$ *e* $\delta > 0$ *tal que*

$$E(u(t)) \leqslant C_1 E(u(0)) e^{-\delta t} \tag{3.51}$$

para todo $t \geqslant 0$.

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Teoria de Existências de Soluções para Equação de Zakharov-Kuznetsov n-Dimensional.

Netsa seção, iremos estabelecer um resultado de boa colocação local para equação de Zakharov-Kuznetsov linear em domínios limitados.

Dado $u_0 \in L^2(\Omega)$, considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_{x_1}\Delta u + u\partial_{x_1}u = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u(x_1,\dots,x_i,\cdots,x_n)\big|_{x_i=0} = u(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\big|_{x_i=L} = 0,\ i=1,\dots,n \\ \partial_{x_i}u(x_1,\cdots,x_i,\dots,x_n)\big|_{x_1=L} = 0,\ i=1,\dots,n \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Primeiramente, vamos provar a teoria de existência de soluções para a equação linear associada ao PVI (4.1), ou seja,

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_{x_1}\Delta u = 0 \; em \;\; \Omega \times (0,T), \\ u(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\big|_{x_i=0} = u(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\big|_{x_i=L} = 0,\ i=1,\dots,n \\ \partial_{x_i}u(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\big|_{x_1=L} = 0,\ i=1,\dots,n \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

Para isso consideremos o operador $\mathbf{T} : \mathcal{D}(\mathbf{T}) \longrightarrow L^2(\Omega)$ dado por:

$$\mathbf{T}u = -\partial_{x_1}\Delta u$$

onde

$$\mathcal{D}(\mathbf{T}) = \{u \in H^3(\Omega) : u(x,t)\big|_{x_i=0} = 0 = u(x,t)\big|_{x_i=L},\ \partial_{x_i}u\big|_{x_1=L} = 0,\ com\, i = 1,2,\dots,n\}.$$

Nosso objetivo é provar que $\mathbf{T}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Note que, $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathbf{T}) \subset L^2(\Omega)$. Como $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = L^2(\Omega)$, segue que $\mathbf{T}$ é um operador densamente definido em $L^2(\Omega)$. Além disso, $\mathbf{T}$ é um operador fechado. Afim de usar o Corolário 1.4.1 é necessário definir o operador adjunto de $\mathbf{T}$.

Para isso, definiremos as condições para a existência e boa definição do operador $\mathbf{T}^*$: sejam $u \in \mathcal{D}(\mathbf{T})$ e $w \in H^3(\Omega)$. Mostraremos a seguir que o operador $\mathbf{T}$ é antissimétrico.

Com efeito, se aplicarmos o produto interno em $L^2(\Omega)$ e usarmos integração por partes junto com as propriedades do conjunto $\mathcal{D}(\mathbf{T})$, obteremos que:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{T}u, w) &= -\int_\Omega \partial_{x_1}\Delta u.w dx \\
&= -\prod_{j=1,\ j\neq i}^{n}\int_0^L \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\partial_{x_1}u(x_1,\dots,x_{i-1},L,\dots,x_n)w(x_1,\dots,x_{i-1},L,\dots,x_n)dx_j \\
&+ \prod_{j=1,\ j\neq i}^{n}\int_0^L \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\partial_{x_1}u(x_1,\dots,x_{i-1},0,\dots,x_n)w(x_1,\cdots,x_{i-1},0,\dots,x_n)dx_j \\
&+ \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_1}\partial_{x_i}u\partial_{x_i}w dx,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $x = (x_1,\dots x_n)$ e $dx = dx_1\dots dx_n$. Assim, se considerarmos $w \in H^3(\Omega)$ satisfazendo:

$$w(x_1,\dots,x_{i-1},L,\dots,x_n) = 0 = w(x_1,\cdots,x_{i-1},0,..x_n), \text{ para } i = 1,\dots,n$$

a igualdade (4.3) emplicará em:

$$(u, \mathbf{T}^*w) = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_1}\partial_{x_i}u\partial_{x_i}w dx. \tag{4.4}$$

Agora, se utilizarmos novamente integração por partes em (4.4), resulta que:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{T}u, w) &= \prod_{j=2}^{n}\int_0^L \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}u(L,x_2,\dots,x_n)\partial_{x_i}w(L,\dots,x_n)dx_j \\
&- \prod_{j=2}^{n}\int_0^L \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}u(0,x_2,\dots,x_n)\partial_{x_i}w(0,\dots,x_n)dx_j \\
&- \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}u\partial_{x_1}\partial_{x_i}w dx.
\end{aligned}$$

Como $u \in \mathcal{D}(\mathbf{T})$, então $\partial_{x_i}u(0,x_2,\dots,x_n) = 0$ para todo $i = 1,\dots,n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}u(0,x_2,\dots,x_n)\partial_{x_i}w(0,\dots,x_n) = 0 \tag{4.5}$$

Agora, se considerarmos $w \in H^3(\Omega)$ satisfazendo $\partial_{x_i} w(L, \dots, x_n) = 0$, para $i = 1, \dots, n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} u(L, x_2, \dots, x_n) \partial_{x_i} w(L, \dots, x_n) = 0. \tag{4.6}$$

Consequentemente,

$$(\mathbf{T}u, w) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} u \partial_{x_1} \partial_{x_i} w dx. \tag{4.7}$$

Finalmente, ao usarmos integração por partes (4.7), garantiremos que o operador $\mathbf{T}$ é antissimétrico, ou seja

$$(\mathbf{T}u, w) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} u \partial_{x_1} \partial_{x_i}^2 w dx = \int_\Omega u \partial_{x_1} \Delta w dx = (u, \partial_{x_1} \Delta w) = (u, \mathbf{T}w). \tag{4.8}$$

Portanto, definiremos o operador adjunto de $\mathbf{T}$ como sendo :

$$\mathbf{T}^* : \mathcal{D}(\mathbf{T}^*) \longrightarrow L^2(\Omega) \ \ tal \ \ que \ \ \mathbf{T}^* w = \partial_{x_1} \Delta w$$

onde,

$$\mathcal{D}(\mathbf{T}^*) = \{ w \in H^3(\Omega) : w(x,t)\big|_{x_i = L} = 0 = w(x,t)\big|_{x_i=0} \ e \ \ \partial_{x_i} w(x,t)\big|_{x_1=0} = 0, \ i = 1, \dots n. \}$$

Lema 4.1.1. *Os operadores* $\mathbf{T}$ *e* $\mathbf{T}^*$ *são dissipativos.*

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{D}(\mathbf{T})$, temos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}u, u) &= -\int_\Omega \partial_{x_1} \Delta u . u dx \\ &= \prod_{j=2}^{n} \int_0^L \left[\int_0^L \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_{x_1} (\partial_{x_i} u(x_1, \dots, x_n, t))^2}{2} dx_1 \right] dx_j \\ &= - \prod_{j=2}^{n} \int_0^L \sum_{i=1}^{n} \frac{(\partial_{x_i} u(0, \dots, x_n, t))^2}{2} dx_j \leqslant 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Logo, $\mathbf{T}$ é dissipativo.

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}^* w, w) &= \int_\Omega \partial_{x_1} \Delta w . w dx \\ &= - \prod_{j=2}^{n} \int_0^L \left[\int_0^L \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_{x_1} (\partial_{x_i} w(x_1, \dots, x_n, t))^2}{2} dx_1 \right] dx_j \\ &= - \prod_{j=2}^{n} \int_0^L \sum_{i=1}^{n} \frac{(\partial_{x_i} w(L, \dots, x_n, t))^2}{2} dx_j \leqslant 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Portanto, $\mathbf{T}^*$ é dissipativo. ∎

Segue do Corolário 1.4.1 que o operador $\mathbf{T}$ é gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações. Denotaremos esse semigrupo por $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. Assim, a solução do problema de valor inicial (4.2) é dada por :

$$u(x,t) = S(t)u_0(x), \tag{4.11}$$

para todo $t \in [0,T]$. Agora vamos provar a existência de soluções para o problema não linear (4.1). Observe que as soluções u da equação integral

$$u(x,t) = S(t)u_0 + \int_0^T S(t-\tau)u\partial_{x_1}u(\cdot,\tau)d\tau, \tag{4.12}$$

são soluções do PVI (5). Portanto, para provar a existência de solução do problema de valor inicial (4.1) é equivalente a provar que a equação integral (4.12) tem uma única solução. Para isso, usaremos o método do Ponto Fixo para provaremos que a equação (4.12) tem uma única solução. Para $T > 0$ e dado $u_0 \in H^k(\Omega)$ com $k \geqslant \frac{n}{2}+1$, defina o operador $\varphi : \mathcal{X}_T \longmapsto \mathcal{X}_T$ dado por:

$$\varphi(u)(t) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)u\partial_{x_1}u(\cdot,\tau)d\tau, \tag{4.13}$$

sobre o espaço

$$\mathcal{X}_T = C([0,T] : H^k(\Omega)) \cap L^2(0,T : H^{k+1}(\Omega))$$

munido com a norma

$$|||v||| = \|v\|_{L^\infty(0,T;H^k(\Omega))} + \|v\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))}. \tag{4.14}$$

Provaremos que φ satifaz as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo (Teorema 1.1.1): $\varphi(\mathcal{X}_T) \subset \mathcal{X}_T$ e que $\varphi : \mathcal{X}_T \longrightarrow \mathcal{X}_T$ é uma contração. Para isso, iremos enunciar alguns resultados importantes.

Lema 4.1.2. *Dado* $u \in \mathcal{X}_T$*, então* $u\partial_{x_1}u \in L^1(0,T : H^k(\Omega))$*. Além disso,*

$$\|u\partial_{x_1}u\|_{L^1(0,T:H^k(\Omega))} \lesssim T^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^\infty(0,T;H^k(\Omega))}\|u\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))}.$$

Demonstração. É suficiente estimar a derivada de ordem k na norma $L^2(\Omega)$. Pela regra de Leibniz podemos escrever

$$\|\partial^k(u\partial_{x_1}u)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\sum_{j=0}^{k}\|\partial^{k-j}u\partial^j\partial_{x_1}u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.15}$$

Devemos estimar $\|\partial^{k-j}u\partial^{j}\partial_{x_1}u\|_{L^2(\Omega)}$. Para $j=0$ e $j=k$ usamos a imersão de Sobolev $H^K(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ para obter

$$\begin{aligned}\|\partial^k u\partial_{x_1}u\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|\partial^k u\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_{x_1}u\|_{L^\infty(\Omega)}\\ &\leqslant \|\partial^k u\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}\end{aligned}\tag{4.16}$$

e

$$\begin{aligned}\|u\partial^k\partial_{x_1}u\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial^k\partial_{x_1}u\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant \|\partial^k u\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Agora para $1\leqslant j\leqslant k-1$, temos pela desigualdade de Holder e Teorema 1.1

$$\begin{aligned}\|\partial^j u\partial^{k-j}\partial_{x_1}u\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|\partial^j u\|_{L^4(\Omega)}\|\partial^{k-j}\partial_{x_1}u\|_{L^4(\Omega)}\\ &\leqslant \|u\|_{H^k(\Omega)}\|u\|_{H^{k+1}}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

$\square$

A seguir estabeleceremos uma proposição que auxiliará na demonstração das estimativas necessárais para provar que φ satisfaz as hipóteses do Teorema do ponto fixo.

Proposição 4.1.1. *Seja* v *solução de*

$$\begin{cases}\partial_t v+\partial_{x_1}\Delta v=f \quad \text{em } \Omega\times(0,T),\\ v(x,t)\big|_{x_i=0}=0=v(x,t)\big|_{x_i=L}, \text{ para } i=1,\dots,n,\\ \partial_{x_i}v(L,x_2,\dots,x_n), \text{ para } i=1,\dots,n.\end{cases}\tag{4.19}$$

onde $f\in L^1(0,T:L^2(\Omega))$ *e* $v(0)$ *é o dado inicial. Então vale:*

$$\|v\|_{L^2(0,T:H^1(\Omega))}\leqslant\|v(0)\|_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\int_\Omega x_1 v f\,dx\,dt.$$

Em particular, se $|x_1|\leqslant L$*, então*

$$\|v\|_{L^2(0,T:H^1(\Omega))}\leqslant\|v(0)\|_{L^2(\Omega)}+L\|v.f\|_{L^1(0,T:L^1(\Omega))}.$$

Demonstração. A demonstração segue de maneira similar ao Lema 3.1.2, ou seja, basta multiplicar a equação do PVI (4.19) por $x_1 v$, e em seguida integrar por partes usando as condições de contorno. $\square$

Observação 4.1.1. *Para cada* $0 \leqslant j \leqslant k$ *denotaremos por*

$$w_j(t) = \int_0^t S(t-\tau)\partial^j(u\partial_{x_1}u)(\tau)d\tau. \tag{4.20}$$

Observe que, $\partial^j(u\partial_{x_1}u) \in L^2(\Omega)$*, para* $0 \leqslant j \leqslant k$*. Logo, segue do Teorema 1.4.3 que* $w_j \in \mathcal{D}(\mathbf{T})$*. Assim, pelo Teorema 1.4.5 a função* w_j *satisfaz:*

$$\partial_t w_j + \partial_{x_1}\Delta w_j = \partial^j(u\partial_{x_1}u). \tag{4.21}$$

para cada $0 \leqslant j \leqslant n$*.*

Para provar a existência de soluções para PVI do (4.1), consideremos $T > 0$ e $a > 0$ que serão determinados posteriormente, e dfinremos o espaço

$$\mathcal{X}_T(a) = \{u \in \mathcal{X}_T : |||u||| \leqslant a\}.$$

Passo 1: $\varphi(\mathcal{X}_T(a)) \subset \mathcal{X}_T(a)$ para $T > 0$ e $a > 0$ convenientes.

De fato, seja $u_0 \in H^k(\Omega)$, com $k \geqslant \frac{n}{2} + 1$. Então, pelo Lema 4.1.2 obteremos:

$$\begin{aligned} \|\varphi(u)(t)\|_{H^k(\Omega)} &\leqslant \|S(t)u_0\|_{H^k(\Omega)} + \|\int_0^t S(t-\tau)u\partial_{x_1}u d\tau\|_{H^k(\Omega)} \\ &\leqslant \|u_0\|_{H^k(\Omega)} + \|u\partial_{x_1}u\|_{L^1(0,T;H^k(\Omega))} \\ &\leqslant \|u_0\|_{H^k(\Omega)} + T^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^\infty(0,T;H^k(\Omega))}\|u\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))} \\ &\leqslant \|u_0\|_{H^k(\Omega)} + cT^{\frac{1}{2}}|||u|||^2. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Agora, analisaremos $\|\varphi(u)\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))}$. De fato, observe que ao aplicar a norma em φ,

$$\|\varphi(u)(t)\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))} \leqslant \|\varphi(u)(t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \sum_{j=0}^{k} \|\partial^{j+1}\varphi(u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{4.23}$$

Por outro lado se derivarmos φ, resulta que

$$\begin{aligned} \partial^{j+1}\varphi(u)(t) &= \partial^{j+1}S(t)u_0 + \partial^{j+1}\int_0^t S(t-\tau)u\partial_{x_1}u d\tau \\ &= \partial S(t)\partial^j u_0 + \partial\int_0^t S(t-\tau)\partial^j(u\partial_{x_1}u)d\tau. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Pela observação 4.1.1 podemos escrever a expressão dada em (4.24) como a soma da solução do PVI homogêneo de (4.1)com a solução do PVI não homogêneo, onde a solução do PVI não homgêneo está expressada como na observação 4.1.1. Mais precisamente, escreveremos (4.24) da da seguinte maneira:

$$\partial^{j+1}\varphi(u)(t) = \partial S(t)\partial^j u_0 + \partial w_j \tag{4.25}$$

Logo, por (4.25) e pela Proposição 4.1.1, segue que:

$$\begin{aligned} \|\partial^{j+1}\varphi(u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leqslant \|\partial S(t)\partial^j u_0\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial w_j\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leqslant \|u_0\|_{H^k(\Omega)} + \|\partial w_j\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Agora, usando a Proposição 4.1.1 no último termo de (4.26), estimaremos derivada de w_j como a seguir:

$$\begin{aligned} \|\partial w_j\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leqslant L\|w_j\partial^j(u\partial_{x_1}u)\|_{L^1(0,T:L^1(\Omega))} \\ &\leqslant \|w_j\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|\partial^j(u\partial_{x_1}u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leqslant T^{\frac{1}{2}}\|w_j\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\partial^j(u\partial_{x_1}u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

De modo similar ao Lema 4.1.2, também temos a estimativa:

$$\|\partial^j(u\partial_{x_1}u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \lesssim |||u|||^2. \tag{4.28}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|w_j\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leqslant \int_0^T \|\partial^j(u\partial_{x_1}u)\|_{L^2(\Omega)}d\tau \\ &\leqslant T^{\frac{1}{2}}\|\partial^j(u\partial_{x_1}u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leqslant T^{\frac{1}{2}}(1+T^{\frac{1}{2}})|||u|||^2. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Portanto, de (4.26)-(4.29), temos que

$$\|\varphi(u)(t)\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))} \leqslant \|u_0\|_{H^k(\Omega)} + cT^{\frac{1}{2}}(1+T^{\frac{1}{2}})|||u|||^4. \tag{4.30}$$

Assim, concluimos que

$$|||\varphi(u)||| \leqslant \|u_0\|_{H^k(\Omega)} + cT^{\frac{1}{2}}(1+T^{\frac{1}{2}})(|||u|||^4 + |||u|||^2). \tag{4.31}$$

Vamos considerar $a = 2c\|u_0\|_{H^k(\Omega)}$. Se tomarmos $T > 0$ satisfazendo

$$cT^{\frac{1}{2}}(1+T^{\frac{1}{2}})(a^2+a^4) \leqslant \frac{a}{2}, \tag{4.32}$$

obteremos que

$$|||\varphi||| \leqslant a. \tag{4.33}$$

Portanto, concluimos que

$$\varphi(\mathfrak{X}_T(a)) \subset \mathfrak{X}_T(a).$$

Provaremos agora que o operador $\varphi : \mathfrak{X}_T(a) \longrightarrow \mathfrak{X}_T(a)$ é uma contração. De fato, dados $u, v \in \mathfrak{X}_T(a)$, temos que:

$$\varphi(u)(t) - \varphi(v)(t) = \int_0^T S(t-\tau)(u\partial_{x_1}u - v\partial_{x_1}v)d\tau. \tag{4.34}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|||\varphi(u)(t) - \varphi(v)(t)||| &\leqslant \|\int_0^T S(t-\tau)(u\partial_{x_1}u - v\partial_{x_1}v)d\tau\|_{L^\infty(0,T:H^k(\Omega))} \\
&+ \|\int_0^T S(t-\tau)(u\partial_{x_1}u - v\partial_{x_1}v)d\tau\|_{L^2(0,T:H^{k+1}(\Omega)} \\
&=: I + II
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Repetindo o argumento aplicado em (4.22) , temos que

$$\begin{aligned}
I = \|\int_0^T S(t-\tau)(u\partial_{x_1}u - v\partial_{x_1}v)d\tau\|_{H^k(\Omega)} &\leqslant \int_0^T \|(u\partial_{x_1}u - v\partial_{x_1}v)\|_{H^k(\Omega)}d\tau \\
&\leqslant \int_0^T \sum_{j=0}^{n} \|\partial^{k-j}(u-v)\partial^j\partial_{x_1}u\|_{L^2(\Omega)}d\tau \\
&+ \int_0^T \sum_{j=0}^{n} \|\partial^{k-j}\partial_{x_1}(u-v)\partial^j v\|_{L^2(\Omega)}d\tau \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}(|||u||| + |||v|||)|||u-v||| \\
&\leqslant 2aT^{\frac{1}{2}}|||u-v|||.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Agora, para analisar a integral II, vamos aplicar o mesmo argumento usado na prova de (4.23). De fato,

$$\begin{aligned}
II &\leqslant \|(\varphi(u) - \varphi(v))\partial^k(u\partial_{x_1}u - v\partial_{x-1}v)\|_{L^1(0,T:L^1(\Omega))} \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}\big(\|\varphi(u)\|_{L^\infty(0,T:L^2(\Omega))} + \|\varphi(u)\|_{L^\infty(0,T:L^2(\Omega))} \\
&+ 1\big)\|\partial^k(u\partial_{x_1}u - v\partial_{x_1}v)\|_{L^2(0,T:L^2(\Omega))} \\
&\leqslant cT^{\frac{1}{2}}(1 + T^{\frac{1}{2}})(2a+1)2a|||u-v|||.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Portanto, temos:

$$|||\varphi(u)(t) - \varphi(v)(t)||| \leqslant cT^{\frac{1}{2}}(1 + T^{\frac{1}{2}})(2a + 1)2a|||u - v|||. \tag{4.38}$$

Escolhendo $T > 0$ tal que

$$cT^{\frac{1}{2}}(1 + T^{\frac{1}{2}})(2a + 1)2a < 1,$$

então φ é uma contração. Portanto, φ tem um único ponto fixo, isto é, existe $u \in \mathcal{X}_T(a)$ tal que

$$\varphi(u) = u$$

Como garantimos que o operador φ tem um único ponto fixo, então a equação integral (4.12) tem uma única solução em

$$C([0, T] : H^k(\Omega)) \cap L^2(0, T : H^{k+1}(\Omega)).$$

Portanto, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1.1. *Seja* $u_0 \in H^k(\Omega)$, *onde* $k \geqslant \frac{n}{2} + 1$. *Então existem* $T = T(\|u_0\|_{H^k(\Omega)}) > 0$ *e uma única função* $u \in C([0, T] : H^k(\Omega)) \cap L^2(0, T : H^{k+1}(\Omega))$, *onde* u *é solução local do problema de valor inicial* (4.1).

Observação 4.1.2. *O Teorema 4.1.1 é o primeiro passo para se obter boa-colocação global. No entanto, para obter a boa-colocação global em* $H^k(\Omega)$ *deveríamos ser capazes de estimar* $\|u\|_{H^k(\Omega)}$, *entretanto essa é uma questão que não conseguimos superar no presente trabalho.*

Referências Bibliográficas

[1] F. D. Araruna, R. A. Capistrano-Filho and G. G. Doronin, *Energy decay for the modified Kawahara equation posed in a bounded domain*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 385, pp. 743-756, 2012.

[2] O. V. Besov, V. P. Il'in and S. M. Nikol'skii, *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems*, vol. I, John Wiley & Sons, 1978.

[3] J. Bourgain, *On the Compactness of the Support of Solutions of Dispersive Equations*, International Mathematics Research Notices, vol. 9, p. 2, 1997.

[4] J. C. Saut and B. Scheurer, *Unique continuation for some evolution equations*, Journal of Differential Equations, vol. 66, pp. 118-139, 1987.

[5] E. Bustamante, J. J. Urrea, and J. Mejía, *On the unique continuation property of solutions of the three-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 39, pp. 537–553, 2018.

[6] T. Calerman, *Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 97, pp. 471–474, 1939.

[7] R. A. Capistrano, V. Komornik, and A. F. Pazoto, *Pointwise control of the linearized Gear-Grimshaw system*, Evolution Equations and Control Theory, vol. 9, no. 3, pp. 693-719, 2020.

[8] X. Carvajal and M. Panthee, *Unique continuation property for a higher order nonlinear Schrödinger equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 303, no. 1, pp. 188-207, 2005.

[9] M. Chen, *Unique continuation property for the Zakharov–Kuznetsov equation*, Computers and Mathematics with Applications, vol. 77, pp. 1273–1281, 2019.

[10] G. G. Doronin and N. A. Larkin, *Stabilization of regular solutions for the Zakharov-Kuznetsov equation posed on bounded rectangles and on a strip*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 58, no. 3, pp. 661-682, 2015.

[11] G. G. Doronin and N. A. Larkin, *Exponential decay for the linear Zakharov–Kuznetsov equation without critical domain restrictions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 27, pp. 6-10, 2014.

[12] A. Esfahani and A. Pastor, *On the unique continuation property for Kadomtsev-Petviashvili-I and Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equations*, Bulletin of the London Mathematical Society, vol. 43, pp. 423-440, 2011.

[13] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[14] L. G. Farah, F. Linares, and A. Pastor, *A note on the 2D generalized Zakharov-Kuznetsov equation: local, global, and scattering results*, Journal of Differential Equations, vol. 255, pp. 2558-2571, 2012.

[15] A. V. Faminskii, *The Cauchy problem for the Zakharov-Kuznetsov equation*, Differential Equations, vol. 31, pp. 1002-1012, 1995.

[16] H. A. Ghany and A. Hyder, *Local and global well-posedness of stochastic Zakharov-Kuznetsov equation*, Journal of Computational Analysis and Applications, vol. 15, pp. 1332–1343, 2013.

[17] D. Gomes and M. Panthee, *Exponential energy decay for the Kadomtsev-Petviashvili (KP-II) equation*, São Paulo Journal of Mathematical Sciences, vol. 5, pp. 135-148, 2011.

[18] A. Grünrock, *On the generalized Zakharov-Kuznetsov equation at critical regularity*, arXiv preprint arXiv:1509.09146, 2015.

[19] S. Herr and S. Kinoshita, *Subcritical well-posedness results for the Zakharov-Kuznetsov equation in dimension three and higher*, Annales de l'Institut Fourier, vol. 73, no. 3, pp. 1203-1267, 2023.

[20] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

[21] F. John, *Partial Differential Equations*, 4th ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1982.

[22] C. E. Kenig, D. Pilod, G. Ponce and L. Vega, *On the continuation of solution to non-local non-linear dispersive equations*, Communications in Partial Differential Equations, vol. 45, no. 8, pp. 872-886, 2020.

[23] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *On the unique continuation solution to the generalized KdV equation*, Mathematical Research Letters, vol. 10, pp. 833-846, 2003.

[24] D. Lannes, F. Linares and J. C. Saut, *The Cauchy problem for the Euler–Poisson system and derivation of the Zakharov–Kuznetsov equation*, in: Annales Henri Poincaré, Springer, 2013, pp. 181-213.

[25] C. Laurent, F. Linares and L. Rosier, *Control and Stabilization of the Benjamin-Ono Equation in* $\mathsf{L}^2(\mathbb{T})$, Springer, vol. 218, pp. 1531-1575, 2015.

[26] F. Linares, A. Pastor and J. C. Saut, *Well-Posedness for the ZK Equation in a Cylinder and on the Background of a KdV Soliton*, Communications in Partial Differential Equations, vol. 35, 2010.

[27] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Springer, 2014.

[28] F. Linares and J. C. Saut, *The Cauchy problem for the 3D Zakharov-Kuznetsov equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst., vol. 24, no. 2, pp. 547-565, 2009.

[29] F. Linares and J. Ramos, *The Cauchy problem for the* L^2*–critical generalized Zakharov-Kuznetsov equation in dimension 3*, Communications in Partial Differential Equations, vol. 46, pp. 1601–1627, 2021.

[30] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[31] E. T. Massa, *Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP, 2014. Disponível em: https://sites.icmc.usp.br/eugenio/EDP/globEDP.pdf.

[32] G. P. Menzala, C. F. Vasconcellos and E. Zuazua, *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Quarterly of Applied Mathematics, vol. LX, pp. 111-129, 2002.

[33] S. Mizohata, *Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques*, Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, vol. A31, pp. 219–239, 1958.

[34] L. Molinet and D. Pilod, *Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov–Kuznetsov equation and applications*, Journal of Differential Equations, Vol. 32, 347-371, (2015).

[35] A. C. Nascimento, *On special regularity properties of solutions of the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK) equation*, Communications on Pure and Applied Analysis, Vol. 19, (2020).

[36] A. C. Nascimento, G. N. Santos and R. M. Peres, *On the stabilization for the high-order Kadomtsev-Petviashvili and Zakharov-Kuznetsov equations with localized damping*, Evolution Equations and Control Theory, Vol. 11, (2022).

[37] M. Panthee, *A note on the unique continuation property for Zakharov–Kuznetsov equation*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. 59, 425-438, (2004).

[38] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, (1983).

[39] P. N. da Silva, *Unique Continuation for the Kawahara Equation*, TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., Vol. 8, No. 3, 463-473, (2007).

[40] F. Ribaud and S. Vento, *Well-posedness results for the 3D Zakharov-Kuznetsov equation*, Journal of Evolution Equations, Vol. 11, 341-360, (2011).

[41] F. Ribaud and S. Vento, *Local and global well-posedness results for the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equation*, arXiv preprint arXiv:1601.00856, (2016).

[42] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, Vol. 2, 33-55, (1997).

[43] L. Rosier, *A survey of controllability and stabilization results for partial differential equations*, ESAIM: Proceedings, Vol. 41, 365-411, (2013).

[44] M. Shan, B. Wang, and L. Zhang, *Resonant decompositions and global well-posedness for the 2D Zakharov-Kuznetsov equation in Sobolev spaces of negative indices*, Journal of Differential Equations, Vol. 355, 109-134, (2023).

[45] N. Tzvetkov, *Global low regularity solutions for Kadomtsev-Petviashvili equation*, Differential and Integral Equations, Vol. 13, 1289-1320, (2000).

[46] C. F. Vasconcellos and P. N. da Silva, *The Linear Kawahara Equation on the Half-Line*, Communications on Pure and Applied Analysis, Vol. 17, 102–116, (2011).

[47] C. F. Vasconcellos and P. N. da Silva, *Stabilization of the Kawahara equation with localized damping*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, Vol. 17, 102–116, (2011).

[48] V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, *On three-dimensional solitons*, Soviet Physics JETP, Vol. 39, 285-286, (1974).

[49] B. Y. Zhang, *Unique continuation for the Korteweg-de Vries equation*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 23, 55-71, (1992).