Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES IMERSAS EM PRODUTOS WARPED

Gustavo de Sousa Ferreira Dias

Teresina - 2023

Gustavo de Sousa Ferreira Dias

Tese de Doutorado:

Rigidez de Hipersuperfícies Imersas em Produtos Warped

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Orientador:
Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino

Teresina - 2023

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rigidez de Hipersuperfícies Imersas em Produtos Warped

Gustavo de Sousa Ferreira Dias

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 12 de dezembro de 2023.

Banca Examinadora:

Cícero Pedro de Aquino

Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino - Orientador

Antonio Wilson Rodrigues da Cunha

Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues Cunha - UFPI

Halyson Irene Baltazar

Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar - UFPI

Jobson de Q. O.

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira - UECE

Henrique Fernandes de Lima

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima - UFCG

*Dedico este trabalho aos meus pais, Manoel e Clédina,
e à minha irmã Maria de Fátima.*

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

D541r Dias, Gustavo de Sousa Ferreira.
Rigidez de hipersuperfícies imersas em produtos Warped / Gustavo de Sousa Ferreira Dias. -- 2023.
124 f.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Piauí. Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2023.
"Orientador: Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino ."

1. Condição de convergência. 2. Curvatura média ponderada. 3. Produtos Warped. I. Aquino, Cícero Pedro de. II. Título.

CDD 516.36

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família pelo apoio que recebi em minha jornada em Matemática, e pelo incentivo que sempre recebi. Sem eles eu não teria chegado até aqui. Na verdade, sempre que precisei eles estavam comigo. E principalmente, agradeço a minha mãe, que é a verdadeira responsável por tudo de bom que me aconteceu.

Agradeço à Swelen por tornar nossas vida cada vez mais uma só. Sua presença é certamente o combustível de todo meu esforço. Minha vida não seria a mesma sem ela.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFPI por me auxiliarem em várias disciplinas até aqui. Em especial, agradeço ao professor orientador Cícero P. de Aquino, por ter sido sempre muito compreensivo e ter me ajudado mesmo quando eu estava em momentos mais difíceis. Sua ajuda e seus conselhos foram essenciais para minha trajetória acadêmica. Também sou muito grato ao professor Henrique F. de Lima (UFCG) por ter me dado várias sugestões na preparação dos trabalhos, além de ter ajudado imensamente no processo de elaborar os artigos.

Agradeço aos professores Antônio Wilson R. Cunha, Halyson I. Baltazar e Jobson de Queiroz Oliveira que, juntos com Cícero P. de Aquino e Henrique F. de Lima, participaram da minha banca de defesa de Doutorado e forneceram várias sugestões para a escrita deste trabalho, bem como artigos e livros de referências e temas para pesquisas futuras.

Agradeço aos amigos e colegas que fizeram parte da minha trajetória no Doutorado UFPI, entre eles Alexandre, João Santos, Bruno Vasconcelos, A. Nilson, João Vinicius, Erisvaldo, Dieme, Pedro Paulo, Edimilson e Christopher. Agradeço em especial ao meu amigo Christopher por ter me ajudado imensamente nos estudos.

A todos muito obrigado.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"εν αρχη ην ο Λογοζ και ο Λογοζ ην
προζ τον θεον και θεον ην ο Λογοζ."

João 1:1

Resumo

Na primeira parte deste trabalho, aplicamos vários princípios do máximo para provar resultados de unicidade e não-existência para hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média ponderada constante imersas em um Espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado (GRW) espacialmente denso, sob condições adequadas no Tensor de Bakry-Émery-Ricci da fibra Riemanniana. Em seguida, provamos resultados semelhantes para sólitons do fluxo da curvatura média ponderada. Na segunda parte do trabalho, estudamos sólitons translacionais pela curvatura média imersos em uma classe de produtos warped Riemannianos obedecendo condições adequadas no tensor de Ricci da fibra. Esta classe inclui, por exemplo, os espaços Euclidianos, pseudo-hiperbólicos e Schwarzschild. Primeiro obtivemos uma versão do Princípio do Máximo de Omori-Yau relacionado ao Laplaciano ponderado, o qual foi aplicado para provar um resultado de não-existência para sólitons translacionais. Finalmente, aplicando um critério de parabolicidade e um resultado tipo-Liouville, provamos resultados de unicidade para sólitons translacionais.

Palavras-chave: Espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente denso; Condição de convergência tipo-tempo; Curvatura média ponderada; Espaços Produtos Warped; sólitons translacionais; Princípio do Máximo de Omori-Yau.

Abstract

In the first part of this work, we apply several maximum principles to prove uniqueness and non-existence results for spacelike hypersurfaces with constant weighted mean curvature immersed in a spatially weighted generalized Robertson-Walker Spacetime (GRW), under suitable conditions in the Bakry-Émery-Ricci Tensor of the Riemannian fiber. Next, we establish similar results for weighted mean curvature flow solitons. In the second part of this work, we study translating solitons by mean curvature immersed in a class of Riemannian warped products obeying suitable conditions in the Ricci tensor of the fiber. This class includes, for example, Euclidean, pseudo-hyperbolic and Schwarzschild spaces. We first obtained a version of the Omori-Yau Maximum Principle related to the drifted Laplacian, which was applied to prove a non-existence result for translational solitons. Finally, applying a parabolicity criterion and a Liouville-type result, we prove uniqueness results for translating solitons.

Keywords: Spatially weighted generalized Robertson-Walker spacetimes; Timelike convergence condition; Weighted mean curvature; Warped Product spaces; translating solitons; Omori-Yau maximum principle.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, estudamos hipersuperfícies imersas em produtos warped $\pm I \times_f M^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$ e M^n é uma variedade Riemanniana. O trabalho está divido em duas partes independentes: a primeira consiste nos Capítulos 3 e 4 e aborda o caso Lorentziano e a segunda ao Capítulo 5, onde o ambiente é Riemanniano. Os resultados e definições preliminares se encontram no Capítulo 2 e também podem ser lidos de forma independente: a Seção 2.1 trata de generalidades sobre Produtos Warped e algumas fórmulas úteis. As Seções 2.2 e 2.4 tratam das definições e fórmulas básicas para a leitura dos Capítulos 3 e 4, enquanto a Seção 2.3 é análoga para o Capítulo 5.

Latorre e Romero (veja [38, Proposição 3.1]) provaram uma fórmula para $\Delta(\operatorname{senh}^2\theta)$, onde θ é o ângulo hiperbólico entre o campo ∂_t tangente a componente I de $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ e o campo de vetores N normal a uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n. Como aplicação, eles provaram um resultado de unicidade local para hipersuperfícies tipo-espaço de curvatura média H constante. Iniciamos nosso trabalho provando uma desigualdade análoga para o Laplaciano ponderado $\Delta_\varphi(\operatorname{senh}^2\theta)$. Mais precisamente, provamos o seguinte.

Teorema 1.1 (*Teorema 3.1*). *Sejam* $\overline{M}^{n+1}_\varphi = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso e* $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}_\varphi$ *uma hipersuperfície tipo-espaço. Sendo* h *a função* *altura de* Σ^n, *vale*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant\ & \langle A^2(\nabla h),\nabla h\rangle + n\left(\frac{H\langle N,\partial_t\rangle}{n}+\frac{f'(h)}{f(h)}\right)^2\\ & -4\frac{f'(h)}{f(h)}(\operatorname{Hess} h)(\nabla h,\nabla h)+|\nabla h|^2\left\{(2n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}-n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\}\\ & +|\nabla h|^4\left\{(n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}-n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\}+\langle N,\partial_t\rangle^2\mathrm{Ric}^M_\varphi(N^*,N^*)\\ & +\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N,\partial_t\rangle|\nabla h|^2\{2H-H_\varphi\}-\langle N,\partial_t\rangle\langle\nabla H_\varphi,\nabla h\rangle,\end{aligned}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, Σ^n *é totalmente umbílica.*

Nosso primeiro Teorema de unicidade utiliza o resultado acima para hipersuperfícies com curvatura média ponderada H_φ constante. Provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.2 (*Teorema 3.2*)**.** *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso. Suponha que* $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *é uma hipersuperfície tipo-espaço com curvatura média ponderada* H_φ *constante. Assuma que o ângulo hiperbólico* θ *entre* Σ^n *e* ∂_t *atinge um máximo local em algum ponto* $p_0 \in \Sigma^n$ *e* $f'(h(p_0))\left(H(p_0)-\frac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$. *Se, ou*

(a) $f''(h(p_0)) < 0$ *e* $\mathrm{Ric}^M_\varphi \geqslant (n-1)(f^2(\log f)'')\langle,\rangle_M$ *em* $x(p_0)$, *ou*

(b) $f''(h(p_0)) \leqslant 0$ *e* $\mathrm{Ric}^M_\varphi > 0$ *em* $x(p_0)$,

então existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ *de* p_0 *em* Σ^n *que está contida em um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$.

Observamos que o estudo de resultados de existência e unicidade em Espaços-tempo GRW é uma atividade de pesquisa intensa em Geometria Diferencial. Um dos motivos é o interesse em aplicações a Física (veja [42] ou [47, Capítulo 12]). Outro é o fato de que eles constituem uma generalização de $-\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, o espaço de Lorentz-Minkowski, para o qual E. Calabi [28] provou um resultado notável que afirma que as únicas superfícies máximas (isto é, com curvatura média identicamente nula) no espaço de Lorentz-Minkowski tridimensional $-\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ são os planos tipo-espaço. Depois, Cheng e Yau [32] estenderam este resultado para $-\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Resultados deste tipo, aplicados para o contexto de gráficos verticais, são conhecidos como "resultado do tipo Calabi-Bernstein".

Já no caso de Espaços-tempo GRW $-I \times_f M^n$ obedecendo à uma condição sobre o tensor de Ricci conhecida como TCC (do inglês *timelike convergence condition*, cuja definição encontra-se na página 28), a qual é equivalente a (veja a Proposição 2.9)

$$\mathrm{Ric}^M \geqslant (n-1)\left(f^2(\log f)''\right)\langle\ ,\ \rangle_M \quad \text{e} \quad f'' \leqslant 0, \tag{1.1}$$

um resultado interessante é o de Alías, Romero e Sánchez [14, Teorema 5.1]. Eles mostraram que toda hipersuperfície tipo-espaço compacta de curvatura média constante é totalmente umbílica. Além disso, se a desigualdade sobre Ric^M em (1.1) for estrita, eles provaram que a hipersuperfície deve ser um slice [14, Teorema 5.2]. Seguindo na mesma linha, vários autores obtiveram resultados para hipersuperfície tipo-espaço completas, não necessariamente compactas. Por exemplo, veja [5], [24], [25], [26], [49] ou [50].

Alías, Colares e H. F. de Lima [9] utilizaram a hipótese de que a norma do gradiente da função altura da hipersuperfície é integrável para obter resultados de unicidade. Essa hipótese pode ser vista como um substituto para a hipótese de compacidade. Mais recentemente, H. F. de Lima e coautores [40] aplicaram a fórmula de Latorre e Romero [38, Proposição 3.1] para obter resultados de unicidade e não-existência para hipersuperfícies completas máximas, isto é, tais que $H = 0$, em um Espaço-tempo GRW obedecendo à TCC. A condição de integrabilidade de $|\nabla h|$ também foi utilizada.

Uma extensão natural seria considerar um *Espaço-tempo GRW espacialmente denso* (veja a definição na Seção 2.4) por uma função φ, denotado por $-I \times_f M^n_\varphi$. Neste novo contexto, vários resultados de unicidade e não-existência para hipersuperfícies tipo-espaço imersas em $-I \times_f M^n_\varphi$ foram obtidos como aplicação de princípios do máximo para o Laplaciano ponderado Δ_φ. Por exemplo, M. P. Cavalcante, M. S. Santos e H. F. de Lima [30], assumindo uma desigualdade entre a curvatura média ponderada H_φ da hipersuperfície e a dos slices $\{t_0\} \times M^n$, além da condição de $\varphi-$integrabilidade de $|\nabla h|$, mostraram que a hipersuperfície deve ser um slice de $-I \times_f M^n_\varphi$.

Em nosso caso, definimos uma extensão da TCC, dessa vez impondo uma condição no tensor de Bakry-Émery-Ricci: dizemos que $-I \times_f M^n_\varphi$ obedece à φ-TCC quando

$$\mathrm{Ric}^M_\varphi \geqslant (n-1)\left(f^2(\log f)''\right)\langle\ ,\ \rangle_M \quad \text{e} \quad f'' \leqslant 0.$$

Utilizando também a condição de $\varphi-$integrabilidade de $|\nabla h|$, provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.3 (*Teorema 3.7*). *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC. Suponha que* Σ^n *é uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média ponderada constante* H_φ*, contida em uma região limitada tipo-tempo* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}^{n+1}$ *tal que* $f'' < 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$*. Assuma que o ângulo hiperbólico* θ *e o operador forma* A *de* Σ^n *são limitados,* $f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$ *e* $f'(h)\mathrm{Hess}\, h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h*. Se* $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma)$*, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$*.*

Albujer e coautores [4, Teorema 1] provaram um critério de $\varphi-$parabolicidade para hipersuperfícies completas tipo-espaço imersas em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso e o aplicaram para obter resultados de unicidade para hipersuperfícies tipo-espaço nestes ambientes. Aplicando este mesmo critério de $\varphi-$parabolicidade obtivemos o seguinte resultado.

Teorema 1.4 (*Teorema 3.13*). *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC cuja fibra* M^n *é completa com recobrimento Riemanniano universal* φ*-parabólico. Suponha que* Σ^n *é uma hipersuperfície tipo-espaço completa de* $\overline{M}^{n+1}$ *com curvatura média ponderada* H_φ *constante, cujo ângulo hiperbólico* θ *é limitado,* $f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$ *e* $f'(h)\mathrm{Hess}\, h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h*. Se*

$$0 < \inf_{\Sigma^n} f(h) \leqslant \sup_{\Sigma^n} f(h) < \infty,$$

então Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$*.*

Além disso, Albujer e coautores [3] obtiveram condições suficientes para inferir que uma hipersuperfície tipo-espaço, sob restrições na função altura e curvatura média ponderada, imersa em $-I \times_f M^n_\varphi$, cuja fibra M^n obedece à condição

$$K_M \geqslant \sup_I (f^2(\log f)'') \tag{1.2}$$

sobre sua curvatura seccional, é um slice no espaço ambiente. Quando $-I \times_f M^n_\varphi$ cumpre (1.2), dizemos que ele obedece à SNCC (do inglês *strong null convergence condition*). Eles também provaram um critério para garantir que o tensor de Bakry-Émery-Ricci de uma hipersuperfície imersa em $-I \times_f M^n_\varphi$ é limitado inferiormente. Usaremos este critério na Subseção 3.2.4 para provar o seguinte corolário.

Corolário 1.5 (*Corolário 3.18*)**.** *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à SNCC cuja função densidade* φ *é convexa em* M^n*. Suponha que* Σ^n *é uma hipersuperfície tipo-espaço completa de* $\overline{M}$ *contida em uma região limitada tipo-tempo* $\mathcal{V} \subset \overline{M}$ *tal que* $f'' < 0$ *em* $\mathcal{V}$*, com curvatura média ponderada constante* H_φ *satisfazendo* $f'(h)\left(H - \frac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$*, com* $f'(h)\mathrm{Hess}\,h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h*, e cujo ângulo hiperbólico* θ *é limitado. Então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$*.*

Uma outra hipótese possível é a de que o ângulo hiperbólico converge para zero no infinito. Como aplicação do Teorema 1.2, provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.6 (*Teorema 3.9*)**.** *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC. Suponha que* Σ^n *é uma hipersuperfície tipo-espaço completa e não-compacta de* $\overline{M}^{n+1}$ *com curvatura média ponderada constante* H_φ*. Assuma que* $f''(h) < 0$ *e* $f'(h)\left(H - \frac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$ *em* Σ^n*. Se o ângulo hiperbólico* θ *converge para zero no infinito, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}$*.*

Mais recentemente, C. P. Aquino, H. I. Baltazar e H. F. de Lima [15] estudaram hipersuperfícies completas tipo-espaço imersas em um *produto simples lorentziano com densidade* $-\mathbb{R} \times M^n_\varphi$, cuja fibra Riemanniana M^n é compacta e tem o tensor de Bakry-Émery-Ricci, Ric_φ, positivo. Supondo que a curvatura média ponderada é constante e assumindo restrições em $|\nabla h|$, eles mostraram que uma hipersuperfície deve ser um slice em tal espaço ambiente. Para isso, eles primeiro obtiveram uma extensão para o Laplaciano ponderado de um princípio do máximo de Akutagawa [1]. Utilizamos essa extensão para mostrar o seguinte resultado.

Teorema 1.7 (*Teorema 3.21*)**.** *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-Tempo GRW espacialmente denso obedecendo à STCC com* φ *convexa em* M^n*. Seja* Σ^n *uma hipersuperfície tipo-espaço completa contida em uma região limitada tipo-tempo* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ *onde* $f'' < 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$*, com curvatura média ponderada constante* H_φ *tal que* $f'(h)\left(H - \frac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$*,* $f'(h)\mathrm{Hess}\,h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h *e cujo ângulo hiperbólico* θ *e operador forma* A *são limitados. Se* $|\overline{\nabla}\varphi|$ *é limitado em* Σ^n*, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$*.*

No enunciado acima, dizer que $\overline{M}^{n+1}$ obedece à STCC (do inglês *strong timelike convergence condition*) significa que $f'' \leqslant 0$ e a curvatura seccional da sua fibra M^n cumpre (1.2).

Na Seção 3.3, vamos aplicar os teoremas obtidos para provar resultados do tipo Calabi-Bernstein para gráficos tipo-espaço imersos em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso. Uma vantagem de se considerar o caso especial de gráficos inteiros tipo-espaço é que algumas hipóteses dos teoremas são *automaticamente cumpridas*, como a limitação do ângulo hiperbólico e também do operador forma (quando a norma C^2 da função é finita). Por exemplo, a versão não-paramétrica do Teorema 1.3 já citado se enuncia da seguinte forma:

Teorema 1.8 (*Teorema 3.24*). *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC cuja fibra* M^n *é completa.*

(a) *As únicas soluções inteiras de* (**E**) *com norma* C^2 *finita, satisfazendo* (3.38)*, e tais que* $f''(u) < 0$, $f'(u)(\mathrm{Hess}^M u) \leqslant 0$ *na direção de* Du, *e* $|Du|_M \in \mathcal{L}^1_\varphi(M)$, *são as funções constantes* $u = u_0$, *com* $f'(u_0) = 0$.

(b) *Não existe solução inteira* u *de* (**E**)*, com norma* C^2 *finita, satisfazendo* (3.38)*, tal que* $f'(u) \neq 0$, $f'(u)(\mathrm{Hess}^M u) \leqslant 0$ *na direção de* Du *e* $|Du|_M \in \mathcal{L}^1_\varphi(M)$.

No enunciado acima, **(E)** representa a equação dos gráficos tipo-espaço com curvatura média ponderada constante e (3.38) é uma condição sobre a curvatura média $H(u)$ do gráfico da função $u : M^n \to \mathbb{R}$, os quais podem ser encontrados na Seção 3.3.

No capítulo 4, ao invés da curvatura média ponderada constante, supusemos que Σ^n é um *sóliton do fluxo da curvatura média ponderada relativo ao campo* $\mathcal{K} = f(t)\partial_t$ *e com constante sóliton* $c \in \mathbb{R}$ imerso em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso $-I \times_f M^n_\varphi$, que em nosso contexto significa que a curvatura média ponderada H_φ cumpre a relação $H_\varphi = cf(h)\langle N, \partial_t\rangle$.

Lembremos que dada uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \looparrowright -\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ no espaço de Lorentz-Minkowski $(m+1)-$dimensional, o **fluxo da curvatura média tipo-espaço** associado a ψ é uma família a 1-parâmetro de imersões suaves tipo-espaço $\Psi_t = \Psi(t, \cdot) : \Sigma^n \looparrowright -\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ com correspondentes imagens $\Sigma^n_t = \Psi_t(\Sigma^n)$ satisfazendo a seguinte equação de evolução

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial t}(t,p) = \vec{H}(t,p) \\ \\ \Psi(0,p) = \psi(p) \end{cases} \tag{1.3}$$

em algum intervalo de tempo, onde $\vec{H}(t,p)$ denota o *vetor curvatura média* da subvariedade tipo-espaço Σ_t^n imersa em $-\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$. Nesse contexto, uma importante classe de soluções é dada pelas *subvariedades self-shrinkers tipo-espaço* de $-\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, isto é, imersões tipo-espaço $x:\Sigma^n \looparrowright -\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ que satisfazem o sistema

$$\vec{H}=-x^{\perp},$$

onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média e $x^{\perp}$ denota a parte normal de x. Além disso, quando

$$\vec{H}=-\nu^{\perp},$$

x é chamada de *sóliton translacional tipo-espaço*, onde $\nu\in-\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ é um vetor fixado.

Recentemente, em [12], Alías, de Lira e Rigoli introduziram a definição geral ([12, Definição 2.1]) de fluxo da curvatura média auto-similar em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ munida de um campo de vetores conforme X e estabeleceram a correspondente noção de sóliton do fluxo da curvatura média. No caso em que $\overline{M}^{n+1}$ é um produto warped Riemanniano do tipo $I\times_f M^n$, o campo $\mathcal{K}=f(t)\partial_t$ é conforme (veja o Lema 2.10 na Seção 2.3), e eles aplicaram princípios do máximo para garantir que um sóliton do fluxo da curvatura média completo com dimensão n é um slice de $I\times_f M^n$.

Vários autores também obtiveram resultados neste contexto de sólitons. Por exemplo, quando o ambiente é um produto Lorentziano, H. F. de Lima e M. Batista [23] provaram resultados de não-existência para sólitons translacionais (que, em nosso contexto, são hipersuperfícies Σ^n em que a curvatura média satisfaz a relação $H=c\langle N,\partial_t\rangle$) sob restrições na curvatura da fibra Riemanniana do espaço ambiente. Outros resultados sobre sólitons do fluxo da curvatura média podem ser encontrados nos recentes trabalhos [21], [34] e [39], onde o espaço ambiente é um Espaço-tempo GRW. Em [21], são dados vários exemplos de Espaço-tempo GRW que admitem slices que são sólitons do fluxo da curvatura média relativos à $\mathcal{K}=f(t)\partial_t$.

Aqui, provamos resultados de existência e unicidade para sólitons do fluxo da curvatura média ponderada em $-I\times_f M^n_\varphi$, utilizando para isso uma condição no tensor de Bakry-Émery-Ricci da fibra Riemanniana M^n, que chamamos de φ-NCC. Ela é uma extensão da NCC usual. Aplicaremos novamente o Teorema 1.1 para provar resultados semelhantes aos do Capítulo 3, mas no caso de sólitons. Mencionamos, por exemplo, o Teorema abaixo, o qual é análogo ao Teorema 1.2 visto acima.

Teorema 1.9 (*Teorema 4.1*)**.** *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso. Suponha que* $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *é um sóliton tipo-espaço do fluxo da curvatura média ponderada relativo à* $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ *com constante sóliton* c*. Assuma que o ângulo hiperbólico* θ *entre* Σ^n *e* ∂_t *atinge um máximo local em um ponto* $p_0 \in \Sigma^n$*, e, em* p_0*, temos* $cA_{p_0} \geqslant 0$ *e* $f'(h(p_0))\left(H(p_0) - \dfrac{H_\varphi(p_0)}{2}\right) \leqslant 0$*. Se ou*

(a) $f''(h(p_0)) < 0$ *e* $\mathrm{Ric}^M_\varphi \geqslant (n-1)(f^2(\log f)'')\langle,\rangle_M$ *em* $x(p_0)$*, ou*

(b) $f''(h(p_0)) \leqslant 0$ *e* $\mathrm{Ric}^M_\varphi > 0$ *em* $x(p_0)$*,*

então existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ *de* p_0 *em* Σ^n *que está contida em um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$.

Na Seção 4.3, aplicaremos os resultados obtidos para estudar gráficos inteiros que são sólitons do fluxo da curvatura média ponderada e a equação diferencial parcial correspondente a eles.

No Capítulo 5, estudamos os sólitons translacionais em produtos warped Riemannianos. Em [22, Proposição 3.5], H. F. de Lima e M. Batista provaram que princípio do máximo de Omori-Yau se cumpre para o $(-ch)$−Laplaciano de uma hipersuperfície Σ^n imersa em um produto Riemanniano $\mathbb{R} \times M^n$, cuja curvatura seccional de M^n satisfaz $K_M \geqslant 0$, e o operador forma de Σ^n é limitado superiormente por uma função radial $\Lambda(r)$ dentro de uma certa classe de funções reais positivas $\mathcal{H}$ (veja sua definição na Seção 5.2), onde $r(x)$ denota a distância Riemanniana a um ponto fixado $o \in \Sigma^n$. Na Proposição 1.10 abaixo mostramos que um resultado análogo vale em produtos warped $I \times_f M^n$.

Proposição 1.10 (*Proposição 5.8*)**.** *Seja* Σ^n *uma hipersuperfície completa two-sided imersa em um slab de um produto warped* $I \times_f M^n$*, tal que a curvatura seccional na fibra* M^n *satisfaz a seguinte condição de convergência*

$$K_M \geqslant \sup_I \left((f')^2 - ff''\right). \tag{1.4}$$

Se a norma do operador forma A *de* Σ^n *é limitada superiormente por uma função radial* $\Lambda(r)$*, para alguma* $\Lambda \in \mathcal{H}$*, então o Laplaciano ponderado* Δ_{-ch} *cumpre o Princípio do Máximo de Omori-Yau para todo* $c \neq 0$.

Usando a Proposição acima, mostramos o seguinte teorema de não-existência. Ele pode ser visto, assim como a Proposição 1.10, como um resultado para produtos warped de [22, Teorema 4.2].

Teorema 1.11 (*Teorema 5.9*)**.** *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ *(*$n \geqslant 3$*) um produto warped Riemanniano tal que a curvatura seccional da fibra* M^n *satisfaz a condição de convergência*

$$K_M \geqslant \sup_I \left((f')^2 - ff''\right) \quad \text{e} \quad f'' \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Nestas condições, não existe sóliton translacional com respeito a ∂_t *e constante sóliton* $c \neq 0$ *contido em um slab* $[t_1, t_2] \times M$ *de* $\overline{M}^{n+1}$, *com função-ângulo* $\Theta \geqslant 1/2$, *satisfazendo* $cf'(h) \geqslant 0$ *e cujo operador forma é limitado superiormente por uma função radial* $\Lambda(r)$, *para* $\Lambda \in \mathcal{H}$.

Existem vários espaços-ambiente particulares onde a condição (1.5) sobre a curvatura da fibra M^n é automaticamente satisfeita. Mencionamos aqui o seguinte corolário, que se aplica para o caso em que o ambiente é um espaço pseudo-hiperbólicos (isto é, a função warping é da forma $f(t) = e^t$) com curvatura seccional não-negativa.

Corolário 1.12 (*Corolário 5.12*)**.** *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_{e^t} M^n$ *(*$n \geqslant 3$*) um espaço pseudo-hiperbólico cuja fibra* M^n *é completa e tem curvatura seccional não-negativa. Não existe sóliton translacional com respeito a* ∂_t *e constante sóliton* $c > 0$, *contido em um slab* $[t_1, t_2] \times M^n$, *com função-ângulo* $\Theta \geqslant 1/2$ *e a norma do seu operador forma é limitada superiormente por uma função radial* $\Lambda(r)$, *for* $\Lambda \in \mathcal{H}$.

Em seguida, passamos a considerar a seguinte condição de convergência no tensor de Ricci da fibra M^n :

$$\mathrm{Ric}^M \geqslant (n-1) \sup_I \left((f')^2 - ff''\right) \quad \text{e} \quad f'' \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Utilizando um argumento de $\varphi-$parabolicidade para o caso Riemanniano provado em [40, Proposição 1], provamos o seguinte.

Teorema 1.13 (*Teorema 5.16*)**.** *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ *(*$n \geqslant 3$*) um produto warped cuja base* M^n *é completa com recobrimento Riemanniano universal* $(-c\pi_{\mathbb{R}})$*-parabólico e satisfaz a condição de convergência* (1.6). *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *um sóliton translacional* *completo com respeito a* ∂_t *e constante sóliton* $c \in \mathbb{R}$ *tal que sua função ângulo* $\Theta \geqslant 1/2$. *Assuma que* $cf'(h) \geqslant 0$. *Se a restrição* $f(h)$ *em* Σ *da função warping* f *de* $\overline{M}^{n+1}$ *satisfaz* $0 < \inf_{\Sigma^n} f(h) \leqslant \sup_{\Sigma^n} f(h) < +\infty$, *então* Σ^n *é totalmente geodésica com função warping constante em* Σ^n. *Em adição, se a desigualdade sobre* Ric^M *em* (1.6) *é estrita, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico.*

Em seguida obtivemos um novo resultado de unicidade impondo uma condição de integrabilidade na norma do gradiente da função ângulo Θ.

Teorema 1.14 (*Teorema 5.18*). *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ *(*$n \geqslant 3$*) um produto warped cuja base* M^n *satisfaz a condição de convergência* (1.6). *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *um sóliton translacional completo com respeito a* ∂_t *e constante sóliton* $c \in \mathbb{R}$ *tal que sua função ângulo* $\Theta \geqslant 1/2$. *Assuma que* $cf'(h) \geqslant 0$. *Se* $|\nabla\Theta| \in \mathcal{L}^1_{-ch}(\Sigma^n)$, *então* Σ^n *é totalmente geodésico com função warping constante. Em adição, se a desigualdade sobre o* Ric^M *em* (1.6) *é estrita, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico.*

Os dois Teoremas 1.13 e 1.14 acima podem ser vistos como uma versão para sólitons translacionais de Zhu e Zhang [56, Teorema 4], onde os autores estudaram o caso em que a hipersuperfície imersa em $I \times_f M^n$ é parabólica e tem curvatura média constante.

Para cada um dos três Teoremas 1.11, 1.13, 1.14 estabelecemos também uma versão para gráficos inteiros de uma função $u : M^n \to \mathbb{R}$. Mencionamos aqui a versão não-paramétrica do Teorema 1.11, onde no enunciado abaixo (5.39) refere-se à equação diferencial associada aos gráficos translacionais inteiros de $\overline{M}^{n+1}$ e pode ser encontrada na Seção 5.4.

Teorema 1.15 (*Teorema 5.19*). *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ *(*$n \geqslant 3$*) um produto warped cuja fibra* M^n *é completa e sua curvatura seccional obedece à condição de convergência* (1.5). *Suponha em adição que* $c \neq 0$. *Não existe solução inteira* $u \in C^\infty(M)$ *da equação* (5.39), *com norma* C^2 *finita e tal que* $cf'(u) \geqslant 0$ *e* $|Du|_M \leqslant \sqrt{3}f(u)$.

Capítulo 2

Noções Preliminares

No presente capítulo, discutiremos algumas definições e resultados básicos que serão utilizados no enunciado e demonstração dos Teoremas principais nos capítulos seguintes. Também estabeleceremos as notações utilizadas em todo o texto.

2.1 Produtos Warped

Nesta seção, abordaremos os conhecimentos sobre Produtos Warped que serão necessários para os cálculos no restante do texto. Para mais informações sobre este assunto, o leitor pode consultar [47, Capítulo 7].

Sejam $(M_1, \langle , \rangle_1)$ e $(M_2, \langle , \rangle_2)$ variedades Riemannianas (ou Semi-Riemannianas). A estrutura de variedade produto em $M_1 \times M_2$ faz com que as projeções canônicas $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ sejam funções suaves. A métrica usual em $M_1 \times M_2$ é (veja [47, Lema 3.5]) dada por

$$\langle , \rangle = \pi_1^*(\langle , \rangle_1) + \pi_2^*(\langle , \rangle_2).$$

Vamos definir uma nova métrica, que será utilizada ao longo deste texto. Sejam $(M_1, \langle , \rangle_1)$ e $(M_2, \langle , \rangle_2)$ variedades Riemannianas e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave positiva em M_1. Na variedade produto $M_1 \times M_2$, definimos a métrica **warped** por

$$\langle , \rangle = \pi_1^*(\langle , \rangle_1) + (f \circ \pi_1)^2 \pi_2^*(\langle , \rangle_2). \tag{2.1}$$

Explicitamente, como $T_{(p,q)} M_1 \times M_2 \cong T_p M_1 \oplus T_q M_2$, dados $u = u_1 + u_2$ e $v = v_1 + v_2$

em $T_{(p,q)}M_1 \times M_2$, (2.1) se escreve assim:

$$\langle u, v\rangle = \langle u_1, v_1\rangle_1 + f(p)^2\langle u_2, v_2\rangle_2. \tag{2.2}$$

Para provar que (2.1) define de fato uma métrica (semi-)Riemanniana em $M_1 \times M_2$, basta fazer os seguintes cálculos:

(1) Como $\langle , \rangle_1$ e $\langle , \rangle_2$ são bilineares,

$$\begin{aligned} \langle \lambda u + w, v\rangle &= \langle \lambda u_1 + w_1, v_1\rangle_1 + f(p)^2\langle \lambda u_2 + w_2, v_2\rangle_2 \\ &= \lambda\langle u_1, v_1\rangle_1 + \langle w_1, v_1\rangle_1 + f(p)^2\lambda\langle u_2, v_2\rangle + f(p)^2\langle w_2, v_2\rangle_2 \\ &= \lambda\langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle. \end{aligned}$$

(2) Como $\langle , \rangle_1$ e $\langle , \rangle_2$ são simétricos, temos

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \langle u_1, v_1\rangle_1 + f(p)^2\langle u_2, v_2\rangle_2 \\ &= \langle v_1, u_1\rangle_1 + f(p)^2\langle v_2, u_2\rangle_2 \\ &= \langle v, u\rangle. \end{aligned}$$

(3) Finalmente, no caso em que $\langle , \rangle_1$ e $\langle , \rangle_2$ são métricas Riemannianas (ou seja, cumprem a propriedade de positividade), temos

$$\langle u, u\rangle = \langle u_1, u_1\rangle_1 + f(p)^2\langle u_2, u_2\rangle_2 \geqslant 0$$

e $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0$ e $u_2 = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Escreveremos $\overline{M} = M_1 \times_f M_2$ para representar a variedade produto $M_1 \times M_2$ com a métrica (2.1) e diremos nesse caso que $M_1 \times_f M_2$ é o **produto warped de** M_1 **por** M_2 com **função warping** f. A variedade M_1 é chamada de **base** e M_2 de **fibra** do produto warped $M_1 \times_f M_2$.

As subvariedades $M_1 \times \{q\}$ são chamadas de **folhas** e $\{p\} \times M_2$ são as **fibras** (ou, como veremos nos capítulos seguintes, os **slices**). Valem os seguintes fatos, cuja prova segue imediatamente da definição:

(a) Para cada $q \in M_2$, $\pi_1|_{M_1 \times \{q\}}$ é uma isometria sobre M_1.

(b) Para cada $p \in M_1$, $\pi_2|_{\{p\}\times M_2}$ é uma homotetia positiva sobre M_2, isto é, a métrica de $\{p\} \times M_2$ é $f(p)^2\langle , \rangle_2$, com fator de escala $\dfrac{1}{f(p)}$.

(c) Para cada $(p, q) \in M_1 \times M_2$, a folha $M_1 \times \{q\}$ e o slice $\{p\} \times M_2$ são ortogonais em (p, q).

Chamamos os vetores tangentes às folhas de **horizontais** e os tangentes às fibras de **verticais**.

No Capítulo 5, página 90, estão apresentados alguns exemplos de produtos warped Riemannianos.

Estamos especialmente interessados em calcular a conexão de Levi-Civita ∇ e o tensor de curvatura R de um produto warped $M_1 \times_f M_2$ a partir do conhecimento das conexões ∇^1 e ∇^2 de M_1 e M_2, respectivamente.

Primeiramente, calcularemos a conexão ∇ de $\overline{M}$. Lembremos da fórmula elementar

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X, Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\{&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &+ \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Usaremos a decomposição $X = X_1 + X_2$ de um vetor $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ como soma de vetores tangentes a M_1 e a M_2, respectivamente. Nas proposições e corolários abaixo, deve-se ter em mente esta decomposição.

Veja então que

$$\begin{aligned}X\langle Y, Z\rangle &= (X_1 + X_2)\left(\langle Y_1, Z_1\rangle_1 + f^2\langle Y_2, Z_2\rangle_2\right) \\ &= X_1\langle Y_1, Z_1\rangle_1 + X_1[f^2]\langle Y_2, Z_2\rangle_2 + f^2 X_2\langle Y_2, Z_2\rangle_2, \qquad (2.4)\end{aligned}$$

onde $X_1[f^2]$ denota a derivada de f^2 na direção de X_1 (observe que f não depende da segunda coordenada). Além disso, pelas propriedades do colchete de Lie,

$$\langle [X, Z], Y\rangle = \langle [X_1, Z_1], Y_1\rangle_1 + f^2\langle [X_2, Z_2], Y_2\rangle_2. \qquad (2.5)$$

Logo, aplicando fórmulas análogas a (2.4) e a (2.5) para $Y\langle X, Z\rangle$, $Z\langle X, Y\rangle$, $\langle [Y, Z], X\rangle$ e

$\langle [X,Y], Z\rangle$ e substituindo em (2.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= \langle \nabla^1_{X_1} Y_1, Z_1\rangle_1 + f^2 \langle \nabla^2_{X_2} Y_2 Z_2\rangle_2 \\
&\quad + f\left\{ \langle X_1, \nabla^1 f\rangle_1 \langle Y_2, Z_2\rangle_2 + \langle Y_1, \nabla^1 f\rangle_1 \langle X_2, Z_2\rangle_2 - \langle Z_1, \nabla^1 f\rangle_1 \langle X_2, Y_2\rangle_2 \right\}. \\
&= \langle \nabla^1_{X_1} Y_1 - f\langle X_2, Y_2\rangle_2 \nabla^1 f, Z_1\rangle_1 \\
&\quad + f^2 \left\langle \nabla^2_{X_2} Y_2 + \frac{\langle X_1, \nabla^1 f\rangle_1 Y_2 + \langle Y_1, \nabla^1 f\rangle_1 X_2}{f}, Z_2 \right\rangle_2 .
\end{aligned}$$

Portanto, como Z é arbitrário, podemos concluir da expressão acima que

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla^1_{X_1} Y_1 - f\langle X_2, Y_2\rangle_2 \nabla^1 f \\
&\quad + \nabla^2_{X_2} Y_2 + \frac{\langle X_1, \nabla^1 f\rangle}{f} Y_2 + \frac{\langle Y_1, \nabla^1 f\rangle}{f} X_2.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

A fórmula (2.6) pode ser sumarizada na seguinte proposição, que será enunciada aqui para referências posteriores.

Proposição 2.1. *Sejam* $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$, $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$. *Sejam* $\nabla, \nabla^1, \nabla^2$ *respectivamente as conexões de Levi-Civita de* $M_1 \times_f M_2$, M_1 *e* M_2. *Então:*

(a) $\nabla_{X_1} Y_1 = \nabla^1_{X_1} Y_1$.

(b) $\nabla_{X_1} X_2 = \nabla_{X_2} X_1 = \dfrac{X_1[f]}{f} \nabla f$.

(c) $\nabla_{X_2} Y_2 = \nabla^2_{X_2} Y_2 - f\langle X_2, Y_2\rangle_2 \nabla^1 f$.

Uma consequência imediata é a seguinte proposição.

Proposição 2.2. *No produto warped* $M_1 \times_f M_2$, *as folhas* $M_1 \times \{q\}$ *são totalmente geodésicas e os slices* $\{p\} \times M_2$ *são totalmente umbílicos.*

Demonstração. A segunda forma fundamental de $M_1 \times \{q\}$ é dada por

$$\mathrm{II}_{M_1 \times \{q\}}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla^1_X Y = 0,$$

pelo item (a) da Proposição 2.1. (A segunda forma fundamental não depende das extensões locais de X, Y a $M_1 \times_f M_2$. Então considere extensões constantes ao longo dos slices.) Para provar a segunda afirmação, veja que

$$\mathrm{II}_{\{p\} \times M_2}(X_2, Y_2) = \nabla_{X_2} Y_2 - \nabla^2_{X_2} Y_2 = -f(p)\langle X_2, Y_2\rangle_2 (\nabla^1 f)(p),$$

logo $II_{\{p\}\times M_2}$ é um múltiplo da métrica (p é fixo). $\square$

Vamos agora calcular o tensor de curvatura R de $M_1 \times_f M_2$ em função dos tensores R^1 e R^2 de M_1 e M_2, respectivamente. Em *todo este texto*, assim como em [47], adotaremos a seguinte convenção para o tensor de curvatura de uma variedade Riemanniana Σ :

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z \;=\; \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$

onde $[\,,]$ denota o colchete de Lie e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Proposição 2.3. *Sejam* $X_1, Y_1, Z_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ *e* $X_2, Y_2, Z_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$. *Sejam* $\nabla, \nabla^1, \nabla^2$ *e* R, R^1 *e* R^2 *respectivamente as conexões de Levi-Civita e o tensor de curvatura de* $M_1 \times_f M_2$, M_1 *e* M_2. *Então:*

(a) $R(X_1, Y_1)Z_1 = R^1(X_1, Y_1)Z_1$.

(b) $R(X_1, Y_1)Z_2 = 0$.

(c) $R(X_1, Y_2)Z_1 = -\dfrac{(\mathrm{Hess}^1 f)(X_1, Z_1)}{f} Y_2$.

(d) $R(X_1, Y_2)Z_2 = f\langle Y_2, Z_2\rangle_2 \nabla^1_{X_1}\nabla^1 f = \dfrac{\langle Y_2, Z_2\rangle}{f}\nabla^1_{X_1}\nabla^1 f$.

(e) $R(X_2, Y_2)Z_1 = 0$.

(f) $R(X_2, Y_2)Z_2 = R^2(X_2, Y_2)Z_2 - \langle \nabla^1 f, \nabla^1 f\rangle_1 \{\langle X_2, Z_2\rangle_2 Y_2 - \langle Y_2, Z_2\rangle_2 X_2\}$,

onde $\mathrm{Hess}^1 f$ *denota o Hessiano de* f *na métrica* $\langle , \rangle_1$.

Demonstração. Faremos os cálculos diretamente usando a Proposição 2.1.

(a) Temos

$$\begin{aligned} R(X_1, Y_1)Z_1 &= \nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z_1 - \nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z_1 + \nabla_{[X_1,Y_1]}Z_1 \\ &= \nabla^1_{Y_1}\nabla^1_{X_1}Z_1 - \nabla^1_{X_1}\nabla^1_{Y_1}Z_1 + \nabla^1_{[X_1,Y_1]}Z_1 \\ &= R^1(X_1, Y_1)Z_1. \end{aligned}$$

(b) Temos

$$
\begin{aligned}
\mathsf{R}(\mathsf{X}_1,\mathsf{Y}_1)\mathsf{Z}_2 &= \nabla_{\mathsf{Y}_1}\nabla_{\mathsf{X}_1}\mathsf{Z}_2 - \nabla_{\mathsf{X}_1}\nabla_{\mathsf{Y}_1}\mathsf{Z}_2 + \nabla_{[\mathsf{X}_1,\mathsf{Y}_1]}\mathsf{Z}_2\\
&= \nabla_{\mathsf{Y}_1}\left(\frac{\langle \mathsf{X}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\mathsf{Z}_2\right) - \nabla_{\mathsf{X}_1}\left(\frac{\langle \mathsf{Y}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\mathsf{Z}_2\right) + \frac{\langle [\mathsf{X}_1,\mathsf{Y}_1],\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\mathsf{Z}_2\\
&= \frac{\langle \mathsf{X}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\frac{\langle \mathsf{Y}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\mathsf{Z}_2 + \mathsf{Y}_1\left(\frac{\langle \mathsf{X}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\right)\mathsf{Z}_2\\
&\quad - \frac{\langle \mathsf{Y}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\frac{\langle \mathsf{X}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\mathsf{Z}_2 - \mathsf{X}_1\left(\frac{\langle \mathsf{Y}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\right)\mathsf{Z}_2\\
&\quad + \frac{\langle \nabla^1_{\mathsf{X}_1}\mathsf{Y}_1 - \nabla^1_{\mathsf{Y}_1}\mathsf{X}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\mathsf{Z}_2\\
&= \frac{\mathsf{f}\left(\langle \nabla^1_{\mathsf{Y}_1}\mathsf{X}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1 + \langle \mathsf{X}_1,\nabla^1_{\mathsf{Y}_1}\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1\right) - \langle \mathsf{Y}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1\langle \mathsf{X}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}^2}\mathsf{Z}_2\\
&\quad - \frac{\mathsf{f}\left(\langle \nabla^1_{\mathsf{X}_1}\mathsf{Y}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1 + \langle \mathsf{Y}_1,\nabla^1_{\mathsf{X}_1}\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1\right) - \langle \mathsf{X}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1\langle \mathsf{Y}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}^2}\mathsf{Z}_2\\
&\quad + \frac{\langle \nabla^1_{\mathsf{X}_1}\mathsf{Y}_1 - \nabla^1_{\mathsf{Y}_1}\mathsf{X}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\mathsf{Z}_2\\
&= \frac{(\mathrm{Hess}^1\,\mathsf{f})(\mathsf{X}_1,\mathsf{Y}_1)}{\mathsf{f}}\mathsf{Z}_2 - \frac{(\mathrm{Hess}^1\,\mathsf{f})(\mathsf{X}_1,\mathsf{Y}_1)}{\mathsf{f}}\mathsf{Z}_2 = 0.
\end{aligned}
$$

(c) Temos

$$
\begin{aligned}
\mathsf{R}(\mathsf{X}_1,\mathsf{Y}_2)\mathsf{Z}_1 &= \nabla_{\mathsf{Y}_2}\nabla_{\mathsf{X}_1}\mathsf{Z}_1 - \nabla_{\mathsf{X}_1}\nabla_{\mathsf{Y}_2}\mathsf{Z}_1 + \nabla_{[\mathsf{X}_1,\mathsf{Y}_2]}\mathsf{Z}_1\\
&= \nabla_{\mathsf{Y}_2}\nabla^1_{\mathsf{X}_1}\mathsf{Z}_1 - \nabla_{\mathsf{X}_1}\left(\frac{\langle \mathsf{Z}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\mathsf{Y}_2\right)\\
&= \frac{\langle \nabla^1_{\mathsf{X}_1}\mathsf{Z}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\mathsf{Y}_2 - \mathsf{X}_1\left(\frac{\langle \mathsf{Z}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\right)\mathsf{Y}_2 - \frac{\langle \mathsf{Z}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\frac{\langle \mathsf{X}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\mathsf{Y}_2.
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\mathsf{X}_1\left(\frac{\langle \mathsf{Z}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}}\right)\mathsf{Y}_2 &= \frac{\mathsf{f}\left(\langle \nabla^1_{\mathsf{X}_1}\mathsf{Z}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1 + \langle \mathsf{Z}_1,\nabla^1\mathsf{X}_1\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1\right)}{\mathsf{f}^2}\mathsf{Y}_2\\
&\quad - \frac{\langle \mathsf{X}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1\langle \mathsf{Z}_1,\nabla^1\mathsf{f}\rangle_1}{\mathsf{f}^2}\mathsf{Y}_2,
\end{aligned}
$$

logo, efetuando os cancelamentos, obtemos

$$
\mathsf{R}(\mathsf{X}_1,\mathsf{Y}_2)\mathsf{Z}_1 = -\frac{(\mathrm{Hess}^1\,\mathsf{f})(\mathsf{X}_1,\mathsf{Z}_1)}{\mathsf{f}}\mathsf{Y}_2.
$$

(d) Temos

$$
\begin{aligned}
R(X_1,Y_2)Z_2 &= \nabla_{Y_2}\nabla_{X_1}Z_2 - \nabla_{X_1}\nabla_{Y_2}Z_2 + \nabla_{[X_1,Y_2]}Z_2\\
&= \nabla_{Y_2}\left(\frac{\langle X_1,\nabla^1 f\rangle_1}{f}Z_2\right) - \nabla_{X_1}\left(\nabla^2_{Y_2}Z_2 - f\langle Y_2,Z_2\rangle_2\nabla^1 f\right)\\
&= \frac{\langle X_1,\nabla^1 f\rangle_1}{f}\left(\nabla^2_{Y_2}Z_2 - f\langle Y_2,Z_2\rangle_2\nabla^1 f\right) + Y_2\left(\frac{\langle X_1,\nabla^1 f\rangle_1}{f}\right)Z_2\\
&\quad - \frac{\langle X_1,\nabla^1 f\rangle_1}{f}\nabla^2_{Y_2}Z_2 + \langle X_1,\nabla^1 f\rangle_1\langle Y_2,Z_2\rangle_2\nabla^1 f + f\langle Y_2,Z_2\rangle_2\nabla^1_{X_1}\nabla^1 f\\
&= f\langle Y_2,Z_2\rangle_2\nabla^1_{X_1}\nabla^1 f.
\end{aligned}
$$

(e) Temos

$$
\begin{aligned}
R(X_2,Y_2)Z_1 &= \nabla_{Y_2}\nabla_{X_2}Z_1 - \nabla_{X_2}\nabla_{Y_2}Z_1 + \nabla_{[X_2,Y_2]}Z_1\\
&= \nabla_{Y_2}\left(\frac{Z_1,\nabla^1 f\rangle_1}{f}X_2\right) - \nabla_{X_2}\left(\frac{\langle Z_1,\nabla^1 f\rangle_1}{f}Y_2\right) + \frac{\langle Z_1,\nabla^1 f\rangle_1}{f}[X_2,Y_2]\\
&= \frac{\langle Z_1,\nabla^1 f\rangle_1}{f}\left(\nabla^2_{Y_2}X_2 - f\langle Y_2,X_2\rangle_2\nabla^1 f\right) + Y_2\left(\frac{\langle Z_1,\nabla^1\rangle_1}{f}\right)X_2\\
&\quad - \frac{\langle Z_1,\nabla^1 f\rangle_1}{f}\left(\nabla^2_{X_2}Y_2 - f\langle X_2 Y_2\rangle_2\nabla^1 f\right) + X_2\left(\frac{\langle Z_1,\nabla^1 f\rangle_1}{f}\right)Y_2\\
&\quad + \frac{\langle Z_1,\nabla^1 f\rangle_1}{f}\left(\nabla^2_{X_2}Y_2 - \nabla^2_{Y_2}X_2\right) = 0.
\end{aligned}
$$

(f) Temos

$$
\begin{aligned}
R(X_2,Y_2)Z_2 &= \nabla_{Y_2}\nabla_{X_2}Z_2 - \nabla_{X_2}\nabla_{Y_2}Z_2 + \nabla_{[X_2,Y_2]}Z_2\\
&= \nabla_{Y_2}\left(\nabla^2_{X_2}Z_2 - f\langle X_2,Z_2\rangle_2\nabla^1 f\right) - \nabla_{X_2}\left(\nabla^2_{Y_2}Z_2 - f\langle Y_2,Z_2\rangle_2\nabla^1 f\right)\\
&\quad + \nabla^2_{[X_2,Y_2]}Z_2 - f\langle [X_2,Y_2],Z_2\rangle_2\nabla^1 f\\
&= R^2(X_2,Y_2)Z_2 - f\langle Y_2,\nabla^2_{X_2}Z_2\rangle_2\nabla^1 f + f\langle X_2,\nabla^2_{Y_2}Z_2\rangle_2\nabla^1 f\\
&\quad - f\langle X_2,Z_2\rangle_2\frac{\langle\nabla^1 f,\nabla^1 f\rangle_1}{f}Y_2 - f\left(\langle\nabla^2_{Y_2}X_2,Z_2\rangle_2 + \langle X_2,\nabla^2_{Y_2}Z_2\rangle_2\right)\nabla^1 f\\
&\quad + f\langle Y_2,Z_2\rangle_2\frac{\langle\nabla^1 f,\nabla^1 f\rangle_1}{f}X_2 + f\left(\langle\nabla^2_{X_2}Y_2,Z_2\rangle_2 + \langle Y_2,\nabla^2_{X_2}Z_2\rangle_2\right)\nabla^1 f\\
&\quad - f\langle\nabla^2_{X_2}Y_2 - \nabla^2_{Y_2}X_2,Z_2\rangle_2\nabla^1 f\\
&= R^2(X_2,Y_2)Z_2 - \langle\nabla^1 f,\nabla^1 f\rangle_1\left(\langle X_2,Z_2\rangle_2 Y_2 - \langle Y_2,Z_2\rangle_2 X_2\right)\\
&= R^2(X_2,Y_2)Z_2 - \frac{\langle\nabla^1 f,\nabla^1 f\rangle_1}{f^2}\left(\langle X_2,Z_2\rangle Y_2 - \langle Y_2,Z_2\rangle X_2\right),
\end{aligned}
$$

completando a demonstração. $\square$

Como consequência, valem as seguintes fórmulas para o tensor de Ricci.

Corolário 2.4. *Em um produto warped* $M_1 \times_f M_2$, *com* $\dim(M_2) = n > 1$, *sejam* $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ *e* $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$. *Sejam* $\mathrm{Ric}, \mathrm{Ric}^1$ *e* Ric^2, *respectivamente, os tensores de Ricci de* $M_1 \times_f M_2$, M_1 *e* M_2. *Então:*

(a) $\mathrm{Ric}(X_1, Y_1) = \mathrm{Ric}^1(X_1, Y_1) - \dfrac{n}{f}(\mathrm{Hess}^1 f)(X_1, Y_1)$.

(b) $\mathrm{Ric}(X_1, Y_2) = 0$.

(c) $\mathrm{Ric}(X_2, Y_2) = \mathrm{Ric}^2(X_2, Y_2) - \langle X_2, Y_2\rangle \left(\dfrac{\Delta^1 f}{f} + (n-1)\dfrac{\langle \nabla^1 f, \nabla^1 f\rangle}{f^2}\right)$,

onde $\Delta^1 f$ *denota o laplaciano de* f *em* M_1.

Demonstração. Sejam $m = \dim(M_1)$, $n = \dim(M_2)$ e $\{E_i\} \cup \{F_j\}$ um referencial ortonormal em um aberto de $M_1 \times_f M_2$ tal que $\{E_i\}$ é tangente a M_1 e $\{F_j\}$ é tangente a M_2.

Para o item **(a)**,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X_1, Y_2) &= \sum_{i=1}^{m} \langle R(X_1, E_i)Y_1, E_i\rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle R(X_1, F_j)Y_1, F_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle R^1(X_1, E_i)Y_1, E_i\rangle_1 - \frac{1}{f}\sum_{j=1}^{n} \Big\langle (\mathrm{Hess}^1 f)(X_1, Y_1)F_j, F_j\Big\rangle \\
&= \mathrm{Ric}^1(X_1, Y_1) - \frac{n}{f}(\mathrm{Hess}^1 f)(X_1, Y_1).
\end{aligned}$$

Para o item **(b)**,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X_1, Y_2) &= \sum_{i=1}^{m} \langle R(X_1, E_i)Y_2, E_i\rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle R(X_1, F_j)Y_2, F_j\rangle \\
&= 0 + \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\langle F_j, Y_2\rangle}{f} \nabla^1_{X_1} \nabla^1 f, F_j \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para o item **(c)**,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X_2, Y_2) &= \sum_{i=1}^{m} \langle R(X_2, E_i)Y_2, E_i\rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle R(X_2, F_j)Y_2, F_j\rangle \\
&= -\frac{\langle X_2, Y_2\rangle}{f} \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla^1_{E_i} \nabla^1 f, E_i\rangle \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \left\langle R^2(X_2, F_j)Y_2 - \frac{\langle \nabla^1 f, \nabla^1 f\rangle}{f^2} \{\langle F_j, Y_2\rangle X_2 - \langle X_2, Y_2\rangle F_j\}, F_j \right\rangle \\
&= -\frac{\langle X_2, Y_2\rangle}{f} \Delta^1 f + \mathrm{Ric}^2(X_2, Y_2) + (n-1)\langle X_2, Y_2\rangle \frac{\langle \nabla^1 f, \nabla^1 f\rangle}{f^2} \\
&= \mathrm{Ric}^2(X_2, Y_2) - \langle X_2, Y_2\rangle \left(\frac{\Delta^1 f}{f} + (n-1)\frac{\langle \nabla^1 f, \nabla^1 f\rangle}{f^2} \right),
\end{aligned}$$

como queríamos provar. □

2.2 O Caso Lorentziano

Nesta seção, vamos considerar as definições e resultados básicos que serão necessários para o entendimento e demonstração dos teoremas principais dos Capítulos 3 e 4, onde o espaço-ambiente dos Teoremas será uma classe particular de variedade Lorentziana. Aqui, vamos nos concentrar nos resultados que serão utilizados depois. Para informações básicas sobre variedades Lorentzianas, o leitor pode consultar o Capítulo 5 de O'Neill [47].

O ambiente nesta seção será a variedade produto de dimensão $(n+1)$ dada por $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e M^n é uma variedade Riemanniana conexa de dimensão $n \geqslant 2$. Adotaremos a seguinte métrica Lorentziana em $\overline{M}^{n+1}$:

$$\langle , \rangle = -\pi_I^*(dt^2) + f(\pi_I)^2 \pi_M^*(\langle , \rangle_M), \tag{2.7}$$

onde $f : I \to \mathbb{R}$ é um função suave positiva e as aplicações π_I e π_M denotam as projeções canônicas sobre I e M^n, respectivamente. Escreveremos $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ para denotar $I \times M^n$ com a métrica Lorentziana (2.7).

Veja que (2.7) significa que

$$\langle v, w\rangle_p = -\langle (\pi_I)_* v, (\pi_I)_* w\rangle + (f \circ \pi_I)(p)^2 \langle (\pi_M)_* v, (\pi_M)_* w\rangle,$$

para todo $p \in \overline{M}^{n+1}$ e todos $v, w \in T_p\overline{M}$.

Seguindo a terminologia introduzida em Alías, Romero e Sánchez [14], diremos que uma variedade produto $I \times M^n$ com a métrica (2.7) é um **Espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado**, cuja abreviação doravante será **Espaço-tempo GRW** (do inglês *generalized Robertson-Walker spacetimes*). No caso particular em que a fibra M^n tem curvatura seccional constante, $-I \times_f M^n$ é chamado de **Espaço-tempo de Robertson-Walker** (RW) (veja [47]).

Por (2.7), o campo de vetores

$$\partial_t = (\partial/\partial_t)_{(t,x)}\,, \quad (t,x) \in -I \times_f M^n,$$

definido como o campo tangente a componente $I \subset \mathbb{R}$, é um campo unitário e tipo-tempo, isto é, $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = -1$, definido globalmente em $-I \times_f M^n$. De acordo com [47, Lema 5.34], ∂_t é uma *orientação temporal* para $-I \times_f M^n$.

Não é difícil ver que

$$\overline{\nabla}\pi_I = -\langle \overline{\nabla}\pi_I, \partial_t \rangle \partial_t = -\partial_t. \tag{2.8}$$

Lembremos que uma imersão isométrica suave $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade Σ^n conexa com dimensão n é dita uma **hipersuperfície tipo-espaço** se a métrica induzida em Σ^n via imersão ψ é Riemanniana. Usaremos a mesma notação $\langle , \rangle$ para a métrica de Σ^n. Quando Σ^n é tipo-espaço, existe um campo de vetores unitário N, o qual é tipo-tempo e normal a Σ^n, tal que $\langle N, \partial_t \rangle < 0$. Isto significa, de acordo com [47, Proposição 5.29], que N e ∂_t estão no mesmo cone de luz em cada espaço tangente $T_p\Sigma^n$, $p \in \Sigma^n$. Na verdade, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores tipo-tempo (veja [47, Proposição 5.30]), vale

$$\langle N, \partial_t \rangle \leqslant -1 < 0 \quad \text{em} \quad \Sigma^n, \tag{2.9}$$

com $\langle N, \partial_t \rangle = -1$ se, e somente se, $N = \partial_t$. Nos referiremos a N como a **aplicação de Gauss futuro** da hipersuperfície tipo-espaço Σ^n.

Sejam $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ e Σ^n, respectivamente. As equações de Gauss e Weiengarten para a hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ são dadas por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N$$

e

$$AX = -\overline{\nabla}_X N,$$

para quaisquer campos de vetores tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde o tensor $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ é o **operador forma** de Σ^n com respeito à aplicação de Gauss-futuro N. A **curvatura média** (não normalizada) de Σ^n é definida por $H = -\mathrm{tr}(A)$, onde $\mathrm{tr}(A)$ denota o traço do operador forma de Σ^n com respeito a N.

Definiremos agora duas funções que serão muito importantes nos Capítulos 3 e 4: a **função altura** de Σ^n, definida por $h := (\pi_I)|_\Sigma$, e a **função ângulo hiperbólico** $\theta : \Sigma^n \to [0, \infty)$ caracterizada pela igualdade $\cosh\theta = -\langle N, \partial_t\rangle$. Veja que h é apenas a restrição de π_I a Σ^n, $h(t, y) = t$ e que, por (2.9), θ está bem definida.

Por (2.8), concluímos que o gradiente em Σ^n da função altura é dado por

$$\nabla h = (\overline{\nabla}\pi_I)^\top = -\partial_t^\top = -\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N, \tag{2.10}$$

onde $(\ )^\top$ denota a componente tangencial de um campo de vetores em $\mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ ao longo de Σ^n. Usando (2.10), é fácil ver que

$$|\nabla h|^2 = \cosh^2\theta - 1 = \operatorname{senh}^2\theta, \tag{2.11}$$

onde $|\ |$ denota a norma de um campo de vetores em Σ^n.

A fim de obter algumas fórmulas mais adiante, introduziremos agora o campo de vetores

$$\mathcal{K}(t, y) = f(t)\partial_t|_{(t,y)}, \quad (t, y) \in \overline{M}^{n+1}.$$

O campo $\mathcal{K}$ cumpre a seguinte propriedade.

Lema 2.5. *Para todo* $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, *vale* $\overline{\nabla}_V\mathcal{K} = f'(t)V$.

Demonstração. Fazendo a decomposição $V = V^* - \langle V, \partial_t\rangle\partial_t$, onde V^* é tangente a M^n, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_V \mathcal{K} &= \overline{\nabla}_{(V^* - \langle V, \partial_t \rangle \partial_t)} (f(t)\partial_t) \\
&= f(t)\overline{\nabla}_{V^*}\partial_t + V^*[f]\partial_t - \langle V, \partial_t \rangle \left[f(t)\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t + \partial_t[f]\partial_t \right] \\
&= f(t)\frac{f'(t)}{f(t)}V^* - \langle V, \partial_t \rangle f'(t)\partial_t \\
&= f'(t)V,
\end{aligned}$$

onde nos cálculos acima usamos a Proposição 2.1, a qual contém as fórmulas para calcular a conexão em produtos warped, além de $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$. □

Como consequência do Lema 2.5, temos

$$\overline{\nabla}_V \partial_t = \overline{\nabla}_V \left(\frac{1}{f(t)} \mathcal{K} \right) = -\frac{1}{f(t)^2} \langle V, \overline{\nabla} f \rangle \mathcal{K} + \frac{f'(t)}{f(t)} V, \tag{2.12}$$

para qualquer $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, onde $\overline{\nabla} f$ denota o gradiente em $\overline{M}$ de $\bar{f}(t, y) = f(t)$.

Um tipo especial de hipersuperfícies tipo-espaço de $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ são os **slices** $M^n_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$, onde $t_0 \in I$. É imediato que a aplicação de Gauss futuro de $M^n_{t_0}$ é $N = \partial_t$. Veja que o operador forma A_{t_0} de M_{t_0} é dado por

$$A_{t_0}(V) = -\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} V, \tag{2.13}$$

onde $V \in \mathfrak{X}(M_{t_0})$. De fato, basta observar que $\overline{\nabla f} = f'(t_0)\overline{\nabla}\pi_I = f'(t_0)\partial_t$ e aplicar a fórmula (2.12). Consequentemente, a curvatura média de M_{t_0} é

$$H_{t_0} = n \frac{f'(t_0)}{f(t_0)}.$$

Isso mostra que os slices $\{t_0\} \times M^n$ são **totalmente geodésicos** (isto é, $A \equiv 0$) se, e somente se, $f'(t_0) = 0$.

Voltando ao caso geral de uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, ao tomar as componentes tangenciais $\mathcal{K}^\top = \mathcal{K} + \langle \mathcal{K}, N \rangle N$ a Σ^n no Lema 2.5, obtemos, para todo

$Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$,

$$\begin{aligned}
f'(h)Y &= \overline{\nabla}_Y \mathcal{K} = \overline{\nabla}_Y(\mathcal{K}^\top - \langle \mathcal{K}, N\rangle N)\\
&= \overline{\nabla}_Y \mathcal{K}^\top - f(h)\langle \partial_t, N\rangle \overline{\nabla}_Y N - Y\langle \mathcal{K}, N\rangle N\\
&= \nabla_Y \mathcal{K}^\top - \langle AY, \mathcal{K}^\top\rangle N + f(h)\langle \partial_t, N\rangle AY - \langle \overline{\nabla}_Y \mathcal{K}, N\rangle N - \langle \mathcal{K}, \overline{\nabla}_Y N\rangle N\\
&= \nabla_Y \mathcal{K}^\top - \langle AY, \mathcal{K}^\top\rangle N + f(h)\langle \partial_t, N\rangle AY - \langle f'(h)Y, N\rangle N + \langle \mathcal{K}^\top, AY\rangle N\\
&= \nabla_Y \mathcal{K}^\top + f(h)\langle \partial_t, N\rangle AY, \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

onde na penúltima linha usamos o fato de A ser simétrico e Y ser tangente. Como aplicação de (2.14), provaremos as seguintes fórmulas.

Proposição 2.6. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em* $\overline{M}^{n+1}$. *Sendo* ∇ *a conexão Riemanniana de* Σ^n, *valem:*

(a) $\nabla\langle N, \partial_t\rangle = A(\nabla h) - \dfrac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle \nabla h;$

(b) $(\mathrm{Hess}\, h)(X, Y) = -\dfrac{f'(h)}{f(h)}\langle X, \nabla h\rangle\langle Y, \nabla h\rangle - \dfrac{f'(h)}{f(h)}\langle X, Y\rangle + \langle N, \partial_t\rangle\langle AX, Y\rangle,$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$.

(c) $\Delta h = -\dfrac{f'(h)}{f(h)}\{n + |\nabla h|^2\} - H\langle N, \partial_t\rangle.$

Demonstração. **(a)** Seja $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$. Pelo Lema 2.5, temos

$$\begin{aligned}
X\langle N, f(h)\partial_t\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X N, f(h)\partial_t\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X(f(h)\partial_t)\rangle\\
&= -\langle AX, f(h)\partial_t\rangle + \langle N, f'(h)X\rangle\\
&= -f(h)\langle AX, \partial_t^\top\rangle\\
&= -f(h)\langle X, A\partial_t^\top\rangle\\
&= f(h)\langle X, A(\nabla h)\rangle. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
X\langle N, f(h)\partial_t\rangle &= f(h)X\langle N, \partial_t\rangle + X(f\circ h)\langle N, \partial_t\rangle\\
&= f(h)X\langle N, \partial_t\rangle + f'(h)\langle \nabla h, X\rangle\langle N, \partial_t\rangle, \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

donde, por (2.15) e (2.16),

$$f(h)X\langle N, \partial_t\rangle = f(h)\langle X, A(\nabla h)\rangle - f'(h)\langle \nabla h, X\rangle\langle N, \partial_t\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\langle \nabla\langle N, \partial_t\rangle, X\rangle &= X\langle N, \partial_t\rangle \\ &= \left\langle A(\nabla h) - \frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle\nabla h, X\right\rangle\end{aligned}$$

provando assim o item (a).

(b) Observe inicialmente que, dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$,

$$\begin{aligned}\nabla_X\mathcal{K}^\top &= \nabla_X(f(h)\partial_t^\top) = X(f\circ h)\partial_t^\top + f(h)\nabla_X\partial_t^\top \\ &= X(f\circ h)\partial_t - f(h)\nabla_X\nabla h.\end{aligned}$$

Inserindo a igualdade acima em (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}f(h)\nabla_X\nabla h &= X(f\circ h)\partial_t^\top - \nabla_X\mathcal{K}^\top \\ &= X(f\circ h)\partial_t^\top - f'(h)X + f(h)\langle N, \partial_t\rangle AX.\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla_X\nabla h = -\frac{X(f\circ h)}{f(h)}\nabla h - \frac{f'(h)}{f(h)}X + \langle N, \partial_t\rangle AX. \tag{2.17}$$

Tomando o produto interno de (2.17) com um vetor $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, obtemos (b).

(c) É possível obter este item imediatamente tomando o traço na expressão de (b). Faremos então uma demonstração alternativa usando (2.14). Veja que

$$nf'(h) = \mathrm{tr}(Y \mapsto f'(h)Y) = \mathrm{tr}\big(Y \mapsto \nabla_Y\mathcal{K}^\top + f(h)\langle N, \partial_t\rangle AY\big),$$

donde obtemos a relação

$$\begin{aligned}nf'(h) &= \mathrm{div}_{\Sigma^n}(\mathcal{K}^\top) + f(h)\langle N, \partial_t\rangle\mathrm{tr}(A) \\ &= f(h)\mathrm{div}_{\Sigma^n}(\partial_t^\top) + \langle \nabla(f\circ h), \partial_t^\top\rangle + f(h)\langle N, \partial_t\rangle\mathrm{tr}(A).\end{aligned}$$

Isso mostra que

$$\begin{aligned}\Delta h &= \mathrm{div}_{\Sigma^n}(\nabla h)\\ &= -\mathrm{div}_{\Sigma^n}(\partial_t^\top)\\ &= -n\frac{f'(h)}{f(h)} + \frac{1}{f(h)}\langle \nabla(f\circ h), \partial_t^\top\rangle + \langle N, \partial_t\rangle \mathrm{tr}(A)\\ &= -n\frac{f'(h)}{f(h)} + \frac{1}{f(h)}\langle f'(h)\nabla h, \partial_t^\top\rangle + \langle N, \partial_t\rangle \mathrm{tr}(A)\\ &= -\frac{f'(h)}{f(h)}\left\{n + |\nabla h|^2\right\} - \langle N, \partial_t\rangle H,\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

As próximas duas proposições são fórmulas que serão úteis para o capítulo seguinte. Elas foram publicadas originalmente em Latorre e Romero [38, Seção 3].

Proposição 2.7. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em* $\overline{M}^{n+1}$. *Sendo* ∇ *a conexão Riemanniana de* Σ^n, *então a norma de Hilbert-Schmidt de* $\mathrm{Hess}\, h$ *é dada por*

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess}\, h|^2 = &\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}|\nabla h|^4 + 2\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}|\nabla h|^2 - 2\langle N, \partial_t\rangle \frac{f'(h)}{f(h)}\langle \nabla h, A(\nabla h)\rangle\\ &+ 2\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle H + n\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} + \langle N, \partial_t\rangle^2 \mathrm{tr}(A^2).\end{aligned}$$

Demonstração. Considere um referencial ortonormal $\{E_i\}$ definido em um aberto de Σ^n. Por definição,

$$|\mathrm{Hess}\, h|^2 := \mathrm{tr}\big(\mathrm{hess}(h)\circ \mathrm{hess}(h)\big) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla h, \nabla_{E_i}\nabla h\rangle.$$

Veja que, por (2.17),

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{E_i}\nabla h, \nabla_{E_i}\nabla h\rangle = &\langle E_i(\log f(h))\nabla h, E_i(\log f(h))\nabla h\rangle + 2\left\langle E_i(\log f(h))\nabla h, \frac{f'(h)}{f(h)}E_i\right\rangle\\ &- 2\langle E_i(\log f(h))\nabla h, \langle N, \partial_t\rangle A(E_i)\rangle - 2\left\langle \frac{f'(h)}{f(h)}E_i, \langle N, \partial_t\rangle AE_i\right\rangle\\ &+ \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\langle E_i, E_i\rangle + \langle N, \partial_t\rangle^2\langle AE_i, AE_i\rangle.\end{aligned}$$

Logo, basta efetuar o somatório da expressão acima com i variando de 1 até n para obter o resultado. □

A próxima proposição contém uma fórmula para $\mathrm{Ric}(\nabla h, \nabla h)$, onde Ric denota o tensor de Ricci de Σ^n. Lembremos primeiro da **equação de Gauss para hipersuperfícies** $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$:

$$\langle R(X, Y)V, W\rangle - \langle \overline{R}(X, Y)V, W\rangle = \langle AY, V\rangle\langle AX, W\rangle - \langle AY, W\rangle\langle AX, V\rangle, \tag{2.18}$$

onde $X, Y, V, W \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, e R e $\overline{R}$ denotam os tensores de curvatura de Σ^n e $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente. De (2.18), obtemos a seguinte relação entre os tensores de Ricci de Σ^n e $\overline{M}^{n+1}$:

$$\mathrm{Ric}(X, X) - \overline{\mathrm{Ric}}(X, X) = \langle \overline{R}(X, N)N, X\rangle + \langle A^2(X), X\rangle + H\langle AX, X\rangle. \tag{2.19}$$

De fato, seja $\{E_1, \ldots, E_n, N\}$ um referencial ortonormal definido em um aberto de $\overline{M}^{n+1}$ de modo que $\{E_i\}$ seja um referencial ortonormal em Σ^n. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X, Y) - \overline{\mathrm{Ric}}(X, Y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E_i)Y, E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(X, E_i)Y, E_i\rangle - \langle N, N\rangle\langle \overline{R}(X, N)Y, N\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\langle AE_i, Y\rangle\langle AX, E_i\rangle - \langle AE_i, E_i\rangle\langle AX, Y\rangle\right) + \langle \overline{R}(X, N)Y, N\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\langle AY, E_i\rangle\langle AX, E_i\rangle - \langle AE_i, E_i\rangle\langle AX, Y\rangle\right) + \langle \overline{R}(X, N)Y, N\rangle \\
&= \langle AX, AY\rangle - \mathrm{tr}(A)\langle AX, Y\rangle + \langle \overline{R}(X, N)Y, N\rangle \\
&= \langle A^2X, Y\rangle + H\langle AX, Y\rangle + \langle \overline{R}(X, N)Y, N\rangle,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Veja que, usando a Proposição 2.3 e o Corolário 2.4, podemos expressar os tensores de curvatura (calculado em N e ∂_t) e de Ricci da variedade $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$, denotados respectivamente por $\overline{R}$ e $\overline{\mathrm{Ric}}$, em termos da função f e do tensor de Ricci de M^n, Ric^M. Com efeito, usando a decomposição $N = N^* - \langle N, \partial_t\rangle\partial_t$, onde N^* denota a projeção ortogonal sobre a fibra M^n, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(\partial_t, N)\partial_t, N\rangle &= \langle \overline{R}(\partial_t, N^*)\partial_t, N^*\rangle \\
&= \left\langle -\frac{\langle N^*, N^*\rangle}{f} \nabla^I_{\partial_t}\nabla^I f, \partial_t \right\rangle \\
&= -\frac{|\nabla h|^2}{f(h)}(\mathrm{Hess}^I f)(\partial_t, \partial_t) \\
&= -\frac{f''(h)}{f(h)}|\nabla h|^2. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Nos cálculos acima, ∇^I denota a conexão na componente $I \subset \mathbb{R}$. Além disso, usamos a igualdade

$$\langle N^*, N^*\rangle = \langle N, N\rangle + 2\langle N, \partial_t\rangle^2 - \langle N, \partial_t\rangle^2 = -1 + \langle N, \partial_t\rangle^2 = -1 + \cosh^2\theta = |\nabla h|^2,$$

e também o fato de $\nabla^I f = -f'(h)\partial_t$ e $\mathrm{Hess}^I f(\partial_t, \partial_t) = \Delta^I f = f''(h)$, pois $\dim I = 1$. O sinal de menos em $\nabla^I f$ deve-se à métrica Lorentziana.

Quanto ao tensor de Ricci, temos, para qualquer $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ric}}(Z, Z) &= \overline{\mathrm{Ric}}(Z^* - \langle Z, \partial_t\rangle\partial_t, Z^* - \langle Z, \partial_t\rangle\partial_t) \\
&= \overline{\mathrm{Ric}}(Z^*, Z^*) - 2\langle Z, \partial_t\rangle\overline{\mathrm{Ric}}(Z^*, \partial_t) + \langle Z, \partial_t\rangle^2\overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t, \partial_t) \\
&= \mathrm{Ric}^M(Z^*, Z^*) + \langle Z^*, Z^*\rangle\left(\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right) \\
&\quad + \langle Z, \partial_t\rangle^2\left(\mathrm{Ric}^I(\partial_t, \partial_t) - n\frac{f''}{f}\right) \\
&= \mathrm{Ric}^M(Z^*, Z^*) + \langle Z^*, Z^*\rangle\left(\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right) - n\langle Z, \partial_t\rangle^2\frac{f''}{f}. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Usando (2.19), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(\nabla h, \nabla h) &= \overline{\mathrm{Ric}}(\nabla h, \nabla h) + \langle A^2(\nabla h), \nabla h\rangle \\
&\quad + H\langle A\nabla h, \nabla h\rangle + \langle \overline{R}(\nabla h, N)\nabla h, N\rangle. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Resta apenas calcular a soma do primeiro com o último termo no lado direito da igualdade acima. Por (2.20), temos, pela decomposição $\partial_t^\top = \partial_t + \langle N, \partial_t\rangle N$, que

$$\langle \overline{R}(\nabla h, N)\nabla h, N\rangle = \langle \overline{R}(\partial_t^\top, N)\partial_t^\top, N\rangle = \langle \overline{R}(\partial_t, N)\partial_t, N\rangle = -\frac{f''(h)}{f(h)}|\nabla h|^2. \qquad (2.23)$$

Como a projeção de ∇h sobre a fibra M^n é dada por

$$(\nabla h)^* = (-\partial_t^\top)^* = -\langle N, \partial_t\rangle N^*,$$

usando (2.21) obtemos

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ric}}(\nabla h, \nabla h) =& \ \mathrm{Ric}^M((\nabla h)^*, (\nabla h)^*) + \langle(\nabla h)^*, (\nabla h)^*\rangle\left(\frac{f''(h)}{f(h)} + (n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\right)\\ &- n\frac{f''(h)}{f(h)}\langle\nabla h, \partial_t\rangle^2\\ =& \ \langle N, \partial_t\rangle^2\,\mathrm{Ric}^M(N^*, N^*) + \left(\frac{f''(h)}{f(h)} + (n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\right)\langle N, \partial_t\rangle^2|\nabla h|^2\\ &- n\frac{f''(h)}{f(h)}|\nabla h|^4. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Somando (2.23) e (2.24), obtemos após uma rápida simplificação a fórmula

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ric}}(\nabla h, \nabla h) + \langle\overline{R}(\nabla h, N)\nabla h, N\rangle =& \ \langle N, \partial_t\rangle^2\,\mathrm{Ric}^M(N^*, N^*) + (n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}|\nabla h|^2\\ &- (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^4.\end{aligned}$$

Por fim, substituindo a fórmula acima em (2.22), obtemos a seguinte

Proposição 2.8. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em* $\overline{M}^{n+1}$. *Sejam* Ric, h, A *e* $H = -\mathrm{tr}(A)$, *respetivamente, o tensor de Ricci, a função altura, o operador forma e a curvatura média de* Σ^n. *Então*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(\nabla h, \nabla h) =& \ \langle N, \partial_t\rangle^2\,\mathrm{Ric}^M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^4\\ &+ (n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}|\nabla h|^2 + \langle A^2(\nabla h), \nabla h\rangle + H\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle.\end{aligned}$$

Finalizaremos esta seção fazendo algumas definições.

Dizemos que um Espaço-tempo GRW $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ obedece à **condição de convergência tipo-luz**, doravante abreviada como **NCC** (do inglês *null convergence condition*), quando

$$\overline{\mathrm{Ric}}(Z, Z) \geqslant 0,$$

para todo **campo de vetores tipo-luz** $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$, isto é, um campo $Z \neq 0$ tal que $\langle Z, Z\rangle \equiv 0$.

Uma condição mais restritiva que a NCC é a **condição de convergência tipo-tempo**, doravante abreviada como **TCC** (do inglês *timelike convergence condition*), a qual significa que, por definição,

$$\overline{\mathrm{Ric}}(Z, Z) \geqslant 0,$$

para todo **campo de vetores tipo-tempo** $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$, isto é, $\langle Z, Z\rangle < 0$.

A TCC implica a NCC. De fato, sejam $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um Espaço-tempo GRW obedecendo a TCC e $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ um campo de vetores não identicamente nulo tal que $\langle Z, Z\rangle = 0$. Agora defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, os campos de vetores $Z_k = Z + \alpha_k \partial_t$, onde $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ é uma sequência de números reais tal que $\lim_{k\to+\infty} \alpha_k = 0$ e é escolhida de modo que $\alpha_k < 0$ se $\langle Z, \partial_t\rangle > 0$ e $\alpha_k > 0$ caso contrário. Então

$$\begin{aligned}\langle Z_k, Z_k\rangle &= \langle Z, Z\rangle + 2\alpha_k\langle Z, \partial_t\rangle - \alpha_k^2\\ &= 2\alpha_k\langle Z, \partial_t\rangle - \alpha_k^2 < 0,\end{aligned}$$

logo $(Z_k)_{k\geqslant 1}$ é uma sequência de campos de vetores tipo-tempo. Daí, pela TCC,

$$\begin{aligned}0 \leqslant \overline{\mathrm{Ric}}(Z_k, Z_k) &= \overline{\mathrm{Ric}}(Z + \alpha_k\partial_t, Z + \alpha_k\partial_t)\\ &= \overline{\mathrm{Ric}}(Z, Z) + 2\alpha_k\overline{\mathrm{Ric}}(Z, \partial_t) + \alpha_k^2\overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t, \partial_t),\end{aligned}$$

donde

$$\overline{\mathrm{Ric}}(Z, Z) \geqslant -2\alpha_k\overline{\mathrm{Ric}}(Z, \partial_t) - \alpha_k^2\overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t, \partial_t) \tag{2.25}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como o lado direito de (2.25) converge para zero quando $k \to +\infty$, segue que $\overline{\mathrm{Ric}}(Z, Z) \geqslant 0$, portanto $\overline{M}^{n+1}$ obedece à NCC.

Uma forma equivalente de descrever a TCC (e a NCC) é dada na seguinte proposição (para mais detalhes, veja [44]).

Proposição 2.9. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um Espaço-tempo GRW. Então* $\overline{M}^{n+1}$ *obedece à TCC se, e somente se,* $f'' \leqslant 0$ *e*

$$\mathrm{Ric}^M \geqslant (n-1)\left(f^2(\log f)''\right)\langle\ ,\ \rangle_M. \tag{2.26}$$

Além disso, $\overline{M}^{n+1}$ *obedece à NCC se, e somente se, cumpre* (2.26).

Demonstração. Seja $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$. Suponha que vale (2.26). Então, por (2.21), temos

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ric}}(Z,Z) &= \mathrm{Ric}^M(Z^*,Z^*) + \langle Z^*,Z^*\rangle\left(\frac{f''}{f} + (n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right) - n\langle Z,\partial_t\rangle^2\frac{f''}{f}\\
&\geqslant \langle Z^*,Z^*\rangle(n-1)(\log f)'' + \langle Z^*,Z^*\rangle\left(\frac{f''}{f} + (n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right) - n\langle Z,\partial_t\rangle^2\frac{f''}{f}\\
&= \langle Z^*,Z^*\rangle n\left(\frac{f''}{f}\right) - n\langle Z,\partial_t\rangle^2\frac{f''}{f}\\
&= n\frac{f''}{f}\langle Z,Z\rangle. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Supondo que $f'' \leqslant 0$ e $\langle Z,Z\rangle < 0$ (ou seja, que Z é tipo-tempo), obtemos de (2.27) que $\overline{\mathrm{Ric}}(Z,Z) \geqslant 0$, logo $\overline{M}^{n+1}$ cumpre a TCC. No caso de $\langle Z,Z\rangle = 0$, novamente obtemos de (2.27) que $\overline{\mathrm{Ric}}(Z,Z) \geqslant 0$, mostrando que $\overline{M}^{n+1}$ obedece à NCC.

Reciprocamente, suponha que $\overline{M}^{n+1}$ obedece à TCC. Aplicando (2.21) com $Z = \partial_t$, o qual é um vetor tipo-tempo, e usando que $(\partial_t)^* = 0$, obtemos

$$0 \leqslant \overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t,\partial_t) = -n\langle\partial_t,\partial_t\rangle^2\frac{f''}{f}. \qquad (2.28)$$

A desigualdade acima mostra que $f'' \leqslant 0$. Para provar (2.26), suponha, por absurdo, que exista um $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$\mathrm{Ric}^M(X,X) < (n-1)f^2(\log f)''\langle X,X\rangle_M = (n-1)(\log f)''\langle X,X\rangle. \qquad (2.29)$$

Considere o campo $Z = X + \alpha\partial_t$, onde $\alpha^2 = \langle X,X\rangle$, de modo que

$$\langle Z,Z\rangle = \langle X,X\rangle + \alpha^2\langle\partial_t,\partial_t\rangle = 0$$

e assim Z é tipo-luz. Como a TCC implica a NCC, usando (2.21), obtemos

$$0 \leqslant \overline{\mathrm{Ric}}(Z,Z) = \mathrm{Ric}^M(X,X) + \langle X,X\rangle\left(\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right) - n\langle Z,\partial_t\rangle^2\frac{f''}{f},$$

donde

$$\mathrm{Ric}^M(X,X) \geqslant -\langle X,X\rangle\left(\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right) + n\alpha^2\frac{f''}{f}.$$

Como estamos supondo (2.29), temos da desigualdade acima que

$$-\langle X, X\rangle \left(\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right) + n\alpha^2\frac{f''}{f} < (n-1)\left(\frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{f^2}\right)\langle X, X\rangle,$$

da qual se obtêm $n\frac{f''}{f}(\alpha^2 - \langle X, X\rangle) < 0$. Isto é um absurdo pela escolha de α. Com um cálculo similar, pode-se provar que (2.26) implica a NCC. □

Seguindo a terminologia dada por Alías e Colares em [8], diremos que um Espaço-tempo GRW obedece à **SNCC** (do inglês *strong null convergence condition*) quando a curvatura seccional K_M da fibra M^n satisfaz a seguinte desigualdade

$$K_M \geqslant \sup_I (f^2(\log f)''). \tag{2.30}$$

A SNCC implica a NCC. De fato, sejam R_M o tensor de curvatura da fibra M^n e $\{E_j\}$ um referencial ortonormal definido em um aberto de M^n. Por definição, para todo $X \in \mathfrak{X}(M^n)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^M(X, X) &= \mathrm{tr}\big(Z \mapsto R_M(X, Z)X\big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle R_M(X, E_j)X, E_j\rangle\\
&= \sum_{j=1}^{n} K_M(X, E_j)\big(\langle X, X\rangle_M \langle E_j, E_j\rangle_M - \langle X, E_j\rangle_M^2\big)\\
&\geqslant f^2(\log f)'' \sum_{j=1}^{n} \big(\langle X, X\rangle_M \langle E_j, E_j\rangle_M - \langle X, E_j\rangle_M^2\big)\\
&= (n-1)f^2(\log f)''\langle X, X\rangle_M.
\end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 2.9, $\overline{M}^{n+1}$ obedece à NCC.

Inspirados pela definição da SNCC e pela Proposição 2.9, diremos que um Espaço-tempo GRW obedece à **Condição de convergência tipo-tempo forte**, doravante abreviada por **STCC** (do inglês *strong timelike convergence condition*) quando (2.30) é satisfeita e $f'' \leqslant 0$. Claramente, todo Espaço-tempo GRW que obedece à STCC também obedece à TCC.

2.3 O caso Riemanniano

Nesta seção, vamos considerar as definições e resultados básicos que serão necessários para o entendimento e demonstração dos teoremas principais do Capítulo 5.

Assim como na seção anterior, o ambiente aqui será a variedade produto de dimensão $(n+1)$ dada por $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e M^n é uma variedade Riemanniana n-dimensional conexa. A métrica em $\overline{M}^{n+1}$ será a métrica warped

$$\langle , \rangle = \pi_I^*(dt^2) + f(\pi_I)^2 \pi_M^*(\langle , \rangle_M), \tag{2.31}$$

onde f é um função suave positiva em I e as aplicações π_I e π_M denotam as projeções canônicas sobre I e M^n, respectivamente. Escreveremos $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ para denotar $I \times M^n$ com a métrica Riemanniana (2.31).

Um campo de vetores natural em $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ é $\dfrac{\partial}{\partial t} = \partial_t$, o qual é o campo unitário coordenado tangente a componente I. Observe que

$$\overline{\nabla}\pi_I = \langle \overline{\nabla}\pi_I, \partial_t \rangle \partial_t = \partial_t[\pi_I]\partial_t = \partial_t. \tag{2.32}$$

Considere então o campo $\mathcal{K}(t, y) = f(t)\partial_t \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Denote por $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}^{n+1}$. Temos então o seguinte:

Lema 2.10. *Para todo* $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, *vale* $\overline{\nabla}_V \mathcal{K} = f'(t)V$.

Demonstração. Fazendo a decomposição $V = V^* + \langle V, \partial_t \rangle \partial_t$, onde V^* é a projeção ortogonal de V sobre M^n, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_V \mathcal{K} &= \overline{\nabla}_{(V^* + \langle V, \partial_t \rangle \partial_t \partial_t)}(f(t)\partial_t) \\
&= f(t)\overline{\nabla}_{V^*}\partial_t + V^*[f]\partial_t + \langle V, \partial_t \rangle \left[f(t)\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t + \partial_t[f]\partial_t \right] \\
&= f(t)\frac{f'(t)}{f(t)}V^* + \langle V, \partial_t \rangle f'(t)\partial_t \\
&= f'(t)V,
\end{aligned}$$

onde nos cálculos acima usamos a Proposição 2.1 e a igualdade $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$. □

Como consequência do Lema 2.10, temos

$$\overline{\nabla}_V \partial_t = \overline{\nabla}_V \left(\frac{1}{f(t)} \mathcal{K} \right) = -\frac{1}{f(t)^2} \langle V, \overline{\nabla} f \rangle \mathcal{K} + \frac{f'(t)}{f(t)} V, \tag{2.33}$$

para qualquer $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, onde $\overline{\nabla} f$ denota o gradiente em $\overline{M}$ de $\bar{f}(t, y) = f(t)$.

Agora, considere uma hipersuperfície **two-sided** $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ imersa em $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$, o que significa que seu fibrado normal é trivial, ou seja, é possível definir globalmente ao longo de Σ^n um campo de vetores suave normal e unitário $N \in T\Sigma^{\perp}$. Nos teoremas do Capítulo 5, sempre escolheremos N de modo que $\langle N, \partial_t \rangle \geqslant 0$.

Observação 2.11. *Para superfícies bidimensionais $S \subset \mathbb{R}^3$, é bem conhecido o fato de que S é **orientável** se, e somente se, existe um campo de vetores suave unitário e normal a S definido globalmente em tal superfície. No entanto, ser two-sided não é o mesmo que ser orientável, em geral. Por exemplo, o cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ é orientável, mas podemos mergulhá-lo em $M^2 \times \mathbb{R}$ de modo que ele não seja two-sided, onde M^2 é uma faixa de Möbius em $\mathbb{R}^3$. Tomando a "linha de centro" C de M^2, que é difeomorfa a $\mathbb{S}^1$, concluímos que $C \times \mathbb{R}$ é hipersuperfície de $M^2 \times \mathbb{R}$ difeomorfa ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, mas não é two-sided. É possível também que uma variedade não-orientável seja uma hipersuperfície two-sided, como mostra o exemplo $M^2 \times \{0\} \subset M^2 \times \mathbb{R}$. Neste caso, o campo de vetores normal é simplesmente ∂_t, o qual é o campo de vetores tangente à componente $\mathbb{R}$.*

O **operador forma** (ou *operador de Weingarten*) de Σ^n associado ao campo N é o tensor $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ dado por

$$A(X) = -\overline{\nabla}_X N.$$

Ele tem a propriedade de ser simétrico, isto é,

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$. Com isto, a **curvatura média** (não normalizada) de Σ^n é definida por $H = \mathrm{tr}(A)$, isto é, o traço do operador forma de Σ^n.

Um exemplo básico de hipersuperfície two-sided em $\overline{M}$ são os **slices** $\{t_0\} \times M^n$, com $t_0 \in I$. Vamos calcular seu operador forma A_{t_0} e sua curvatura média H_{t_0}.

Primeiramente, observe que, escrevendo $\overline{f} = f \circ \pi_I$, obtemos

$$\overline{\nabla} \overline{f} = f'(t) \overline{\nabla} \pi_I = f'(t) \partial_t. \tag{2.34}$$

Daí, por (2.33), considerando $V \in \mathfrak{X}(\{t_0\} \times M^n)$, temos

$$\overline{\nabla}_V \partial_t = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} V. \tag{2.35}$$

No caso dos slices, $N = \partial_t$ é um campo de vetores normal definido globalmente. Logo, por (2.35), obtemos

$$A_{t_0}(V) = -\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} V.$$

Isso mostra que a correspondência $t \in I \mapsto \{t\} \times M^n$ determina uma folheação de $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ por meio de hipersuperfícies totalmente umbílicas com curvatura média constante dadas por $H_t = -n \dfrac{f'(t)}{f(t)}$.

Voltando ao caso geral de uma hipersuperfície two-sided $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, destacamos duas funções que serão muito importantes nos resultados do Capítulo 5: a **função altura** de Σ^n, definida por $h = (\pi_{\mathbb{R}})|_{\Sigma}$, e a **função ângulo** $\Theta = \langle N, \partial_t \rangle$. Isto é, h é apenas a restrição de π_I a Σ^n, $h(t, y) = t$, e Θ é o cosseno do ângulo Riemanniano entre N e ∂_t.

Por (2.32) concluímos que o gradiente em Σ^n da função altura é dado por

$$\nabla h = (\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^{\top} = \partial_t^{\top} = \partial_t - \langle N, \partial_t \rangle \partial_t = \partial_t - \Theta N, \tag{2.36}$$

onde $(\ )^{\top}$ denota a componente tangencial de um campo de vetores em $\mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ ao longo de Σ^n. Usando (2.36), é fácil ver que

$$|\nabla h|^2 = 1 - \Theta^2, \tag{2.37}$$

onde $|\ |$ denota a norma de um campo de vetores em Σ^n.

Além disso, valem as seguintes fórmulas básicas.

Proposição 2.12. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície two-sided imersa em $\overline{M}^{n+1}$. Sendo ∇ a conexão Riemanniana de Σ^n, valem:*

(a) $\nabla \Theta = -A(\nabla h) - \dfrac{f'(h)}{f(h)} \Theta \nabla h$;

(b) $(\operatorname{Hess} h)(X,Y) = \Theta\langle AX, Y\rangle + \dfrac{f'(h)}{f(h)}\langle X, Y\rangle - \dfrac{f'(h)}{f(h)}\langle X, \nabla h\rangle\langle Y, \nabla h\rangle$, *para* $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

(c) $\Delta h = \dfrac{f'(h)}{f(h)}\{n - |\nabla h|^2\} + \Theta H$.

Demonstração. **(a)** Vamos usar o Lema 2.10. Dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$,

$$X[\Theta] = X\langle N, \partial_t\rangle = \langle \overline{\nabla}_X N, \partial_t\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X, \partial_t\rangle,$$

logo

$$\begin{aligned} f(h)X\langle N, \partial_t\rangle &= -\langle AX, f(h)\partial_t\rangle + \langle N, f(h)\overline{\nabla}_X \partial_t\rangle \\ &= -\langle AX, f(h)\partial_t\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X K - X[f(h)]\partial_t\rangle \\ &= -\langle AX, f(h)\partial_t\rangle - X[f(h)]\langle N, \partial_t\rangle. \end{aligned}$$

Daí, usando o fato de A ser simétrico,

$$\begin{aligned} X\langle N, \partial_t\rangle &= -\langle AX, \partial_t\rangle - \frac{X[f(h)]}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle \\ &= -\langle X, A\partial_t\rangle - \frac{f'(h)}{f(h)}\langle X, \nabla h\rangle\langle N, \partial_t\rangle \\ &= -\langle X, A(\nabla h)\rangle - \frac{f'(h)}{f(h)}\langle X, \nabla h\rangle\langle N, \partial_t\rangle. \end{aligned} \tag{2.38}$$

De (2.38), concluímos que

$$\nabla\Theta = -A(\nabla h) - \frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle\nabla h.$$

(b) Pelo Lema 2.10, temos, para $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$,

$$\begin{aligned} f'(h)X &= \overline{\nabla}_X \mathcal{K} = \overline{\nabla}_X \left(\mathcal{K}^T + \langle \mathcal{K}, N\rangle N\right) \\ &= \overline{\nabla}_X \mathcal{K}^T + \langle \mathcal{K}, N\rangle \overline{\nabla}_X N + X\langle \mathcal{K}, N\rangle N \\ &= \nabla_X \mathcal{K}^T + \langle AX, \mathcal{K}^T\rangle N - \langle \mathcal{K}, N\rangle AX + X\langle \mathcal{K}, N\rangle N \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\nabla_X\mathcal{K}^\top &= f'(h)X + f(h)\langle N, \partial_t\rangle AX - \langle AX, \mathcal{K}^\top\rangle N - X\langle \mathcal{K}, N\rangle N\\ &= f'(h)X + f(h)\langle N, \partial_t\rangle AX - \langle AX, \mathcal{K}^\top\rangle N - \left(\langle \overline{\nabla}_X\mathcal{K}, N\rangle + \langle \mathcal{K}, \overline{\nabla}_X N\rangle\right) N\\ &= f'(h)X + f(h)\Theta AX - \langle AX, \mathcal{K}^\top\rangle N - \langle f'(h)X, N\rangle N + \langle AX, \mathcal{K}\rangle N\\ &= f'(h)X + f(h)\Theta AX. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Como $\mathcal{K}^\top = (f(h)\partial_t)^\top = f(h)\nabla h$, temos de (2.39) que

$$\nabla_X\nabla h = \frac{f'(h)}{f(h)}X + \Theta AX - \frac{f'(h)}{f(h)}\langle X, \nabla h\rangle\nabla h. \tag{2.40}$$

Agora, basta fazer o produto interno $\langle \nabla_X\nabla h, Y\rangle$ para concluir o item **(b)**.

(c) Finalmente, se $\{E_j\}$ é um referencial ortonormal definido em um aberto de Σ^n, temos de (2.40) que

$$\begin{aligned}\Delta h = \mathrm{div}_{\Sigma^n}(\nabla h) = \mathrm{tr}\,(Z \mapsto \nabla_Z\nabla h) &= \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{E_j}\nabla h, E_j\rangle\\ &= \langle N, \partial_t\rangle \sum_{j=1}^n \langle AE_j, E_j\rangle + \frac{f'(h)}{f(h)}\sum_{j=1}^n \langle E_j, E_j\rangle - \frac{f'(h)}{f(h)}\sum_{j=1}^n \langle E_j, \nabla h\rangle^2\\ &= \langle N, \partial_t\rangle \mathrm{tr}(A) + \frac{f'(h)}{f(h)}n - \frac{f'(h)}{f(h)}|\nabla h|^2\\ &= \Theta H + \frac{f'(h)}{f(h)}\left\{n - |\nabla h|^2\right\},\end{aligned}$$

como queríamos provar. □

Na proposição seguinte enunciamos uma fórmula para o laplaciano $\Delta\Theta$, cuja demonstração encontra-se em Zhang e Zhu [56, Lema 1].

Proposição 2.13. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hypersurface two-sided imersa em um produto warped $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$. Então a função ângulo Θ de Σ^n satisfaz*

$$\begin{aligned}\Delta\Theta = &- \langle \nabla H, \partial_t\rangle - \frac{f'(h)}{f(h)}H(1+\Theta^2) + 2\frac{f'(h)}{f(h)}\langle A\nabla h, \nabla h\rangle\\ &- \Theta|A|^2 - \frac{f''(h)}{f(h)}\Theta|\nabla h|^2 - \frac{f'(h)}{f(h)}\Theta(n - 3|\nabla h|^2)\\ &- \Theta\left\{\mathrm{Ric}^M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2\right\},\end{aligned}$$

onde Ric^{M} *denota o tensor de Ricci da fibra* M^n *e* $N^* = N - \Theta\partial_t$ *é a projeção ortogonal de* N *sobre* M^n.

2.4 Variedades com densidade

Dadas uma variedade semi-Riemanniana completa $(\overline{M}, \langle,\rangle)$ e um função suave φ em $\overline{M}^{n+1}$, definimos a **variedade com densidade** $\overline{M}_\varphi$ associada a $\overline{M}$ e φ como a tripla

$$\overline{M}_\varphi = (\overline{M}, \langle,\rangle, d\mu = e^{-\varphi} d\overline{M}),$$

onde $d\overline{M}$ é a medida Riemanniana canônica de $\overline{M}$. A função φ é chamada de **função densidade** de $\overline{M}_\varphi$.

Se $\overline{\mathrm{Ric}}$ denota o tensor de Ricci de $\overline{M}$, definimos o **tensor de Bakry-Émery-Ricci**, $\overline{\mathrm{Ric}}_\varphi$, introduzido por Bakry e Émery em [20], por

$$\overline{\mathrm{Ric}}_\varphi = \overline{\mathrm{Ric}} + \overline{\mathrm{Hess}}\,\varphi,$$

onde $\overline{\mathrm{Hess}}$ denota o 2-tensor Hessiano de $\overline{M}$.

Além disso, a **φ-divergência** de um campo de vetores X em uma variedade com densidade φ é definida por

$$\overline{\mathrm{div}}_\varphi(X) = e^{\varphi}\overline{\mathrm{div}}(e^{-\varphi}X),$$

onde $\overline{\mathrm{div}}$ denota o operador divergência canônico de $\overline{M}$.

Semelhante ao laplaciano, o **laplaciano ponderado** (ou $\varphi-$*laplaciano*, ou ainda, em inglês, *drift Laplacian*) de uma função $u \in C^\infty(\overline{M})$ é definido por

$$\Delta_\varphi u := \overline{\mathrm{div}}_\varphi(\overline{\nabla} u) = \Delta u - \langle \overline{\nabla} u, \overline{\nabla}\varphi\rangle.$$

Quando $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ é um Espaço-tempo GRW munido de uma função densidade φ limitada superiormente e é tal que $\overline{\mathrm{Ric}}_\varphi(V, V) \geqslant 0$ para quaisquer campos de vetores tipo-tempo V, um teorema do tipo *splitting* devido a Case (veja [29, Teorema 1.2]) afirma que φ é constante ao longo de I. Observe que, quando φ é constante, essa hipótese sobre $\overline{\mathrm{Ric}}_\varphi$ é simplesmente a TCC, definida ao final da Seção 2.2.

Assim, consideraremos os chamados **Espaços-tempo GRW espacialmente densos**, isto é, cuja função densidade φ não depende da variável $t \in I$, ou seja, $\langle \overline{\nabla}\varphi, \partial_t \rangle \equiv 0$. Usaremos a notação $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ para nos referir a um Espaço-tempo GRW nestas condições.

Para uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n imersa em $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$, temos de forma similar que a $\varphi-$divergência de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ é dada por

$$\operatorname{div}_\varphi(X) = e^{\varphi}\operatorname{div}(e^{-\varphi}X), \tag{2.41}$$

onde div é o operador divergência padrão de Σ^n. Levando em conta (2.41), dada uma função suave $u : \Sigma^n \to \mathbb{R}$, seu laplaciano ponderado é dado por

$$\Delta_\varphi u = \operatorname{div}_\varphi(\nabla u) = \Delta u - \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle,$$

onde Δ é o Laplaciano usual em Σ^n. Seguindo a nomenclatura estabelecida por Gromov [35], a **curvatura média ponderada** H_φ de Σ^n é definida por

$$H_\varphi = H - \langle \overline{\nabla}\varphi, N \rangle,$$

onde $H = -\mathrm{tr}(A)$ denota a curvatura média (não-normalizada) usual de Σ^n com respeito à aplicação de Gauss futuro N.

Capítulo 3

Hipersuperfícies com curvatura média ponderada constante

Neste capítulo abordaremos os resultados contidos no artigo [16], feito em parceria com C. P. Aquino e H. F. de Lima. Apresentaremos resultados de unicidade e não-existência para hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média ponderada constante imersas em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso por uma função φ.

A técnica que usaremos se baseia em vários Princípios do Máximo para o laplaciano ponderado Δ_φ, como por exemplo o recente critério de $\varphi-$parabolicidade [4, Teorema 1] e um Princípio do Máximo no infinito [7]. Para isso, primeiro aplicamos a fórmula de Bochner para estabelecer uma desigualdade sharp envolvendo o laplaciano ponderado de $\operatorname{senh}^2\theta$. Em seguida, definiremos uma extensão da condição de convergência tipo-tempo, a TCC (veja o final da Seção 2.2), mas no contexto do tensor de Bakry-Émery-Ricci, que será utilizada como hipótese padrão para os resultados. Na última seção deste capítulo, aplicaremos os resultados obtidos para o estudo de uma equação diferencial associada à curvatura média ponderada de hipersuperfícies imersas Espaços-tempo GRW espacialmente densos.

3.1 Uma desigualdade tipo Bochner

Nesta seção, provaremos uma desigualdade oriunda da fórmula de Bochner que será o resultado chave para provar nossos resultados de unicidade e não-existência para hipersuperfícies tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \mapsto -I \times_f M^n_\varphi$ em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso por uma função φ.

Usaremos a fórmula de Bochner para o Laplaciano ponderado (veja [52]), que afirma

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 &= |\operatorname{Hess} h|^2 + \operatorname{Ric}_\varphi(\nabla h, \nabla h) + \langle \nabla h, \nabla(\Delta_\varphi h)\rangle \\ &= |\operatorname{Hess} h|^2 + \operatorname{Ric}(\nabla h, \nabla h) + \operatorname{Hess}\varphi(\nabla h, \nabla h) + \langle \nabla h, \nabla(\Delta_\varphi h)\rangle \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde h é a função altura de Σ^n e $\operatorname{Hess}\varphi$ denota o hessiano em Σ^n da função $\varphi|_{\Sigma^n}$.

Começamos observando que, enquanto φ não depende da componente $I \subset \mathbb{R}$, temos

$$\langle \nabla h, \overline{\nabla}\varphi\rangle = \langle (\nabla h)^*, \overline{\nabla}\varphi\rangle = -\langle N, \partial_t\rangle\langle N, \overline{\nabla}\varphi\rangle, \tag{3.2}$$

pois a projeção de ∇h sobre a fibra M^n é dada por $(\nabla h)^* = -\langle N, \partial_t\rangle N^*$, onde N é a aplicação de Gauss futuro de Σ^n e N^* sua projeção sobre M^n.

Daí, utilizando (3.2) e a Proposição 2.6(c), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta_\varphi h &= \Delta h - \langle \nabla h, \overline{\nabla}\varphi\rangle \\ &= -(\log f)'(h)\left\{n + |\nabla h|^2\right\} - H\langle N, \partial_t\rangle - \langle \nabla h, \overline{\nabla}\varphi\rangle \\ &= -(\log f)'(h)\left\{n + |\nabla h|^2\right\} - (H_\varphi + \langle N, \overline{\nabla}\varphi\rangle)\langle N, \partial_t\rangle - \langle \nabla h, \overline{\nabla}\varphi\rangle \\ &= -(\log f)'(h)\left\{n + |\nabla h|^2\right\} - H_\varphi\langle N, \partial_t\rangle,\end{aligned}$$

onde H_φ é a curvatura média ponderada de Σ^n.

Como consequência, temos da igualdade acima que

$$\begin{aligned}\nabla(\Delta_\varphi h) = &-(\log f)''(h)\left\{n + |\nabla h|^2\right\}\nabla h - 2(\log f)'(h)(\operatorname{hess} h)(\nabla h) \\ &- \langle N, \partial_t\rangle\nabla H_\varphi - H_\varphi\nabla\langle N, \partial_t\rangle,\end{aligned}$$

onde $\operatorname{hess} h$ denota o hessiano em Σ^n como operador linear. Logo,

$$\begin{aligned}\langle \nabla(\Delta_\varphi h), \nabla h\rangle = &-(\log f)''(h)\left\{n + |\nabla h|^2\right\}|\nabla h|^2 \\ &- 2(\log f)'(h)(\operatorname{Hess} h)(\nabla h, \nabla h) - \langle N, \partial_t\rangle\langle \nabla H_\varphi, \nabla h\rangle \\ &- H_\varphi\langle \nabla\langle N, \partial_t\rangle, \nabla h\rangle.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Utilizando a Proposição 2.6(a), (3.3) se torna

$$\begin{aligned}\langle \nabla(\Delta_\varphi h), \nabla h\rangle = & -(\log f)''(h)\left\{n + |\nabla h|^2\right\}|\nabla h|^2 \\ & - 2(\log f)'(h)(\operatorname{Hess} h)(\nabla h, \nabla h) - \langle N, \partial_t\rangle\langle \nabla H_\varphi, \nabla h\rangle \\ & - H_\varphi\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle + H_\varphi \frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle|\nabla h|^2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Somando (3.4) com as fórmulas para $|\operatorname{Hess} h|^2$ e $\operatorname{Ric}(\nabla h, \nabla h)$ obtidas nas Proposições 2.7 e 2.8, inserindo-as em (3.1) e reorganizando os termos, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 = & \, n\left(\frac{f'(h)}{f(h)}\right)^2 + \langle N, \partial_t\rangle^2 \operatorname{tr}(A^2) + \langle A^2(\nabla h), \nabla h\rangle \\ & + |\nabla h|^2\left\{(2n+1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\} \\ & + |\nabla h|^4\left\{(n+1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\} \\ & - 2\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle - 2\frac{f'(h)}{f(h)}(\operatorname{Hess} h)(\nabla h, \nabla h) \\ & + 2H\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle + \langle \overline{\nabla}\varphi, N\rangle\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle \\ & + H_\varphi\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle|\nabla h|^2 + \langle N, \partial_t\rangle^2 \operatorname{Ric}^M(N^*, N^*) \\ & - \langle N, \partial_t\rangle\langle \nabla H_\varphi, \nabla h\rangle + (\operatorname{Hess}\varphi)(\nabla h, \nabla h). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Vamos agora calcular uma expressão para $(\operatorname{Hess}\varphi)(\nabla h, \nabla h)$. Observe que, como $\langle \partial_t, \overline{\nabla}\varphi\rangle \equiv 0$, temos

$$0 = X\langle \partial_t, \overline{\nabla}\varphi\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \partial_t, \overline{\nabla}\varphi\rangle + \langle \partial_t, \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}\varphi\rangle. \tag{3.6}$$

Logo,

$$\overline{\operatorname{Hess}}\varphi(\partial_t, N) = \langle \overline{\nabla}_N\overline{\nabla}\varphi, \partial_t\rangle = -\langle \overline{\nabla}_N\partial_t, \overline{\nabla}\varphi\rangle. \tag{3.7}$$

Pela Proposição 2.1, sobre a conexão de Levi-Civita em produtos warped, temos

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_N\partial_t &= \overline{\nabla}_{(N^* - \langle N, \partial_t\rangle\partial_t)}\partial_t \\ &= \overline{\nabla}_{N^*}\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t \\ &= \frac{\langle \partial_t, \nabla^I f\rangle}{f}N^* = \frac{f'}{f}N^*,\end{aligned}$$

donde, por (3.7) obtemos

$$\overline{\mathrm{Hess}}\varphi(\partial_t, N) = -\frac{f'}{f}\langle N, \overline{\nabla}\varphi\rangle. \tag{3.8}$$

Além disso, é fácil ver que $\overline{\mathrm{Hess}}\varphi(\partial_t, \partial_t) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\,\varphi(\nabla h, \nabla h) &= \overline{\mathrm{Hess}}\varphi(\nabla h, \nabla h) - \langle\overline{\nabla}\varphi, N\rangle\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle \\
&= \overline{\mathrm{Hess}}\varphi(-\partial_t^{\top}, -\partial_t^{\top}) - \langle\overline{\nabla}\varphi, N\rangle\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle \\
&= \overline{\mathrm{Hess}}\varphi(\partial_t + \langle N, \partial_t\rangle N, \partial_t + \langle N, \partial_t\rangle N) - \langle\overline{\nabla}\varphi, N\rangle\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle \\
&= -2\frac{f'}{f}\langle N, \overline{\nabla}\varphi\rangle\langle N, \partial_t\rangle + \langle N, \partial_t\rangle^2\overline{\mathrm{Hess}}\varphi(N, N) \\
&\quad - \langle\overline{\nabla}\varphi, N\rangle\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde na primeira igualdade acima utilizamos a fórmula que relaciona o Hessiano em Σ^n com o do ambiente $\overline{M}^{n+1}$. Como $N = N^* - \langle N, \partial_t\rangle\partial_t$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Hess}}\varphi(N, N) &= \overline{\mathrm{Hess}}\varphi(N^* - \langle N, \partial_t\rangle\partial_t, N^* - \langle N, \partial_t\rangle\partial_t) \\
&= \overline{\mathrm{Hess}}\varphi(N^*, N^*) - 2\langle N, \partial_t\rangle\overline{\mathrm{Hess}}\varphi(N^*, \partial_t).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Observe que, pela relação entre os Hessianos de $\overline{M}^{n+1}$ e da hipersuperfície $\{t_0\}\times M^n \simeq M^n$, temos

$$\overline{\mathrm{Hess}}\varphi(N^*, N^*) = \mathrm{Hess}^M\,\varphi(N^*, N^*) + \langle\overline{\nabla}\varphi, \partial_t\rangle\langle A_M(N^*), N^*\rangle, \tag{3.11}$$

onde Hess^M denota o hessiano em M^n e A_M o operador forma de $\{t_0\} \times M^n \simeq M^n$. Como $-I \times_f M^n$ é espacialmente denso, segue de (3.11) que

$$\overline{\mathrm{Hess}}\varphi(N^*, N^*) = \mathrm{Hess}^M\,\varphi(N^*, N^*).$$

Além disso, é imediato que

$$\overline{\mathrm{Hess}}\varphi(N^*, \partial_t) = \overline{\mathrm{Hess}}\varphi(N, \partial_t) = -\frac{f'}{f}\langle N, \overline{\nabla}\varphi\rangle,$$

Inserindo as duas igualdades acima em (3.10), obtemos

$$\overline{\mathrm{Hess}}\varphi(N, N) = \mathrm{Hess}^M\,\varphi(N^*, N^*) + 2\langle N, \partial_t\rangle\frac{f'}{f}\langle\overline{\nabla}\varphi, N\rangle. \tag{3.12}$$

Substituindo (3.12) em (3.9) e simplificando, encontramos

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess}\varphi(\nabla h,\nabla h) &= 2\frac{f'}{f}\langle N,\overline{\nabla}\varphi\rangle\big(\langle N,\partial_t\rangle^3-\langle N,\partial_t\rangle\big)+\langle N,\partial_t\rangle^2\operatorname{Hess}^M\varphi(N^*,N^*)\\ &\quad-\langle\overline{\nabla}\varphi,N\rangle\langle A(\nabla h),\nabla h\rangle. \end{aligned}\tag{3.13}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} H_\varphi\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N,\partial_t\rangle|\nabla h|^2 &+ 2\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N,\overline{\nabla}\varphi\rangle\big(\langle N,\partial_t\rangle^3-\langle N,\partial_t\rangle\big)=\\ &= H_\varphi\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N,\partial_t\rangle|\nabla h|^2+2\frac{f'(h)}{f(h)}(H-H_\varphi)\langle N,\partial_t\rangle(\langle N,\partial_t\rangle^2-1)\\ &= H_\varphi\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N,\partial_t\rangle|\nabla h|^2+2\frac{f'(h)}{f(h)}(H-H_\varphi)\langle N,\partial_t\rangle|\nabla h|^2\\ &= \frac{f'(h)}{f(h)}\langle N,\partial_t\rangle|\nabla h|^2\{2H-H_\varphi\}. \end{aligned}\tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) e (3.13) em (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 &= n\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}+\langle N,\partial_t\rangle^2\operatorname{tr}(A^2)+\langle A^2(\nabla h),\nabla h\rangle\\ &\quad+|\nabla h|^2\left\{(2n+1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}-n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\}\\ &\quad+|\nabla h|^4\left\{(n+1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}-n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\}\\ &\quad-2\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N,\partial_t\rangle\langle A(\nabla h),\nabla h\rangle-2\frac{f'(h)}{f(h)}(\operatorname{Hess}h)(\nabla h,\nabla h)\\ &\quad+2H\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N,\partial_t\rangle+\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N,\partial_t\rangle|\nabla h|^2\{2H-H_\varphi\}\\ &\quad+\langle N,\partial_t\rangle^2\operatorname{Ric}_\varphi^M(N^*,N^*)-\langle N,\partial_t\rangle\langle\nabla H_\varphi,\nabla h\rangle. \end{aligned}\tag{3.15}$$

Além disso, lembre que $\operatorname{tr}(A^2)\geqslant\dfrac{H^2}{n}$, e a igualdade vale se, e somente se, Σ^n é **totalmente umbílica**, isto é, em cada ponto, o operador forma A de Σ^n é um múltiplo do operador identidade. Com efeito, seja $\{E_j\}$ um referencial ortonormal definido em um aberto de Σ^n. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\frac{H^2}{n} = \frac{1}{n}(\operatorname{tr} A)^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\langle AE_j, E_j\rangle\right)^2 &\leqslant \sum_{j=1}^{n}\langle AE_j, E_j\rangle^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle AE_i, E_j\rangle^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\langle AE_i, \langle AE_i, E_j\rangle E_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle AE_i, \sum_{j=1}^{n}\langle AE_i, E_j\rangle E_j\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, AE_i\rangle = \operatorname{tr}(A^2).\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\langle AE_i, E_j\rangle = 0$ com $i \neq j$ e $AE_i = \lambda E_i$ para $i = 1, \dots, n$. Logo, vale a igualdade se, e somente se, o operador forma de Σ^n é, em cada ponto, múltiplo da identidade, como queríamos provar.

Usando essa desigualdade, temos

$$\begin{aligned}& n\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} + \langle N, \partial_t\rangle^2\operatorname{tr}(A^2) + 2H\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle \\ &\geqslant n\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} + \langle N, \partial_t\rangle^2\frac{H^2}{n} + 2H\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle \\ &= n\left(\frac{f'(h)}{f(h)} + \frac{H}{n}\langle N, \partial_t\rangle\right)^2 \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Inserindo a desigualdade (3.16) em (3.15) e levando em conta a relação

$$-2\frac{f'(h)}{f(h)}(\operatorname{Hess} h)(\nabla h, \nabla h) = 2\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\left\{|\nabla h|^2 + |\nabla h|^4\right\} - 2\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle\langle A\nabla h, \nabla h\rangle, \qquad (3.17)$$

cuja demonstração segue da Proposição 2.6(b), provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Sejam* $\overline{M}^{n+1}_\varphi = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso e* $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}_\varphi$ *uma hipersuperfície tipo-espaço. Sendo* h *a função altura de* Σ^n*, vale*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant\ & \langle A^2(\nabla h), \nabla h\rangle + n\left(\frac{H\langle N, \partial_t\rangle}{n} + \frac{f'(h)}{f(h)}\right)^2 \\ & - 4\frac{f'(h)}{f(h)}(\operatorname{Hess} h)(\nabla h, \nabla h) + |\nabla h|^2\left\{(2n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\} \\ & + |\nabla h|^4\left\{(n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\} + \langle N, \partial_t\rangle^2\operatorname{Ric}^M_\varphi(N^*, N^*) \\ & + \frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle|\nabla h|^2\{2H - H_\varphi\} - \langle N, \partial_t\rangle\langle \nabla H_\varphi, \nabla h\rangle,\end{aligned}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, Σ^n é totalmente umbílica.

Uma ligeira variação do Teorema 3.1 acima é a desigualdade

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant \langle A^2(\nabla h), \nabla h\rangle + n\left(\frac{H\langle N, \partial_t\rangle}{n} + \frac{f'(h)}{f(h)}\right)^2 \\ - 4\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle\langle A\nabla h, \nabla h\rangle + |\nabla h|^2\left\{(2n+3)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\} \\ + |\nabla h|^4\left\{(n+3)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\} + \langle N, \partial_t\rangle^2 \mathrm{Ric}_\varphi^M(N^*, N^*) \\ + \frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle|\nabla h|^2\{2H - H_\varphi\} - \langle N, \partial_t\rangle\langle\nabla H_\varphi, \nabla h\rangle,\end{aligned} \tag{3.18}$$

a qual foi obtida simplesmente usando a identidade (3.17).

3.2 Resultados de não-existência e unicidade

Esta seção é dedicada a apresentar nossos resultados de unicidade e não-existência relativos à hipersuperfícies tipo-espaço imersas em Espaços-tempos GRW espacialmente densos obedecendo a uma generalização apropriada da TCC (condição de convergência tipo-tempo).

Nossos primeiros resultados serão de caráter local: assumiremos que o ângulo hiperbólico θ atinge um máximo local em algum ponto p_0 de Σ^n e usamos o resultado, conhecido desde o Cálculo Diferencial, que $\nabla(\operatorname{senh}^2\theta)(p_0) = 0$ e $\Delta(\operatorname{senh}^2\theta) \leqslant 0$. Ele pode ser visto como uma versão para Espaços-tempo GRW espacialmente densos de [38, Teorema 4.2].

Teorema 3.2. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M_\varphi^n$ um Espaço-tempo GRW espacialmente denso. Suponha que $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço com curvatura média ponderada H_φ constante. Assuma que o ângulo hiperbólico θ entre Σ^n e ∂_t atinge um máximo local em algum ponto $p_0 \in \Sigma^n$ e $f'(h(p_0))\left(H(p_0) - \frac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$. Se, ou*

(a) $f''(h(p_0)) < 0$ *e* $\mathrm{Ric}_\varphi^M \geqslant (n-1)(f^2(\log f)'')\langle,\rangle_M$ *em* $x(p_0)$, *ou*

(b) $f''(h(p_0)) \leqslant 0$ *e* $\mathrm{Ric}_\varphi^M > 0$ *em* $x(p_0)$,

então existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de p_0 em Σ^n que está contida em um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Como p_0 é um ponto de máximo local de θ, temos em p_0 que

$$\begin{aligned}(\operatorname{Hess} h)(\nabla h, \nabla h)_{p_0} &= \frac{1}{2}\langle \nabla |\nabla h|^2, \nabla h\rangle_{p_0} \\ &= \frac{1}{2}\langle \nabla(\operatorname{senh}^2\theta), \nabla h\rangle_{p_0} = 0\end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi(\operatorname{senh}^2\theta)_{p_0} = \frac{1}{2}\Delta(\operatorname{senh}^2\theta)_{p_0} - \langle \nabla(\operatorname{senh}^2\theta), \overline{\nabla}\varphi\rangle_{p_0} \leqslant 0.$$

Então, pelo Teorema 3.1 e as hipóteses, temos, em p_0, que

$$\begin{aligned}0 \geqslant \frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant |\nabla h|^2 &\left\{(2n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\} \\ &+ |\nabla h|^4\left\{(n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\} + \langle N, \partial_t\rangle^2 \operatorname{Ric}_\varphi^M(N^*, N^*).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Assumindo (a), (3.19) se torna, em p_0,

$$0 \geqslant \frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant -\frac{f''(h)}{f(h)}|\nabla h|^2 \geqslant 0. \tag{3.20}$$

Como $f''(h(p_0)) < 0$, obtemos de (3.20) que $\operatorname{senh}^2\theta(p_0) = |\nabla h|^2(p_0) = 0$. Mas p_0 é um ponto de máximo local de θ, portanto existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de p_0 em Σ^n tal que $\theta \equiv 0$, isto é, $\mathcal{U}$ está contido em um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$.

Assumindo (b), (3.19) se torna, em p_0,

$$\begin{aligned}0 \geqslant \frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 &\geqslant \langle N, \partial_t\rangle^2 \operatorname{Ric}_\varphi^M(N^*, N^*) \\ &\geqslant |\nabla h|^2 \operatorname{Ric}_\varphi^M(N^*, N^*) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Enquanto $\operatorname{Ric}_\varphi^M(N^*, N^*) > 0$ em p_0, temos $\operatorname{senh}^2\theta(p_0) = |\nabla h|^2(p_0) = 0$. Similar ao item (a), existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de p_0 em Σ^n que está contida em um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$. □

Como consequência imediata, temos o

Corolário 3.3. *As únicas hipersuperfícies analíticas tipo-espaço de curvatura média ponderada constante* H_φ *imersas em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M_\varphi^n$, *cujo ângulo hiperbólico com* ∂_t *atinge um máximo local em algum ponto* p_0 *tal* *que* $f'(h(p_0))\left(H(p_0)-\frac{H_\varphi}{2}\right)\leqslant 0$ *e um dos dois pares de hipóteses do Teorema 3.2 são cumpridos, são os abertos de slices totalmente geodésicos de* $\overline{M}^{n+1}$.

Observe que no corolário acima a conclusão é que a hipersupefície Σ^n como um todo é um aberto de um slice totalmente geodésico, ao contrário do Teorema, pois lá só podemos concluir que Σ^n possui um aberto contendo p_0 que está contido em um slice. No caso em que o ângulo atinge um máximo global em p_0, obtemos o seguinte

Corolário 3.4. *As únicas hipersuperfícies tipo-espaço de curvatura média ponderada* H_φ *constante imersas em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso* $\overline{M}^{n+1}=-I\times_f M^n_\varphi$, *cujo ângulo hiperbólico com* ∂_t *atinge um máximo global em algum ponto* p_0 *tal que* $f'(h(p_0))\left(H(p_0)-\frac{H_\varphi}{2}\right)\leqslant 0$ *e um dos dois pares de hipóteses do Teorema 3.2 são cumpridos, são os abertos de slices totalmente geodésicos de* $\overline{M}^{n+1}$.

Analogamente ao Teorema 3.2, podemos obter um resultado de não-existência.

Teorema 3.5. *Seja* $\overline{M}^{n+1}=-I\times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso. Não existe hipersuperfície tipo-espaço* Σ^n *de* $\overline{M}^{n+1}$, *com curvatura média ponderada constante* H_φ *tal que o ângulo hiperbólico* θ *entre* Σ^n *e* ∂_t *atinge um máximo local em algum ponto* $p_0\in\Sigma^n$ *onde* $f'(h(p_0))\left(H(p_0)-\frac{H_\varphi}{2}\right)\leqslant 0$, $f''(h(p_0))\leqslant 0$, $\mathrm{Ric}^M_\varphi\geqslant(n-1)(f^2(\log f)'')\langle,\rangle_M$ *em* $x(p_0)$ *e* $f'(h(p_0))\neq 0$.

Demonstração. Suponha que tal hipersuperfície Σ^n exista. Como no Teorema 3.2(a), a partir das hipóteses temos que, em p_0,

$$0\geqslant\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2\geqslant n\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}|\nabla h|^2\geqslant 0. \tag{3.21}$$

Portanto, de (3.21) e do fato de $f'(h(p_0))\neq 0$, concluímos que $\operatorname{senh}^2\theta(p_0)=|\nabla h|^2(p_0)=0$. Mas p_0 é um máximo local de θ, logo existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de p_0 em Σ^n tal que $\theta\equiv 0$, isto é, $\mathcal{U}$ está contido em um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$, logo $f'(h(p_0))=0$, uma contradição. $\square$

Para os próximos resultados, apresentaremos a seguinte definição. Seja $\overline{M}=-I\times_f M^n_\varphi$ um Espaço-tempo GRW espacialmente denso por uma função φ. Dizemos que $\overline{M}^{n+1}$ obedece à **Condição de $\varphi-$convergência tipo-tempo** (que será abreviada por φ-*TCC*) se

$$\mathrm{Ric}^M_\varphi\geqslant(n-1)(f^2(\log f)'')\langle,\rangle_M$$

e $f'' \leqslant 0$. Note que a φ-TCC pode ser tratada como uma versão com densidade da clássica TCC (veja a Proposição 2.9).

No que se segue, um **slab**

$$\mathcal{B}_{t_1,t_2} = [t_1, t_2] \times M^n = \{(t, q) \in -I \times_f M^n : t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$$

será chamado de **região limitada tipo-tempo**.

Na próxima seção, começaremos a utilizar as ferramentas analíticas adequadas para obter os demais resultados.

3.2.1 Não-existência e unicidade via propriedades de integrabilidade

Como primeira ferramenta analítica, usaremos o Lema 3.6 abaixo, o qual é uma extensão do Teorema de Hopf para variedades Riemannianas completas e não-compactas dada por Yau [55]. Sua prova é consequência de [27, Proposição 2.1] (veja [22] ou [31] para a demonstração). No que se segue, consideraremos o seguinte conjunto

$$\mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma) = \left\{ u : \Sigma^n \to \mathbb{R}; \int_{\Sigma^n} |u|(x) e^{-\varphi(x)} d\Sigma^n < +\infty \right\},$$

chamado de *espaço das funções* φ*-integráveis a Lebesgue* em Σ^n.

De acordo com a terminologia clássica relacionada ao operador Laplaciano, uma função suave u definida em uma variedade com densidade $\overline{M}_\varphi$ é dita ser **φ-subharmônica** se $\Delta_\varphi u \geqslant 0$. E é dita ser **$\varphi-$superharmônica** se $\Delta_\varphi u \leqslant 0$. Finalmente, u é **$\varphi-$harmônica** se $\Delta_\varphi u = 0$.

Lema 3.6. *Seja* Σ^n *uma variedade Riemanniana completa e* $g : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Se* g *é* φ*-subharmônica (or* φ*-superharmônica) com* $|\nabla g| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma)$*, então* g *é* φ*-harmônica.*

Agora, estamos em posição de provar o seguinte resultado.

Teorema 3.7. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC. Suponha que* Σ^n *é uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média ponderada constante* H_φ*, contida em uma região limitada tipo-tempo*

$\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}^{n+1}$ *tal que* $f'' < 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$. *Assuma que o ângulo hiperbólico* θ *e o operador forma* A *de* Σ^n *são limitados,* $f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$ *e* $f'(h)\mathrm{Hess}\, h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h. *Se* $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma)$, *então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Inicialmente, observe que a hipótese φ-TCC garante que

$$\begin{aligned}\langle N, \partial_t\rangle^2 \mathrm{Ric}^M_\varphi(N^*, N^*) &\geqslant \langle N, \partial_t\rangle^2 (n-1)\left(\frac{f''(h)}{f(h)} - \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\right)\langle N^*, N^*\rangle \\ &= (1 + |\nabla h|^2)\left((n-1)\frac{f''(h)}{f(h)} - (n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\right)|\nabla h|^2 \\ &= \left((n-1)\frac{f''(h)}{f(h)} - (n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\right)(|\nabla h|^2 + |\nabla h|^4).\end{aligned}$$

(Lembre que $\langle N^*, N^*\rangle = |\nabla h|^2 = \langle N, \partial_t\rangle^2 - 1$.)

Logo, segue do Teorema 3.1 e das demais hipóteses que

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi |\nabla h|^2 \geqslant \left\{ n\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - \frac{f''(h)}{f(h)} \right\} |\nabla h|^2 - \frac{f''(h)}{f(h)}|\nabla h|^4 \geqslant 0. \tag{3.22}$$

Então $|\nabla h|^2$ é φ-subharmônica. Como A e θ são ambos limitados e Σ^n está contida em uma região limitada tipo-tempo de $\overline{M}$, temos

$$|\nabla |\nabla h|^2| = |\nabla(\mathrm{senh}^2\,\theta)| = 2\cosh\theta \left| -\left(A + \frac{f'(h)}{f(h)}(\cosh\theta) I\right)\nabla h \right| \leqslant C|\nabla h|, \tag{3.23}$$

para alguma constante $C > 0$. Mas $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma^n)$, então temos $|\nabla|\nabla h|^2| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma^n)$, Logo o Lema 3.6 prova que $\Delta_\varphi |\nabla h|^2 = 0$. Retornando a (3.22) e usando o fato de que $f''(h) < 0$, obtemos $|\nabla h|^4 = 0$ em Σ^n e portanto Σ^n é um slice $\{t_0\} \times M$ de $\overline{M}^{n+1}$. Então $H = H_\varphi = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)}$. Mas $f'(t_0)(H - H_\varphi/2) \leqslant 0$, donde $f'(t_0) = 0$, provando assim que Σ^n é totalmente geodésico. □

Podemos obter um resultado de não-existência sem assumir a desigualdade estrita $f'' < 0$, se ao invés disso assumirmos que $f' \neq 0$. Este é o conteúdo do próximo Teorema.

Teorema 3.8. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC. Não existem hipersuperfícies tipo-espaço completas* Σ^n *de* $\overline{M}^{n+1}$, *com curvatura média ponderada constante* H_φ, *contida em uma região limitada tipo-tempo* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}^{n+1}$ *na qual* $f' \neq 0$, *cujos ângulo hiperbólico* θ *ae operador forma* A *são limitados,* $f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$, $f'(h)\mathrm{Hess}\, h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h *e* $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma^n)$.

Demonstração. Suponha que tal hipersuperfície Σ^n exista. Das hipóteses, temos que (veja (3.22))

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant n\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}|\nabla h|^2 \geqslant 0. \tag{3.24}$$

Similar ao Teorema 3.7, temos a desigualdade (3.23), para alguma constante $C > 0$. Então, do Lema 3.6, temos $\Delta_\varphi|\nabla h|^2 = 0$. Portanto, $|\nabla h|^2 = 0$ em Σ^n e isso significa que o ângulo hiperbólico θ de Σ^n satisfaz $\cosh^2\theta = 1$. Portanto, existe $t_0 \in I$ tal que $\Sigma^n \subset \{t_0\} \times M^n$. Como Σ^n é completa, temos que $\Sigma^n = \{t_0\} \times M^n$. De $f'(t_0)(H - H_\varphi/2) \leqslant 0$, temos que Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$, isto é, $f'(t_0) = 0$, uma contradição. □

3.2.2 Unicidade via ângulo hiperbólico convergindo para zero no infinito

Os próximos dois Teoremas usam a hipótese de que o ângulo hiperbólico converge para zero no infinito, ao invés da hipótese de integrabilidade de $|\nabla h|$ nos Teoremas 3.7 e 3.8.

Seguindo a terminologia introduzida em [7], dada uma variedade Riemanniana conexa, completa e não-compacta M^n e denotando por

$$d(\cdot, o) : M^n \to [0, +\infty)$$

a distância Riemanniana de M^n medida de um ponto fixado $o \in M^n$, diremos que uma função contínua $f : M \to \mathbb{R}$ **converge para zero no infinito** quando

$$\lim_{d(x,o)\to+\infty} f(x) = 0. \tag{3.25}$$

Uma forma de interpretar o limite (3.25) é a seguinte: para todo $\varepsilon > 0$, existe uma bola geodésica fechada $\overline{B(o,r)} = \{x \in M^n;\ d(x,o) \leqslant r\}$ de raio $r > 0$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ se $x \notin \overline{B(o,r)}$.

Agora, estamos em posição de apresentar nosso próximo resultado.

Teorema 3.9. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC. Suponha que* Σ^n *é uma hipersuperfície tipo-espaço completa e não-compacta de* $\overline{M}^{n+1}$ *com curvatura média ponderada constante* H_φ*. Assuma que* $f''(h) < 0$ *e* $f'(h)\left(H - \frac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$ *em* Σ^n*. Se o ângulo hiperbólico* θ *converge para zero no infinito, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}$*.*

Demonstração. Como o ângulo hiperbólico θ converge para zero no infinito, dada qualquer constante $\varepsilon > 0$, existe um compacto $\mathcal{C} \subset \Sigma^n$ tal que $\theta(p) < \varepsilon$ se $p \notin \mathcal{C}$. Seja $p_1 \in \mathcal{C}$ um ponto de máximo global de θ em $\mathcal{C}$. Se $\varepsilon < \theta(p_1)$, então p_1 é ponto de máximo global de θ em Σ^n. Caso contrário, tome um $\varepsilon_0 < \theta(p_1) \leqslant \varepsilon$ e um compacto $\mathcal{C}_0 \supset \mathcal{C}$ tal que $\theta(p) < \varepsilon_0$ para todo $p \notin \mathcal{C}_0$. Neste caso, o ponto p_0 de máximo global de $\theta|_{\mathcal{C}_0}$ será o ponto de máximo global do ângulo hiperbólico em Σ^n.

Assim, existe um ponto de máximo global $p_0 \in \Sigma^n$ de θ. Pelas hipóteses, teremos no ponto p_0 que

$$f'(h(p_0))\left(H(p_0) - \frac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0,$$

$\mathrm{Ric}_\varphi^M \geqslant (n-1)(f^2(\log f)'')\langle , \rangle_M$ em $x(p_0)$, e $f''(h(p_0)) < 0$. O resultado segue então do Corolário 3.4 e do fato de Σ^n ser completa. $\square$

Podemos obter uma versão semelhante ao Teorema 3.9 acima se ao invés de assumirmos a desigualdade estrita $f''(h) < 0$, pedirmos que $f''(h) \leqslant 0$ e $f'(h)(\mathrm{Hess}\, h)(\nabla h, \nabla h) \leqslant 0$. Isto nos permite, por exemplo, aplicar o resultado para o caso particular de um *produto simples lorentziano com densidade* $\overline{M}^{n+1} = -I \times M_\varphi^n$, o que não é possível no Teorema 3.9. Usaremos o seguinte lema, o qual é um princípio do Máximo no infinito, e é a Proposição 2.2 de [7].

Lema 3.10. *Seja* Σ^n *uma variedade Riemanniana conexa, completa e não-compacta, e seja* $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ *um campo de vetores em* Σ^n*. Assuma que exista uma função* $f \in \mathcal{C}^\infty$*, não-negativa, não identicamente nula, convergindo para zero no infinito e tal que* $\langle \nabla f, X\rangle \geqslant 0$*. Se* $\mathrm{div}_{\Sigma^n} X \geqslant 0$ *em* Σ^n*, então* $\langle \nabla f, X\rangle \equiv 0$ *on* M.

Após a discussão prévia acima, estamos em posição de apresentar nosso próximo resultado.

Teorema 3.11. *Sejam* $\overline{M} = -I \times_f M_\varphi^n$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC e* Σ^n *uma hipersuperfície tipo-espaço completa não-compacta de* $\overline{M}$ *com curvatura média ponderada constante* H_φ *satisfazendo* $f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$ *e* $f'(h)\mathrm{Hess}\, h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h*. Se o ângulo hiperbólico* θ *converge para zero no infinito, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}$.

Demonstração. Suponha que Σ^n não é um slice de $\overline{M}$. Então a função $f = \mathrm{senh}^2\,\theta$ é suave, não-negativa e não-identicamente nula em Σ^n, convergindo para zero no infinito.

Definindo o campo de vetores $X = e^{-\varphi}\nabla(\operatorname{senh}^2\theta)$, temos que $\langle\nabla(\operatorname{senh}^2\theta), X\rangle \geqslant 0$ e

$$\operatorname{div}_{\Sigma^n} X = e^{-\varphi}\Delta_\varphi(\operatorname{senh}^2\theta) \geqslant 0,$$

pelo Teorema 3.1 e as demais hipóteses. Portanto, pelo Lema 3.10, concluímos que $\nabla(\operatorname{senh}^2\theta) = 0$ em Σ^n, isto é, θ é uma função constante. Mas θ converge para zero no infinito, donde $\operatorname{senh}^2\theta \equiv 0$ e temos uma contradição. Daí, concluímos que Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}$. □

3.2.3 Um resultado de unicidade via φ-parabolicidade

Uma variedade com densidade $\overline{M}_\varphi$ é chamada de **φ-parabólica** se as funções constantes são as únicas φ-subharmônicas em $\overline{M}$ que são limitadas superiormente. Consequentemente, a φ-parabolicidade implica a seguinte propriedade: *se* $u \in C^\infty(\overline{M}_\varphi)$ *é limitada e* $\Delta_\varphi u$ *não muda de sinal, então* u *é constante.*

Para provar o próximo Teorema, precisaremos do seguinte resultado, que fornece um critério simples de φ−parabolicidade para uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n imersa em um Espaço-tempo GRW e corresponde a [4, Teorema 1].

Lema 3.12. *Seja* Σ^n *uma hipersuperfície tipo-espaço completa em um Espaço-tempo GRW* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *cuja fibra* M^n *é completa com recobrimento Riemanniano universal φ-parabólico. Se a função ângulo hiperbólico* θ *de* Σ^n *é limitada e a restrição* $f(h)$ *em* Σ^n *da função warping* f *de* $\overline{M}$ *satisfaz*

(i) $\sup_{\Sigma^n} f(h) < \infty$ *e*

(ii) $\inf_{\Sigma^n} f(h) > 0$,

então Σ^n *é φ-parabólica.*

Estamos agora em posição de apresentar nosso próximo resultado.

Teorema 3.13. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à φ-TCC cuja fibra* M^n *é completa com recobrimento Riemanniano universal φ-parabólico. Suponha que* Σ^n *é uma hipersuperfície tipo-espaço completa de* $\overline{M}^{n+1}$ *com curvatura média ponderada* H_φ *constante, cujo ângulo hiperbólico* θ *é limitado,*

$f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$ *e* $f'(h)\mathrm{Hess}\, h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h. *Se*

$$0 < \inf_{\Sigma^n} f(h) \leqslant \sup_{\Sigma^n} f(h) < \infty,$$

então Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Observe que, pelas hipóteses, podemos aplicar o Lema 3.12 para concluir que Σ^n é φ-parabólica.

Do mesmo modo como no Teorema 3.7, observamos que a desigualdade (3.22) é cumprida, logo $|\nabla h|^2$ é φ-subharmônica. Como o ângulo hiperbólico θ de Σ^n é limitado, $u = |\nabla h|^2 = \operatorname{senh}^2\theta$ também o é, donde $|\nabla h|^2$ se anula identicamente em Σ^n por sua φ-parabolicidade. Portanto, Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$. □

3.2.4 Não-existência e unicidade via Princípio do Máximo de Omori-Yau generalizado

Seja $(M, \langle,\rangle, e^{-\varphi} dM)$ uma variedade com densidade (não necessariamente completa). Dizemos que o **Princípio do Máximo de Omori-Yau fraco** vale para Δ_φ se, para qualquer $u \in C^2(M)$ satisfazendo $\sup_M u = u^* < \infty$, existe uma sequência $\{x_k\} \subset M$ tal que

(i) $u(x_k) = u^* - \dfrac{1}{k}$

(ii) $\Delta_\varphi u(x_k) \leqslant \dfrac{1}{k}$

Considerando esse contexto, citamos o seguinte lema, que corresponde ao *Remark* 2.18 de [48].

Lema 3.14. *Seja* $(M, \langle,\rangle, e^{-\varphi} dM)$ *uma variedade com densidade completa. Se* Ric_φ *é limitado inferiormente, então o princípio do Máximo de Omori-Yau fraco se cumpre para o Laplaciano ponderado* Δ_φ.

Após a prévia discussão, estamos em posição de apresentar nosso próximo resultado.

Teorema 3.15. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC. Suponha que* Σ^n *é uma hipersuperfície completa tipo-espaço não-compacta de* $\overline{M}^{n+1}$ *contida em uma região limitada tipo-tempo* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ *tal que* $f'' < 0$

em $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, *com curvatura média ponderada constante* H_φ *satisfazendo* $f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$, *com* $f'(h)\mathrm{Hess}\, h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h *e cujo ângulo hiperbólico* θ *é limitado. Se* Ric_φ *de* Σ^n *é limitado inferiormente, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}$.

Demonstração. Do Teorema 3.1, temos que (veja (3.22))

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi |\nabla h|^2 \geqslant -\frac{f''(h)}{f(h)}|\nabla h|^4.$$

Como Σ^n está contida em uma região limitada tipo-tempo de $\overline{M}^{n+1}$ tal que $f'' < 0$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi |\nabla h|^2 \geqslant C|\nabla h|^4.$$

Como o ângulo hiperbólico θ de Σ^n é limitado e $|\nabla h|^2 = \mathrm{senh}^2\,\theta$, a hipótese $\mathrm{Ric}_\varphi > -\infty$, nos permite aplicar o Lema 3.14 para garantir que existe uma sequência $\{x_k\} \subset \Sigma^n$ tal que

$$0 \geqslant \frac{1}{2}\limsup \Delta_\varphi(\mathrm{senh}^2\,\theta)(x_k) \geqslant C \limsup(\mathrm{senh}^4\,\theta(x_k)) = C\sup_\Sigma(\mathrm{senh}^4\,\theta) \geqslant 0.$$

Portanto, $\sup_\Sigma(\mathrm{senh}^4\,\theta) = 0$, isto é, θ se anula identicamente em Σ^n. Portanto, concluímos que Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$. □

Assim como na Subseção 3.2.1, podemos obter um resultado de não-existência.

Teorema 3.16. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC. Não existem hipersuperfícies tipo-espaço completas* Σ^n *de* $\overline{M}^{n+1}$ *contida em uma região limitada tipo-tempo* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}^{n+1}$ *na qual* $f' \neq 0$, *com curvatura média ponderada constante* H_φ *satisfazendo* $f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$ *e* $f'(h)\mathrm{Hess}\, h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h, *com* Ric_φ *limitado inferiormente e ângulo hiperbólico* θ *limitado.*

Demonstração. Assuma que exista uma tal hipersuperfície Σ^n satisfazendo as hipóteses. Como no Teorema 3.15 podemos usar (3.22) para concluir que

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi |\nabla h|^2 \geqslant n\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}|\nabla h|^2.$$

Como Σ^n está contido em uma região limitada tipo-tempo de $\overline{M}^{n+1}$ onde $f' \neq 0$ em

$\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant C|\nabla h|^2.$$

Como o ângulo hiperbólico θ de Σ^n é limitado, $|\nabla h|^2 = \operatorname{senh}^2\theta$ e $\mathrm{Ric}_\varphi > -\infty$, segue do Lema 3.14 que existe uma sequência $\{x_n\} \subset \Sigma^n$ tal que

$$0 \geqslant \limsup \frac{1}{2}\Delta_\varphi(\operatorname{senh}^2\theta)(x_n) \geqslant C \limsup(\operatorname{senh}^2\theta(x_n)) = C\sup_{\Sigma^n}(\operatorname{senh}^2\theta) \geqslant 0.$$

Então novamente θ se anula identicamente em Σ^n. Portanto, $\Sigma^n = \{t_0\} \times M$ é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}$. Mas $f'(t_0) = 0$, então temos uma contradição e a prova está completa. $\square$

Nos dois Teoremas 3.15 e 3.16, a hipótese $\mathrm{Ric}_\varphi > -\infty$ foi utilizada a fim de podermos utilizar o Princípio do Máximo de Omori-Yau fraco. No entanto, existe um caso em que ela se cumpre automaticamente. Para isso, precisaremos do seguinte lema, o qual está provado em [3, Lema 3]. Com ele, podemos obter os seguintes corolários, enunciados abaixo, dos Teoremas 3.15 e 3.16.

Lema 3.17. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à SNCC e tal que o Hessiano da função densidade φ é limitada inferiormente, isto é, $\overline{\mathrm{Hess}}\,\varphi(U,U) \geqslant \beta|U|^2$ para uma certa constante β e para todo $U \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço que está contida em uma região limitada tipo-tempo de $\overline{M}^{n+1}$. Suponha que a curvatura média ponderada H_φ de Σ^n é limitada. Então o tensor de Bakry-Émery-Ricci de Σ^n, Ric_φ, é limitado inferiormente.*

Como consequência do Teorema 3.15, obtemos o seguinte resultado de unicidade.

Corolário 3.18. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à SNCC cuja função densidade φ é convexa em M^n. Suponha que Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço completa de $\overline{M}$ contida em uma região limitada tipo-tempo $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ tal que $f'' < 0$ em $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, com curvatura média ponderada constante H_φ satisfazendo $f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$, com $f'(h)\mathrm{Hess}\,h \leqslant 0$ na direção de ∇h, e cujo ângulo hiperbólico θ é limitado. Então Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$.*

Como consequência do Teorema 3.16, obtemos o seguinte resultado de não-existência.

Corolário 3.19. *Seja* $\overline{M} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à STCC tal que a função peso* φ *é convexa em* M^n. *Não existem hipersuperfícies tipo-espaço completas* Σ^n *de* $\overline{M}$ *contida em uma região limitada tipo-tempo* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ *tal que* $f' \neq 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, *com curvatura média ponderada constante* H_φ *satisfazendo* $f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$, *com* $f'(h)\mathrm{Hess}\, h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h, *e cujo ângulo hiperbólico* θ *é limitado.*

Para provar ambos os Corolários, apenas observe que se $\overline{M}^{n+1}$ obedece à SNCC, φ é convexa em M^n e Σ^n está contida em uma região limitada tipo-tempo $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}^{n+1}$ tal que $f'' \leqslant 0$ em $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, então $\overline{M}^{n+1}$ obedece à φ-TCC em $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$.

3.2.5 Unicidade via Princípio do máximo de Akutagawa generalizado

Para provar nosso próximo resultado, vamos utilizar a seguinte versão do princípio do máximo de Akutagawa [1] para o Laplaciano ponderado. Sua demonstração, que é uma aplicação do princípio do máximo de Omori [46] e Yau [54], pode ser encontrada em [15, Proposição 1].

Lema 3.20. *Seja* Σ^n *uma variedade Riemanniana* n*-dimensional completa cujo tensor de Ricci é limitado inferiormente e seja* $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave tal que* $|\nabla\varphi|$ *é limitado em* Σ^n. *Se* $u \in C^2(\Sigma^n)$ *é não-negativa e satisfaz* $\Delta_\varphi u \geqslant a u^b$, *para algumas constantes reais* $a > 0$ *e* $b > 1$, *então* u *se anula identicamente em* Σ^n.

Agora, estamos em posição de apresentar nosso próximo resultado.

Teorema 3.21. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-Tempo GRW espacialmente denso obedecendo à STCC com* φ *convexa em* M^n. *Seja* Σ^n *uma hipersuperfície tipo-espaço completa contida em uma região limitada tipo-tempo* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ *onde* $f'' < 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, *com curvatura média ponderada constante* H_φ *tal que* $f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$, $f'(h)\mathrm{Hess}\, h \leqslant 0$ *na direção de* ∇h *e cujo ângulo hiperbólico* θ *e operador forma* A *são limitados. Se* $|\overline{\nabla}\varphi|$ *é limitado em* Σ^n, *então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. A fim de aplicar o Lema 3.20, precisamos provar que Ric_Σ é limitado inferiormente. Seja então $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ e considere um referencial ortonormal $\{E_i\}$ definido em um aberto de Σ^n. Utilizando a equação de Gauss para hipersuperfícies (veja a igualdade (2.19) na Seção 2.2) segue que

$$\mathrm{Ric}(X, X) = \sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle + |AX|^2 + nH\langle AX, X \rangle. \tag{3.26}$$

Observe que, como $\overline{M}^{n+1}$ é espacialmente denso, $\langle \overline{\nabla}\varphi, N \rangle = \langle \overline{\nabla}\varphi, N^* \rangle$, então temos que

$$\begin{aligned} |H| &= |H_\varphi + \langle \overline{\nabla}\varphi, N^* \rangle| \\ &\leqslant |H_\varphi| + |\overline{\nabla}\varphi||\nabla h| = |H_\varphi| + |\overline{\nabla}\varphi| \operatorname{senh}\theta. \end{aligned}$$

Portanto, enquanto θ e $|\overline{\nabla}\varphi|$ são ambos limitados em Σ^n, o mesmo ocorre com H. Além disso, como A é limitado em Σ^n, o último termo de (3.26) também é limitado em Σ^n.

Consequentemente, para mostrar que Ric_Σ é limitado inferiormente, observe que da expressão em (3.26) precisamos apenas provar que $\sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle$ é limitado inferiormente.

Além disso, como $X = X^* - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$, temos, usando a Proposição 2.3, que

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle = & \sum_i \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle + (n-1)(\log f)'(h))^2|X|^2 \\ & - (n-2)(\log f)''(h)\langle X, \nabla h \rangle^2 - (\log f)''(h)|\nabla h|^2|X|^2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Para a primeira parte do lado direito de (3.27), temos que

$$\sum_i \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle = f^2 \sum_i K_M(E_i^*, X^*)(|X^*|_M^2 |E_i^*|_M^2 - \langle X^*, E_i^* \rangle_M^2).$$

Por outro lado, um cálculo rápido mostra que

$$\begin{aligned} |X^*|_M^2 |E_i^*|_M^2 - \langle X^*, E_i^* \rangle_M^2 = & \frac{1}{f(h)^4} \big\{ |X|^2 + \langle X, \nabla h \rangle^2 \\ & + |X|^2 \langle \nabla h, E_i \rangle^2 - \langle X, E_i \rangle^2 - 2\langle X, \nabla h \rangle \langle X, E_i \rangle \langle \nabla h, E_i \rangle \big\}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Portanto, usando (3.28) e a hipótese STCC, obtemos

$$\sum_i \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle \geqslant (\log f)''(h)\{(n-1)|X|^2 + (n-2)\langle X, \nabla h\rangle^2 + |X|^2|\nabla h|^2\}.$$

A estimativa obtida na expressão acima nos permite concluir de (3.27) que

$$\begin{aligned}\sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle = & \sum_i \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle \\ & + (n-1)(\log f)'(h)^2|X|^2 - (n-2)(\log f)''(h)\langle X, \nabla h\rangle^2 \\ & - (\log f)''(h)|\nabla h|^2|X|^2. \\ \geqslant & (\log f)''(h)(n-1)|X|^2 + (n-1)(\log f)'(h)^2|X|^2.\end{aligned}$$

Obtemos da desigualdade acima que

$$\begin{aligned}\sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle & \geqslant (n-1)|X|^2\left[\frac{f''(h)}{f(h)} - \frac{f'(h)^2}{f(h)^2} + \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\right] \\ & = \frac{f''(h)}{f(h)}(n-1)|X|^2.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Agora, como Σ^n está contida em uma região limitada tipo-tempo de $\overline{M}^{n+1}$, de (3.29) segue que

$$\sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle$$

é limitado por baixo, e consequentemente Ric_Σ também é limitado por baixo.

Finalmente, como a STCC implica a TCC, temos que $\mathrm{Ric}^M \geqslant (n-1)\,(f^2(\log f)'')\,\langle\ ,\ \rangle_M$. Mas $\mathrm{Hess}^M\,\varphi \geqslant 0$, portanto

$$\mathrm{Ric}_\varphi^M = \mathrm{Ric}^M + \mathrm{Hess}^M\,\varphi \geqslant (n-1)\left(f^2(\log f)''\right)\langle\ ,\ \rangle_M,$$

isto é, $\overline{M}^{n+1}$ obedece à φ-TCC.

Daí, de modo similar ao Teorema 3.7, observamos que a desigualdade (3.22) é cumprida. Portanto, aplicando o Lema 3.20, concluímos que o ângulo hiperbólico θ de Σ^n se anula identicamente em Σ^n, donde Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$. $\square$

3.2.6 Unicidade via propriedades de crescimento do φ-volume

Seja M_φ uma variedade Riemanniana conexa, orientada, completa e não-compacta, densa por uma função φ. Denotamos por $B(p,t)$ a bola geodésica centrada em p e com raio t. Dada uma função contínua $\sigma : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, dizemos que M tem **crescimento de $\varphi-$volume como** $\sigma(t)$ se existe $p \in M$ tal que

$$\mathrm{vol}_\varphi(B(p,t)) = O(\sigma(t))$$

quando $t \to +\infty$, onde vol_φ denota o φ-volume, isto é,

$$\mathrm{vol}_\varphi(B(p,t)) = \int_{B(p,t)} e^{-\varphi}\, dM. \tag{3.30}$$

De posse do conceito acima, citamos a próxima ferramenta analítica que usaremos, associada ao crescimento de volume, cujo enunciado e demonstração pode ser encontrado em [53, Corolário 4.11] (veja também [6, Teorema 2.1]).

Lema 3.22. *Seja M uma variedade conexa, orientada, completa e não-completa e $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função suave. Seja $\psi \in C^\infty(M)$ uma função não-negativa tal que $\Delta_\varphi \psi \geqslant a\psi$ em M, para alguma função positiva $a \in \mathcal{C}^1(M)$ tal que $\langle \nabla a, \nabla \psi \rangle \geqslant 0$.*

(a) Se M_φ tem crescimento de $\varphi-$volume polinomial e $|\nabla\psi| < c\rho^k$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é uma distância Riemanniana com origem em $o \in M$ e $c > 0$ e $0 \leqslant k < 1$ são constantes, então $\psi \equiv 0$ em M.

(b) Se M tem crescimento de φ-volume exponencial e $|\nabla\psi|(x) \to 0$ quando $\rho(x) \to +\infty$, então $\psi \equiv 0$ on M.

Agora, estamos em posição de enunciar e provar o último resultado desta seção.

Teorema 3.23. *Seja $\overline{M} = -I \times_f M^n_\varphi$ um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à φ-TCC. Suponha que Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço completa, orientada e não-compacta de $\overline{M}$ com curvatura média ponderada constante H_φ satisfazendo*

$$f'(h)\left(H - \frac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$$

e $f'(h)\mathrm{Hess}\, h \leqslant 0$ na direção de ∇h, contida em uma região limitada tipo-tempo $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ tal que $f'' < 0$ em $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$.

(a) *Se* Σ^n *tem crescimento de* φ*-volume polinomial e* $|\nabla(\operatorname{senh}^2\theta)| < c\rho^k$, *onde* $\rho = d(\cdot, o)$ *é uma distância Riemanniana com origem em* $o \in M$ *e* $c > 0$ *e* $0 \leqslant k < 1$ *são constantes, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}$.

(b) *Se* Σ^n *tem crescimento de* φ*-volume exponencial e* $|\nabla(\operatorname{senh}^2\theta)|(x) \to 0$ *quando* $\rho(x) \to +\infty$, *então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}$.

Demonstração. Similar ao Teorema 3.7, podemos aplicar (3.22) para obter

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant -\frac{f''(h)}{f(h)}|\nabla h|^2. \tag{3.31}$$

Como Σ^n está contida em uma região limitada tipo-tempo onde $f'' < 0$,

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant a|\nabla h|^2$$

para alguma constante $a > 0$.

Agora, é suficiente definir $\psi = |\nabla h|^2 = \operatorname{senh}^2\theta$ e aplicar o Lema 3.22 para obter $|\nabla h|^2 \equiv 0$ nos itens (a) e (b), completando a demonstração. □

3.3 Resultados tipo Calabi-Bernstein

Nosso objetivo nesta seção é aplicar nossos resultados prévios de não-existência e unicidade sobre hipersuperfícies a fim de estudar soluções inteiras de uma equação diferencial relacionada à curvatura média ponderada de hipersuperfícies tipo-espaço em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à φ-TCC.

Primeiro, lembremos os conceitos básicos sobre gráficos inteiros em Espaços-tempo GRW. Seja $\Omega \subseteq M^n$ um aberto conexo de M^n. Vamos considerar o gráfico vertical sobre Ω determinado por uma função suave $u \in C^\infty(\Omega)$, dado por

$$\Sigma(u) = \{(u(x), x);\ x \in \Omega\} \subset -I \times_f M^n.$$

A métrica induzida em Ω a partir da métrica Lorentziana do espaço ambiente via $\Sigma(u)$ é dada por

$$\langle\,,\rangle_u = -du^2 + f^2(u)\langle,\rangle_{M^n}. \tag{3.32}$$

O gráfico (3.32) é dito **inteiro** se $\Omega = M^n$. Observe que um gráfico $\Sigma(u)$ é uma hipersuperfície tipo-espaço se, e somente se, $|Du|_M < f(u)$, onde $|Du|_M$ denota a norma em M^n do gradiente Du of u.

Pelo Lema 3.1 de [14], no caso onde M^n é simplesmente conexa, se Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa em $-I \times_f M^n$ de modo que a restrição $f(h)$ da função warping f é limitada, então Σ^n é um gráfico inteiro tipo-espaço em tal ambiente. Entretanto, em contraste com o caso de gráficos no caso Riemanniano, um gráfico inteiro em um espaço Lorentziano não é necessariamente completo, no sentido de que a métrica (3.32) não é completa em M^n.

Em [2], Albujer deu exemplos explícitos de gráficos inteiros não-completos imersos no produto simples lorentziano $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$. Um deles é $\Sigma_a^2(u)$ com $u : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x, y) = u(y) = \log\left(y + \sqrt{a + y^2}\right) + b, \quad \text{com} \quad a, b \in \mathbb{R}, a \geqslant 0.$$

No gráfico $\Sigma_a(u)$, a curva divergente $\alpha : (1, \infty) \to \Sigma_a(u)$ dada por $\alpha(s) = (u(s), 0, s)$ tem comprimento finito. Por outro lado, em Albujer [3], Proposição 9, foi provado que se M^n é completa e $|Du|_M^2 \leqslant f^2(u) - \delta$ para uma certa constante $\delta > 0$, então $\Sigma^n(u)$ é completa.

Não é difícil verificar que a aplicação de Gauss futuro N de $\Sigma(u)$ e ∇h são dadas por

$$N = \frac{f(u)}{\sqrt{f(u)^2 - |Du|_M^2}}\left(\partial_t + \frac{1}{f(u)^2} Du\right) \tag{3.33}$$

e

$$\nabla h = \left(\frac{|Du|_M^2}{f(u)^2 - |Du|_M^2}\right)\partial_t + \frac{Du}{f(u)^2 - |Du|_M^2}.$$

Além disso, o operador forma A_u de $\Sigma(u)$ com respeito a orientação (3.33) é dado por

$$\begin{aligned} A_u X = & -\frac{1}{f(u)\sqrt{f(u)^2 - |Du|_M^2}} D_X Du - \frac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2 - |Du|_M^2}} X \\ & + \left(\frac{-\langle D_X Du, Du\rangle_M}{f(u)\left(f(u)^2 - |Du|_M^2\right)^{3/2}} + \frac{f'(u)\langle Du, X\rangle_M}{\left(f(u)^2 - |Du|_M^2\right)^{3/2}}\right) Du, \end{aligned} \tag{3.34}$$

para qualquer campo de vetores X tangente a Ω, onde D denota a conexão de Levi-Civita de M^n. Daí, denotando por div o operador divergência em $\Sigma(u)$, a função curvatura média

$H(u) = -\mathrm{tr}(A_u)$ associada a A_u é dada por

$$H(u) = -\mathrm{div}\left(\frac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2 - |Du|_M^2}}\right) - \frac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2 - |Du|_M^2}}\left(n + \frac{|Du|_M^2}{f(u)^2}\right).$$

Portanto, segue que a função curvatura φ-média $H_\varphi(u)$ de Σ^n associada a A_u é dada por

$$H_\varphi(u) = -\mathrm{div}_\varphi\left(\frac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2 - |Du|_M^2}}\right) - \frac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2 - |Du|_M^2}}\left(n + \frac{|Du|_M^2}{f(u)^2}\right). \quad (3.35)$$

A equação diferencial $H_\varphi(u) = c$ com $c \in \mathbb{R}$ e a restrição $|Du|_M < f(u)$ é chamada de **equação das hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média ponderada constante** em $\overline{M}$ e suas soluções nos dão gráficos tipo-espaço em $\overline{M}$ com curvatura média ponderada constante.

Motivados pela discussão acima, vamos considerar a seguinte equação diferencial

$$(\mathbf{E}) \begin{cases} \mathrm{div}_\varphi\left(\dfrac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2 - |Du|_M^2}}\right) = c - \dfrac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2 - |Du|_M^2}}\left(n + \dfrac{|Du|_M^2}{f(u)^2}\right) \\ \\ |Du|_M \leqslant \alpha f(u), \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $c \in \mathbb{R}$ são constantes. Observamos que $(\mathbf{E})$ é uniformemente elíptica e que a restrição em $|Du|_M$ assegura que o ângulo hiperbólico $\theta(u)$ de $\Sigma(u)$ é limitado. Com efeito, de (3.33) obtemos

$$|\nabla h|^2 = \mathrm{senh}^2\,\theta(u) = \frac{|Du|_M^2}{f^2(u) - |Du|_M^2}. \quad (3.36)$$

Portanto, usando $|\nabla h|^2 = \mathrm{senh}^2\,\theta$ e (3.36), vemos que $|Du|_M \leqslant \alpha f(u)$ implica que

$$\cosh\theta(u) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \quad (3.37)$$

Afim de estudar a equação $(\mathbf{E})$, definimos a **norma** C^2 de uma função u por

$$|u|_{C^2(M)} = \max_{|\gamma|\leqslant 2} |D^\gamma u|_{L^\infty(M)},$$

No que segue, vamos estudar soluções de $(\mathbf{E})$ que satisfazem a seguinte condição na função curvatura média $H(u)$:

$$f'(u)\left(H(u) - \frac{c}{2}\right) \leqslant 0. \tag{3.38}$$

Nosso próximo resultado corresponde aos Teoremas 3.7 e 3.8.

Teorema 3.24. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC cuja fibra* M^n *é completa.*

(a) *As únicas soluções inteiras de* (**E**) *com norma* C^2 *finita, satisfazendo* (3.38)*, e tais que* $f''(u) < 0$, $f'(u)(\mathrm{Hess}^M u) \leqslant 0$ *na direção de* Du, *e* $|Du|_M \in \mathcal{L}^1_\varphi(M)$, *são as funções constantes* $u = u_0$, *com* $f'(u_0) = 0$.

(b) *Não existe solução inteira* u *de* (**E**)*, com norma* C^2 *finita, satisfazendo* (3.38)*, tal que* $f'(u) \neq 0$, $f'(u)(\mathrm{Hess}^M u) \leqslant 0$ *na direção de* Du *e* $|Du|_M \in \mathcal{L}^1_\varphi(M)$.

Demonstração. A restrição $|Du|_M \leqslant \alpha f(u)$ para algum $0 < \alpha < 1$ garante que $\Sigma(u)$ é completa, pois M^n é completa por hipótese. Uma vez que $|u|_{C^2(M)} < +\infty$, em particular u é limitada, segue da restrição $|Du|_M \leqslant \alpha f(u)$ e de (3.34) que $|A_u|$ é limitado em $\Sigma(u)$. Também note que, em $\Sigma^n(u)$, temos

$$\begin{aligned}
2f'(h)(\mathrm{Hess}\,h)(\nabla h, \nabla h) &= f'(h)\nabla h\langle \nabla h, \nabla h\rangle \\
&= \frac{1}{f(u)^2 - |Du|^2_M} Du\left[\frac{|Du|^2_M}{f(u)^2 - |Du|^2_M}\right] \\
&= \frac{f'(u)}{2}(\mathrm{Hess}^M u)(Du, Du) \cdot \frac{\cosh^2\theta(u)}{(f(u)^2 - |Du|^2_M)^2} \\
&\quad - \frac{2f(u)f'(u)^2|Du|^2_M}{(f(u)^2 - |Du|^2_M)^3},
\end{aligned}$$

onde $Du[\,\cdot\,]$ denota a derivada direcional, então

$$f'(h)(\mathrm{Hess}\,h)(\nabla h, \nabla h) \leqslant 0$$

em $\Sigma^n(u)$, se $f'(u)(\mathrm{Hess}^M u)(Du, Du) \leqslant 0$.

Agora, baseando-se no argumento Alías, Colares e de H.F. de Lima [9, Corolário 5.1] (ou então veja [19, Teorema 4.7]), vamos concluir que $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma^n(u))$. Sejam dM e $d\Sigma^n(u)$ os elementos de volume Riemannianos de $(M^n, \langle,\rangle_M)$ e $(\Sigma^n(u), \langle,\rangle_u)$, respectivamente, e $G = \det(g_{ij})$ onde

$$g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle_u = f(u)^2 \delta_{ij} - E_i(u) E_j(u).$$

Primeiro, segue de (3.32) que $d\Sigma^n(u) = \sqrt{|G|} dM$. Aqui, $\{E_1, \dots, E_n\}$ denota um referencial ortonormal com respeito a métrica $\langle , \rangle_M$. Então, um cálculo direto mostra que

$$|G| = f(u)^{2(n-1)} (f(u)^2 - |Du|_M^2).$$

Consequentemente,

$$d\Sigma^n(u) = f(u)^{n-1} \sqrt{f(u)^2 - |Du|_M^2} dM. \tag{3.39}$$

Portanto, se $|Du|_M \in \mathcal{L}^1_\varphi(M)$, então $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma^n(u))$. Portanto, podemos aplicar os Teoremas 3.7 e 3.8 para obter os itens (a) e (b). $\square$

Podemos raciocinar como na prova do resultado acima para obter as versões não-paramétricas de todos os outros Teoremas da seção 3.2. Por exemplo, aplicando diretamente os Teoremas 3.2 e 3.5, obtemos os seguintes resultados.

Teorema 3.25. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso. Suponha que* $u : \Omega \subseteq M^n \to \mathbb{R}$ *é uma solução de* ($\mathbf{E}$) *tal que* $\operatorname{senh} \theta(u)$ *atinge um ponto de máximo em algum* $x_0 \in M^n$ *tal que* $f'(u(x_0))\{H(u(x_0)) - c/2\} \leqslant 0$. *Se ou*

(a) $f''(u(x_0)) < 0$ *e* $\mathrm{Ric}^M_\varphi \geqslant (n-1)(f^2(\log f)'')\langle , \rangle_M$ *em* x_0, *ou*

(b) $f''(u(x_0)) \leqslant 0$ *e* $\mathrm{Ric}^M_\varphi > 0$ *em* x_0,

então existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ *de* x_0 *em* Ω *tal que* u *é uma função constante* $u = u_0$, *com* $f'(u_0) = 0$.

Teorema 3.26. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso. Não existem soluções* $u : \Omega \subseteq M^n \to \mathbb{R}$ *de* ($\mathbf{E}$) *tal que* $\operatorname{senh} \theta(u)$ *atinge um máximo local em algum ponto* $x_0 \in \Omega$ *satisfazendo* $f'(u(x_0))\{H(u(x_0)) - c/2\} \leqslant 0$, $f''(u(x_0)) \leqslant 0$, *com* $\mathrm{Ric}^M_\varphi \geqslant (n-1)(f^2(\log f)'')\langle , \rangle_M$ *em* x_0 *e* $f'(u(x_0)) \neq 0$.

Como aplicação direta do Teorema 3.9, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.27. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC tal que a fibra* M^n *é completa e não-compacta. As únicas soluções* *inteiras de* (**E**) *satisfazendo* (3.38)*, tais que* $f''(u) < 0$*, e* $|Du|_M$ *converge para zero no infinito são as funções constantes* $u = u_0$*, com* $f'(u_0) = 0$*.*

Demonstração. Aqui, basta notar que $\operatorname{senh}^2\theta = \dfrac{|Du|_M^2}{f(u)^2 - |Du|_M^2}$, logo $\operatorname{senh}^2\theta$ converge para zero no infinito, e usar o Teorema 3.9. □

Similarmente, por uma aplicação direta do Teorema 3.11, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.28. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC tal que a fibra* M^n *é completa e não-compacta. As únicas soluções inteiras de* (**E**) *satisfazendo* (3.38)*, tais que* $f''(u) < 0$*,* $f'(u)(\mathrm{Hess}^M u) \leqslant 0$ *na direção de* Du *e* $|Du|_M$ *converge para zero no infinito são as funções constantes* $u = u_0$*, com* $f'(u_0) = 0$*.*

Demonstração. Aqui, basta notar que $\operatorname{senh}^2\theta = \dfrac{|Du|_M^2}{f(u)^2 - |Du|_M^2}$ e usar o Teorema 3.11. □

Outro resultado, que segue imediatamente do Teorema 3.13, é o seguinte:

Teorema 3.29. *Seja* $\overline{M} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC cuja fibra* M^n *é completa com recobrimento universal Riemanniano* φ*-parabólico. As únicas soluções inteiras de* (**E**) *satisfazendo* (3.38)*, tais que*

$$f'(u)(\mathrm{Hess}^M u) \leqslant 0$$

na direção de Du *e*

$$0 < \inf_{x\in M} f(u(x)) \leqslant \sup_{x\in M} f(u(x)) < \infty,$$

são as funções constantes $u = u_0$*, com* $f'(u_0) = 0$*.*

Os itens (a) e (b) do próximo Teorema correspondem a versões não-paramétricas dos Corolários 3.18 e 3.19.

Teorema 3.30. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* SNCC *cuja fibra* M^n *é completa e tal que* φ *é uma função convexa em* M^n*. Seja* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$ *uma região limitada tipo-tempo de* $\overline{M}^{n+1}$*.*

(i) Se $f'' < 0$ *nos pontos de* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$*, então as únicas soluções inteiras* $u(x) \in [t_1, t_2]$ *de* (**E**) *satisfazendo* (3.38)*, tal que* $f'(u)(\mathrm{Hess}^M u) \leqslant 0$ *na direção de* Du*, são as funções constantes* $u = u_0$*, com* $f'(u_0) = 0$*.*

(ii) *Se* $f' \neq 0$ *nos pontos de* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, *então não existem soluções inteiras* $u(x) \in [t_1, t_2]$ *de* (**E**) *satisfazendo* (3.38) *tal que* $f'(u)(\mathrm{Hess}^M u) \leqslant 0$ *na direção de* Du.

Prosseguindo, como aplicação do Teorema 3.21 podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 3.31. *Seja* $\overline{M} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à STCC cuja fibra* M^n *é completa e tal que* φ *é uma função convexa em* M^n. *Seja* u *uma solução inteira de* (**E**) *com norma* C^2 *finita satisfazendo* (3.38), *tal que* $f'(u)(\mathrm{Hess}^M u) \leqslant 0$ *na direção de* Du *e* $|\overline{\nabla}\varphi|$ *é limitada em* $\Sigma^n(u)$. *Então* u *é uma função constante* $u = u_0$, *com* $f'(u_0) = 0$.

Demonstração. Com o mesmo raciocínio da primeira parte da demonstração do Teorema 3.24, como estamos supondo que $|u|_{C^2(M)} < +\infty$ e $|Du|_M \leqslant \alpha f(u)$ para alguma constante $0 < \alpha < 1$, de (3.34) temos que $|A_u|$ é limitado em $\Sigma(u)$ e que $\Sigma(u)$ é completa. Além disso, como $f'(u)(\mathrm{Hess}^M u) \leqslant 0$ na direção de Du, então $f'(h)(\mathrm{Hess}\, h) \leqslant 0$ na direção de ∇h em $\Sigma^n(u)$, como mostram os cálculos feitos na prova do Teorema 3.24. Agora, podemos aplicar o Teorema 3.21 para completar a prova. □

Finalmente, como aplicação do Teorema 3.23, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.32. *Sejam* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-TCC cuja fibra* M^n *é completa não-compacta e* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$ *uma região limitada tipo-tempo de* $\overline{M}^{n+1}$ *tal que* $f'' < 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$. *Seja* $u(x) \in [t_1, t_2]$ *uma solução inteira de* (**E**) *satisfazendo* (3.38) *e tal que* $f'(u)(\mathrm{Hess}^M u) \leqslant 0$ *na direção de* Du. *Denote por* $D(\mathrm{senh}^2\theta(u))$ *o gradiente em* M^n *de* $\mathrm{senh}^2\theta(u(x))$.

(a) *Se* M^n *tem crescimento de* φ*-volume polinomial e* $|D(\mathrm{senh}^2\theta(u))| < r\rho^k$, *onde* $\rho = d(\cdot, o)$ *é uma distância Riemanniana com origem em* $o \in M^n$, $r > 0$ *e* $0 \leqslant k < 1$ *são constantes, então* u *é uma função constante* $u = u_0$, *com* $f'(u_0) = 0$.

(b) *Se* M^n *tem crescimento de* φ*-volume exponencial e* $|D(\mathrm{senh}^2\theta(u))|(x) \to 0$ *quando* $\rho(x) \to +\infty$, *então* u *é uma função constante* $u = u_0$, *com* $f'(u_0) = 0$.

Demonstração. Note inicialmente que

$$\nabla(\mathrm{senh}^2\theta(u)) = \frac{1}{f(u)^2} D(\mathrm{senh}^2\theta(u)) + \frac{1}{f(u)^2}\langle D(\mathrm{senh}^2\theta(u)), N\rangle N.$$

Então,

$$\langle \nabla(\operatorname{senh}^2\theta(u)), \nabla(\operatorname{senh}^2\theta(u))\rangle = \frac{1}{f(u)^2}|D(\operatorname{senh}^2\theta(u))|_M^2 + \frac{1}{f(u)^4}\langle D(\operatorname{senh}^2\theta(u)), N\rangle^2.$$

Usando (3.33), obtemos

$$\langle D(\operatorname{senh}^2\theta(u)), N\rangle^2 = \frac{\langle D(\operatorname{senh}^2\theta(u)), Du\rangle^2}{f(u)^2(f(u)^2 - |Du|_M^2)},$$

logo, vale

$$\begin{aligned}\langle \nabla(\operatorname{senh}^2\theta(u)), \nabla(\operatorname{senh}^2\theta(u))\rangle &= \frac{|D(\operatorname{senh}^2\theta(u))|_M^2}{f(u)^2} + \frac{\langle D(\operatorname{senh}^2\theta(u)), Du\rangle_M^2}{f(u)^2(f(u)^2 - |Du|_M^2)}\\ &\leqslant \frac{|D(\operatorname{senh}^2\theta(u))|_M^2}{f(u)^2} + \frac{|D(\operatorname{senh}^2\theta(u))|_M^2|Du|_M^2}{f(u)^2(f(u)^2 - |Du|_M^2)}\\ &= \frac{|D(\operatorname{senh}^2\theta(u))|_M^2}{f(u)^2}\left\{1 + \operatorname{senh}^2\theta(u)\right\}.\end{aligned}$$

Portanto, pela relação (3.37), temos que

$$|\nabla(\operatorname{senh}^2\theta(u))| \leqslant \frac{|D(\operatorname{senh}^2\theta(u))|_M}{f(u)\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{3.40}$$

Do mesmo modo que no Teorema 3.24, podemos raciocinar como em [9, Corolário 5.1]: da relação (3.39) e do fato de u ser limitada, temos que se $(M^n, \langle,\rangle_M)$ tem crescimento de φ-volume polinomial, então $(\Sigma^n(u), \langle,\rangle_u)$ também tem crescimento de φ-volume polinomial. Analogamente, se $(M^n, \langle,\rangle_M)$ tem crescimento de φ-volume exponencial, então $(\Sigma^n(u), \langle,\rangle_u)$ também tem crescimento de φ-volume exponencial. Portanto, a relação (3.40) e o fato de que u é limitada nos permitem aplicar o Teorema 3.23 para completar a prova. □

Capítulo 4

Sólitons do fluxo da curvatura média ponderada

Neste capítulo abordaremos os resultados contidos no artigo [17], feito em parceria com C. P. Aquino e H. F. de Lima. Nosso objetivo aqui é apresentar resultados de unicidade e não-existência para sólitons do fluxo da curvatura média ponderada com respeito ao campo $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ imersas em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso por uma função φ.

Assim como no capítulo anterior, a técnica que usaremos se baseia em vários princípios do Máximo para o Laplaciano ponderado Δ_φ, como por exemplo o recente critério de $\varphi-$parabolicidade [4, Teorema 1] e um princípio do Máximo no infinito [7]. Para isso, vamos aplicar novamente a Proposição 3.1 — na verdade, a sua versão expressa em (3.18). Em seguida, definiremos uma extensão da NCC (veja o final da Seção 2.2) que será utilizada como hipótese padrão para os resultados. Os teoremas deste capítulo são, portanto, semelhantes aos do Capítulo 3.

Na última seção deste capítulo, aplicaremos os resultados obtidos para o estudo de um equação diferencial associada a sólitons do fluxo pela curvatura média ponderada em Espaços-tempo GRW espacialmente densos.

4.1 Fluxo da curvatura média ponderada

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Σ^n em uma variedade Lorentziana $\overline{M}^{n+1}$. O **fluxo da curvatura média** relacionado à hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ em uma variedade Lorentziana $(n+1)$−dimensional $\overline{M}^{n+1}$ é definido como a família a 1-parâmetro de imersões suaves tipo-espaço $\Psi_t = \Psi(t, \cdot) : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ com correspondentes imagens $\Sigma_t^n = \Psi_t(\Sigma^n)$ satisfazendo a seguinte equação de evolução

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \vec{H} \\ \\ \Psi(0, p) = \psi(p) \end{cases} \tag{4.1}$$

em algum intervalo de tempo, onde $\vec{H} = HN$ denota o **vetor curvatura média** (não-normalizado) da hipersuperfície tipo-espaço Σ_t^n imersa em $\overline{M}^{n+1}$.

De modo similar, o **fluxo da curvatura média ponderada** $\Psi : [0, T) \times \Sigma^n \to \overline{M}_\varphi^{n+1}$ de uma hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ tipo-espaço em uma variedade Lorentziana $\overline{M}_\varphi^{n+1}$, munida de uma função peso φ, busca por soluções da equação

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \vec{H}_\varphi \\ \\ \Psi(0, p) = \psi(p) \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $\vec{H}(t, \cdot)_\varphi$ é o **vetor curvatura média ponderada** (não normalizado), definido por

$$\vec{H}_\varphi = \vec{H} - (\overline{\nabla}\varphi)^\perp,$$

de $\Sigma_t^n = \Psi(t, \Sigma^n)$, que é uma hipersuperfície tipo-espaço para todo $t \in [0, T)$

Em nosso contexto, seguindo uma terminologia análoga a de [41, Definição 2] (veja a seção 5.1), diremos que uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}_\varphi^{n+1}$ imersa em um Espaço-tempo GRW $\overline{M}_\varphi^{n+1} = -I \times_f M_\varphi^n$ espacialmente denso é um **sóliton tipo-espaço do fluxo da curvatura média ponderada** relativo a $\mathcal{K} = f(t)\partial_t$ e **constante sóliton** $c \in \mathbb{R}$ se sua curvatura média ponderada (não normalizada) satisfaz

$$H_\varphi = cf(h)\langle N, \partial_t \rangle. \tag{4.3}$$

Uma função interessante associada a esses sólitons, introduzida em [12] e [33], é a **função sóliton**

$$\zeta_c(t) = nf'(t) + cf(t)^2. \tag{4.4}$$

Como estamos assumindo que a função densidade φ não depende do parâmetro $t \in I$, cada slice $M_{t_*} = \{t_*\} \times M^n$ é um sóliton do fluxo da curvatura média ponderada relativo a $\mathcal{K} = f(t)\partial_t$ e constante sóliton c dada por

$$c = -n\frac{f'(t_*)}{f(t_*)^2}. \tag{4.5}$$

Além disso, t_* está implicitamente dado pela condição $\zeta_c(t_*) = 0$.

4.2 Resultados de não-existência e unicidade para sólitons do fluxo da curvatura média ponderada

Nesta seção vamos apresentar nossos resultados de unicidade e não-existência relativos a sólitons do fluxo da curvatura média ponderada em um Espaços-tempo GRW espacialmente denso obedecendo a uma generalização apropriada da NCC. As ideias e ferramentas analíticas são semelhantes às usadas na Seção 3.2, com a diferença de que ali a curvatura média ponderada H_φ era constante e estávamos utilizando a φ-TCC.

De modo semelhante ao Capítulo 3, nossos primeiros resultados serão de caráter local: assumiremos que o ângulo hiperbólico θ atinge um máximo local em algum ponto p_0 de Σ^n e usamos o resultado já conhecido que $\nabla(\operatorname{senh}^2\theta)(p_0) = 0$ e $\Delta(\operatorname{senh}^2\theta) \leqslant 0$. Obtemos então, como aplicação do Teorema 3.1 (na verdade, usaremos a sua forma expressa em (3.18)), nosso primeiro resultado.

Teorema 4.1. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso. Suponha que* $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *é um sóliton tipo-espaço do fluxo da curvatura média ponderada relativo à* $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ *com constante sóliton* c*. Assuma que o ângulo hiperbólico* θ *entre* Σ^n *e* ∂_t *atinge um máximo local em um ponto* $p_0 \in \Sigma^n$*, e, em* p_0*, temos* $cA_{p_0} \geqslant 0$ *e* $f'(h(p_0))\left(H(p_0) - \dfrac{H_\varphi(p_0)}{2}\right) \leqslant 0$*. Se ou*

(a) $f''(h(p_0)) < 0$ *e* $\mathrm{Ric}^M_\varphi \geqslant (n-1)(f^2(\log f)'')\langle,\rangle_M$ *em* $x(p_0)$*, ou*

(b) $f''(h(p_0)) \leqslant 0$ *e* $\mathrm{Ric}^M_\varphi > 0$ *em* $x(p_0)$*,*

então existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ *de* p_0 *em* Σ^n *que está contida em um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$*.*

Demonstração. A demonstração é semelhante a do Teorema 3.2. Como p_0 é um ponto de máximo local de θ, temos

$$\begin{aligned}(\operatorname{Hess} h)(\nabla h, \nabla h)_{p_0} &= \frac{1}{2}\langle \nabla |\nabla h|^2, \nabla h\rangle_{p_0} \\ &= \frac{1}{2}\langle \nabla(\operatorname{senh}^2\theta), \nabla h\rangle_{p_0} = 0\end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi(\operatorname{senh}^2\theta)_{p_0} = \frac{1}{2}\Delta(\operatorname{senh}^2\theta)_{p_0} - \langle \nabla(\operatorname{senh}^2\theta), \overline{\nabla}\varphi\rangle_{p_0} \leqslant 0.$$

Portanto, usando a igualdade (3.17), temos, em p_0,

$$-4\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle = -4\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\left\{|\nabla h|^4 + |\nabla h|^2\right\}.$$

Além disso, em p_0,

$$-\langle N, \partial_t\rangle_{p_0}\langle \nabla H_\varphi, \nabla h\rangle_{p_0} = \cosh\theta(p_0) c f(h)\langle A_{p_0}\nabla h, \nabla h\rangle \geqslant 0.$$

Então, pela desigualdade (3.18) e as hipóteses do Teorema, vale, no ponto p_0,

$$\begin{aligned}0 \geqslant \frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant |\nabla h|^2 &\left\{(2n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\} \\ &+ |\nabla h|^4\left\{(n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - n\frac{f''(h)}{f(h)}\right\} + \langle N, \partial_t\rangle^2 \operatorname{Ric}_\varphi^M(N^*, N^*).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Assumindo a configuração do item (a), (4.6) se torna, em p_0,

$$0 \geqslant \frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant -\frac{f''(h)}{f(h)}|\nabla h|^2 \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Como $f''(h(p_0)) < 0$, obtemos de (4.7) que $\operatorname{senh}^2\theta(p_0) = |\nabla h|^2(p_0) = 0$. Mas p_0 é um ponto de máximo local de θ, portanto existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de p_0 em Σ^n tal que $\theta \equiv 0$, isto é, $\mathcal{U}$ está contido em um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$.

Agora, considerando o contexto do item (b), (4.6) se torna, em p_0,

$$\begin{aligned}0 \geqslant \frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 &\geqslant \langle N, \partial_t\rangle^2 \operatorname{Ric}_\varphi^M(N^*, N^*) \\ &\geqslant |\nabla h|^2 \operatorname{Ric}_\varphi^M(N^*, N^*) \geqslant 0.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Como $\mathrm{Ric}_{\varphi}^{M}(N^*, N^*) > 0$ em $x(p_0)$, temos $\operatorname{senh}^2\theta(p_0) = |\nabla h|^2(p_0) = 0$. Similar ao item (a), existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de p_0 em Σ^n que está contida em um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$. □

Do Teorema 4.1, temos os seguintes corolários.

Corolário 4.2. *Os únicos sólitons analíticos tipo-espaço do fluxo da curvatura média ponderada relativo à $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ com constante sóliton c em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso, cujo ângulo hiperbólico com ∂_t atinge um máximo local em um ponto p_0 tal que $cA_{p_0} \geqslant 0$, $f'(h(p_0))\left(H(p_0) - \dfrac{H_{\varphi}(p_0)}{2}\right) \leqslant 0$ e um dos dois pares de hipóteses do Teorema 4.1 são cumpridas, são os subconjuntos abertos de slices totalmente geodésicos.*

Quando o ângulo hiperbólico atinge um máximo global, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.3. *Os únicos sólitons analíticos tipo-espaço do fluxo da curvatura média ponderada relativo à $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ com constante sóliton c em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso, cujo ângulo hiperbólico com ∂_t atinge um máximo global em um ponto p_0 tal que $cA_{p_0} \geqslant 0$,*

$$f'(h(p_0))\left(H(p_0) - \frac{H_{\varphi}(p_0)}{2}\right) \leqslant 0$$

e um dos dois pares de hipóteses do 4.1 são cumpridas, são os subconjuntos abertos de slices totalmente geodésicos.

De forma semelhante ao Teorema 4.1, temos um resultado de não-existência.

Teorema 4.4. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M_{\varphi}^{n}$ um Espaço-tempo GRW espacialmente denso. Não existe sóliton tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ do fluxo da curvatura média ponderada relativo à $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ com constante sóliton c, tal que o ângulo hiperbólico θ entre Σ^n e ∂_t atinge um ponto de máximo local em algum $p_0 \in \Sigma^n$ onde $cA_{p_0} \geqslant 0$, $f'(h(p_0))\left(H(p_0) - \dfrac{H_{\varphi}(p_0)}{2}\right) \leqslant 0$, $f''(h(p_0)) \leqslant 0$, $\mathrm{Ric}_{\varphi}^{M} \geqslant (n-1)(f^2(\log f)'')\langle , \rangle_M$ em $x(p_0)$ e $f'(h(p_0)) \neq 0$.*

Demonstração. Suponha que tal hipersuperfície Σ^n exista. Como no Teorema 4.1(a), das hipóteses, temos, em p_0,

$$0 \geqslant \frac{1}{2}\Delta_{\varphi}|\nabla h|^2 \geqslant n\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}|\nabla h|^2 \geqslant 0. \tag{4.9}$$

Assim, de (4.9) e o fato de $f'(h(p_0)) \neq 0$, concluímos que $\operatorname{senh}^2\theta(p_0) = |\nabla h|^2(p_0) = 0$. Mas p_0 é um ponto de máximo local de θ, portanto existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de p_0 em Σ^n tal que $\theta \equiv 0$, isto é, $\mathcal{U}$ está contido em um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$, donde $f'(h(p_0)) = 0$, uma contradição. $\square$

Nas próximas subseções, vamos obter vários resultados de unicidade e não-existência sobre sólitons do fluxo da curvatura média ponderada com respeito a $\mathcal{K} = f(t)\partial_t$ em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo uma extensão matemática da NCC (veja o final da Seção 2.2) que definiremos agora.

Dizemos que um Espaço-tempo GRW $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ espacialmente denso por uma função φ **obedece à φ-NCC** quando o tensor de Bakry-Émery-Ricci Ric^M_φ da sua fibra Riemanniana $(M^n, \langle\, , \rangle_M)$ satisfaz a desigualdade

$$\mathrm{Ric}^M_\varphi \geqslant (n-1)(f^2(\log f)'')\langle\, , \rangle_M.$$

Assim, a φ-NCC é uma condição menos restritiva que a φ-TCC vista no Capítulo 3.

Nossos próximos resultados utilizam o Teorema 3.1 (na verdade, a fórmula 3.18) para obter resultados de unicidade e não-existência para sólitons do fluxo da curvatura média ponderada. As ferramentas analíticas serão as mesmas vistas na Seção 3.2. Por isso, apresentaremos diretamente os resultados e suas demonstrações.

4.2.1 Não-existência e unicidade via propriedades de integrabilidade

Nosso próximo teorema utiliza o Lema 3.6, que usa a hipótese de integrabilidade de uma função cujo Laplaciano ponderado não muda de sinal para garantir que ele é identicamente nulo. A sua demonstração é similar a do Teorema 3.7.

Teorema 4.5. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à φ-NCC. Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, tipo-espaço e completo, um sóliton do fluxo da curvatura média ponderada relativo à $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ com constante sóliton c, contido em uma região limitada tipo-tempo $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}^{n+1}$ onde $(\log f)''(h) < 0$, tal que $-4\dfrac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c \leqslant 0$ e cujo ângulo hiperbólico θ e operador forma A são limitados, com $A \geqslant 0$, e $H \leqslant -\dfrac{c}{2}\inf_{\Sigma^n} f(h)$. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma)$, então Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$.*

Demonstração. Inicialmente, a condição de convergência φ-NCC garante que

$$\begin{aligned}\langle N, \partial_t\rangle^2 \mathrm{Ric}_\varphi^M(N^*, N^*) &\geqslant \langle N, \partial_t\rangle^2 (n-1)\left(\frac{f''(h)}{f(h)} - \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\right)\langle N^*, N^*\rangle \\ &= (1+|\nabla h|^2)\left((n-1)\frac{f''(h)}{f(h)} - (n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\right)|\nabla h|^2 \\ &= \left((n-1)\frac{f''(h)}{f(h)} - (n-1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\right)\left\{|\nabla h|^2 + |\nabla h|^4\right\}.\end{aligned}$$

Veja também que, enquanto $\nabla H_\varphi = cf(h)A(\nabla h)$ e $4f'(h) + cf(h)^2 \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}&-4\frac{f'(h)}{f(h)}\langle N, \partial_t\rangle\langle A\nabla h, \nabla h\rangle - \langle N, \partial_t\rangle\langle \nabla H_\varphi, \nabla h\rangle \\ &\qquad = -\frac{\langle N, \partial_t\rangle}{f(h)}\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle\left\{4f'(h) + cf(h)^2\right\} \geqslant 0, \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Agora, usando o fato de $H_\varphi = cf(h)\langle N, \partial_t\rangle$, a hipótese em H e os fatos de $c \leqslant 0$ e $f'(h) \geqslant 0$, obtemos

$$f'(h)\{2H - H_\varphi\} \leqslant f'(h)\{2H + cf(h)\} \leqslant 0. \qquad (4.11)$$

Segue da igualdade (3.18) e das hipóteses que

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant \left\{(n+1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - (\log f)''(h)\right\}|\nabla h|^2 + \left\{\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - (\log f)''(h)\right\}|\nabla h|^4 \geqslant 0. \qquad (4.12)$$

Então $|\nabla h|^2$ é φ-subharmônica. Enquanto A e θ são ambos limitados e Σ^n está contido em uma região limitada tipo-tempo de $\overline{M}^{n+1}$, temos, usando a Proposição 2.6(a), que

$$|\nabla|\nabla h|^2| = |\nabla(\operatorname{senh}^2\theta)| = 2\cosh\theta\left|-\left(A + \frac{f'(h)}{f(h)}(\cosh\theta)I\right)\nabla h\right| \leqslant C|\nabla h|, \qquad (4.13)$$

para alguma constante $C > 0$. Mas $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma^n)$, logo também vale $|\nabla|\nabla h|^2| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma^n)$, e usando o Lema 3.6, concluímos que $\Delta_\varphi|\nabla h|^2 = 0$. Retornando a (4.12) e usando o fato de $(\log f)''(h) < 0$, obtemos $|\nabla h|^4 = 0$ em Σ^n e portanto Σ^n é um slice $\{t_0\}\times M$ de $\overline{M}^{n+1}$. Então, $H = H_\varphi = \frac{f'(t_0)}{nf(t_0)}$. Por (4.11), teremos $f'(t_0)(H - H_\varphi/2) \leqslant 0$, donde $f'(t_0) = 0$, provando assim que Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$. $\square$

Observação 4.6. *Quando* Σ^n *é um slice* $\{t_0\} \times M^n$, *temos* $c = -n\dfrac{f'(t_0)}{f(t_0)^2}$. *Note que a hipótese*

$$-4\frac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c \leqslant 0$$

implica, no caso em que $n \geqslant 4$, *que* $-n\dfrac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c$, *isto é, que a função sóliton* $\zeta_c(h) = nf'(h) + cf(h)^2$ *é não-negativa.*

Prosseguindo, podemos obter um resultado de não-existência ao trocarmos a desigualdade estrita $(\log f)''(h) < 0$ por $(\log f)''(h) \leqslant 0$ e além disso assumirmos que $f'(h) \neq 0$. Obtemos então o seguinte:

Teorema 4.7. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-NCC. Não existe sóliton completo tipo-espaço do fluxo da curvatura média ponderada* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *relativo à* $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ *com constante sóliton* c, *contido em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ *onde* $(\log f)''(h) \leqslant 0$ *e* $f'(h) \neq 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, *satisfazendo* $-4\dfrac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c \leqslant 0$ *e cujos ângulo hiperbólico* θ *e operador forma* A *são limitados, com* $A \geqslant 0$, $H \leqslant -\dfrac{c}{2}\inf_{\Sigma^n} f(h)$ *e* $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma^n)$.

Demonstração. Suponha que uma tal hipersuperfície Σ^n exista. Das hipóteses, temos que (veja (4.12))

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant (n+1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}|\nabla h|^2 \geqslant 0. \tag{4.14}$$

De modo semelhante ao Teorema 4.5, nós temos a desigualdade (4.13), para alguma constante $C > 0$. Então, do Lema 3.6, concluímos que $\Delta_\varphi|\nabla h|^2 = 0$. Portanto, $|\nabla h|^2 = 0$ em Σ^n, e isto significa que o ângulo hiperbólico θ de Σ^n satisfaz $\cosh^2\theta = 1$. Assim, existe $t_0 \in I$ tal que $\Sigma^n \subset \{t_0\} \times M^n$. Como Σ^n é completa, temos $\Sigma^n = \{t_0\} \times M^n$. Sendo $f'(t_0)(H - H_\varphi/2) \leqslant 0$, Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$, isto é, $f'(t_0) = 0$, uma contradição. □

4.2.2 Unicidade via ângulo hiperbólico convergindo para zero no infinito

Nossos próximos dois Teoremas utilizam a hipótese de que o ângulo hiperbólico converge para zero no infinito ao invés da hipótese de integrabilidade de $|\nabla h|$ nos Teoremas 4.5 e 4.7. Os conceitos envolvidos e a ferramenta analítica utilizada são as mesmas da Subseção 3.2.2.

O resultado abaixo utiliza o Corolário 4.3. A argumentação é semelhante à demonstração do Teorema 3.2.

Teorema 4.8. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-NCC. Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *um sóliton tipo-espaço do fluxo da curvatura média ponderada relativo à* $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$*, completo e não-compacto, com constante sóliton* c*, tal que* $cA \geqslant 0$*,* $f'(h)\left(H - \dfrac{H_\varphi}{2}\right) \leqslant 0$ *e* $f''(h) < 0$ *em* Σ^n*. Se o ângulo hiperbólico* θ *converge para zero no infinito, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$*.*

Demonstração. Como o ângulo hiperbólico θ converge para zero no infinito, dada qualquer constante $\varepsilon > 0$, existe um compacto $\mathcal{C} \subset \Sigma^n$ tal que $\theta(p) < \varepsilon$ se $p \notin \mathcal{C}$. Seja $p_1 \in \mathcal{C}$ um ponto de máximo global de θ em $\mathcal{C}$. Se $\varepsilon < \theta(p_1)$, então p_1 é ponto de máximo global de θ em Σ^n. Caso contrário, tome um $\varepsilon_0 < \theta(p_1) \leqslant \varepsilon$ e um compacto $\mathcal{C}_0 \supset \mathcal{C}$ tal que $\theta(p) < \varepsilon_0$ para todo $p \notin \mathcal{C}_0$. Neste caso, o ponto p_0 de máximo global de $\theta|_{\mathcal{C}_0}$ será o ponto de máximo global do ângulo hiperbólico em Σ^n.

Assim, existe um ponto de máximo global $p_0 \in \Sigma^n$ de θ. O resultado segue portanto do Corolário 4.3 e do fato de Σ^n ser completa. $\square$

Uma outro resultado de unicidade pode ser obtido com o uso do Lema 3.10.

Teorema 4.9. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo espacialmente denso obedecendo à* φ*-NCC. Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *um sóliton tipo-espaço do fluxo da curvatura* $\varphi-$*média relativo à* $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$*, completo e não-compacto, com constante sóliton* c*, tal que* $(\log f)''(h) \leqslant 0$*,* $-4\dfrac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c \leqslant 0$*, o operador forma* A *é semidefinido e não-negativo e* $H \leqslant -\dfrac{c}{2}\inf_{\Sigma^n} f(h)$*. Se o ângulo hiperbólico* θ *converge para zero no infinito, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$*.*

Demonstração. Suponha que Σ^n não é um slice de $\overline{M}^{n+1}$. Então a função $f = \operatorname{senh}^2\theta$ é suave, não-negativa e não-identicamente nula em Σ^n e converge para zero no infinito. Definindo $X = e^{-\varphi}\nabla(\operatorname{senh}^2\theta)$, temos que $\langle \nabla(\operatorname{senh}^2\theta), X\rangle \geqslant 0$ e

$$\operatorname{div}_{\Sigma^n} X = e^{-\varphi}\Delta_\varphi(\operatorname{senh}^2\theta) \geqslant 0,$$

pela igualdade (3.18) e as hipóteses. Portanto, pelo Lema 3.10, obtemos $\nabla(\operatorname{senh}^2\theta) = 0$ em Σ^n, isto é, θ é uma função constante. Mas θ converge para zero no infinito, portanto

$\operatorname{senh}^2 \theta \equiv 0$ e temos uma contradição. Usando (4.11), concluímos que $f'(t_0) = 0$, logo Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$. $\square$

4.2.3 Um resultado de unicidade via φ-parabolicidade

Agora, utilizaremos o Lema 3.12, enunciado na Subseção 3.2.3, que fornece uma condição para que a hipersuperfície Σ^n seja $\varphi-$parabólica, para provar o seguinte resultado de unicidade.

Teorema 4.10. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-NCC cuja fibra* M^n *é completa com recobrimento universal Riemanniano* φ*-parabólico. Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *um sóliton tipo-espaço completo do fluxo da curvatura média ponderada relativo à* $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ *com constante sóliton* c*, cujo ângulo hiperbólico* θ *é limitado, tal que* $(\log f)''(h) \leqslant 0$, $-4\dfrac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c \leqslant 0$, *o operador forma* A *é semidefinido não-negativo e* $H \leqslant -\dfrac{c}{2} \inf_{\Sigma^n} f(h)$*. Se*

$$0 < \inf_{\Sigma^n} f(h) \leqslant \sup_{\Sigma^n} f(h) < \infty,$$

então Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Observe que, pelas hipóteses, podemos aplicar o Lema 3.12 para concluir que Σ^n é φ-parabólica. Como no Teorema 4.5, observe que a desigualdade (4.12) é satisfeita, logo $|\nabla h|^2$ é φ-subharmônica. Como o ângulo hiperbólico θ de Σ^n é limitado, $u = |\nabla h|^2 = \operatorname{senh}^2 \theta$ também o é, logo $|\nabla h|^2$ é identicamente nulo em Σ^n pela φ-parabolicidade. Portanto, Σ^n é um slice $\{t_0\} \times M^n$. Daí, $H = H_\varphi = n\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}$. Por (4.11), temos $f'(t_0)(H - H_\varphi/2) \leqslant 0$, logo $f'(t_0) = 0$ e donde concluímos que Σ^n é totalmente geodésico. $\square$

A importância da noção de $\varphi-$parabolicidade pode ser exemplificada pelo fato de que existem variedades não-parabólicas que munidas de uma função densidade adequada φ são $\varphi-$parabólicas. Por exemplo, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ não é parabólico se $n \geqslant 3$. No entanto, o **espaço Gaussiano** $\mathbb{G}^n$, que consiste em $\mathbb{R}^n$ munido da função **densidade de probabilidade gaussiana** φ definida por

$$e^{-\varphi(x)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}, \tag{4.15}$$

é $\varphi-$parabólico. De fato, segue do Corolário 3 de [36] que $\mathbb{G}^n$ tem $\varphi-$volume finito (veja (3.30)). Por outro lado, Impera e Rimoldi [37, *Remark* 3.8] observaram que uma condição suficiente para que uma variedade com densidade M^n_φ ser $\varphi-$parabólica é que seja geodesicamente completa e

$$\mathrm{vol}_\varphi(\partial B(o,r))^{-1} \notin \mathcal{L}^1(+\infty)$$

para algum ponto origem $o \in M^n$. Aqui, $B(o,r)$ denota a bola geodésica de M^n de centro $o \in M^n$ e raio $r > 0$. E também observaram que M^n_φ é $\varphi-$parabólica se

$$\mathrm{vol}_\varphi(B(o,r)) = O(r^2), \quad \text{quando} \quad r \to +\infty.$$

Em particular, M^n_φ é $\varphi-$parabólica quando tem $\varphi-$volume finito.

Além disso, de (4.15) não é difícil ver que φ é convexa. Portanto, o Espaço-tempo GRW $\overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R}\times_f \mathbb{G}^n$, com a função warping $f(t) = e^t$, obedece à φ-NCC. Mas $\overline{M}^{n+1}$ não possui slice totalmente geodésico, pois $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Podemos então enunciar o seguinte

Corolário 4.11. *Não existe sóliton tipo-espaço completo do fluxo da curvatura média ponderada* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{G}^n$, *relativo à* $\mathcal{K} = e^t\partial_t$ *com constante sóliton* c, *contido em um slab de* $\overline{M}^{n+1}$, *com ângulo hiperbólico limitado, tal que* $-4e^{-h} \leqslant c \leqslant 0$, *o operador forma* A *é semidefinido não-negativo e* $H \leqslant -\dfrac{c}{2}\inf_\Sigma e^h$.

Demonstração. Suponha que exista um tal sóliton Σ^n. Como $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo, seu recobrimento universal é ele próprio. Além disso, $\overline{M}^{n+1}$ obedece à φ-NCC e $(\log f)'' = 0$. Veja agora que todas as hipóteses do Teorema 4.10 se cumprem para Σ^n, logo Σ^n deve ser um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$, um absurdo. □

Considere agora um slice $\Sigma^n = \{t_0\} \times \mathbb{R}^n$ de $\overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{G}^n$. Veja que, enquanto as curvaturas média e média ponderada de Σ^n satisfazem

$$H = H_\varphi = n\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} = n,$$

Σ^n é um sóliton do fluxo da curvatura média ponderada com constante sóliton $c =$

$-ne^{-t_0}$. Então, para $n \leqslant 4$, temos

$$-4e^{-h} = -4e^{-t_0} \leqslant c \leqslant 0.$$

Por outro lado, em Σ^n, $A < 0$ e

$$-\frac{c}{2}\inf_{\Sigma} e^h = \frac{n}{2}e^{-t_0}e^{t_0} = \frac{n}{2} < n = H.$$

Isso mostra que, para $n = 2$ ou $n = 3$, Σ^n não cumpre as hipóteses A *é semidefinido não-negativo* e $H \leqslant -\frac{c}{2}\inf_\Sigma e^h$ no Corolário 4.11. Assim, este par de hipóteses *não pode ser retirado* do Corolário 4.11 (e portanto do Teorema 4.10).

4.2.4 Não-existência e unicidade via Princípio do Máximo de Omori-Yau generalizado

Nesta subseção, vamos utilizar o Lema 3.14, enunciado na Subseção 3.2.4, para obter o seguinte resultado de unicidade.

Teorema 4.12. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-NCC. Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *um sóliton tipo-espaço completo do fluxo da curvatura média ponderada relativo à* $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ *com constante sóliton* c*, contido em uma região* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ *onde* $(\log f)''(h) < 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$*, tal que* $-4\frac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c \leqslant 0$*, o operador forma* A *é semidefinido não-negativo e* $H \leqslant -\frac{c}{2}\inf_{\Sigma^n} f(h)$*. Se* Ric_φ *é limitado inferiormente e o ângulo hiperbólico* θ *é limitado, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Da igualdade (3.18) e das hipóteses, temos que (veja (4.12))

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant -(\log f)''(h)|\nabla h|^4.$$

Como Σ^n está contida em uma região limitada tipo-tempo de $\overline{M}^{n+1}$ tal que $(\log f)''(h) < 0$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant C|\nabla h|^4.$$

Enquanto o ângulo hiperbólico θ de Σ^n é limitado, a relação $|\nabla h|^2 = \operatorname{senh}^2\theta$ e a hipótese $\mathrm{Ric}_\varphi > -\infty$ nos permitem usar o Lema 3.14 para garantir que existe uma sequência $\{x_k\} \subset \Sigma^n$ tal que

$$0 \geqslant \frac{1}{2}\limsup \Delta_\varphi(\operatorname{senh}^2\theta)(x_k) \geqslant C\limsup(\operatorname{senh}^4\theta(x_k)) = C\sup_{\Sigma}(\operatorname{senh}^4\theta) \geqslant 0.$$

Portanto, $\sup_\Sigma(\operatorname{senh}^4\theta) = 0$, isto é, θ se anula identicamente em Σ^n. Portanto, concluímos que Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$. □

Também podemos, assim como no Teorema 4.7, obter um resultado de não-existência, relaxando a restrição $(\log f)''(h) < 0$ e supondo que $f'(h) \neq 0$.

Teorema 4.13. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à φ-NCC. Não existe sóliton completo tipo-espaço do fluxo da curvatura média ponderada $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ relativo à $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ com constante sóliton c, contido em $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ onde $(\log f)''(h) \leqslant 0$ e $f'(h) \neq 0$ em $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, tal que $-4\dfrac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c \leqslant 0$, o operador forma A é semidefinido não-negativo, o ângulo hiperbólico θ é limitado e $H \leqslant -\dfrac{c}{2}\inf_{\Sigma^n} f(h)$, com Ric_φ limitado inferiormente.*

Demonstração. Assuma que exista uma tal hipersuperfície Σ^n satisfazendo as hipóteses. Do mesmo modo que no Teorema 4.12 podemos usar (4.12) para concluir que

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant (n+1)\frac{f'(h)^2}{f(h)^2}|\nabla h|^2.$$

Como Σ^n está contida em uma região limitada tipo-tempo $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$ e $f' \neq 0$ em $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant C|\nabla h|^2.$$

Como o ângulo hiperbólico θ de Σ^n é limitado, $|\nabla h|^2 = \operatorname{senh}^2\theta$ e $\mathrm{Ric}_\varphi > -\infty$, segue do Lema 3.14 que existe uma sequência $\{x_k\} \subset \Sigma^n$ tal que

$$0 \geqslant \limsup \frac{1}{2}\Delta_\varphi(\operatorname{senh}^2\theta)(x_k) \geqslant C\limsup(\operatorname{senh}^2\theta(x_k)) = C\sup_{\Sigma^n}(\operatorname{senh}^2\theta) \geqslant 0.$$

Então novamente θ se anula identicamente em Σ^n. Dai, $\Sigma^n = \{t_0\} \times M$ é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$. Então $f'(t_0) = 0$, logo temos uma contradição, completando a prova. □

Nos teoremas acima, assim como nos Teoremas 3.15 e e 3.16, a hipótese $\mathrm{Ric}_\varphi > -\infty$ foi necessária para podermos utilizar o princípio de Omori-Yau. No entanto, utilizando o Lema 3.17, podemos garantir a validade dessa hipótese automaticamente, pois $H_\varphi = cf(h)\langle N, \partial_t\rangle$ é limitado sempre que o ângulo hiperbólico θ e a altura h o forem.

Do Teorema 4.12, obtemos o seguinte:

Corolário 4.14. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à SNCC e tal que a função densidade* φ *é convexa em* M^n. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *um sóliton tipo-espaço completo do fluxo da curvatura média ponderada relativo à* $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ *com constante sóliton* c, *contido em uma região* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ *onde* $(\log f)''(h) < 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, *tal que* $-4\dfrac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c \leqslant 0$, *o operador forma* A *é semidefinido não-negativo e* $H \leqslant -\dfrac{c}{2}\inf_{\Sigma^n} f(h)$. *Se o ângulo hiperbólico* θ *é limitado, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$.

Finalmente, do Teorema 4.13, obtemos o seguinte:

Corolário 4.15. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à SNCC e tal que* φ *é uma função convexa em* M^n. *Não existe um sóliton tipo-espaço do fluxo da curvatura média ponderada* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *relativo à* $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ *e constante sóliton* c, *contido em uma região* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ *onde* $(\log f)''(h) \leqslant 0$ *e* $f'(h) \neq 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, *satisfazendo* $-4\dfrac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c \leqslant 0$, *com o operador forma* A *semidefinido não-negativo,* $H \leqslant -\dfrac{c}{2}\inf_{\Sigma^n} f(h)$ *e ângulo hiperbólico* θ *limitado.*

Para provar ambos os corolários, apenas observe que, se $\overline{M}^{n+1}$ obedece à SNCC e φ é convexa em M^n, então $\overline{M}^{n+1}$ obedece à φ-NCC. Além disso, enquanto $H_\varphi = -cf(h)\cosh\theta$, Σ^n está contida em uma região limitada tipo-tempo e θ é limitado em Σ^n, concluímos que H_φ é limitado em Σ^n. Podemos então aplicar o Lema 3.17 e os Teoremas 4.12 e 4.13 para obter os resultados.

4.2.5 Unicidade via Princípio do máximo de Akutagawa generalizado

Nosso próximo resultado utiliza o princípio do Máximo de Akutagawa generalizado (Lema 3.20), enunciado na Subseção 3.2.5.

Teorema 4.16. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à SNCC e cuja função densidade* φ *é convexa em* M^n. *Os únicos sólitons tipo-espaço completos* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *do fluxo da curvatura média ponderada relativos a* $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ *com constante sóliton* c, *contidos em uma região* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ *onde* $(\log f)''(h) < 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, $-4\dfrac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c \leqslant 0$, $H \leqslant -\dfrac{c}{2}\inf_{\Sigma^n} f(h)$, *cujo ângulo hiperbólico* θ *e o operador forma* A *são limitados, com* $A \geqslant 0$, *e tal que* $|\overline{\nabla}\varphi|$ *é limitado em* Σ^n, *são os slices totalmente geodésicos de* $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Analogamente como na prova do Teorema 3.21, mostramos que Ric_Σ é limitado inferiormente a fim de aplicar o Lema 3.20.

Como a SNCC implica a NCC, temos que $\mathrm{Ric}^M \geqslant (n-1)\,(f^2(\log f)'')\,\langle\, ,\rangle_M$. Mas $\mathrm{Hess}^M\,\varphi \geqslant 0$, portanto

$$\mathrm{Ric}^M_\varphi = \mathrm{Ric}^M + \mathrm{Hess}^M\,\varphi \geqslant (n-1)\left(f^2(\log f)''\right)\langle\, ,\rangle_M,$$

isto é, $\overline{M}^{n+1}$ obedece à φ-NCC.

De modo similar ao Teorema 4.5, observe que temos a desigualdade

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant -(\log f)''(h)|\nabla h|^4 \geqslant C|\nabla h|^4. \tag{4.16}$$

para alguma constante $C > 0$, uma vez que $\Sigma^n \subset \mathcal{B}_{t_1,t_2}$. Portanto, aplicando o Lema 3.20, concluímos que o ângulo hiperbólico θ de Σ^n se anula identicamente em Σ^n, logo Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$. □

4.2.6 Unicidade via propriedades de crescimento do φ-volume

Aqui, apresentaremos o último resultado desta seção. O contexto e as ferramentas analíticas que usaremos no teorema abaixo já foram apresentados na Subseção 3.2.6. Usaremos o Lema 3.22.

Teorema 4.17. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-NCC. Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *um sóliton, completo e não-compacto, do fluxo da curvatura média ponderada relativo à* $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ *com constante sóliton* c, *contido em uma região* $\mathcal{B}_{t_1,t_2} \subset \overline{M}$ *onde* $(\log f)''(h) < 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$, *satisfazendo* $-4\dfrac{f'(h)}{f(h)^2} \leqslant c \leqslant 0$, *o operador forma* A *é semidefinido não-negativo e* $H \leqslant -\dfrac{c}{2}\inf_{\Sigma^n} f(h)$.

(a) Se Σ^n *tem crescimento de* φ*-volume polinomial e* $|\nabla(\operatorname{senh}^2\theta)| < \tau\rho^k$*, onde* $\rho = d(\cdot, o)$ *é uma distância Riemanniana com origem em* $o \in \Sigma^n$ *e* $\tau > 0$ *e* $0 \leqslant k < 1$ *são constantes, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$*.*

(b) Se Σ^n *tem crescimento de* φ*-volume exponencial e* $|\nabla(\operatorname{senh}^2\theta)|(x) \to 0$ *quando* $\rho(x) \to +\infty$*, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico de* $\overline{M}^{n+1}$*.*

Demonstração. Analogamente ao Teorema 4.5, podemos aplicar a equação (4.12) para obter

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant -(\log f)''(h)|\nabla h|^2. \tag{4.17}$$

Uma vez que Σ^n está contido em uma região limitada tipo-tempo onde $(\log f)''(h) < 0$, temos que

$$\frac{1}{2}\Delta_\varphi|\nabla h|^2 \geqslant a|\nabla h|^2$$

para alguma constante $a > 0$. Agora, é suficiente definir $u = |\nabla h|^2 = \operatorname{senh}^2\theta$ e aplicar o Lema 3.22 para obter $|\nabla h|^2 \equiv 0$ em ambos os itens (a) e (b), completando a prova. □

4.3 Resultados tipo Calabi-Bernstein

O objetivo desta seção é aplicar os resultados provados na seção anterior para estudar uma equação diferencial associada a sólitons do fluxo da curvatura média ponderada em um Espaço-tempo GRW espacialmente denso por uma função φ.

Assim como na Seção 3.3, vamos considerar os gráficos inteiros

$$\Sigma(u) = \{(u(x), x);\ x \in M^n\} \subset -I \times_f M^n$$

de funções $u : M^n \to I \subset \mathbb{R}$. Os conceitos e definições básicas associados a esses gráficos podem ser consultados na seção citada.

Usando a fórmula (3.35) na Seção 3.3, temos que $\Sigma^n(u)$ é um sóliton tipo-espaço do fluxo da curvatura média ponderada relativo a $\mathcal{K} = f(h)\partial_t$ com constante sóliton c se, e somente se, $|Du|_M < f(u)$ e u é uma solução da seguinte equação diferencial parcial não-linear:

$$\operatorname{div}_{\varphi}^{M}\left(\frac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2-|Du|_M^2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{f(u)^2-|Du|_M^2}}\left\{cf(u)^2+f'(u)\left(n+\frac{|Du|_M^2}{f(u)^2}\right)\right\} \tag{4.18}$$

Motivados pela discussão acima, vamos considerar a seguinte equação diferencial parcial com a restrição dada abaixo:

$$(\mathbf{F})\quad\begin{cases}\operatorname{div}_{\varphi}^{M}\left(\dfrac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2-|Du|_M^2}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{f(u)^2-|Du|_M^2}}\left\{cf(u)^2+f'(u)\left(n+\dfrac{|Du|_M^2}{f(u)^2}\right)\right\}\\[2em] |Du|_M\leqslant \alpha f(u),\end{cases}$$

onde $0<\alpha<1$ e $c\in\mathbb{R}$ são constantes.

Como vimos na Seção 3.3, a restrição acima em $|Du|_M$ assegura que o ângulo hiperbólico $\theta(u)$ de $\Sigma(u)$ é limitado, pois vale

$$\cosh\theta(u)\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{4.19}$$

Além disso, essa restrição em $|Du|_M$ garante que $\Sigma^n(u)$ é completa sempre que M^n é completa. Com efeito, se $\delta=(1-\alpha^2)\inf_M f(u)^2$, então $|Du|_M^2\leqslant f(u)^2-\delta$. O resultado segue então de [3, Proposição 9].

A fim de estudar a equação $(\mathbf{F})$, lembremos da definição de norma C^2 de uma função $u: M\to\mathbb{R}$:

$$|u|_{C^2(M)}:=\max_{|\gamma|\leqslant 2}|D^{\gamma}u|_{L^{\infty}(M)}.$$

Além disso, nos teoremas a seguir, estudaremos soluções de $(\mathbf{F})$ que satisfazem a seguinte condição na função curvatura média $H(u)$ e na constante $c\in\mathbb{R}$:

$$H(u)\leqslant-\frac{c}{2}\inf_M f(u)\quad\text{e}\quad -4\frac{f'(u)}{f(u)^2}\leqslant c\leqslant 0. \tag{4.20}$$

O primeiro resultado desta seção corresponde a versões não-paramétricas dos Teoremas 4.5 e 4.7.

Teorema 4.18. *Seja* $\overline{M}^{n+1}=-I\times_f M_{\varphi}^n$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-NCC cuja fibra* M^n *é completa.*

(a) *As únicas soluções inteiras de* $(\mathbf{F})$ *com norma* C^2 *finita, satisfazendo* (4.20)*, e tais que* $(\log f)''(u) < 0$*,* A_u *é semidefinido não-negativo e* $|Du|_M \in \mathcal{L}^1_\varphi(M)$*, são as funções constantes* $u = u_0$*, com* $f'(u_0) = 0$*.*

(b) *Não existe solução inteira* u *de* $(\mathbf{F})$*, com norma* C^2 *finita, satisfazendo* (4.20)*, tal que* $f'(u) \neq 0$*,* A_u *é semidefinido não-negativo e* $|Du|_M \in \mathcal{L}^1_\varphi(M)$*.*

Demonstração. A restrição $|Du|_M \leqslant \alpha f(u)$ par algum $0 < \alpha < 1$ garante que $\Sigma(u)$ é completa, pois M^n é completa por hipótese. Como estamos também supondo que $|u|_{C^2(M)} < +\infty$, em particular u é limitada, logo segue da restrição $|Du|_M \leqslant \alpha f(u)$ e da fórmula (3.34) (a qual contém a expressão de A_u para gráficos tipo-espaço) que $|A_u|$ é limitado em $\Sigma(u)$.

Um argumento similar ao de Alías, Colares e de H.F. de Lima [9, Corolário 5.1] (ou então veja [19, Teorema 4.7]) nos permite concluir que $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma^n(u))$. Sejam dM e $d\Sigma^n(u)$ os elementos de volume Riemannianos de $(M^n, \langle,\rangle_M)$ e $(\Sigma^n(u), \langle,\rangle_u)$, respectivamente, e $G = \det(g_{ij})$ onde

$$g_{ij} = \langle E_i, E_j\rangle_u = f(u)^2\delta_{ij} - E_i(u)E_j(u).$$

Primeiro, segue de (3.32) que $d\Sigma^n(u) = \sqrt{|G|}dM$. Aqui, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ denota um referencial ortonormal com respeito a métrica $\langle,\rangle_M$. Então, um cálculo direto mostra que

$$|G| = f(u)^{2(n-1)}(f(u)^2 - |Du|^2_M).$$

Consequentemente,

$$d\Sigma^n(u) = f(u)^{n-1}\sqrt{f(u)^2 - |Du|^2_M}dM. \tag{4.21}$$

Portanto, se $|Du|_M \in \mathcal{L}^1_\varphi(M)$, então $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma^n(u))$. Portanto, podemos aplicar os Teoremas 4.5 e 4.7 para obter os itens (a) e (b). □

Um argumento análogo ao da prova do resultado acima nos permite obter as versões não-paramétricas de todos os outros teoremas da seção 4.2. Por exemplo, aplicando diretamente os Teoremas 4.1 e 4.4, obtemos os seguintes resultados.

Teorema 4.19. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso. Suponha que* $u : \Omega \subseteq M^n \to \mathbb{R}$ *é uma solução de* $(\mathbf{F})$ *tal que* $\operatorname{senh}\theta(u)$ *atinge um ponto de* *máximo em algum* $x_0 \in M^n$ *onde* $cA_u(x_0) \geqslant 0$ *e* $f'(u(x_0))\{2H(u(x_0)) - H_\varphi(u(x_0))\} \leqslant 0$. *Se ou*

(a) $f''(u(x_0)) < 0$ *e* $\mathrm{Ric}_\varphi^M \geqslant (n-1)(f^2(\log f)'')\langle,\rangle_M$ *em* x_0, *ou*

(b) $f''(u(x_0)) \leqslant 0$ *e* $\mathrm{Ric}_\varphi^M > 0$ *em* x_0,

então existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ *de* x_0 *em* Ω *tal que* u *é uma função constante* $u = u_0$, *com* $f'(u_0) = 0$.

Teorema 4.20. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M_\varphi^n$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso. Não existem soluções* $u : \Omega \subseteq M^n \to \mathbb{R}$ *de* $(\mathbf{F})$ *tal que* $\mathrm{senh}\,\theta(u)$ *atinge um máximo local em algum ponto* $x_0 \in \Omega$ *onde* $cA_u(x_0) \geqslant 0$ *e* $f'(u(x_0))\{2H(u(x_0)) - H_\varphi(u(x_0))\} \leqslant 0$, $f''(u(x_0)) \leqslant 0$, $\mathrm{Ric}_\varphi^M \geqslant (n-1)(f^2(\log f)'')\langle,\rangle_M$ *em* x_0 *e* $f'(u(x_0)) \neq 0$.

Como aplicação direta do Teorema 4.8, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.21. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M_\varphi^n$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-NCC tal que a fibra* M^n *é completa e não-compacta. As únicas soluções inteiras de* $(\mathbf{F})$ *satisfazendo* $f''(u) < 0$, $cA_u \geqslant 0$, $f'(u)\{2H(u) - H_\varphi(u)\} \leqslant 0$ *e tal que* $|Du|_M$ *converge para zero no infinito são as funções constantes* $u = u_0$, *com* $f'(u_0) = 0$.

Demonstração. Aqui, basta notar que $\mathrm{senh}^2\theta = \dfrac{|Du|_M^2}{f(u)^2 - |Du|_M^2}$, logo $\mathrm{senh}^2\theta$ converge para zero no infinito, e usar o Teorema 4.8. $\square$

Por uma aplicação direta do Teorema 4.9 obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.22. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M_\varphi^n$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-NCC tal que a fibra* M^n *é completa e não-compacta. As únicas soluções inteiras de* $(\mathbf{F})$ *satisfazendo* (3.38), *tais que* $(\log f)''(u) \leqslant 0$, A_u *é semidefinido não-negativo, e* $|Du|_M$ *converge para zero no infinito são as funções constantes* $u = u_0$, *com* $f'(u_0) = 0$.

Demonstração. Aqui, basta notar que $\mathrm{senh}^2\theta = \dfrac{|Du|_M^2}{f(u)^2 - |Du|_M^2}$ e usar o Teorema 4.9. $\square$

Outro resultado que tem uma demonstração direta é o teorema abaixo, que segue imediatamente do Teorema 4.10.

Teorema 4.23. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tepo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-NCC cuja fibra* M^n *é completa com recobrimento universal Riemanniano* φ*-parabólico. As únicas soluções inteiras de* (**F**) *satisfazendo* (4.20)*, tais que* $(\log f)''(u) \leqslant 0$, A_u *é semidefinido não-negativo e*

$$0 < \inf_{x \in M} f(u(x)) \leqslant \sup_{x \in M} f(u(x)) < \infty,$$

são as funções constantes $u = u_0$*, com* $f'(u_0) = 0$.

Os itens (a) e (b) do próximo Teorema correspondem a versões não-paramétricas dos Corolários 4.14 e 4.15.

Teorema 4.24. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo a* SNCC *cuja fibra* M^n *é completa e tal que* φ *é uma função convexa em* M^n*. Seja* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$ *uma região limitada tipo-tempo de* $\overline{M}^{n+1}$.

(i) Se $(\log f)'' < 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$*, então as únicas soluções inteiras* $u(x) \in [t_1, t_2]$ *de* (**F**) *satisfazendo* (4.20)*, tais que* A_u *é semidefinido não-negativo, são as funções constantes* $u = u_0$*, com* $f'(u_0) = 0$.

(ii) Se $f' \neq 0$ *e* $(\log f)'' \leqslant 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$*, não existem soluções inteiras* $u(x) \in [t_1, t_2]$ *de* (**F**) *satisfazendo* (3.38) *tais que* A_u *é semidefinido não-negativo.*

Prosseguindo, como aplicação do Teorema 4.16 podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 4.25. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo a SNCC cuja fibra* M^n *é completa e tal que* φ *é uma função convexa em* M^n*. Seja* u *uma solução inteira de* (**F**) *com norma* C^2 *finita satisfazendo* (4.20)*, tal que* $(\log f)''(u) < 0$, A_u *semidefinido não-negativo e é limitado em* $\Sigma^n(u)$*. Então* u *é uma função constante* $u = u_0$*, com* $f'(u_0) = 0$.

Demonstração. Similar à primeira parte da demonstração do Teorema 4.18, como estamos supondo que $|u|_{\mathcal{C}^2(M)} < +\infty$ e $|Du|_M \leqslant \alpha f(u)$ para alguma constante $0 < \alpha < 1$, de (3.34) temos que $|A_u|$ é limitado em $\Sigma(u)$ e que $\Sigma(u)$ é completa. Agora, podemos aplicar o Teorema 4.16 para completar a prova. □

Finalmente, como aplicação do Teorema 4.17, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.26. *Sejam* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n_\varphi$ *um Espaço-tempo GRW espacialmente denso obedecendo à* φ*-NCC cuja fibra* M^n *é completa não-compacta e* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$ *uma região limitada tipo-tempo de* $\overline{M}^{n+1}$ *tal que* $(\log f)'' < 0$ *em* $\mathcal{B}_{t_1,t_2}$. *Seja* $u(x) \in [t_1, t_2]$ *uma solução inteira de* (**F**) *satisfazendo* (4.20) *e tal que* A_u *é semidefinido não-negativo. Denote por* $D(\operatorname{senh}^2\theta(u))$ *o gradiente em* M^n *de* $\operatorname{senh}^2\theta(u(x))$.

(a) *Se* M^n *tem crescimento de* φ*-volume polinomial e* $|D(\operatorname{senh}^2\theta(u))| < r\rho^k$, *onde* $\rho = d(\cdot, o)$ *é uma distância Riemanniana com origem em* $o \in M^n$, $r > 0$ *e* $0 \leqslant k < 1$ *são constantes, então* u *é uma função constante* $u = u_0$, *com* $f'(u_0) = 0$.

(b) *Se* M^n *tem crescimento de* φ*-volume exponencial e* $|D(\operatorname{senh}^2\theta(u))|(x) \to 0$ *quando* $\rho(x) \to +\infty$, *então* u *é uma função constante* $u = u_0$, *com* $f'(u_0) = 0$.

Demonstração. De modo análogo ao Teorema 3.32, da relação (4.19) temos que

$$|\nabla(\operatorname{senh}^2\theta(u))| \leqslant \frac{|D(\operatorname{senh}^2\theta(u))|_M}{f(u)\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{4.22}$$

Assim como no Teorema 4.18, podemos raciocinar como em [9, Corolário 5.1]: da relação (4.21) e do fato de u ser limitada, se $(M^n, \langle,\rangle_M)$ tem crescimento de φ-volume polinomial, então $(\Sigma^n(u), \langle,\rangle_u)$ também tem crescimento de φ-volume polinomial. Analogamente, se $(M^n, \langle,\rangle_M)$ tem crescimento de φ-volume exponencial, então $(\Sigma^n(u), \langle,\rangle_u)$ também tem crescimento de φ-volume exponencial. Portanto, a relação (4.22) e o fato de que u é limitada nos permitem aplicar o Teorema 4.17 para completar a prova. $\square$

Capítulo 5

Sólitons translacionais em produtos warped Riemannianos

Neste capítulo, o espaço-ambiente é um produto warped Riemanniano $I \times_f M^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$. As notações e definições básicas para entendê-lo encontram-se na Seção 2.3.

Nosso objetivo aqui é apresentar resultados de não-existência e unicidade para hipersuperfícies two-sided Σ^n imersas em $I \times_f M^n$ cuja curvatura média satisfaz a relação $H = c\Theta$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Tais hipersuperfícies são conhecidas como sólitons translacionais.

O passo inicial será mostrar a validade do Princípio do Máximo de Omori-Yau para o $(-ch)-$Laplaciano de uma hipersuperfície Σ^n, onde h é sua função altura, desde que o espaço-ambiente $I \times_f M^n$ satisfaça uma condição na curvatura seccional da fibra M^n. Cabe ressaltar que essa condição é satisfeita por vários exemplos de Produtos-warped, como os espaços euclidianos, pesudo-hiperbólicos e Schwarzchild.

De posse do Princípio do Máximo de Omori-Yau, mostraremos um resultado de não-existência. Utilizaremos para sua demonstração uma fórmula recente para o Laplaciano de Θ (veja a Proposição 2.13) obtida por Zhang e Zhu [56]. Ainda aplicaremos essa fórmula para, utilizando um critério recente de $\varphi-$parabolicidade e o Lema 3.6, obtermos dois resultados de unicidade. Finalmente, aplicaremos os resultados obtidos para o caso de gráficos translacionais em $I \times_f M^n$.

Os resultados obtidos neste capítulo deram origem ao trabalho [18], feito em parceria com C. P. Aquino e H. F. de Lima.

5.1 Sólitons translacionais

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{m+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Σ^n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{m+1}$. Considere uma variação suave $\Psi : [0, T) \times \Sigma^n \to \overline{M}^{m+1}$ da imersão ψ, isto é, $\Psi(0, x) = \psi(x)$ para todo $x \in \Sigma^n$, e cada $\Psi(t, \cdot)$ é uma imersão isométrica. O fluxo da curvatura média busca soluções da equação

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \vec{H},$$

onde $\vec{H}(t, \cdot)$ é o vetor curvatura média (não-normalizado) de $\Sigma^n_t = \Psi(t, \Sigma^n)$.

De acordo com de Lira e Martin [41, Definição 2], uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times M^m$ é um sóliton translacional com respeito ao campo $X = \partial_t$ e constante sóliton $c \in \mathbb{R}$ se

$$cX^{\perp} = \vec{H}$$

ao longo de ψ. Se $m = n$, esta condição se torna $H = c\langle N, \partial_t \rangle$.

Assim, diremos que uma hipersuperfície two-sided em um produto warped $I \times_f M^n$ é um **sóliton translacional** do fluxo da curvatura média **com respeito a ∂_t e com constante sóliton** $c \in \mathbb{R}$ se a curvatura média H de Σ^n satisfaz

$$H = c\,\Theta. \tag{5.1}$$

Como mencionado na Seção 2.3, dado um slice $M_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$, sua curvatura média H_{t_0} é dada por $H_{t_0} = -n\dfrac{f'(t_0)}{f(t_0)}$. Assim, um slice é um sóliton translacional com respeito a ∂_t e constante sóliton

$$c = -n\frac{f'(t)}{f(t)}. \tag{5.2}$$

Daremos agora alguns exemplos de Produtos warped $I \times_f M^n$ e mostraremos quais de seus slices são sólitons translacionais.

Exemplo 5.1. *Seja* $O = (0, \dots, 0)$ *a origem do Espaço euclidiano* $\mathbb{R}^{n+1}$ *com dimensão* $(n+1)$. *Observe que* $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{O\}$ *é isométrico a* $(0, +\infty) \times_t \mathbb{S}^n$ *(veja, por exemplo, [43, Seção 4, Exemplo 1]). Os slices* $\{t\} \times \mathbb{S}^n$ *são isométricos às esferas euclidianas* n*-dimensionais* $\mathbb{S}^n(t)$ *de raio* $t \in \mathbb{R}_+$ *em* $\mathbb{R}^{n+1}$. *De* (5.2), *concluímos que cada slice* $\{t_*\} \times \mathbb{S}^n$ *(*$t_* \in \mathbb{R}_+$*) é um sóliton translacional com respeito a* ∂_t *e constante sóliton* $c = -\dfrac{n}{t_*} < 0$.

Exemplo 5.2. *Seguindo a nomenclatura dada em [51], produtos warped da forma* $I \times_{e^t} M^n$ *(com função warping* $f(t) = e^t$*) são chamados de* **espaços pseudo-hiperbólicos**. *Essa terminologia se deve ao fato de que o espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n+1}$ *com dimensão* $(n+1)$ *é isométrico ao produto warped* $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$. *Isto é mais simples de enxergar ao adotar o modelo do semiespaço para* $\mathbb{H}^{n+1}$ *(para mais detalhes sobre espaços pseudo-hiperbólicos, veja [11, 43, 51]). De* (5.2)*, concluímos que cada slice* $\{t_*\} \times M^n$ *é um sóliton translacional com respeito a is a* ∂_t *e constante sóliton* $c = -1$.

Em nossos próximos dois exemplos, vamos lidar com os espaços de Schwarzschild e Reissner-Nordström.

Exemplo 5.3. *Dada uma constante* $m > 0$, *chamada de* parâmetro de massa, *o* **espaço de Schwarzschild** *é definido como o produto* $\overline{M}^{n+1} = (r_0(m), +\infty) \times \mathbb{S}^n$ *munido da métrica* $\bar{g} = V_m(r)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n}$, *onde* $g_{\mathbb{S}^n}$ *é a métrica canônica da esfera euclidiana* $\mathbb{S}^n$, *a função* $V_m(r) = 1 - 2mr^{1-n}$ *é chamada de função potencial e* $r_0(m) = (2m)^{1/(n-1)}$ *é a única raiz positiva de* $V_m(r) = 0$. *A importância deste espaço se encontra no fato de que a variedade* $\mathbb{R} \times \overline{M}^{n+1}$, *munida da métrica Lorentziana produto (também chamada de* estática*)* $-V_m(r)dt^2 + \bar{g}$ *é uma solução da equação de campo de Einstein no vácuo com constante cosmológica nula (para mais detalhes sobre os espaços de Schwarzschild, sua geometria e aspectos físicos básicos, veja [47, Capítulo* 13*]).*

Como observado em [33, Exemplo 1.3*],* $\overline{M}^{n+1}$ *pode ser visto como o produto warped* $I \times_f \mathbb{S}^n$ *usando a seguinte mudança de variáveis:*

$$t(r) = \int_{r_0(m)}^{r} \frac{d\sigma}{\sqrt{V_m(\sigma)}}, \qquad f(t) = r(t), \qquad I = (0, +\infty). \tag{5.3}$$

Observe que $V_m(r)$ *é estritamente crescente em* $(r_0(m), +\infty)$, *logo segue de* (5.3) *que as derivadas da função* f *são dadas por*

$$f'(t) = \frac{dr}{dt} = \sqrt{V_m(r(t))} > 0 \qquad \text{and} \qquad f''(t) = \frac{1}{2}\frac{dV_m}{dr}(r(t)) > 0. \tag{5.4}$$

Então, de (5.2) *e* (5.4)*, um slice* $\{t_*\} \times \mathbb{S}^n$ *é um sóliton translacional com respeito a* ∂_t *e constante sóliton* $c < 0$ *quando* $t_* = t(r_*)$ *com* $r_* > r_0(m)$ *sendo solução da seguinte equação*

$$V_m(r) = \frac{c^2}{n^2} r^2. \tag{5.5}$$

Uma tal solução existe se, e somente se a função $\varphi_m(t) = \frac{c^2}{n^2}t^2 + \frac{2m}{t^{n-1}} - 1$ *se anula em algum ponto de* $(r_0(m), +\infty)$. *Como* φ_m *é convexa e tende ao infinito se* $t \to 0$ *ou* $t \to +\infty$, *existe um único ponto de mínimo* φ_m *no intervalo* $(0, \infty)$. *Este valor* $\hat{r}$ *é o seu ponto crítico neste intervalo, isto é,* $\varphi_m'(\hat{r}) = 0$, *donde*

$$\frac{2c^2}{n^2}\hat{r} - \frac{2m(n-1)}{\hat{r}^n} = 0.$$

Portanto, a equação (5.5) tem solução se, e somente se $\hat{r} > r_0(m)$ *e* $\varphi_m(\hat{r}) \leqslant 0$. *Podemos escrever esta última condição na forma*

$$\hat{r} = \left(\frac{m(n-1)n^2}{c^2}\right)^{1/(n+1)} \geqslant \left(\frac{m(n+3)}{2}\right)^{1/(n-1)}. \tag{5.6}$$

Em particular, existem duas soluções $r_0(m) < r_{*,-} < \hat{r} < r_{*,+}$ *se a desigualdade estrita se cumpre em* (5.6), *e uma única solução* $r_* = \hat{r}$ *se vale a igualdade.*

Exemplo 5.4. *Dadas duas constantes* $m > 0$ *e* $q \in \mathbb{R}$ *chamadas respectivamente de* parâmetro de massa *e* carga elétrica, *com* $|q| \leqslant m$, *o* **Espaço de Reissner-Nordström** *é definido como o produto* $\overline{M}^{n+1} = (r_0(m,q), +\infty) \times \mathbb{S}^n$ *munido da métrica* $\bar{g} = V_{m,q}(r)^{-1}dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n}$, *onde* $g_{\mathbb{S}^n}$ *é a métrica canônica da esfera euclidiana* $\mathbb{S}^n$, *a função* $V_{m,q}$, *chamada de* função potencial, *é dada por* $V_{m,q}(r) = 1 - 2mr^{1-n} + q^2 r^{2-2n}$ *e*

$$r_0(m,q) = \left(\frac{q^2}{m - \sqrt{m^2 - q^2}}\right)^{1/(n-1)}$$

é a maior raiz positiva de $V_{m,q}(r)$.

Como no exemplo anterior, $\overline{M}^{n+1}$ *pode ser reduzido ao produto warped da forma* $I \times_f \mathbb{S}^n$, *com a mesma mudança de variáveis dada em* (5.3). *Além disso, seguindo os mesmos passos, vemos que a função warping* f *tem derivadas primeira e segunda positivas. Um slice* $\{t_*\} \times \mathbb{S}^n$ *é um sóliton translacional com respeito a* ∂_t *e constante sóliton* $c < 0$ *quando* $t_* = t(r_*)$, *com* $r_* > r_0(m,q)$, *for solução da seguinte equação:*

$$V_{m,q}(r) = \frac{c^2}{n^2}r^2. \tag{5.7}$$

Neste caso, é mais difícil explicitar quais slices são sólitons translacionais, mas podemos dizer que uma solução de (5.7) *existe se, e somente se, a equação* $\varphi_{m,q}(x) = \frac{c^2}{n^2}x^2 + \frac{2m}{x^{n-1}} -$

$\frac{q^2}{x^{2n-2}} - 1$ *tem um zero em* $(r_0(m), +\infty)$. *Note que* $\varphi_{m,q} \to +\infty$ *se* $x \to +\infty$ *e* $\varphi_{m,q} \to -\infty$ *se* $x \to 0$. *Então* $\varphi_{m,q}$ *tem pelo menos uma raiz em* $(0, +\infty)$. *Se tal raiz é maior do que* $r_0(m, q)$, *obtemos uma solução desejada* r_*.

Agora, como aplicação da Proposição 2.13, a qual contém uma fórmula para $\Delta\Theta$, obteremos uma expressão adequada aos nossos propósitos para o Laplaciano ponderado Δ_{-ch} da função-ângulo Θ de um sóliton translacional $\psi : \Sigma^n \to I \times_f M^n$ com respeito a ∂_t.

Lema 5.5. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to I \times_f M^n$ *um sóliton translacional com respeito a* ∂_t *e constante sóliton* c, *com função altura* h *e função ângulo* Θ. *Então,*

$$\begin{aligned}\Delta_{-ch}\Theta = &- \frac{f'(h)}{f(h)} H(1+\Theta^2) + 2\frac{f'(h)}{f(h)}\langle A\nabla h, \nabla h\rangle \\ &- \Theta|A|^2 - \frac{f''(h)}{f(h)}\Theta|\nabla h|^2 - \frac{f'(h)}{f(h)}\Theta(n - 3|\nabla h|^2) \\ &- \Theta\left\{\mathrm{Ric}^M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2\right\},\end{aligned}$$

onde A *é o operador forma de* Σ^n *relativo ao campo normal unitário* N, Ric^M *denota o tensor de Ricci da fibra* M^n *e* $N^* = N - \Theta\partial_t$ *é a projeção ortonormal de* N *sobre a fibra* M^n.

Demonstração. Como Σ^n é um sóliton translacional com respeito a ∂_t, de (2.36) e (5.1), temos que

$$\langle \nabla H, \partial_t\rangle = c\langle \nabla\Theta, \partial_t\rangle = \langle \nabla\Theta, \nabla(ch)\rangle. \tag{5.8}$$

Portanto, levando em conta a definição de Laplaciano ponderado para $\varphi = -ch$ e $u = \Theta$, o resultado segue da Proposição 2.13. □

5.2 Resultado de não-existência

Nesta seção, provaremos um resultado de não-existência para Sólitons translacionais completos Σ^n imersos em um produto warped $I \times_f M^n$. Nossa ferramenta analítica será uma versão do Princípio do Máximo de Omori-Yau, que obteremos agora.

Dizemos que o Laplaciano ponderado Δ_φ em uma variedade Riemanniana Σ^n munida com alguma função densidade suave φ cumpre o **Princípio do Máximo de Omori-Yau**

fraco se para qualquer $u \in C^2(\Sigma)$ com $u_* = \inf_{\Sigma^n} u > -\infty$, existe uma sequência de pontos (p_k) em tal que

$$\lim_k u(p_k) = u_* \quad \text{e} \quad \liminf_k \Delta_\varphi u(p_k) \geqslant 0. \tag{5.9}$$

No caso em que a mesma sequência satisfaz, além de (5.9), o limite

$$\limsup_k |\nabla u|(p_k) = 0, \tag{5.10}$$

dizemos que o Laplaciano ponderado Δ_φ cumpre o **Princípio do Máximo de Omori-Yau** (forte). Em (5.9), poderíamos ter utilizado na definição uma versão análoga para o supremo ao invés do ínfimo.

A fim de provar uma condição suficiente para a validade do Princípio do Máximo de Omori-Yau para o laplaciano ponderado Δ_{-ch} associado a sólitons translacionais (Proposição 5.8), consideraremos o seguinte conjunto $\mathcal{H}$ de funções reais positivas $\Lambda \in C^1(\mathbb{R}_*^+)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- $\inf_{\mathbb{R}_*^+} \dfrac{\Lambda'}{\Lambda^{3/2}} > -\infty$;
- $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda}} \notin L^1(+\infty)$;
- $(\sqrt{\Lambda})'(t) \geqslant -B(\log t + 1)$, para $t \gg 1$ e alguma constante positiva B.

Observe que o conjunto $\mathcal{H}$ contém, em particular, as funções constantes positivas.

Como caso particular de [13, Corolário 8.3], obtemos imediatamente o seguinte

Lema 5.6. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana completa munida de uma função peso $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ tal que $|\nabla\varphi|$ é limitada. Se, para alguma função radial $\Lambda(r)$ com $\Lambda \in \mathcal{H}$, onde $r(x)$ é a distância a um ponto fixado $o \in \Sigma^n$, o tensor de Bakry-Émery Ricci satisfaz*

$$\mathrm{Ric}_\varphi(X, X) \geqslant -\Lambda(r)|X|^2,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, então o Laplaciano ponderado Δ_φ cumpre o princípio do Máximo de Omori-Yau.

Na demonstração da Proposição 5.8 abaixo, utilizaremos a seguinte fórmula para o tensor de curvatura em produtos warped.

Lema 5.7. *Seja* Σ^n *uma hipersuperfície imersa em produto warped* $I \times_f M^n$*. Se* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ *e* h *é a função altura de* Σ^n*, então*

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z =& R_M(X^*,Y^*)Z^* - (\log f)'(h)^2(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X)\\ &+ (\log f)''(h)\langle Z,\partial_t\rangle(\langle Y,\partial_t\rangle X - \langle X,\partial_t\rangle Y)\\ &- (\log f)''(h)(\langle Y,\partial_t\rangle\langle X,Z\rangle - \langle X,\partial_t\rangle\langle X,Z\rangle)\partial_t. \end{aligned} \tag{5.11}$$

onde $X^* = X - \langle X,\partial_t\rangle\partial_t$, $Y^* = Y - \langle Y,\partial_t\rangle\partial_t$ *e* $Z^* = Z - \langle Z,\partial_t\rangle\partial_t$ *são as projeções dos campos* X, Y *e* Z *sobre* M^n*, respectivamente, e* R_M *denota o tensor de curvatura da fibra* M^n.

Demonstração. Com efeito, veja primeiro que

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= \overline{R}(X^* + \langle X,\partial_t\rangle\partial_t, Y^* + \langle Y,\partial_t\rangle\partial_t)Z\\ &= \overline{R}(X^*,Y^*)Z + \langle Y,\partial_t\rangle\overline{R}(X^*,\partial_t)Z + \langle X,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,Y^*)Z + \langle X,\partial_t\rangle\langle Y,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,\partial_t)Z\\ &= \overline{R}(X^*,Y^*)Z^* + \langle Z,\partial_t\rangle\overline{R}(X^*,Y^*)\partial_t + \langle Y,\partial_t\rangle\overline{R}(X^*,\partial_t)Z^*\\ &\quad + \langle Y,\partial_t\rangle\langle Z,\partial_t\rangle\overline{R}(X^*,\partial_t)\partial_t + \langle X,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,Y^*)Z^*\\ &\quad + \langle X,\partial_t\rangle\langle Z,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,Y^*)\partial_t. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Usando a Proposição 2.3 (curvatura em produtos warped), temos que

(I) $\overline{R}(X^*,Y^*)Z^* = R_M(X^*,Y^*)Z^* - \dfrac{f'(h)^2}{f(h)^2}\left(\langle X^*,Z^*\rangle Y^* - \langle Y^*,Z^*\rangle X^*\right).$

(II) $\overline{R}(X^*,Y^*)\partial_t = 0.$

(III) $\overline{R}(X^*,\partial_t)Z^* = -\dfrac{\langle X^*,Z^*\rangle}{f}\nabla^I_{\partial_t}(f'\partial_t) = -\dfrac{f''(h)}{f(h)}\langle X^*,Z^*\rangle\partial_t.$

(IV) $\overline{R}(X^*,\partial_t)\partial_t = \dfrac{f''(h)}{f(h)}X^*.$

(V) $\overline{R}(\partial_t,Y^*)Z^* = \dfrac{f''(h)}{f(h)}\langle Y^*,Z^*\rangle\partial_t.$

(VI) $\overline{R}(\partial_t,Y^*)\partial_t = -\dfrac{f''(h)}{f(h)}Y^*.$

Observe agora que

$$\langle X^*,Z^*\rangle = \langle X,Z\rangle - \langle X,\partial_t\rangle\langle Z,\partial_t\rangle. \tag{5.13}$$

Usando (5.13) (e análogos, como $\langle Y^*, Z^*\rangle$) e a decomposição $X = X^* + \langle X, \partial_t\rangle\partial_t$, os itens **(I)**-**(VI)** se tornam

(I)' $$\overline{R}(X^*, Y^*)Z^* = R_M(X^*, Y^*)Z^* + \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\{\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\}$$
$$- \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\{\langle Y, Z\rangle\langle X, \partial_t\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, \partial_t\rangle\}\,\partial_t$$
$$+ \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\langle Z, \partial_t\rangle\{\langle Y, \partial_t\rangle X - \langle X, \partial_t\rangle Y\}.$$

(II)' $\overline{R}(X^*, Y^*)\partial_t = 0.$

(III)' $$\overline{R}(X^*, \partial_t)Z^* = -\frac{f''(h)}{f(h)}\left(\langle X, Z\rangle - \langle X, \partial_t\rangle\langle Z, \partial_t\rangle\right)\partial_t.$$

(IV)' $$\overline{R}(\partial_t, Y^*)Z^* = \frac{f''(h)}{f(h)}\left(\langle Y, Z\rangle - \langle Y, \partial_t\rangle\langle Z, \partial_t\rangle\right)\partial_t.$$

(V)' $$\overline{R}(X^*, \partial_t)\partial_t = \frac{f''(h)}{f(h)}\left(X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t\right).$$

(VI)' $$\overline{R}(\partial_t, Y^*)\partial_t = -\frac{f''(h)}{f(h)}\left(Y - \langle Y, \partial_t\rangle\partial_t\right).$$

Substituindo **(I)'**-**(VI)'** em (5.12), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X, Y)Z &= R_M(X^*, Y^*)Z^* + \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\{\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\} \\
&\quad - \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\{\langle Y, Z\rangle\langle X, \partial_t\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, \partial_t\rangle\}\,\partial_t \\
&\quad - \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\langle Z, \partial_t\rangle\{\langle Y, \partial_t X - \langle X, \partial_t\rangle Y\} \\
&\quad + \langle Z, \partial_t\rangle\cdot 0 - \langle Y, \partial_t\rangle\frac{f''(h)}{f(h)}\left(\langle X, Z\rangle - \langle X, \partial_t\rangle\langle Z, \partial_t\rangle\right) \\
&\quad + \langle Y, \partial_t\rangle\langle Z, \partial_t\rangle\frac{f''(h)}{f(h)}\left(X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t\right) \\
&\quad + \langle X, \partial_t\rangle\frac{f''(h)}{f(h)}\left(\langle Y, Z\rangle - \langle Y, \partial_t\rangle\langle Z, \partial_t\rangle\right)\partial_t \\
&\quad - \langle X, \partial_t\rangle\langle Z, \partial_t\rangle\frac{f''(h)}{f(h)}\left(Y - \langle Y, \partial_t\rangle\partial_t\right) \\
&= R_M(X^*, Y^*)Z^* + \left(\frac{f'}{f}\right)^2\{\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\} \\
&\quad + \left(\frac{f''}{f} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2\right)\langle Z, \partial_t\rangle\{\langle Y, \partial_t\rangle X - \langle X, \partial_t\rangle Y\} \\
&\quad + \left(\frac{f''}{f} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2\right)[\langle X, \partial_t\rangle\langle Y, \partial_t\rangle - \langle Y, \partial_t\rangle\langle X, Z\rangle]\,\partial_t.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

A fórmula (5.14) é precisamente (5.11). □

Para o enunciado abaixo, diremos que uma hipersuperfície Σ^n está contida em um **slab** de um produto warped $I \times_f M^n$ quando Σ^n está contida em

$$[t_1, t_2] \times M^n = \{(t, p) \in I \times_f M^n : t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \text{ e } p \in M^n\}.$$

Proposição 5.8. *Seja Σ^n uma hipersuperfície completa two-sided imersa em um slab de um produto warped $I \times_f M^n$, tal que a curvatura seccional na fibra M^n satisfaz a seguinte condição de convergência*

$$K_M \geqslant \sup_I \left((f')^2 - ff''\right). \tag{5.15}$$

Se a norma do operador forma A de Σ^n é limitada superiormente por uma função radial $\Lambda(r)$, para alguma $\Lambda \in \mathcal{H}$, então o Laplaciano ponderado Δ_{-ch} cumpre o Princípio do Máximo de Omori-Yau para todo $c \neq 0$.

Demonstração. Lembremos que o tensor de curvatura R da hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \to I \times_f M^n$ pode ser ser descrito em termos do seu operador forma A e o tensor de curvatura de $I \times_f M^n$ por meio da *equação de Gauss para imersões isométricas*, que no caso de hipersuperfícies é dada por

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^\top + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX, \tag{5.16}$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$.

Agora, considere $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\{E_j\}$ um referencial ortonormal em um aberto de Σ^n. Segue de (5.16) que o Ric de Σ^n satisfaz

$$\text{Ric}(X, X) = \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{R}(X, E_j)X, E_j\rangle + H\langle AX, X\rangle - \langle AX, AX\rangle. \tag{5.17}$$

Usando (5.16) e a Proposição 2.12(b), obtemos

$$\text{Ric}_{-ch}(X, X) = \sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle - \langle AX, AX\rangle - c\frac{f'(h)}{f(h)}|X|^2 + c\frac{f'(h)}{f(h)}\langle X, \nabla h\rangle^2. \tag{5.18}$$

Tomando um referencial ortonormal $\{E_i\}$ definido em um aberto de Σ^n, temos do Lema

5.7, na forma expressa em (5.14), que

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle &= \langle R_M(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle + \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\left\{\langle E_i,X\rangle^2 - \langle X,X\rangle\langle E_i,E_i\rangle\right\}\\ &+ \left(\frac{f''}{f} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2\right)\langle X,\partial_t\rangle\{\langle E_i,\partial_t\rangle\langle X,E_i\rangle - \langle X,\partial_t\rangle\langle E_i,E_i\rangle\}\\ &+ \left(\frac{f''}{f} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2\right)[\langle X,\partial_t\rangle\langle E_i,X\rangle - \langle E_i,\partial_t\rangle\langle X,X\rangle]\,\langle\partial_t,E_i\rangle. \qquad (5.19)\end{aligned}$$

Pela definição de curvatura seccional,

$$\langle R_M(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle = f(h)^2K_M(X^*,E_i^*)\left(\langle X^*,X^*\rangle_M\langle E_i^*,E_i^*\rangle_M - \langle X^*,E_i^*\rangle_M^2\right).$$

Um cálculo rápido mostra que

$$\begin{aligned}\langle X^*,X^*\rangle_M\langle E_i^*,E_i^*\rangle_M - \langle X^*,E_i^*\rangle_M^2 = \frac{1}{f(h)^4}(&\langle X,X\rangle - \langle X,\nabla h\rangle^2\\ &- \langle X,X\rangle\langle\nabla h,E_i\rangle^2 - \langle X,E_i\rangle^2\\ &- \langle X,X\rangle\langle\nabla h,E_i\rangle^2 - \langle X,E_i\rangle^2\\ &+ 2\langle X,\nabla h\rangle\langle X,E_i\rangle\langle\nabla h,E_i\rangle).\end{aligned}$$

Substituindo as duas relações acima em (5.19), usando o fato de $\partial_t^\top = \nabla h$ e a hipótese sobre a curvatura seccional (5.15), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle \geqslant &\left[\left(\frac{f'(h)}{f(h)}\right)^2 - \frac{f''(h)}{f(h)}\right]((n-1)|X|^2 - |X|^2|\nabla h|^2 - (n-2)\langle X,\nabla h\rangle^2)\\ &- \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}(n-1)|X|^2 - \left[\frac{f''(h)}{f(h)} - \left(\frac{f'(h)}{f(h)}\right)^2\right](n-1)\langle X,\nabla h\rangle^2\\ &+ \left[\frac{f''(h)}{f(h)} - \left(\frac{f'(h)}{f(h)}\right)^2\right](\langle X,\nabla h\rangle^2 - |X|^2|\nabla h|^2), \qquad (5.20)\end{aligned}$$

donde, após uma rápida simplificação, concluímos o limite inferior

$$\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle \geqslant -(n-1)\frac{f''(h)}{f(h)}|X|^2. \qquad (5.21)$$

Usando (2.37) (de onde inferimos que $|\nabla h|$ é limitado), (5.21) e o fato de que Σ^n está contida em um slab de $\overline{M}^{n+1}$, concluímos que existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle - c\frac{f'(h)}{f(h)}|X|^2 + c\frac{f'(h)}{f(h)}\langle X, \nabla h \rangle^2 \geqslant -k|X|^2. \tag{5.22}$$

Por (5.18), (5.22) e levando em conta nossas hipóteses sobre $|A|$, podemos inferir que

$$\mathrm{Ric}_{-ch}(X, X) \geqslant -\left(\kappa + |A|^2\right)|X|^2 + \geqslant -\Lambda(r)|X|^2. \tag{5.23}$$

Portanto, o resultado segue do Lema 5.6. □

Agora, estamos em posição de enunciar e provar nosso principal resultado do capítulo.

Teorema 5.9. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ *(*$n \geqslant 3$*) um produto warped Riemanniano tal que a curvatura seccional da fibra* M^n *satisfaz a condição de convergência*

$$K_M \geqslant \sup_I \left((f')^2 - ff''\right) \quad \text{e} \quad f'' \geqslant 0. \tag{5.24}$$

Nestas condições, não existe sóliton translacional com respeito a ∂_t *e constante sóliton* $c \neq 0$ *contido em um slab* $[t_1, t_2] \times M$ *de* $\overline{M}^{n+1}$*, com função-ângulo* $\Theta \geqslant 1/2$*, satisfazendo* $cf'(h) \geqslant 0$ *e cujo operador forma é limitado superiormente por uma função radial* $\Lambda(r)$*, para* $\Lambda \in \mathcal{H}$*.*

Demonstração. Assuma que exista tal sóliton Σ^n. Considere a função suave $\vartheta = \log(1 + \Theta) \in C^2$. Observe que ϑ é a composição de $w(t) = \log(1 + t)$ com a função-ângulo Θ. Com um cálculo direto, obtemos

$$\Delta_{-ch}\vartheta = \frac{1}{1 + \Theta}\Delta_{-ch}\Theta - \frac{|\nabla\Theta|^2}{(1 + \Theta)^2}.$$

Logo, usando o Lema 5.5 e a Proposição 2.12(a), temos que

$$\begin{aligned} \Delta_{-ch}\vartheta = &- \frac{f'(h)}{f(h)}H\left(\frac{1 + \Theta^2}{1 + \Theta}\right) + 2\frac{f'(h)}{f(h)}\frac{1}{(1 + \Theta)^2}\langle A\nabla h, \nabla h \rangle \\ &- \frac{\Theta}{1 + \Theta}|A|^2 - \frac{f''(h)}{f(h)}\frac{\Theta}{1 + \Theta}|\nabla h|^2 - \frac{f'(h)}{f(h)}\frac{\Theta}{1 + \Theta}(n - 3|\nabla h|^2), \\ &- \frac{\Theta}{1 + \Theta}\left(\mathrm{Ric}^M(N^*, N^*) + (n - 1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2\right) \\ &- \frac{|A(\nabla h)|^2}{(1 + \Theta)^2} - \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\frac{\Theta^2}{(1 + \Theta)^2}|\nabla h|^2. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Pela desigualdade de Young, temos

$$2\frac{f'(h)}{f(h)}\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle \leqslant \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}|\nabla h|^2 + |A(\nabla h)|^2. \tag{5.26}$$

Usando (5.26), a hipótese $f''(h) \geqslant 0$ e (2.37), após uma simplificação, (5.25) se torna

$$\begin{aligned}\Delta_{-ch}\vartheta \leqslant & -\frac{f'(h)}{f(h)}H\left(\frac{1+\Theta^2}{1+\Theta}\right) - \frac{\Theta}{1+\Theta}|A|^2 + \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\frac{1}{1+\Theta}Q(\Theta) \\ & - \frac{\Theta}{1+\Theta}\left(\mathrm{Ric}^M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2\right),\end{aligned} \tag{5.27}$$

onde $Q(x) = 1 - (n-2)x - x^2 - 2x^3$. Note que $Q(0) = 1$, $Q(1) = -n$ e $Q'(x) = -(n-2) - 2x - 6x^2 < 0$ for $x \in [0,1]$. Então existe uma única raiz $\beta(n)$ de Q no intervalo $[0,1]$. Observe que $\beta(n) \leqslant 1/2$ se $n \geqslant 3$ e que $\beta(n) \to 0$ quando $n \to +\infty$, donde concluímos que $Q(\Theta) \leqslant 0$.

Utilizando a condição (5.24) sobre a curvatura seccional K_M de M^n, veja que, tomando um referencial ortonormal $\{E_j\}$ num abeto de Σ^n,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^M(N^*, N^*) &= \sum_{j=1}^{n}\langle R_M(N^*, E_j)N^*, E_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} K_M(N^*, E_j)\left\{\langle N^*, N^*\rangle_M\langle E_j, E_j\rangle_M - \langle E_j, N^*\rangle_M^2\right\} \\ &\geqslant \left[f'(h)^2 - f''(h)f(h)\right]\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{|\nabla h|^2}{f(h)^2} - \langle E_j, N^*\rangle_M^2\right\} \\ &= \left[f'(h)^2 - f''(h)f(h)\right]\left\{n\frac{|\nabla h|^2}{f(h)^2} - \frac{\langle N^*, N^*\rangle}{f(h)^2}\right\} \\ &= -(\log f)''(h)(n-1)|\nabla h|^2,\end{aligned} \tag{5.28}$$

onde nos cálculos acima usamos $\langle N^*, N^*\rangle_M = \dfrac{\langle N^*, N^*\rangle}{f(h)^2} = \dfrac{|\nabla h|^2}{f(h)^2}$ e $N^* = \sum_{j=1}^{n}\langle N^*, E_j\rangle_M E_j$. Daí, podemos concluir que

$$\mathrm{Ric}^M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2 \geqslant 0.$$

Além disso, como Σ é um sóliton translacional, $f'(h)H = f'(h)c\Theta \geqslant 0$. Voltando a (5.27), podemos concluir que $\Delta_{-ch}\vartheta \leqslant 0$.

Sob nossas hipóteses, podemos aplicar a Proposição 5.8, logo existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em Σ^n tais que, se $\inf_{\Sigma^n}\vartheta = \vartheta_*$, então

$$\vartheta_* \leqslant \vartheta(p_k) < \vartheta_* + \frac{1}{k},\ |\nabla\vartheta|(p_k) < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{k} < \Delta_{-ch}\vartheta(p_k) \leqslant 0.$$

Então, usando (5.27), obtemos

$$0 \leqslant |A(p_k)| < \frac{1}{k}.$$

Como $|A|^2 \geqslant n^{-1}H^2$, concluímos que $H(p_k) = c\Theta(p_k) \to 0$ quando $k \to +\infty$, o que contradiz a nossa hipótese sobre Θ. □

Observação 5.10. *O Teorema 5.9 vale para $n = 2$ se na hipótese sobre Θ fizermos, por exemplo, $\Theta \geqslant 2/3$. De fato, $Q(\Theta) \leqslant 0$ se $\Theta \geqslant 2/3$ neste caso.*

Podemos dar vários exemplos de produtos warped satisfazendo a condição de convergência (5.24). Por exemplo, temos o espaço Euclidiano menos um ponto $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{O\}$, o qual é isométrico ao produto warped $(0,+\infty)\times_t\mathbb{S}^n$. Observe que neste caso $f(t) = t$, logo $f''(t) = 0$, e a curvatura seccional $K_{\mathbb{S}^n}$ da esfera satisfaz

$$K_{\mathbb{S}^n} = 1 = f'(t)^2 - f''(t)f(t).$$

Outros exemplos são os espaços pseudo-hiperbólicos $I\times_{e^t}M^n$ cuja fibra M^n é completa e tem curvatura seccional não-negativa, além dos espaços de Schwarzschild e Reissner-Nordström $I\times_f\mathbb{S}^n$ (veja os Examplos 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4).

A verificação para os espaços pseudo-hiperbólicos é mais simples. No caso do Schwarzschild, temos

$$\begin{aligned} f'(t)^2 - f(t)f''(t) &= V_m(r) - \frac{r(t)}{2}\frac{dV_m}{dr} \\ &= 1 - 2mr^{1-n} - \frac{r}{2}(-2m)(1-n)r^{-n} \\ &= mr^{1-n}(-n-1) + 1. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Como $r > r_0 = (2m)^{\frac{1}{n-1}}$, temos de (5.29) que $f'(t)^2 - f(t)f''(t) < -m(n+1)r_0^{1-n} + 1 = 1 - \dfrac{n+1}{2} \leqslant 1 = K_{\mathbb{S}^n}$. No caso do espaço de Reissner-Nordström, temos

$$f'(t)^2 - f(t)f''(t) = 1 - mr(t)^{1-n} - n\left\{m - q^2r(t)^{1-n}\right\}r(t)^{1-n}. \tag{5.30}$$

Mas como $r(t) > r_0(m, q) = \left(\frac{q^2}{m-\sqrt{m^2-q^2}}\right)^{1/(n-1)}$, não é difícil verificar que

$$q^2 r(t)^{1-n} < m. \tag{5.31}$$

Consequentemente, de (5.30) e (5.31) concluímos que a condição de convergência (5.24) é também satisfeita no espaço de Reissner-Nordström.

Entretanto, todos os exemplos de *slices* que também são sólitons translacionais com constante sóliton $c < 0$ mostrados nos exemplos 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 não obedecem à hipótese $cf'(h) \geqslant 0$ no Teorema 5.9, apesar de cumprirem todas as demais. Isso mostra que *essa hipótese não pode ser removida daquele teorema.*

Por outro lado, se assumirmos que $c > 0$, podemos usar o Teorema 5.9 para obter os seguintes resultados de não existência.

O corolário abaixo usa o fato do espaço euclidiano sem a origem $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$ ser isométrico ao produto warped $\overline{M}^{n+1} = (0, +\infty) \times_t \mathbb{S}^n$, onde cada esfera $\mathbb{S}^n(r)$ de raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$ equivale a um slice $\{r\} \times \mathbb{S}^n$ de $\overline{M}^{n+1}$.

Corolário 5.11. *Não existe sóliton translacional completo $\psi : \Sigma^n \to (0, +\infty) \times_t \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 3)$ com respeito a ∂_t e constante sóliton $c > 0$, tendo função ângulo $\Theta \geqslant \frac{1}{2}$, contido no fecho de um anel $n-$dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ e tal que sua segunda forma fundamental é limitada superiormente por uma função radial $\Lambda(r)$ com $\Lambda \in \mathcal{H}$.*

Quando o ambiente é um espaço pseudo-hiperbólico (veja o Exemplo 5.2), obtemos a seguinte consequência.

Corolário 5.12. *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_{e^t} M^n$ $(n \geqslant 3)$ um espaço pseudo-hiperbólico cuja fibra M^n é completa e tem curvatura seccional não-negativa. Não existe sóliton translacional com respeito a ∂_t e constante sóliton $c > 0$, contido em um slab $[t_1, t_2] \times M^n$, com função-ângulo $\Theta \geqslant 1/2$ e a norma do seu operador forma é limitada superiormente por uma função radial $\Lambda(r)$, for $\Lambda \in \mathcal{H}$.*

Considerando o contexto do Exemplo 5.3, do Teorema 5.9 obtemos:

Corolário 5.13. *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f \mathbb{S}^n$ $(n \geqslant 3)$ o espaço de Schwarzschild. Não existe sóliton translacional completo com respeito a ∂_t e constante sóliton $c > 0$ contido em um slab $[t_1, t_2] \times M^n$, com função-ângulo $\Theta \geqslant 1/2$ e a norma do seu operador forma é limitada superiormente por uma função radial $\Lambda(r)$, for $\Lambda \in \mathcal{H}$.*

Considerando o contexto do Exemplo 5.4, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.14. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f \mathbb{S}^n$ *(*$n \geqslant 3$*) o espaço de Reissner-Nordström. Não existe sóliton translacional completo com respeito a* ∂_t *e constante sóliton* $c > 0$ *contido em um slab* $[t_1, t_2] \times M^n$*, com função-ângulo* $\Theta \geqslant 1/2$ *e a norma do seu operador forma é limitada superiormente c por uma função radial* $\Lambda(r)$*, for* $\Lambda \in \mathcal{H}$*.*

5.3 Resultados de Unicidade

Nesta seção, provaremos dois resultados de unicidade para sólitons translacionais. O primeiro utiliza um critério recente de parabolicidade e o segundo afirma que uma função u cujo Laplaciano ponderado por uma função densidade φ não muda de sinal e $|\nabla u|$ é $\varphi-$integrável deve ser harmônica.

A fim de provar nosso próximo resultado, precisaremos do lema a seguir, o qual segue de [40, Proposição 1] (veja também [49, Teorema 4.4]). Ele fornece uma critério de $\varphi-$parabolicidade considerando a função densidade $\varphi = -c\pi_I$, onde π_I é a projeção canônica sobre a componente $I \subset \mathbb{R}$. Lembremos que uma variedade Σ^n munida de uma função densidade φ é dita $\varphi-$**parabólica** se não existe uma função $u \in C^2(\Sigma^n)$ não-negativa, não-constante, tal que $\Delta_\varphi u \leqslant 0$, isto é, u é $\varphi-$superharmônica em Σ^n.

Lema 5.15. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ *um produto warped cuja base* M^n *é completa com recobrimento Riemanniano universal* $(-c\pi_I)$*-parabólico e seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície completa two-sided tal que sua função ângulo* Θ *está limitada por baixo por uma constante positiva. Se a restrição* $f(h)$ *em* Σ *da função warping* f *de* $\overline{M}$ *satisfaz* $0 < \inf_{\Sigma^n} f(h) \leqslant \sup_{\Sigma^n} f(h) < +\infty$*, então, para qualquer constante* $c \in \mathbb{R}$*,* Σ^n *é* $(-ch)$*-parabólica.*

Vamos agora assumir que o produto warped cumpre a seguinte condição mais fraca de convergência sobre a curvatura de Ricci da fibra M^n :

$$\mathrm{Ric}^M \geqslant (n-1)\sup_I \left((f')^2 - ff''\right) \quad \text{e} \quad f'' \geqslant 0. \tag{5.32}$$

Usando essa condição e o Lema 5.15, obtemos o seguinte resultado de não-existência.

Teorema 5.16. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ *(*$n \geqslant 3$*) um produto warped cuja base* M^n *é completa com recobrimento Riemanniano universal* $(-c\pi_{\mathbb{R}})$*-parabólico e satisfaz a condição* *de convergência* (5.32). *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *um sóliton translacional completo com respeito a* ∂_t *e constante sóliton* $c \in \mathbb{R}$ *tal que sua função ângulo* $\Theta \geqslant 1/2$. *Assuma que* $cf'(h) \geqslant 0$. *Se a restrição* $f(h)$ *em* Σ *da função warping* f *de* $\overline{M}^{n+1}$ *satisfaz* $0 < \inf_{\Sigma^n} f(h) \leqslant \sup_{\Sigma^n} f(h) < +\infty$, *então* Σ^n *é totalmente geodésica com função warping constante em* Σ^n. *Em adição, se a desigualdade sobre* Ric^M *em* (5.32) *é estrita, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico.*

Demonstração. De forma semelhante ao Teorema 5.9, podemos fazer a estimativa

$$\begin{aligned}\Delta_{-ch}\vartheta \leqslant & -\frac{f'(h)}{f(h)}H\left(\frac{1+\Theta^2}{1+\Theta}\right) - \frac{\Theta}{1+\Theta}|A|^2 + \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}\frac{1}{1+\Theta}Q(\Theta) \\ & - \frac{\Theta}{1+\Theta}\left(\mathrm{Ric}^M(N^*,N^*) + (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2\right),\end{aligned} \tag{5.33}$$

onde $Q(x) = 1-(n-2)x - x^2 - 2x^3$. Note que $Q(0) = 1$, $Q(1) = -n$ e $Q'(x) = -(n-2)-2x-6x^2 < 0$ para $x \in [0,1]$. Então existe uma única raiz $\beta(n)$ de Q em $[0,1]$. Observe ainda que $\beta(n) \leqslant 1/2$ se $n \geqslant 3$ e $\beta(n) \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Além disso, a condição de convergência (5.32) implica que (os cálculos são semelhantes a (5.28))

$$\mathrm{Ric}^M(N^*,N^*) + (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2 \geqslant 0. \tag{5.34}$$

As hipóteses então nos permitem concluir que $\Delta_{-ch}\vartheta \leqslant 0$. Pelo Lema 5.15, $\vartheta = \log(1+\Theta)$ é constante. Isso implica, retornando a (5.33), que $|A| = 0$ e $f'(h) = 0$, então Σ^n é totalmente geodésica e $f \circ h$ é constante.

Em adição, se a desigualdade (5.32) é estrita em Ric^M, temos que (5.34) é também estrita sempre que $N^* \neq 0$. Por (5.33) e o fato de ϑ ser constante, concluímos que $N^*(p) = 0$ em qualquer $p \in \Sigma^n$, isto é, $|\nabla h|^2 = 0$ e Σ^n é um slice totalmente geodésico de $\overline{M}^{n+1}$. □

Para o próximo resultado de não-existência, usaremos o princípio associado a condição de integrabilidade enunciado na Subseção 3.2.1. Para facilitar a leitura, repetiremos o seu enunciado. Consideraremos o conjunto

$$\mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma) := \left\{u : \Sigma^n \to \mathbb{R} : \int_\Sigma |u| e^{-\varphi} d\Sigma < +\infty\right\}.$$

Quando φ é constante, esse conjunto é simplesmente denotado por $\mathcal{L}^1(\Sigma)$.

Lema 5.17. *Seja* u *uma função suave em uma variedade Riemanniana completa* Σ^n *munida com uma função peso* $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{R}$, *tal que* $\Delta_\varphi u$ *não muda de sinal em* Σ^n. *Se* $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1_\varphi(\Sigma)$, *então* $\Delta_\varphi u$ *é identicamente nulo sobre* Σ^n.

Usando o Lema 5.17 e a condição (5.32), provamos o seguinte resultado.

Teorema 5.18. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ $(n \geqslant 3)$ *um produto warped cuja base* M^n *satisfaz a condição de convergência* (5.32). *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *um sóliton translacional completo com respeito a* ∂_t *e constante sóliton* $c \in \mathbb{R}$ *tal que sua função ângulo* $\Theta \geqslant 1/2$. *Assuma que* $cf'(h) \geqslant 0$. *Se* $|\nabla\Theta| \in \mathcal{L}^1_{-ch}(\Sigma^n)$, *então* Σ^n *é totalmente geodésico com função warping constante. Em adição, se a desigualdade sobre o* Ric^M *em* (5.32) *é estrita, então* Σ^n *é um slice totalmente geodésico.*

Demonstração. Semelhante ao Teorema 5.16 temos que $\Delta_{-cu}[\log(1+\Theta)] \leqslant 0$. Além disso, como
$$|\nabla(\log(1+\Theta))| = \frac{|\nabla\Theta|}{1+\Theta},$$
a hipótese $|\nabla\Theta| \in \mathcal{L}^1_{-ch}(\Sigma^n)$ implica que $|\nabla(\log(1+\Theta))| \in \mathcal{L}^1_{-ch}(\Sigma^n)$. Neste ponto, podemos aplicar o Lema 5.17 para garantir que $\Delta_{-ch}(\log(1+\Theta)) = 0$ e raciocinar novamente como na última parte da prova do Teorema 5.16. □

5.4 Gráficos Translacionais

O objetivo desta seção é aplicar os resultados provados anteriormente neste capítulo para gráficos inteiros translacionais em $I \times_f M^n$. Eles podem ser tratados como resultados do tipo Moser-Bernstein para gráficos (veja [45]).

Considere um aberto conexo $\Omega \subset M^n$. Uma função $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $u(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ define um gráfico vertical no espaço-produto $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$. Denotaremos por $\Sigma(u)$ o gráfico sobre Ω determinado por u, isto é,

$$\Sigma(u) = \{(u(p), p) : p \in \Omega\} \subset \overline{M}^{n+1}.$$

O gráfico é dito inteiro se $\Omega = M^n$. Observe que $h(u(p), p) = u(p)$, $p \in \Omega$. Portanto, h e u podem ser identificadas de forma natural. A métrica induzida em Ω da métrica

Riemanniana do espaço-ambiente via $\Sigma(u)$ é dada por

$$g_u = du^2 + f(u)^2\langle , \rangle_M.$$

Então, quando M^n é completa e $\inf_{\Sigma^n} f(u) > 0$, temos que $\Sigma(u)$ munida da métrica g_u é também completa. Existem duas possíveis escolhas para o vetor normal N a $\Sigma(u)$. Mantendo a coerência com o contexto geral deste capítulo, escolheremos N dado por

$$N(p) = \frac{1}{f(u)\sqrt{f(u)^2 + |Du(p)|^2_{M^n}}}\left(f(u)^2\partial_t|_{(u(p),p)} - Du(p)\right), \quad p \in \Omega, \tag{5.35}$$

onde Du denota o gradiente de u em M^n e $|Du|_{M^n} = \langle Du, Du\rangle^{1/2}_{M^n}$, de modo que $0 < \Theta \leqslant 1$. O operador forma correspondente a N é dado por

$$\begin{aligned} AX =& \frac{1}{f(u)\sqrt{f(u)^2 + |Du|^2_M}} D_X Du - \frac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2 + |Du|^2_M}} X \\ &+ \left(\frac{-\langle D_X Du, Du\rangle_M}{f(u)\left(f(u)^2 + |Du|^2_M\right)^{3/2}} - \frac{f'(u)\langle Du, X\rangle_M}{\left(f(u)^2 + |Du|^2_M\right)^{3/2}}\right) Du, \end{aligned} \tag{5.36}$$

para qualquer campo de vetores X tangente a Ω, onde D é a conexão de Levi-Civita de M^n.

Além disso, um cálculo direto mostra que

$$|\nabla h|^2 = 1 - \Theta^2 = \frac{|Du|^2_M}{f(u)^2 + |Du|^2_M}. \tag{5.37}$$

Consequentemente, sendo $\Sigma(u)$ um gráfico vertical sobre $\Omega \subseteq M^n$ e denotando por div_{M^n} o operador divergência na métrica $\langle , \rangle_{M^n}$, verifica-se de (5.36) que a função curvatura média $H(u)$ de $\Sigma(u)$ é dada por:

$$H(u) = \operatorname{div}_M\left(\frac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2 + |Du|^2_M}}\right) - \frac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2 + |Du|^2_M}}\left(n - \frac{|Du|^2_M}{f(u)^2}\right). \tag{5.38}$$

Portanto, de (5.1), (5.37) e (5.38) diremos que um gráfico inteiro $\Sigma(u)$ é um **gráfico translacional inteiro** quando $u \in C^\infty(M)$ é uma solução da seguinte equação diferencial parcial (veja [41, Proposição 6]):

$$\operatorname{div}_M\left(\frac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2+|Du|_M^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{f(u)^2+|Du|_M^2}}\left\{f'(u)\left(n-\frac{|Du|_M^2}{f(u)^2}\right)+cf(u)\right\}. \tag{5.39}$$

Isto significa que $\Sigma(u)$ é um gráfico translacional com respeito a ∂_t e constante sóliton $c \in \mathbb{R}$.

Novamente mencionamos que $u \in C^\infty(M)$ tem **norma C^2 finita** quando

$$\|u\|_{C^2(M)} := \sup_{|\gamma|\leqslant 2} |D^\gamma u|_{L^\infty(M)} < +\infty.$$

Neste contexto, podemos provar nosso resultado de não-existência para gráficos translacionais inteiros:

Teorema 5.19. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ *(*$n \geqslant 3$*) um produto warped cuja fibra* M^n *é completa e sua curvatura seccional obedece à condição de convergência* (5.24)*. Suponha em adição que* $c \neq 0$*. Não existe solução inteira* $u \in C^\infty(M)$ *da equação* (5.39)*, com norma* C^2 *finita e tal que* $cf'(u) \geqslant 0$ *e* $|Du|_M \leqslant \sqrt{3}f(u)$.

Demonstração. Suponha que existe uma solução $u \in C^\infty(M)$ de (5.39). Segue de (5.36) que o operador forma A de $\Sigma(u)$ é limitado se u tem norma C^2 finita. Note também que a norma C^2 de u ser finita implica, em particular que u é limitada, o que, por sua vez, garante que $\inf_M f(u) > 0$. Como estamos assumindo que M^n é completa, mostramos que $(\Sigma(u), g_u)$ deve ser também completa.

Além disso, segue imediatamente da restrição $|Du|_M \leqslant \sqrt{3}f(u)$ e de (5.37) que temos $\Theta \geqslant 1/2$. Então $\Sigma(u)$ satisfaz a condição do Teorema 5.9, logo temos uma contradição. □

Como consequência do Teorema 5.18, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 5.20. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ *(*$n \geqslant 3$*) um produto warped cuja fibra* M^n *é completa e obedece à condição de convergência* (5.32)*, onde a desigualdade sobre* Ric^M *é estrita. Se* $u \in C^\infty(M)$ *é uma solução inteira da equação* (5.39) *com norma* C^2 *finita, tal que* $|Du|_M \in \mathcal{L}^1_{-cu}(M)$, $cf'(u) \geqslant 0$ *e* $|Du|_M \leqslant \sqrt{3}f(u)$, *então* $u \equiv t_0$ *para algum* $t_0 \in I$ *tal que* $f'(t_0) = 0$.

Demonstração. Seja $u \in C^\infty(M)$ uma tal solução satisfazendo o enunciado do teorema. Do mesmo modo que no Teorema 5.19, segue de (5.36) que o operador forma A de $\Sigma(u)$

é limitado se u tem norma C^2 finita e que u é limitado, pois a norma C^2 de u ser finita, donde obtemos $\inf_M f(u) > 0$. Pela hipótese de M^n ser completa, concluímos que $(\Sigma(u), g_u)$ é completa.

Como u e $|A|$ são limitados, da Proposição 2.12(a), temos que

$$\begin{aligned} |\nabla\Theta|^2 &= |A(\nabla h)|^2 + 2\frac{f'(u)}{f(u)}\langle A(\nabla h)\nabla h\rangle + \frac{f(u)^2}{f(u)^2}|\nabla h|^2 \\ &\leqslant |A|^2|\nabla h|^2 + 2|A||\nabla h|^2 + \frac{f'(u)^2}{f(u)^2}|\nabla h|^2 \\ &\leqslant k|\nabla h|^2 \end{aligned} \tag{5.40}$$

para alguma constante $k > 0$.

Denotando por $d\Sigma(u)$ e dM os elementos de volumes usuais de $(\Sigma(u), g_u)$ e $(M^n, \langle\, ,\rangle_M)$, respectivamente, segue de [10, Equação (3.7)] que

$$|\nabla h| d\Sigma(u) = f(u)^{n-1}|Du|_M dM. \tag{5.41}$$

Aqui, como estamos assumindo que $|Du|_M \in \mathcal{L}^1_{(-cu)}(M)$, da relação (5.41) concluímos que $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_{-ch}(\Sigma(u))$. Portanto, de (5.40), temos que $|\nabla\Theta| \in \mathcal{L}^1_{-ch}(\Sigma(u))$. Então podemos aplicar o Teorema 5.18 para obter nosso resultado. $\square$

Finalizamos este trabalho mencionando o seguinte resultado tipo Moser-Bernstein, cuja prova é baseada no Teorema 5.16 e pode ser feita de forma semelhante aos dois teoremas já provados desta seção.

Teorema 5.21. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ *(*$n \geqslant 3$*) um produto warped cuja fibra* M^n *é complta com recrobimento Riemanniano universal* $(-c\pi_{\mathbb{R}})$*-parabólico e satisfaz a condição de convergência* (5.32)*, onde a desigualdade sobre* Ric^M *é estrita. Se* $u \in C^\infty(M)$ *é uma solução inteira limitada de* (5.39)*, tal que* $cf'(u) \geqslant 0$ *e* $|Du|_M \leqslant \sqrt{3}f(u)$*, então* $u \equiv t_0$ *para algum* $t_0 \in I$ *tal que* $f'(t_0) = 0$.

Referências Bibliográficas

[1] K. Akutagawa, *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space*, Math. Z. **196** (1987), 13–19.

[2] A. L. Albujer, *New examples of entire maximal graphs in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, Diff. Geom. Appl. **26** (2008), 456–462.

[3] A. L. Albujer, H. F. de Lima, A. M. Oliveira, M. A. L. Velásquez, *Rigidity of complete spacelike hypersurfaces in spatially weighted generalized Robertson-Walker spacetimes*. Diff. Geom. Appl. **50** (2017), 140–154.

[4] A. L. Albujer, H. F. de Lima, A. M. Oliveira, M. A. L. Velásquez, *φ-Parabolicity and the Uniqueness of Spacelike Hypersurfaces Immersed in a Spatially Weighted GRW Spacetime*. Mediterr. J. Math. **15** (2018), 84.

[5] J. A. Aledo, A. Romero, R. M. Rubio; *Constant mean curvature spacelike hypersurfaces in Lorentzian warped products and Calabi-Bernstein type problems*, Nonl. Anal. **106** (2014), 57–69.

[6] L. J. Alías, A. Caminha, F. Y. do Nascimento, *A maximum principle related to volume growth and applications*, Ann. Mat. Pura Appl. **200** (2021), 1637–1650.

[7] L. J. Alías, A. Caminha, F. Y. do Nascimento, *A maximum principle at infinity with applications to geometric vector fields*, J. Math. Anal. Appl. **474** (2019), 242–247.

[8] L. J. Alías, A. G. Colares, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **143** (2007), 703–729.

[9] L. J. Alías, A. G. Colares, H. F. de Lima, *On the rigidity of complete spacelike hypersurfaces immersed in a generalized Robertson-Walker spacetime*, Bull. Brazilian Math. Soc. **44** (2013), 195–217.

[10] L. J. Alías, A.G. Colares, H. F. de Lima, *Uniqueness of entire graphs in warped products*, J. Math. Anal. Appl. **430** (2015), 60–75.

[11] L. J. Alías, M. Dajczer, *Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab*, Comment. Math. Helv. **81**, (2006), 653 - 663.

[12] L. J. Alías, J.H. de Lira, M. Rigoli, *Mean curvature flow solitons in the presence of conformal vector fields*, J. Geom. Anal. **30** (2020), 1466–1529.

[13] L. J. Alías, P. Mastrolia, M. Rigoli, *Maximum principles and geometric applications*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2016. xvii+570 pp.

[14] L. J. Alías, A. Romero, M. Sánchez. Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes, Gen. Relat. Grav. **27** (1995), 71–84.

[15] C. P. Aquino, H. I. Baltazar, H. F. de Lima, *New Calabi-Bernstein type results in Lorentzian product spaces with density*, Nonl. Anal. **197** (2020), 111855.

[16] C. P. Aquino, H. F. de Lima, G. S. Dias, *A sharp Bochner type inequality for constant weighted mean curvature spacelike hypersurfaces and applications*, preprint.

[17] C. P. Aquino, H. F. de Lima, G. S. Dias, *Solitons of the spacelike weighted mean curvature flow in spatially weighted GRW spacetimes*, preprint.

[18] C. P. Aquino, H. F. de Lima, G. S. Dias, *Translating Solitons of the Mean Curvature Flow in Warped Products: Nonexistence and Rigidity*, preprint.

[19] J. G. Araújo, H. F. de Lima, W. F. Gomes, *Uniqueness and nonexistence of complete spacelike hypersurfaces, Calabi-Bernstein type results and applications to Einstein-de Sitter and steady state type spacetimes*, Rev. Mat. Complut. **34** (2021), 653–673.

[20] D. Bakry, M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, In *Seminaire de probabilites*, XIX, 1983/84, volume 1123 of *Lecture Notes in Math*, pages 177–206, Springer, Berlin, 1985.

[21] M. Batista, G. M. Bisci, H. F. de Lima, W. F. Gomes, *Solitons of the spacelike mean curvature flow in generalized Robertson-Walker spacetimes*, New York J. Math. **29** (2023), 554–579.

[22] M. Batista, H. F. de Lima, *Maximum principles applied to translating solitons of the mean curvature flow in product spaces*, Results Math. **78**:57, (2023).

[23] M. Batista, H.F. de Lima, *Spacelike translating solitons in Lorentzian product spaces: Nonexistence, Calabi-Bernstein type results and examples*, Comm. Contemp. Math. **24** (2022), 2150034.

[24] M. Caballero, A. Romero, R. M. Rubio; *Constant mean curvature spacelike surfaces in three-dimensional generalized Robertson-Walker spacetimes*, Lett. Math. Phys. **93** (2010), 85–105.

[25] M. Caballero, A. Romero, R. M. Rubio; *Uniqueness of maximal surfaces in generalized Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein type problems*, J. Geom. Phys. **60** (2010), 394–402.

[26] M. Caballero, A. Romero, R. M. Rubio; *Complete CMC spacelike surfaces with bounded hyperbolic angle in generalized Robertson-Walker spacetimes*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **7** (2010), 961–978.

[27] A. Caminha, *The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces*, Bull. Braz. Math. Soc. **42** (2011), 277–300,

[28] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Sympos. Pure Math. **15** (1970), 223-230.

[29] J. S. Case, *Singularity theorems and the Lorentzian splitting theorem for the Bakry-Émery-Ricci tensor*, J. Geom. Phys. **60** (2010), 477–490.

[30] M. P. Cavalcante, H. F. de Lima, M. S. Santos, *New Calabi-Bernstein type results in weighted generalized Robertson-Walker spactimes*, Acta Math. Hung. **145** (2015), 440–454.

[31] M. P. Cavalcante, H. F. de Lima, M. S. Santos, *On Bernstein-type properties of complete hypersurfaces in weighted warped products*, Annali di Matematica **195** (2016), 309–322.

[32] S. Y. Cheng, S. T. Yau, *Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. of Math. **104** (1976) 407-419.

[33] G. Colombo, L. Mari, M. Rigoli, *Remarks on mean curvature flow solitons in warped products*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **13** no. 7 1957–1991, (2020).

[34] A. Freitas, H. F. de Lima, M.S. Santos, J. S. Sindeaux, *Nonexistence and rigidity of spacelike mean curvature flow solitons immersed in a GRW spacetime*, Ann. Glob. Anal. Geom. **63** (2023), 2.

[35] M. Gromov, *Isoperimetry of waists and concentration of maps*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), 178–215.

[36] D.T. Hieu, T. L. Nam, *Bernstein type theorem for entire weighted minimal graphs in* $\mathbb{G}^n \times \mathbb{R}$, J. Geom. Phys. **81** (2014), 87–91.

[37] D. Impera, M. Rimoldi, *Stability properties and topology at infinity of f- minimal hypersurfaces*, Geom. Dedicata **178** (2015), 21–47.

[38] J. M. Latorre, A. Romero, *Uniqueness of Noncompact Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Generalized Robertson-Walker Spacetimes*, Geom. Ded. **93** (2002), 1–10.

[39] H. F. de Lima, W.F. Gomes, M. S. Santos, M. A. L. Velásquez, *On the geometry of spacelike mean curvature flow solitons immersed in a GRW spacetime*, J. Australian Math. Soc. (2023), 1–36.

[40] E. L. de Lima, H. F. de Lima, F. R. dos Santos, *On the stability and parabolicity of complete* f*-minimal hypersurfaces in weighted warped products*, Results Math. **73**:14, (2018).

[41] J. H. S. de Lira, F. Martín, *Translating solitons in Riemannian products*, J. Diff. Eq. **266** (2019), 7780–7812,

[42] J. Marsden e F. Tipler, *Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity*, Bull. American Soc. **23** (1978), 84.

[43] S. Montiel, *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 711–748.

[44] S. Montiel, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes*, Math. Ann. **314** (1999), 529–553.

[45] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 577–591.

[46] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 205–214.

[47] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, London, 1983.

[48] M. Rimoldi, *Rigidity results for Lichnerowicz Bakry-Émery Ricci tensor*, Ph.D. thesis, Università degli Studi di Milano, 2011.

[49] A. Romero, R. M. Rubio, J. J. Salamanca, *Uniqueness of complete maximal hypersurfaces in spatially parabolic generalized Robertson-Walker spacetimes*, Class. Quantum Grav. **30** (2013), 115007.

[50] A. Romero, R. M. Rubio, J. J. Salamanca, *A new approach for uniqueness of complete maximal hypersurfaces in spatially parabolic GRW spacetimes*, J. Math. Anal. Appl. **419** (2014), 355–372.

[51] Y. Tashiro, *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*, Trans. American Math. Soc. **117** (1965), 251 - 275.

[52] G. Wei, W. Wylie, *Comparison geometry for the Bakry-Émery-Ricci tensor*, J. Diff. Geom. **83** (2009), 377–405.

[53] V. M. Xavier, *Sobre Princípios do Máximo Relacionados ao Crescimento de Volume e suas Aplicações*, Ph.D. thesis, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2022.

[54] S. T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 201–228,

[55] S. T. Yau, *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry*, Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 659–670.

[56] N. Zhang, Z. Zhu, *On Bernstein's Problem of Complete Parabolic Hypersurfaces in Warped Products*, Advances in Mathematical Physics, **6390463**, 6 pages, (2023).