Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Equação k-Hessiana com termo quadrático natural

Jefferson de Brito Sousa

Teresina - 2024

Jefferson de Brito Sousa

Tese de Doutorado:

Equação k-Hessiana com termo quadrático natural

Tese de Doutorado submetida á Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira
Co-Orientador:
Prof. Dr. Mykael de Araujo Cardoso

Teresina - 2024

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equação k-Hessiana com termo quadrático natural

Jefferson de Brito Sousa

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 20 de março de 2024.

Banca Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE FRANCISCO ALVES DE OLIVEIRA
Data: 21/03/2024 15:51:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira – Orientador

____

Prof. Dr. Mykael de Araujo Cardoso – Coorientador

gov.br Documento assinado digitalmente
ABIEL COSTA MACEDO
Data: 21/03/2024 15:19:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Abiel Costa Macedo – UFG

Documento assinado digitalmente
JOAO MARCOS BEZERRA DO O
Data: 20/03/2024 22:30:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB

Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla López – USACH

Documento assinado digitalmente
OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI
Data: 21/03/2024 06:46:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki – UFSCAR

Ficha catalográfica editada pela biblioteca setorial do CCN.

Sousa, Jefferson de Brito.

xxxx Equação k-Hessiana com termo quadrático natural.

Jefferson de Brito Sousa – Teresina: 2024.

Orientador: Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira.

Co-Orientador: Prof. Dr. Mykael de Araujo Cardoso.

1. Análise Matemática/ Equações Diferenciais Parciais

CDD 516.36

Dedico esse trabalho à minha mãe Silvana, e à minha esposa Paulysendra.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por ter me dado força e perseverança nessa jornada, para continuar persistindo e assim conseguir meu objetivo.

Agradeço a minha mãe Silvana e a minha esposa Paulysendra por estarem comigo em todos os momentos, me apoiando e me dando força, através de muito carinho e amor.

Agradeço a todos os meus familiares, em especial: a minha tia Verônica, à minha irmã Jéssica, ao meu tio Otávio, ao meu sogro Vicente de Paula, a minha sogra Valda e a minha cunhada Paulyane que sempre acreditaram em mim.

Agradeço ao meu orientador Dr. José Francisco e ao meu co-orientador Dr. Mykael Cardoso pelo companheirismo e aprendizados que me foram oferecidos nessa longa jornada.

Agradeço aos meus amigos, principalmente os mais próximos: Erlane, Keyllanne, Elizeu, Thiago, Andressa, Juliano, Paulo Ricardo, Ítalo Gutierre, Mariana, Marcos, Wallace e Jailson. Todos esse participaram de forma significativa da minha vida durante essa caminhada acadêmica. Agradeço aos meu amigos de profissão: Portela, Coimbra, Valney e Cláudio Vidrih por sempre me incentivarem a cursar o doutorado.

Agradeço a todos os alunos que convivi nesses anos na Pós-graduação da Ufpi. Em especial: Edimilson, Christopher, Alexandre, Atecio, Gustavo, Bruno, Dieme, Márcio, Pedro Paulo, Jõao Santos e João Vinícius.

Agradeço aos meus professores da graduação e da pós-graduação por todos os ensinamentos. Em especial: Halysson, Paulo Alexandre, Rondinelle, Jefferson Leite, João Xavier, Mário Gomes, Jurandir e Cícero.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro e a Universidade Estadual do Piauí por me conceder licença para cursar doutorado.

"Você nunca vai chegar ao seu destino se você parar e atirar pedras em todo cão que late".

Fiòdor Dostoiévski.

Resumo

Determinamos um termo do tipo gradiente para a equação k-Hessiana que estende para $k > 1$ o termo gradiente quadrático natural associado à equação de Laplace. Provamos que tal termo é invariante por uma mudança de variáveis do tipo Kazdan-Kramer, coincide com o termo gradiente quadrático (para $k = 1$) e satisfaz uma hipótese de naturalidade motivada por alguns resultados de existência devido a J. Serrin em 1976. Como aplicações, garantimos a existência de soluções para uma nova classe de equação k-Hessiana nos casos sublinear e superlinear para crescimento do tipo Sobolev ($k < n/2$). Inspirados pela identidade de Puccin-Serrin e resultados de Tso em 1990, determinamos uma condição de não-existência em alguns casos particulares. Além disso, para regime de crescimento do tipo Trudinger-Moser ($k = n/2$), provamos também a existência de soluções sob condições subcríticas ou críticas. Por fim, consideramos um problema de autovalor associado a essa nova classe de equação.

Palavras-chave: Equação k-Hessiana; Termo gradiente; Mudança de Kadzan-Kramer; Equações elípticas; Funções k-admissíveis.

Abstract

We determine a gradient type term for the k-Hessian equation that extends the natural quadratic gradient term associated with the Laplace equation for $k > 1$. We prove that such a term is invariant by a change of variables of the Kazdan-Kramer type, coincides with the quadratic gradient term (for $k = 1$), and satisfies a natural hypothesis motivated by some existence results due to J. Serrin in 1976. As applications, we guarantee the existence of solutions for a new class of k-Hessian equation in the sublinear and superlinear cases for Sobolev type growth ($k < n/2$). Inspired by the Puccin-Serrin identity and Tso's results in 1990, we determine a non-existence condition in some particular cases. Furthermore, for the Trudinger-Moser growth regime ($k = n/2$), we also prove the existence of solutions for either subcritical or critical conditions. Finally, we consider an eigenvalue problem associated with this new class of equations.

Keywords: k-Hessian equation; gradient term; Kadzan-Kramer transform; Elliptic Equations; k-admissible functions.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Equação de Laplace com termo quadrático natural

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, um domínio suave e limitado e $u \in C^2(\Omega)$. Em 1976, Serrin [30] estudou a existência de soluções da seguinte equação

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} = b(x, u, \nabla u) \text{ em } \Omega \\ \\ u = \phi \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é contínua e $b, a_{ij} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 com

$$a_{ij}(x, u, p) > 0 \text{ para todo } (x, u, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Serrin provou que se b cresce mais rápido do que quadraticamente com relação a p, isto é,

$$\lim_{|p| \to +\infty} \frac{|b(x, u, p)|}{|p| \text{traço}(a_{ij}(x, u, p))} = \infty$$

existem domínios suaves e dados suaves tais que a equação (1.1) não possui solução. Motivados por este resultado, em 1978 Kadzan e Kramer em [20] investigaram condições para que uma mudança de variável $v = A(u)$ transforme a equação (1.1) em uma nova equação, na qual, o termo do lado direito não dependa do gradiente, sob a condição

$$|b(x, u, p)| \leqslant C(|u|)(1 + |p|^2)$$

para alguma constante $C > 0$. Para ilustrar este processo, vamos considerar como protótipo o operador de Laplace que é determinado pelas condições, $a_{ij} = 1$ se $i = j$

e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Neste caso, diversos autores consideraram a seguinte equação com termo gradiente

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^2 + f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

onde Δu é o Laplaciano e $f : \Omega \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função contínua. Neste caso, a mudança de variável $v = e^u - 1$ transforma o problema (1.2) na equação

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x,v) & \text{em} \;\; \Omega \\ v > 0 & \text{em} \;\; \Omega \\ v = 0 & \text{em} \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $h(x,v) = (1+v)f(x,\log(1+v))$. Assim, pelos resultados de não-existência do Serrin para o crescimento mais rápido do que o quadrático no gradiente e pela invariância por mudança de Kadzan-Kramer, diversos autores [2, 6, 19, 20] consideram o termo $|\nabla u|^2$ como natural para equação de Laplace. Em [6], os autores consideraram $|\nabla u|^p$ como crescimento natural para o problema correspondente associado ao operador p-Laplaciano o qual é também invariante pela mudança de Kadzan-Kramer.

1.2 Equação k-Hessiana com termo natural

Motivados pelos resultados mencionados na seção anterior, buscamos expandir o conceito de naturalidade do crescimento em relação ao gradiente. Investigamos evidências de um termo natural para a equação k-Hessiana, veja (1.6) abaixo. Para isso, inicialmente considere a equação

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,p,A)u_{x_i x_j} = b(x,u,p,A) \;\; \text{em} \; \Omega \\ u = \phi \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

onde $\phi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e b, a_{ij} são tais que

$$b, a_{ij} \in C^1 \;\; \text{e} \;\; a_{ij}(x,u,p,A) > 0 \;\; \text{para todo} \;\; (x,u,p,A) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}.$$

De acordo com a seção anterior, desejamos determinar uma função $H_k[x,u,p,A]$ tal que

$$\lim_{|p|\to+\infty} \frac{|B(x,u,p,A)|}{|H_k(x,u,p,A)|} = \infty. \tag{1.5}$$

sempre que

$$\lim_{|p|\to+\infty} \frac{|B(x,u,p,A)|}{|p|\text{traço}(a_{ij}(x,u,p,A))} = \infty, \quad \forall \;\; x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R} \;\; \text{e} \;\; A \in \mathbb{R}^{n^2},$$

onde $B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, $a_{ij}(x,u,p,A)$ é a matriz correspondente ao operador k-Hessiano. Além disso, $H_k(x,u,\nabla u, D^2u)$ deve ser invariante por uma mudança do tipo Kadzan-Kramer para a equação

$$\begin{cases} S_k[u] = g(u)H_k[u,\nabla u, D^2u] + f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u < 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.6}$$

onde $S_k[u]$ é o operador k-Hessiano, definido como a soma de todos os menores principais de ordem k da matriz Hessiana D^2u de uma função $u \in C^2(\Omega)$, $g : (-\infty, 0] \to [0,\infty)$ é uma função contínua e $f \in C(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-})$, com $f(x,z) > 0$ para $z < 0$.

Como veremos, o termo H_k apropriado é dado por

$$H_k[u,\nabla u, D^2u] = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \sum_{t=1}^{k} \det([D^2u]_i \overset{t}{\leftarrow} u_{x_{i_t}} \nabla_k^i u) \tag{1.7}$$

onde

$$\nabla_k^i u = \begin{bmatrix} u_{x_{i_1}} \\ u_{x_{i_2}} \\ \vdots \\ u_{x_{i_k}} \end{bmatrix},$$

e $[D^2u]_i = (D^2u)[\alpha_i, \alpha_i]$, com $i = 1, ..., \binom{n}{k}$, representa a i-ésima submatriz principal de D^2u de ordem k determinada pelo conjunto de índices $\alpha_i = \{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$. Além disso, a matriz $([D^2u]_i \overset{t}{\leftarrow} u_{x_{i_t}} \nabla_k^i u)$ é obtida ao substituir a coluna t da matriz $[D^2u]_i$ pela coluna de elementos do vetor $(u_{x_{i_t}} \nabla_k^i u)$, mantendo as demais colunas inalteradas.

Verificamos que a mudança de variáveis do tipo Kazdan-Kramer dada por

$$A_g(s) = -\int_s^0 e^{G(t)}dt, \quad \text{com} \quad G(t) = \int_t^0 g(\tau)d\tau \tag{1.8}$$

transforma a equação (1.6) na equação k-Hessiana sem o termo k-gradiente H_k

$$\begin{cases} S_k[\nu] = h(x,\nu) & \text{em } \Omega \\ \nu < 0 & \text{em } \Omega \\ \nu = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

onde

$$h(x,s) = e^{kG(A_g^{-1}(s))} f(x, A_g^{-1}(s)). \tag{1.10}$$

Por fim, verificamos que o termo H_k definido por (1.7) satisfaz a condição de naturalidade (1.5). Outro fato importante a ser observado é que este termo está intimamente relacionado com a norma no espaço da funções k-admissíveis $\Phi_0^k(\Omega)$ (Lema 2.1) que é o espaço natural para o estudo do operador k-Hessiano, conforme proposto por Caffarelli, Nirenberg e Spruck [4].

A partir disso, foi possível apresentar resultados de existência de soluções para a equação (1.6) para o crescimento sublinear ou superlinear do tipo polinomial no caso Sobolev $k < n/2$. Comprovamos a existência de soluções em condições subcríticas ou críticas para o crescimento do tipo exponencial no caso Trudinger-Moser $k = n/2$. Com base no resultado estabelecido por Tso em [37, Proposição 1] estabelecemos resultados de não-existência para a equação k-Hessiana em (1.6).

Sendo $H_k[u, \nabla u, D^2 u]$ o termo conveniente em (1.6), dizemos que o crescimento natural do termo k-gradiente H_k na equação k-Hessiana é evidenciado pelos seguintes itens:

A) Para $k = 1$, $H_1[u, \nabla u, D^2 u] = |\nabla u|^2$ que corresponde ao termo natural para o operador de Laplace $\Delta u = S_1[u]$;

B) A equação k-Hessiana com o termo k-gradiente H_k é invariante por uma mudança de Kadzan-Kramer, Proposição 3.1.

C) O termo k-gradiente H_k satisfaz a hipótese natural (1.5), Lema 5.1.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

Capítulo 2

Apresentaremos o símbolo de Kronecker Generalizado, juntamente com suas principais propriedades, o qual desempenha um papel bastante relevante na teoria de determinantes.

Definiremos o operador k-Hessiano apontando sua estrutura divergente e sua propriedade de elipticidade. Veremos que a propriedade de elipticidade é fundamental e será válida no espaço da funções k-admissíveis. Por fim, definiremos o termo k-gradiente, provaremos que esse termo está relacionado com a estrutura variacional da Hessiana no espaço das funções k-admissíveis e apresentaremos formas alternativas de calculá-lo.

Capítulo 3

Discutiremos uma mudança do tipo Kazdan-Kramer para a equação k-Hessiana que se apresenta como uma generalização natural da mudança clássica para a equação de Laplace com termo gradiente quadrático $|\nabla u|^2$. De fato, veremos que o termo k-gradiente H_k, desempenha na equação k-Hessiana o papel do termo quadrático $|\nabla u|^2$ na equação de Laplace. Para finalizar, apresentaremos uma condição suficiente (Corolário 3.1) para que a k-admissibilidade das soluções da equação (3.3) seja preservada pela mudança de Kadzan-Kramer.

Capítulo 4

No capítulo 4 vamos apresentar resultados de existência de soluções para uma nova classe de equação k-Hessiana para o crescimento sublinear ou superlinear do tipo polinomial no caso Sobolev $k < n/2$; neste caso, o limiar de existência em alguns casos particulares será discutido. Além disso, para o crescimento do tipo exponencial no caso Trudinger-Moser $k = n/2$, provaremos a existência de soluções em condições subcríticas ou críticas.

Capítulo 5

O principal objetivo do capítulo 5 é apresentar mais uma evidência (Lema 5.1) da naturalidade do termo k-gradiente que denominaremos de "hipótese natural"(1.5). Incluiremos nesse capítulo um resultado de inexistência para uma equação k-Hessiana envolvendo o primeiro autovalor do operador k-Hessiano.

Parte dos resultados obtidos nesse trabalho encontram-se publicados em (Cardoso, M., de Brito Sousa, J., de Oliveira, J.F. A *Gradient Type Term for the k-Hessian Equation*, J. Geom. Anal. **34**, 2024)

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições, propriedades e resultados preliminares que serão utilizados ao longo do trabalho.

2.1 O símbolo de Kronecker Generalizado

As informações apresentadas nas duas próximas seções podem ser encontradas em [25]. O símbolo de Kronecker generalizado será denotado por

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix},$$

onde m é um dos inteiros $1, 2, \cdots, n$ e as listas $(r_1, \cdots, r_m)$ e $(s_1, \cdots, s_m)$ podem ser tomadas, independentemente, no conjunto de n valores $\{1, 2, \cdots, n\}$. O símbolo de Kronecker generalizado satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix} = 0$ se as listas $(r_1, \cdots, r_m)$ e $(s_1, \cdots, s_m)$ de m valores escolhidos no conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ são diferentes. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 0.$

(b) $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix}$ é alternada tanto nos valores sobrescritos quanto nos subscritos. Em outras palavras, uma mudança na posição de quaisquer dois dos m valores sobrescritos (ou subscritos) altera o sinal, mas não o valor numérico obtido pelo símbolo. Dessa forma, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Uma consequência imediata é que $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix} = 0$ se houverem dois valores numéricos iguais na lista sobrescrita (ou subscrita). Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} = 0 \ , \quad \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \ \text{ e } \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix} = 0$$

(c) Quando $(r_1, \cdots, r_m)$ e $(s_1, \cdots, s_m)$ são apenas arranjos do mesmo conjunto de m números distintos escolhidos no conjunto $(1, 2, \cdots, n)$, o símbolo $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix}$ receberá o valor 1 se for necessário uma quantidade par de inversões para obter do arranjo inicial $(r_1, \cdots, r_m)$ o arranjo final $(s_1, \cdots, s_m)$ e receberá o valor -1 se for necessário um número ímpar de inversões.

As três propriedades acima definem o símbolo de Kronecker e podem ser resumidas da seguinte maneira: quando $(r_1, \cdots, r_m)$ e $(s_1, \cdots, s_m)$ são arranjos do mesmo conjunto de m números distintos do conjunto $(1, 2, \cdots, n)$, será atribuído o valor ± 1 ao símbolo $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix}$, caso contrário esse símbolo vale 0.

É consequência imediata da definição que

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_m \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_m \end{bmatrix}.$$

A partir de agora adotaremos a seguinte convenção: dizemos que uma determinada letra, é uma “letra de soma”no símbolo de Kronecker generalizado para indicar que à mesma, devem ser atribuídos os n valores numéricos $(1, 2, \cdots, n)$ e as n expressões resultantes devem ser somadas. Salvo menção explícita, as letras gregas indicarão letras de soma. Dessa forma, segundo essa convenção, em um símbolo de Kronecker generalizado cujos índices são letras gregas (ou de soma), os valores designados a estas letras aparecerão sempre duas vezes na expressão, uma vez como subscrito e uma vez como sobrescrito.

Por exemplo, para $m = 2$ e $n = 3$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Obviamente, apenas as duas primeiras parcelas da soma acima são diferentes de zero, mas sempre que usarmos uma letra de soma devemos ter em mente todas as somas. No caso mais geral, isto é,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

estamos representando uma soma com 108 parcelas, sendo 9 parcelas para $(\alpha_1, \alpha_2) = (1,2)$, 9 parcelas para $(\alpha_1, \alpha_2) = (1,3)$, 9 parcelas para $(\alpha_1, \alpha_2) = (2,3)$, 9 parcelas para $(\alpha_1, \alpha_2) = (2,1)$, 9 parcelas para $(\alpha_1, \alpha_2) = (3,1)$ e 9 parcelas para $(\alpha_1, \alpha_2) = (3,2)$, somando um total de 54 parcelas. As outras 54 parcelas são obtidas trocando os papéis de α_1 e α_2 por β_1 e β_2 no processo. Vale ressaltar que a grande maioria dessas parcelas são nulas e não afetam no resultado.

Dessa forma, é verdade que

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ s_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \alpha_m \\ s_m \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

A expressão à direita indica, de acordo com a nossa convenção, m somatórios distintos. Mas $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = 0$ a menos que o símbolo de soma α_1 seja atribuído ao valor particular s_1 para que a soma em relação a α_1 produza

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ s_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ s_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \alpha_m \\ s_m \end{bmatrix}$$

obtendo agora $(m-1)$ somas. Continuando com esse argumento obteremos a equação (2.1). Um argumento similar produz

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix} = \frac{1}{m!} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

De fato, nos m somatórios à direita todos os termos, para os quais $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ não é apenas um rearranjo de ambos os grupos de m números distintos $(r_1, \cdots, r_m)$ e $(s_1, \cdots, s_m)$, desaparecem. Todos os termos para os quais $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ é tal arranjo, obtemos o mesmo valor ± 1. Para uma inversão em qualquer arranjo particular $(a_1, \cdots, a_m)$ do símbolo de soma $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ muda-se o sinal de cada um dos fatores $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix}$. Como existem precisamente $m!$ arranjos $(a_1, \cdots, a_m)$ quando os grupos $(r_1, \cdots, r_m)$ e $(s_1, \cdots, s_m)$ de m números distintos são iguais, a veracidade de (2.2) segue imediatamente. Podemos concluir de maneira semelhante que

$$\begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_m \\ s_1 & \cdots & s_m \end{bmatrix} = \frac{1}{m!(n-m)!}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \\ s_1 & \cdots & s_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{m+1} & \cdots & \alpha_n \\ s_{m+1} & \cdots & s_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_m \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Em primeiro lugar, é evidente que nos somatórios do lado direito de (2.3), $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ e $(\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n)$ devem ser arranjos de $(s_1, \cdots, s_m)$ e $(s_{m+1}, \cdots, s_n)$ respectivamente e $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ deve ser um arranjo de $(1, 2, \cdots, n)$, para que o termo correspondente tenha um valor diferente de zero. Por isso, $(s_1, \cdots, s_n)$ deve ser um arranjo dos n números $(1, 2, \cdots, n)$ para que a expressão à direita de (2.3) tenha um valor diferente de zero. Uma inversão em qualquer arranjo $(a_1, \cdots, a_m)$ de $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ muda o sinal de ambos os fatores $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$ do termo correspondente na soma e, portanto, o valor do próprio termo permanece inalterado. Isto explica a presença do fator numérico $\frac{1}{m!(n-m)!}$.

2.2 Definição de Determinante

Vamos considerar as n^2 quantidades a_s^r onde r e s variam independentemente sobre os n números $(1, 2, \cdots, n)$. Definimos o determinante dessas n quantidades da seguinte maneira

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n} \tag{2.4}$$

e este determinante será considerado de ordem n. É evidente que se $(r_1, \cdots, r_n)$ é qualquer arranjo de n números $(1, 2, \cdots, n)$ podemos escrever D na forma equivalente

$$D = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} a_{r_1}^{\alpha_1} a_{r_2}^{\alpha_2} \cdots a_{r_n}^{\alpha_n}. \tag{2.5}$$

Cada inversão no arranjo $(r_1, \cdots, r_n)$ traz consigo uma inversão no arranjo $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$. Por exemplo, no caso $n = 3$, podemos escrever D como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3}$$

na sua forma equivalente

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{bmatrix} a_2^{\alpha_2} a_1^{\alpha_1} a_3^{\alpha_3}$$

ou ainda, por uma mera troca dos símbolos de soma α_1 e α_2, como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} a_2^{\alpha_1} a_1^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3}.$$

Ao atribuir aos n valores $(r_1, \cdots, r_n)$, cada um independentemente, podemos obter de (2.5) os n valores $(1, 2, \cdots, n)$. Então, somando as expressões resultantes temos

$$D = \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} a_{\alpha_1}^{\rho_1} a_{\alpha_2}^{\rho_2} \cdots a_{\alpha_n}^{\rho_n}. \tag{2.6}$$

Este resultado é importante porque mostra que os sobrescritos e subscritos dos n^2 elementos a_s^r do determinante desempenham exatamente os mesmos papéis. Na verdade, o determinante D poderia muito bem ter sido definido pela equação

$$D' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix} a_{\alpha_1}^{1} a_{\alpha_2}^{2} \cdots a_{\alpha_n}^{n}. \tag{2.7}$$

como na equação (2.4). Pois obtemos como antes

$$D' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix} a_{\alpha_1}^{r_1} a_{\alpha_2}^{r_2} \cdots a_{\alpha_n}^{r_n} \tag{2.8}$$

$$= \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_n \end{bmatrix} a_{\alpha_1}^{\rho_1} a_{\alpha_2}^{\rho_2} \cdots a_{\alpha_n}^{\rho_n}. \tag{2.9}$$

Donde $D' = D$, ou seja, o valor do determinante de n^2 elementos ordenados a_s^r permanece inalterado pela mudança de ordem correspondente à troca de subscrito e sobrescrito. Organizando os n^2 elementos em n linhas de n elementos cada uma da maneira usual, este é um resultado conhecido de que uma troca de linhas por colunas não afeta o valor de um determinante.

2.3 Operador k-hessiano e Funções k-admissíveis

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, um domínio suave e limitado e $u \in C^2(\Omega)$. Para $k = 1, 2, \cdots, n$, defina $S_k[u]$ como o k-ésimo operador Hessiano dado por

$$S_k[u] = \sigma_k(\lambda) \tag{2.10}$$

onde $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ são os autovalores da matriz hessiana D^2u, e

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{i_1<...<i_k} \lambda_{i_1}...\lambda_{i_k} \tag{2.11}$$

é o k-ésimo polinômio simétrico elementar. De forma alternativa, $S_k[u]$ pode ser definido como

$$S_k[u] = [D^2u]_k$$

onde D^2u é a matriz Hessiana de u e $[A]_k$ denota a soma de todos os menores principais $k \times k$ da matriz A. Vale ressaltar que, embora para $k = 1$ tenhamos $S_1[u] = \Delta u$ que é um operador linear, $S_k[u]$ com $2 \leqslant k \leqslant n$ representa uma série de operadores não-lineares que ligam o operador Laplaciano ao operador de Monge Ampère $S_n[u] = \det D^2u$.

Exemplo 2.1. *Consideremos o caso* $n = 4$ *e* $k = 2$. *Seja* $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^4$ *com* $x = (x_1, \cdots, x_4) \in \Omega$ *e* $u_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$. *Além disso, a matriz Hessiana nesse caso é dada por* $D^2u = \left[u_{x_ix_j}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$. *Pela definição clássica de determinantes, a soma de todos os menores principais* 2×2 *da matriz Hessiana* D^2u *é dada por*

$$S_2[u] = [D^2u]_2 = \sum \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} u_{x_{\alpha_1}x_{\beta_1}} u_{x_{\alpha_2}x_{\beta_2}},$$

onde a soma é tomada sobre todas as listas (α_1, α_2) *e* (β_1, β_2) *escolhidas no conjunto* $\{1, 2, 3, 4\}$. *Assim,*

$$\begin{aligned} S_2[u] = {} & u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - u_{x_1x_2}u_{x_2x_1} \\ & + u_{x_1x_1}u_{x_3x_3} - u_{x_1x_3}u_{x_3x_1} \\ & + u_{x_1x_1}u_{x_4x_4} - u_{x_1x_4}u_{x_4x_1} \\ & + u_{x_2x_2}u_{x_3x_3} - u_{x_2x_3}u_{x_3x_2} \\ & + u_{x_2x_2}u_{x_4x_4} - u_{x_2x_4}u_{x_4x_2} \\ & + u_{x_3x_3}u_{x_4x_4} - u_{x_3x_4}u_{x_4x_3}. \end{aligned}$$

Agora vamos apresenta informações fundamentais do operador k-Hessiano que podem ser encontradas nas notas de Wang [40] e serão amplamente utilizadas no desenvolvimento desse trabalho.

De agora em diante, sempre que utilizarmos o símbolo de Kronecker generalizado estaremos adotando letras de soma nos índices sobrescritos e subscritos.

Embora os operadores k-Hessianos sejam não-lineares para $2 \leqslant k \leqslant n$, eles possuem uma estrutura divergente. Para verificar isso considere uma matriz simétrica $r = [r_{ij}] \in M(n \times n)$ e observe que $S_k[r]$ é justamente a soma de todos os menores principais $k \times k$ de r, que podemos escrever explicitamente da seguinte maneira

$$S_k[r] = \frac{1}{k!} \sum \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_k j_k} \tag{2.12}$$

onde o somatório é tomado sob todas as listas $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ e $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ escolhidas no conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ correspondente a cada uma das $\binom{n}{k}$ submatrizes principais de r. Note que existem apenas $\binom{n}{k}$ pares de listas $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ e $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ para os quais o símbolo de Kronecker associado

$$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

não é nulo. A equação (2.6) justifica o termo $\frac{1}{k!}$ antes do somatório. Essa maneira de expressar o k-Hessiano foi proposta por Wang em [40]. Definindo

$$S_k^{ij}[r] = \frac{\partial}{\partial r_{ij}} S_k[r] \tag{2.13}$$

Wang obteve

$$S_k^{ij}[r] = \frac{1}{(k-1)!} \sum \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{k-1} \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_{k-1} \end{bmatrix} r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_{k-1} j_{k-1}}, \tag{2.14}$$

onde o somatório é feito sob as $\binom{n-1}{k-1}$ escolhas de índices $(i_1, i_2, \cdots, i_{k-1})$. Com essa expressão, Wang concluiu que

$$S_k[r] = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij} S_k^{ij}[r]. \tag{2.15}$$

Se $r = D^2 u$ um cálculo direto produz (veja em [29])

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} S_k^{ij}[D^2 u] = 0, \text{ para todo } i. \tag{2.16}$$

Portanto, $S_k[u]$ assume uma forma divergente, dada por

$$S_k[u] = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij} S_k^{ij}[D^2 u] = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j S_k^{ij}[D^2 u]), \tag{2.17}$$

onde $u_i = u_{x_i}$ e $u_{ij} = u_{x_i x_j}$. Isso leva a diversas propriedades variacionais e de teoria do potencial que foram extensivamente estudadas por muitos autores e há uma vasta literatura sobre o assunto, veja [5, 21, 26, 35, 41].

Para garantir que o operador k-Hessiano seja elíptico, é necessário restringir o espaço das funções $C^2(\Omega)$. Dado $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, para cada $x \in \Omega$, denotamos por $\lambda(D^2u)(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ representa a lista de autovalores de D^2u em $x \in \Omega$. De acordo com [40, 41], uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é k-admissível se,

$$\lambda(D^2u) \in \overline{\Gamma}_k \tag{2.18}$$

onde Γ_k é um cone convexo simétrico e aberto em $\mathbb{R}^n$, com vértice na origem, definido por

$$\Gamma_k = \{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_j(\lambda) > 0, \ j = 1, ..., k\}.$$

Note que $\sigma_1(\lambda(D^2u)) = S_1[u] = \Delta u$ e $\sigma_n(\lambda(D^2u)) = S_n[u] = \det D^2u$. Assim, uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é subharmônica se, e somente se, é 1-admissível. Além disso, uma função u que é n-admissível deve ser convexa. Para qualquer $2 \leqslant k \leqslant n$, uma função k-admissível é subharmônica e o conjunto de todas a funções k-admissíveis é um cone convexo em $C^2(\Omega)$. Denotamos por $\Phi^k(\Omega)$ o conjuntos das funções k-admisíveis, isto é,

$$\Phi^k(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \ : \ S_j[u] \geqslant 0 \text{ em } \Omega, \ j = 1, ..., k\}.$$

Esse espaço foi proposto por Caffarelli, Nirenberg e Spruck [3,4]. O subespaço do conjunto das funções k-admissíveis com condição de fronteira nula é denotado por $\Phi_0^k(\Omega)$, isto é,

$$\Phi_0^k(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \ : \ S_j[u] \geqslant 0 \text{ em } \Omega, \ j = 1, ..., k, \text{ e } u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

O operador k-Hessiano é elíptico, quando restrito ao espaço $\Phi_0^k(\Omega)$. Veja [37] para detalhes. Além disso, foi demonstrado em [3] que a equação

$$\begin{cases} S_k[u] = f(x, u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.19}$$

onde $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ de classe C^2, admite uma solução k-admissível se, e somente se a fronteira $\partial\Omega$ satisfaz

$$\sigma_{k-1}(\rho_1, \cdots, \rho_{n-1}) > \rho_0 > 0, \tag{2.20}$$

onde $\rho_1, \cdots, \rho_{n-1}$ denotam as curvaturas principais de $\partial\Omega$ em relação à normal interior. Neste texto, assumiremos que $\partial\Omega$ satisfaz a condição (2.20).

A forma divergente do operador k-Hessiano permite definir uma norma em $\Phi_0^k(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{\Phi_0^k(\Omega)} = \left(\int_\Omega -uS_k[u]dx\right)^{\frac{1}{k+1}} \ , \ u \in \Phi_0^k(\Omega).$$

É possível verificar que a expressão acima define uma norma em $\Phi_0^k(\Omega)$, veja [40] .

As seguintes desigualdades do tipo Sobolev foram provadas em [41]. Para funções convexas, essas desigualdades foram estabelecidas pela primeira vez em [36, 37].

Teorema 2.1. *Seja* $u \in \Phi_0^k(\Omega)$.

(i) Se $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$*, então* $\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{\Phi_0^k}$ *para todo* $p+1 \in [1, k^*]$*, onde* $k^* = \frac{n(k+1)}{n-2k}$*,* C *depende apenas de* n*,* k*,* p *e* $|\Omega|$*.*

(ii) Se $k = \frac{n}{2}$*, então* $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{\Phi_0^k}$ *para qualquer* $p < \infty$*, onde* C *depende apenas de* n*,* p *e diam*(Ω)*.*

(iii) Se $\frac{n}{2} < k \leqslant n$*, então* $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{\Phi_0^k}$*, onde* C *depende de* n*,* k *e diam*(Ω)*.*

Considerando $B_R(0)$ a bola de cento 0 e raio $R > 0$, para uma função radial $u \in \Phi_0^k(B_R(0))$, temos

$$\|u\|_{\Phi_0^k}^{k+1} = \int_{B_R(0)} (-u)S_k[u]\,dx = \frac{\omega_{n-1}}{k}\binom{n-1}{k-1}\int_0^R r^{n-k}(u')^{k+1}\,dr. \tag{2.21}$$

Portanto, quando $p+1 = k^*$ e $k < \frac{n}{2}$, pelo mergulho clássico de Sobolev, a melhor constante C é atingida quando $\Omega = \mathbb{R}^n$ pela função $u(x) = (1+|x|^2)^{\frac{2k-n}{2k}}$.

Além disso, quando $p+1 < k^*$, pela desigualdade de Hölder, vemos que a constante C depende do volume $|\Omega|$. Quando $k > \frac{n}{2}$, foi demonstrado que qualquer função k-admissível é Hölder contínua com o expoente ótimo $\alpha = 2 - \frac{n}{k}$ veja [35]. O Teorema 2.1 foi utilizado em [32] para estudar os problemas variacionais associados. Em [34], também foi mostrado que para qualquer função k-admissível $u \in \Phi_0^k(\Omega)$, $\|u\|_{\Phi_0^l} \leqslant C\|u\|_{\Phi_0^k}$, onde $1 \leqslant l < k \leqslant n$ e C é uma constante que depende de n, k, l e Ω.

Vale ressaltar que pela compacidade do mergulho de Sobolev $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para $p < \frac{2n}{n-2}$, também temos a compacidade do mergulho $\Phi_0^k(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para $p < k^*$ se $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, ou $p < \infty$ para $p \geqslant \frac{n}{2}$. Veja [40] para mais detalhes.

Observe agora a seguinte desigualdade do tipo Moser-Trudinger para a equação k-Hessiana com $k = \frac{n}{2}$. Quando $n = 2$, $k = 1$, ela coincide com a desigualdade especial de Moser-Trudinger $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\phi^*}(\Omega)$ com $\phi(t) = e^{t^2}$. Em [32] foi provado o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Seja* $k = \frac{n}{2}$. *Então, para* $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ *e* $1 \leqslant \beta \leqslant \beta_0$ *tais que*

$$\sup_{u \in \Phi_0^k(\Omega)} \int_\Omega e^{\alpha\left(\frac{u}{\|u\|_{\Phi_0^k}}\right)^\beta} dx < C, \tag{2.22}$$

onde $\alpha_0 = n\left[\frac{\omega_{n-1}}{k}\binom{n-1}{k-1}\right]^{2/n}$, $\beta_0 = \frac{n+2}{n}$, ω_n *é a área da esfera unitária em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* C *é uma constante positiva que depende apenas de* n *e diam*(Ω).

De acordo com o Teorema 2.2, o conjunto $\Phi_0^k(\Omega)$ pode ser mergulhado no Espaço de Orlicz associado à função $e^{t^{\frac{n+2}{n}}}$. Lembrando que para uma função par e convexa ϕ em $\mathbb{R}$ que satisfaça $\lim_{t\to\infty} \phi(t)/t = \infty$, a classe de Orlicz $L^\phi(\Omega)$ é o conjunto de funções que satisfazem

$$\int_\Omega \phi(u(x))\, dx < \infty,$$

e o Espaço de Orlicz associado a ϕ, $L^{\phi^*}(\Omega)$, é o invólucro linear de $L^\phi(\Omega)$ com a norma $\|u\|_{L^{\phi^*}(\Omega)} = \inf\{k > 0 : \int_\Omega \phi(ku)\, dx \leqslant 1\}$. Em [24,33], Trudinger e Moser provaram fazer sentido o mergulho $W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^{\phi^*}(\Omega)$ com $\phi(t) = e^{t^{\frac{n}{n-1}}} - 1$. Trudinger demonstrou através da expansão de Taylor que existe um pequeno $\lambda > 0$ tal que para todo $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ com $\|Du\|_{L^n(\Omega)} = 1$,

$$\int_\Omega e^{\lambda |u|^{\frac{n}{n-1}}} dx \leqslant C.$$

Moser melhorou o expoente λ para o valor ótimo $\lambda = n(\omega_{n-1})^{1/(n-1)}$.

Ressaltamos que o operador k-Hessiano desempenha um papel importante na análise geométrica, equações diferenciais parciais e outras áreas da matemática moderna, ver [13, 31, 35]. Para resultados recentes, recomendamos [8, 9, 14, 26, 38–40] e as referências contidas nesses artigos.

2.4 Termo k-gradiente

Considere uma matriz $A \in M(n \times n)$ com elementos reais. Para conjuntos de índices $\alpha, \beta \subset \{1, \cdots, n\}$, o número de elementos de α é denotado por $|\alpha|$. Denotamos por $A[\alpha, \beta]$ a submatriz com as entradas das linhas de A indexadas por α e as colunas indexadas por β. Se ambos α e β são iguais, chamamos a submatriz resultante $A[\alpha, \alpha]$ de uma submatriz principal. Uma matriz $n \times n$ possui um total de $\binom{n}{k}$ submatrizes principais diferentes de ordem k. Ou seja, existem $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher um conjunto de índices α com k elementos em $\{1, \cdots, n\}$.

Seja $A = [a_1, \cdots, a_n] \in M(n \times n)$ particionada de acordo com suas colunas e seja $b \in \mathbb{R}^n$, definimos uma operação especial, denotada por $(A \stackrel{i}{\leftarrow} b)$, da seguinte forma:

$$(A \stackrel{i}{\leftarrow} b) = [a_1 \cdots a_{i-1}, b, a_{i+1} \cdots a_n]$$

Ou seja, a matriz $(A \stackrel{i}{\leftarrow} b)$ é obtida ao substituir a coluna i da matriz A pela coluna de elementos do vetor b, mantendo as demais colunas inalteradas.

Para cada $k = 1, \dots, n$, o *menor principal* de ordem k da matriz $A = [a_{ij}] \in M(n \times n)$ é o determinante da submatriz principal $A[\alpha, \alpha]$. Com a notação acima, para $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 2$ um domínio suave limitado, $u \in C^2(\Omega)$ e $1 \leqslant k \leqslant n$, o operador k-Hessiano é dado por

$$S_k[u] = \sum_{|\alpha|=k} \det(D^2u)[\alpha, \alpha] \tag{2.23}$$

em que a soma é feita sobre todos os $\binom{n}{k}$ conjuntos de índices $\alpha \subset \{1, \cdots, n\}$ com $|\alpha| = k$.

Definição 2.1. *Seja* $u \in C^2(\Omega)$*. O termo* k*-gradiente de* u*, denotado por* $H_k[u, \nabla u, D^2u]$ *é definido por*

$$H_k[u, \nabla u, D^2u] = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \sum_{t=1}^{k} \det([D^2u]_i \stackrel{t}{\leftarrow} u_{x_{i_t}} \nabla^i_k u) \tag{2.24}$$

onde

$$\nabla^i_k u = \begin{bmatrix} u_{x_{i_1}} \\ u_{x_{i_2}} \\ \vdots \\ u_{x_{i_k}} \end{bmatrix}, \tag{2.25}$$

e $[D^2u]_i = (D^2u)[\alpha_i, \alpha_i]$*, com* $i = 1, \dots, \binom{n}{k}$*, representa a* i*-ésima submatriz principal de* D^2u *de ordem* k *determinada pelo conjunto de índices* $\alpha_i = \{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$.

Como observado por Wang em [41],

$$||u||^{k+1}_{\Phi^k_0} = \int_\Omega -uS_k[u]dx = \frac{1}{k}\int_\Omega \sum u_{x_i}u_{x_j}S^{ij}[u]dx \ ; \ u \in \Phi^k_0(\Omega). \tag{2.26}$$

O resultado abaixo mostra que o termo k-gradiente está relacionado com a estrutura variacional da Hessiana no espaço das funções k-admissíveis.

Lema 2.1. *Seja* $u \in C^2(\Omega)$*. Então*

$$H_k[u, \nabla u, D^2u] = \frac{1}{k}\sum_{i,j=1} u_{x_i}u_{x_j}S^{ij}[D^2u] \tag{2.27}$$

Em particular,

$$\|u\|_{\Phi_0^k}^{k+1} = \int_\Omega H_k[u, \nabla u, D^2 u]dx \ ; \ u \in \Phi_0^k(\Omega).$$

Demonstração. Vamos denotar por $[D^2u]_{ij}$ a j-ésima coluna da submatriz principal $[D^2u]_i$. Usando a definição dada em (2.6) temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{k} \det([D^2u]_i \overset{t}{\leftarrow} u_{x_{i_t}} \nabla_k^i u) \\
&= \sum_{t=1}^{k} \det([D^2u]_{i1}, \ldots, [D^2u]_{it-1}, u_{x_{i_t}} \nabla_k^i u, [D^2u]_{it+1}, \ldots, [D^2u]_{ik}) \\
&= \det(u_{x_{i_1}} \nabla_k^i u, \ldots, [D^2u]_{ik}) + \cdots + \det([D^2u]_{ik}, \ldots, u_{x_{i_k}} \nabla_k^i u) \\
&= \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} u_{x_{i_1}} u_{x_{j_1}} u_{x_{i_2} x_{j_2}} \cdots u_{x_{i_k} x_{j_k}} \\
&+ \cdots + \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} u_{x_{i_1} x_{j_1}} u_{x_{i_2} x_{j_2}} \cdots u_{x_{i_k}} u_{x_{j_k}}.
\end{aligned}$$

Relembre que, na notação do símbolo de Kronecker generalizado acima estamos utilizando letras de somas. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
H_k[u, \nabla u, D^2u] &= \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \left\{ \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} u_{x_{i_1}} u_{x_{j_1}} u_{x_{i_2} x_{j_2}} \cdots u_{x_{i_k} x_{j_k}} \right. \\
&+ \cdots + \left. \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} u_{x_{i_1} x_{j_1}} u_{x_{i_2} x_{j_2}} \cdots u_{x_{i_k}} u_{x_{j_k}} \right\} \\
&= \frac{1}{k} u_{x_{i_1} x_{j_1}} \sum \frac{1}{(k-1)!} \begin{bmatrix} i_2 & \cdots & i_k \\ j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} u_{x_{i_2} x_{j_2}} \ldots u_{x_{i_k} x_{j_k}} \\
&+ \cdots + \frac{1}{k} u_{x_{i_n} x_{j_n}} \sum \frac{1}{(k-1)!} \begin{bmatrix} i_{n-k+1} & \cdots & i_n \\ j_{n-k+1} & \cdots & j_n \end{bmatrix} u_{x_{i_{n-k+1}} x_{j_{n-k+1}}} \ldots u_{x_{i_{n-1}} x_{j_{n-1}}},
\end{aligned}$$

onde cada somatório não indexado na última identidade é determinado pelos índices das $\binom{n-1}{k-1}$ submatrizes principais de ordem $k-1$ que não contém o termo $u_{x_{i_l} x_{j_l}}$ com $l \in \{1, \cdots, n\}$.

Para concluir a prova, usamos a expressão definida em (2.14) no somatório de cada parcela acima

$$\begin{aligned}
H_k[u, \nabla u, D^2u] &= \frac{1}{k} u_{x_{i_1}} u_{x_{j_1}} S_k^{i_1 j_1}[u] + \ldots + \frac{1}{k} u_{x_{i_n}} u_{x_{i_n}} S_k^{i_n j_n}[u] \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i} u_{x_j} S^{ij}[D^2u].
\end{aligned}$$

Em particular, podemos definir uma forma mais natural de ver a norma em (2.26), dada por

$$\|u\|_{\Phi_0^k}^{k+1} = \left(\int_\Omega H_k[u, \nabla u, D^2 u] dx \right) \ ; \ u \in \Phi_0^k(\Omega). \tag{2.28}$$

$\square$

Note que, se $k = 1$, a matriz hessiana $D^2 u$ possui exatamente n submatrizes principais de tamanho 1, logo

$$\|u\|_{\Phi_0^1} = \left(\int_\Omega H_1[u, \nabla u, D^2 u] dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i} u_{x_j} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Capítulo 3

A mudança de variável do tipo Kazdan-Kramer

Neste capítulo, iremos discutir uma mudança do tipo Kazdan-Kramer para a equação k-Hessiana que se apresenta como uma generalização natural da mudança clássica para a equação de Laplace com termo quadrático. De fato, veremos que o termo k-gradiente H_k definido no capítulo anterior desempenha na equação k-Hessiana o papel do termo quadrático $|\nabla u|^2$ na equação de Laplace.

3.1 Mudança de variável de Kadzan-Kramer na equação de Laplace

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^2 + f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Delta u = S_1[u]$ é o Laplaciano e $f : \Omega \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função contínua. Esse tipo de problema ganhou destaque após os trabalhos [1, 11, 15, 18–20]. Em parte, essa atenção é motivada pela observação de Kazdan-Kramer [20] de que o problema (3.1) pode ser transformado, por meio de uma mudança de variáveis, em um problema sem dependência do termo de gradiente $|\nabla u|^2$, abrindo espaço para considerar novas possibilidades. De fato, a mudança de variáveis $v = e^{u} - 1$ transforma o problema (3.1) na equação

$$\begin{cases} -\Delta v = h(x, v) & \text{em } \Omega \\ v > 0 & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $h(x, v) = (1 + v)f(x, \log(1 + v))$.

Inspirados por [20] e pelos desenvolvimentos recentes em [6], vamos mostrar que o termo $H_k = H_k[u, \nabla u, D^2u], k \geqslant 1$, desempenha o papel do termo quadrático $|\nabla u|^2$ em (3.1), quando usamos o operador k-Hessiano $S_k[u], k \geqslant 2$, em vez do Laplaciano Δu. De fato, consideramos a equação

$$\begin{cases} S_k[u] = g(u)H_k[u, \nabla u, D^2u] + f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u < 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $g : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Como observado no capítulo anterior, $H_1(x, u, \nabla u, D^2u) = |\nabla u|^2$. Nesse sentido, a equação k-Hessiana (3.3) com o termo k-gradiente H_k em (2.24) estende o problema (3.1) para $k \geqslant 2$. Além disso, provaremos que (ver Seção 3.2) a mudança de variáveis do tipo Kazdan-Kramer dada por

$$A_g(s) = -\int_s^0 e^{G(t)}dt, \quad \text{com} \quad G(t) = \int_t^0 g(\tau)d\tau \tag{3.4}$$

transforma a equação (3.3) na equação k-Hessiana sem o termo k-gradiente H_k

$$\begin{cases} S_k[v] = h(x, v) & \text{em } \Omega \\ v < 0 & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde

$$h(x, s) = e^{kG(A_g^{-1}(s))}f(x, A_g^{-1}(s)). \tag{3.6}$$

3.2 Mudança de variável de Kadzan-Kramer para a equação k-Hessiana

O próximo resultado foi essencialmente provado em [42, Lemma 2.3] e nos diz precisamente como a composição de funções afeta o operador k-Hessiano e fornece a chave para encontrar o termo do tipo gradiente para a equação k-Hessiana em (2.24).

Lema 3.1. *Seja* $u \in C^2(\Omega)$ *e seja* $A : I \to \mathbb{R}$ *uma função* C^2 *definida em um intervalo* $I \supset \{u(x) : x \in \Omega\}$. *Então*

$$S_k[A(u)] = S_k[u][A'(u)]^k + [A'(u)]^{k-1}A''(u)H_k(x, u, \nabla u, D^2u), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

onde $H_k[u]$ *é o k-gradiente de* u.

Demonstração. Para $i = 1, 2, \cdots, \binom{n}{k}$, seja $\alpha_i = \{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$ um conjunto de índices com $|\alpha_i| = k$. Portanto, temos a submatriz correspondente $D^2(A(u))[\alpha_i, \alpha_i] = [d_{i_1}\, d_{i_2} \cdots d_{i_k}]$ em que cada coluna d_{i_t}, $1 \leqslant t \leqslant k$, é da forma

$$d_{i_t} = A''(u)d^1_{i_t} + A'(u)d^2_{i_t},$$

em que

$$d^1_{i_t} = \begin{bmatrix} u_{x_{i_1}}u_{x_{i_t}} \\ u_{x_{i_2}}u_{x_{i_t}} \\ \vdots \\ u_{x_{i_k}}u_{x_{i_t}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad d^2_{i_t} = \begin{bmatrix} u_{x_{i_1}x_{i_t}} \\ u_{x_{i_2}x_{i_t}} \\ \vdots \\ u_{x_{i_k}x_{i_t}} \end{bmatrix}.$$

Sabendo que a função $B \to \det B$ é multilinear nas colunas de B, temos

$$\begin{aligned} \det D^2(A(u))[\alpha_i, \alpha_i] &= \det[d_{i_1}\ d_{i_2}\ \cdots\ d_{i_k}] \\ &= A''(u)\det[d^1_{i_1}\ d_{i_2}\cdots\ d_{i_k}] + A'(u)\det[d^2_{i_1}\ d_{i_2}\cdots\ d_{i_k}] \\ &= (A''(u))^2\det[d^1_{i_1}\ d^1_{i_2}\cdots\ d_k] + A''(u)A'(u)\det[d^1_{i_1}\ d^2_{i_2}\cdots\ d_{i_k}] \\ &\quad + A'(u)A''(u)\det[d^2_{i_1}\ d^1_{i_2}\cdots\ d_{i_k}] + (A'(u))^2\det[d^2_{i_1}\ d^2_{i_2}\cdots\ d_{i_k}]. \end{aligned}$$

Observando que as colunas $d^1_{i_1}$ e $d^1_{i_2}$ são proporcionais, podemos escrever

$$\begin{aligned} \det D^2(A(u))[\alpha_i, \alpha_i] = {}& A''(u)A'(u)\det[d^1_{i_1}\ d^2_{i_2}\cdots\ d_{i_k}] + A'(u)A''(u)\det[d^2_{i_1}\ d^1_{i_2}\cdots\ d_{i_k}] \\ &+ (A'(u))^2\det[d^2_{i_1}\ d^2_{i_2}\cdots\ d_{i_k}]. \end{aligned}$$

Para $s \neq t$, as colunas $d^1_{i_s}$ e $d^1_{i_t}$ também são proporcionais. Portanto, podemos repetir o argumento acima para concluir que

$$\begin{aligned} \det D^2(A(u))[\alpha_i, \alpha_i] = {}& (A'(u))^k \det D^2u[\alpha_i, \alpha_i] \\ &+ A''(u)(A'(u))^{k-1}\sum_{t=1}^{k}\det(D^2u[\alpha_i, \alpha_i] \xleftarrow{t} d^1_{i_t}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
S_k[A(u)] &= \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \det D^2(A(u))[\alpha_i,\alpha_i] = (A'(u))^k \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \det D^2 u[\alpha_i,\alpha_i] \\
&\quad + A''(u)(A'(u))^{k-1} \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \sum_{t=1}^{k} \det(D^2u[\alpha_i,\alpha_i] \xleftarrow{t} d^1_{i_t}) \\
&= (A'(u))^k S_k[u] + A''(u)(A'(u))^{k-1} \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \sum_{t=1}^{k} \det(D^2u[\alpha_i,\alpha_i] \xleftarrow{t} d^1_{i_t}).
\end{aligned}$$

□

Seja $g : (-\infty, 0] \to [0,\infty)$ uma função contínua. A mudança de variáveis do tipo Kazdan-Kramer associada a g é o difeomorfismo C^2, $A_g : (-\infty,0] \to (-\infty,0]$ dado por

$$A_g(s) = -\int_s^0 e^{G(t)}dt, \quad \text{com } \; G(t) = \int_t^0 g(\tau)d\tau. \tag{3.7}$$

Com base no resultado abaixo, podemos ver que (3.7) transforma a equação k-Hessiana com termo do tipo gradiente (3.3) na equação k-Hessiana (3.5) sem esse termo.

Proposição 3.1. *Sejam* H_k *e* A_g *definidos por* (2.24) *e* (3.7)*, respectivamente. Suponha que* $f \in C(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-}, [0,\infty))$*. Então, para cada solução* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *de* (3.3)*,* $v = A_g(u)$ *é uma solução de classe* $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ *da equação* (3.5) *com*

$$h(x,s) = e^{kG(A_g^{-1}(s))} f(x, A_g^{-1}(s)). \tag{3.8}$$

Reciprocamente, se $v \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ *é uma solução de* (3.5) *com* $h(x,s)$ *da forma* (3.8)*, então* $u = A_g^{-1}(v)$ *é uma solução de* (3.3) *com* $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$*.*

Demonstração. É fácil verificar que A_g é um difeomorfismo C^2 tal que $A_g(0) = 0$, $A_g(-\infty) = -\infty$ e $A_g < 0$, $A_g' > 0$ em $(-\infty, 0)$. Além disso, ele resolve a equação diferencial ordinária

$$(y'(s))^{k-1}y''(s) + g(s)(y'(s))^k = 0. \tag{3.9}$$

Se $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ resolve (3.3), temos que $v = A_g(u)$ é tal que $v \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, $v < 0$ em Ω e $v_{|\partial\Omega} = 0$. Além disso, uma vez que A_g resolve (3.9), o Lema 3.1 implica

$$\begin{aligned}
S_k[A_g(u)] &= \left[[A_g'(u)]^{k-1}A_g''(u) + g(u)[A_g'(u)]^k\right] H_k(x,u,\nabla u, D^2u) + [A_g'(u)]^k f(x,u) \\
&= [A_g'(u)]^k f(x,u).
\end{aligned}$$

Observando que $A_g'(s) = e^{G(s)}$ e $u = A_g^{-1}(v)$, obtemos que v resolve

$$S_k[v] = e^{kG(A_g^{-1}(v))} f(x, A_g^{-1}(v)).$$

Reciprocamente, se $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ resolve a equação (3.5) com h dado por (3.6), então $u = A_g^{-1}(v)$ é tal que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u < 0$ em Ω e $u_{|\partial\Omega} = 0$. Além disso, temos

$$S_k[A_g(u)] = S_k[v] = h(x, v) = e^{kG(A_g^{-1}(v))} f(x, A_g^{-1}(v)) = e^{kG(u)} f(x, u)$$

e, do Lema 3.1,

$$S_k[A_g(u)] = S_k[u][A_g'(u)]^k + [A_g'(u)]^{k-1} A_g''(u) H_k(x, u, \nabla u, D^2 u).$$

Consequentemente, usando $A_g''(s) = -g(s)e^{G(s)}$ e comparando as duas últimas identidades, temos

$$\begin{aligned} S_k[u] &= [A_g'(u)]^{-k} e^{kG(u)} f(x, u) - [A_g'(u)]^{k-1} [A_g'(u)]^{-k} A_g''(u) H_k(x, u, \nabla u, D^2 u) \\ &= g(u) H_k(x, u, \nabla u, D^2 u) + f(x, u). \end{aligned}$$

Portanto, $u = A_g^{-1}(v)$ resolve a equação (3.3). □

Lema 3.2. *Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *solução da equação*

$$\begin{cases} S_k[u] \geqslant f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

para todo $k = 1, \cdots, n$, *onde* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua e positiva. Então* $u \in \Phi_0^k(\Omega)$ *se e somente se,* $u < 0$.

Demonstração. Se $u \in \Phi_0^k(\Omega)$, temos $\sigma_j(\lambda(D^2 u)) = S_j(D^2 u) \geqslant 0$ em Ω, para $j = 1, 2, \cdots, k$. Em particular, $S_1(D^2 u) = \Delta u \geqslant 0$ em Ω. Pelo princípio do máximo; se existir $y \in \Omega$ tal que

$$u(y) = \sup_{x \in \Omega} u(x)$$

então u é constante sendo $u_{|\partial\Omega} = 0$ temos $u \equiv 0$. Assim,

$$0 = S_k(D^2 u) \geqslant f(x, u) > 0$$

o que é impossível. Logo, devemos ter

$$u(y) < \sup_{x \in \Omega} u(x) \ ; \ \forall \ y \in \Omega.$$

Logo, pelo princípio do máximo

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) = 0$$

Assim,

$$u(y) < \sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) = 0 \ ; \ \forall\, y \in \Omega$$

Isto é, $u < 0$ em Ω.

Para demonstrar a recíproca vamos observar os seguintes fatos:

i) A função $\lambda : S^{nxn} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que leva cada matriz simétrica $A = [a_{ij}] \in S^{nxn}$ no vetor $\lambda = (\lambda_1 \cdots, \lambda_n)$ dos autovalores de A depende continuamente das entradas de A. Este resultado pode ser encontrado em [16] (Apêndice D).

ii) Para $u \in C^2(\Omega)$, a função $D^2u : \Omega \longrightarrow S^{nxn}$ que a cada $x \in \Omega$ associa a matriz Hessiana $D^2u(x)$ é contínua.

iii) Γ_k pode ser caracterizado da seguinte maneira:

$$\Gamma_k = \{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_k(\lambda) > 0\}$$

(somente k) contendo o vetor $(1, \cdots, 1)$. Este fato pode ser encontrado em [40].

Fixado $u \in C^2(\Omega)$, seja $\phi_u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $\phi_u = \lambda \circ D^2u$. Isto é

$$\phi_u(x) = \lambda(D^2u(x)) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

Basta mostrar que $\Phi_0^k \subseteq \Gamma_k$. Por $i)$ e $ii)$, ϕ_u é contínua. Logo, $\phi_u(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto conexo. Se $u < 0$ em Ω e $u_{|\partial\Omega} = 0$, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = u(x_0) < 0$. Em particular, $D^2u(x_0)$ é não-negativa, assim $\lambda(x_0) = (\lambda_1(x_0) \ \cdots, \lambda_k(x_0))$ é tal que

1. $\lambda_i(x_0) \geqslant 0 \ ; \ i = 1, \cdots, n$.

2. $\sigma_k(\lambda_{x_0}) = f(x_0, u(x_0)) > 0$.

Logo $\lambda(x_0) \in \Gamma_k$. Assim,

$$\lambda(x_0) \in \phi_u(\Omega) \cap \Gamma_k \neq \varnothing$$

Sendo $\phi_u(\Omega)$ conexo e Γ_k uma componente conexa, obtemos $\phi_u(\Omega) \subseteq \Gamma_k$. Portanto u é k-admissível. □

O corolário seguinte apresenta uma condição suficiente para a k-admissibilidade das soluções da equação (3.3) seja preservada pela mudança de Kadzan-Kramer.

Corolário 3.1. *Assuma* f *e* g *nas condições da Proposição 3.1. Além disso, suponha* $f > 0$ *em* $\Omega \times \mathbb{R}$ *e* A_g *tal que* $H_k[u, \nabla u, D^2 u] \geqslant 0$ *para toda* $u = A_g^{-1}(v)$ *onde* $v \in \Phi_0^k(\Omega)$. *Então, para cada solução* $u \in \Phi_0^k(\Omega)$ *de* (3.3), $v = A_g(u)$ *é uma solução* k*-admissível da equação* (3.5) *com*

$$h(x, s) = e^{kG(A_g^{-1}(s))} f(x, A_g^{-1}(s)).$$

Reciprocamente, se $v \in \Phi_0^k(\Omega)$ *é uma solução de* (3.5) *com* $h(x, s)$ *da forma* (3.8), *então* $u = A_g^{-1}(v)$ *é uma solução* k*-admissível de* (3.3).

Demonstração. Seja $u \in \Phi_0^k(\Omega)$ solução de (3.3). Assim, pela Proposição 3.1, $v = A_g(u)$ é tal que $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $v < 0$ em Ω e $v_{|\partial\Omega} = 0$ e satisfaz a equação (3.5) com

$$h(x, s) = e^{kG(A_g^{-1}(s))} f(x, A_g^{-1}(s)).$$

Portanto, visto que $f > 0$ o Lema 3.2 garante que v é k-admissível.

Reciprocamente, se $v \in \Phi_0^k(\Omega)$ é uma solução de (3.5) com $h(x, s)$ da forma (3.8), então pela Proposição 3.1, $u = A_g^{-1}(v)$ é tal que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u < 0$ em Ω e $u_{|\partial\Omega} = 0$. Além disso, esta resolve a equação (3.3). Por hipótese, A_g é tal que $H_k[u, \nabla u, D^2 u] \geqslant 0$ para toda $u = A_g^{-1}(v)$ onde $v \in \Phi_0^k(\Omega)$. Assim,

$$S_k[u] = g(u) H_k(x, u, \nabla u, D^2 u) + f(x, u) \geqslant f(x, u).$$

Logo o Lema 3.2 garante que $u = A_g^{-1}(v)$ é k-admissível. $\square$

Capítulo 4

Existência e não-existência de soluções

Neste capítulo apresentaremos resultados de existência de soluções para uma nova classe de equação k-Hessiana para o crescimento sublinear ou superlinear do tipo polinomial no caso Sobolev $k < n/2$. Neste caso, o limiar de existência em alguns casos particulares será discutido. Além disso, para o crescimento do tipo exponencial no caso Trudinger-Moser $k = n/2$, provaremos a existência de soluções em condições subcríticas ou críticas.

4.1 O caso de Sobolev

Ao longo desta seção, assumimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (limitado) é de classe $C^{3,1}$ e que a condição de Sobolev $k < n/2$ é satisfeita. Considere a equação k-Hessiana

$$\begin{cases} S_k[u] = g(u)H_k[u, \nabla u, D^2u] + f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u < 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

onde H_k é o termo k-gradiente e as funções f e g satisfazem as seguintes condições:

(H_g) $g : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ é uma função contínua.

(H_f) $f \in C(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-})$, com $f(x, z) > 0$ para $z < 0$.

Nessa seção vamos considerar a equação (4.1) para o caso sublinear e superlinear no sentido estabelecido em [5]. Para tornar preciso esse conceito, considere $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor do operador k-Hessiano (cf. [41]). Dizemos que f é superlinear se

$$\lim_{z\to 0^-} \frac{f(x,z)}{|z|^k} < \lambda_1 \;\text{ uniformemente em } \overline{\Omega}. \tag{4.2}$$

Se ocorrer

$$\lim_{z\to 0^-} \frac{f(x,z)}{|z|^k} > \lambda_1 \;\text{ uniformemente em } \overline{\Omega} \tag{4.3}$$

dizemos que f é sublinear.

Relembremos que a mudança de variáveis do tipo Kazdan-Kramer dada por

$$A_g(s) = -\int_s^0 e^{G(t)}dt, \;\text{ com }\; G(t) = \int_t^0 g(\tau)d\tau \tag{4.4}$$

transforma a equação (4.1) na equação k-Hessiana sem o termo k-gradiente H_k

$$\begin{cases} S_k[v] = h(x,v) & \text{em } \Omega \\ v < 0 & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

onde

$$h(x,s) = e^{kG(A_g^{-1}(s))} f(x, A_g^{-1}(s)). \tag{4.6}$$

Dizemos que o par f, g é sublinear se

$$\lim_{z\to -\infty} \frac{e^{kG(z)}f(x,z)}{\left(\int_z^0 e^{G(s)}ds\right)^k} < \lambda_1, \;\text{ uniformemente em } \overline{\Omega}. \tag{4.7}$$

No caso em que ocorre

$$\lim_{z\to -\infty} \frac{e^{kG(z)}f(x,z)}{\left(\int_z^0 e^{G(s)}ds\right)^k} > \lambda_1, \;\text{ uniformemente em } \overline{\Omega}, \tag{4.8}$$

dizemos que o par f, g é superlinear.

As condições (4.7) e (4.8) garantem que h definido por (4.6) é sublinear e superlinear, respectivamente, veja o Lema 4.1 abaixo. Observe também que, se f é superlinear, então o par f, g também é superlinear, veja Observação 4.1.

Além disso, utilizaremos as seguintes condições:

(H_{SC}) Se $k^* = n(k+1)/(n-2k)$ (cf. [37,41]) é o expoente crítico para a inclusão $\Phi_0^k(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, então temos

$$\lim_{z\to -\infty} \frac{e^{kG(z)}f(x,z)}{\left(\int_z^0 e^{G(s)}ds\right)^{k^*-1}} = 0, \;\text{ uniformemente em } \overline{\Omega}, \tag{4.9}$$

onde $G(z) = \int_z^0 g(\tau)d\tau$.

(H_{AR}) Existem constantes $0 < \theta < 1$ e M suficientemente grande tais que

$$\frac{k+1}{1-\theta}\int_z^0 e^{(k+1)G(s)}f(x,s)ds \leqslant e^{kG(z)}f(x,z)\int_z^0 e^{G(s)}ds \tag{4.10}$$

para qualquer $z < -M$.

Lema 4.1. *Seja* h *dado por* (4.6). *Então, temos as identidades*

$$\lim_{z\to 0^-}\frac{h(x,z)}{|z|^k} = \lim_{z\to 0^-}\frac{f(x,z)}{|z|^k}$$

e

$$\lim_{z\to -\infty}\frac{h(x,z)}{|z|^k} = \lim_{t\to -\infty}\frac{e^{kG(t)}f(x,t)}{\left(\int_t^0 e^{G(s)}ds\right)^k}.$$

Em particular, se o par f, g *satisfaz* (4.2) *e* (4.8), *então* h *é superlinear e satisfaz*

$$\lim_{z\to -\infty}\frac{h(x,z)}{|z|^k} > \lambda_1, \quad \textit{uniformemente em } \overline{\Omega}. \tag{4.11}$$

Demonstração. Pela regra de L'Hôpital, temos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^-}\frac{tA_g'(t)}{A_g(t)} &= \lim_{t\to 0^-}\frac{te^{G(t)}}{-\int_t^0 e^{G(s)}ds}\\ &= \lim_{t\to 0^-}\frac{e^{G(t)} - tg(t)e^{G(t)}}{e^{G(t)}}\\ &= \lim_{t\to 0^-}[1 - tg(t)]\\ &= 1.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ao definir $t = A_g^{-1}(z)$, temos $t \to 0^-$ quando $z \to 0^-$. Assim, a partir de (4.12)

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0^-}\frac{h(x,z)}{|z|^k} &= \lim_{z\to 0^-}\frac{e^{kG(A_g^{-1}(z))}f(x,A_g^{-1}(z))}{|z|^k}\\ &= \lim_{t\to 0^-}\frac{e^{kG(t)}f(x,t)}{|A_g(t)|^k}\\ &= \lim_{t\to 0^-}\frac{[A_g'(t)]^k f(x,t)}{|A_g(t)|^k}\\ &= \lim_{t\to 0^-}\left[\frac{-tA_g'(t)}{-A_g(t)}\right]^k\frac{f(x,t)}{|t|^k}\\ &= \lim_{t\to 0^-}\frac{f(x,t)}{|t|^k}.\end{aligned}$$

De forma análoga, ao definir $t = A_g^{-1}(z)$, temos $t \to -\infty$ quando $z \to -\infty$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -\infty}\frac{h(x,z)}{|z|^k} &= \lim_{z\to -\infty}\frac{e^{kG(A_g^{-1}(z))}f(x,A_g^{-1}(z))}{|z|^k}\\ &= \lim_{t\to -\infty}\frac{e^{kG(t)}f(x,t)}{\left(\int_t^0 e^{G(s)}ds\right)^k}.\end{aligned}$$

□

Observação 4.1. *Observe que*

$$\lim_{z\to-\infty}\frac{e^{kG(z)}f(x,z)}{\left(\int_z^0 e^{G(s)}ds\right)^k}\geqslant\lim_{z\to-\infty}\frac{f(x,z)}{|z|^k}.$$

De fato, assim como em (4.12), *temos* $\lim_{z\to-\infty}\dfrac{zA_g'(z)}{A_g(z)}=\lim_{z\to-\infty}[1-zg(z)]\geqslant 1$. *Assim,*

$$\lim_{z\to-\infty}\frac{e^{kG(z)}f(x,z)}{\left(\int_z^0 e^{G(s)}ds\right)^k}=\lim_{z\to-\infty}\left[\frac{zA_g'(z)}{A_g(z)}\right]^k\frac{f(x,z)}{|z|^k}\geqslant\lim_{z\to-\infty}\frac{f(x,z)}{|z|^k}.$$

Consequentemente, se f *for superlinear, então o par* f,g *é superlinear no sentido de* (4.8).

Lema 4.2. *Suponha que* f,g *satisfazem as hipóteses* (H_g), (H_f), (H_{SC}) *e* (H_{AR}). *Então,* h *em* (4.6) *satisfaz*

$$\lim_{z\to-\infty}\frac{h(x,z)}{|z|^{k^*-1}}=0, \tag{4.13}$$

e, para algumas constantes $\theta>0$ *e* M *suficientemente grande*

$$\int_z^0 h(x,s)ds\leqslant\frac{1-\theta}{k+1}|z|h(x,z), \tag{4.14}$$

para qualquer $z<-M$.

Demonstração. Se $t=A_g^{-1}(z)$, temos $t\to-\infty$ quando $z\to-\infty$. Assim, para qualquer $r>0$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to-\infty}\frac{h(x,z)}{|z|^r}&=\lim_{z\to-\infty}\frac{e^{kG(A_g^{-1}(z))}f(x,A_g^{-1}(z))}{|z|^r}\\&=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{kG(t)}f(x,t)}{|A_g(t)|^r}\\&=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{kG(t)}f(x,t)}{\left(\int_t^0 e^{G(s)}ds\right)^r}.\end{aligned}$$

Isso implica em (4.13), desde que f,g satisfaçam (H_{SC}). Além disso, assuma que f e g satisfaçam (H_{AR}) para algum $\theta>0$ e $M>0$. Assim, usando a mudança de variável $t=A_g^{-1}(s)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_z^0 h(x,s)ds&=\int_z^0 e^{kG(A_g^{-1}(s))}f(x,A_g^{-1}(s))ds\\&=\int_{A_g^{-1}(z)}^0 e^{(k+1)G(t)}f(x,t)dt\\&\leqslant\frac{1-\theta}{k+1}e^{kG(A_g^{-1}(z))}f(x,A_g^{-1}(z))\int_{A_g^{-1}(z)}^0 e^{G(s)}ds\\&=\frac{1-\theta}{k+1}h(x,z)|z|\end{aligned}$$

para qualquer $z<A_g(-M)$. Isso prova (4.14). □

Teorema 4.1 (Caso superlinear)**.** *Suponha que* f *e* g *satisfazem* (H_f)*,* (H_g) *e que a função* h *definida por* (4.6) *pertence a* $C^{1,1}(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-})$*. Além disso, assuma* (4.8)*,* (H_{SC})*,* (H_{AR}) *e* f *superlinear. Então, o problema* (4.1) *tem uma solução não trivial* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*.*

Demonstração. A prova se baseia na Proposição 3.1 combinada com o resultado de existência em [5, Teorema 1.2]. De fato, de acordo com [5], a equação k-Hessiana

$$\begin{cases} S_k[u] = \psi(x, u) & \text{em } \Omega \\ u < 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.15}$$

admite uma solução k-admissível em $C^{3,\alpha}(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0, 1)$ se Ω for de classe $C^{3,1}$ e $\psi : \overline{\Omega} \times (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ satisfazendo $\psi \in C^{1,1}(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-})$, com $\psi(x, z) > 0$ para $z < 0$, superlinear. Além disso ψ deve satisfazer (4.13) e (4.14).

Portanto, em vista da Proposição 3.1, para garantir o Teorema 4.1 e como estamos assumindo que a função transformada h dada por (4.6) é tal que $h \in C^{1,1}(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-})$ com $h(x, z) > 0$ para $z < 0$, precisamos apenas verificar que h satisfaz as condições (4.2), (4.11), (4.13) e (4.14). O Lema 4.1 garante que h satisfaz (4.2) e (4.11), e o Lema 4.2 mostra que h satisfaz (4.13) e (4.14). □

Para o caso sublinear, provaremos o seguinte:

Teorema 4.2 (Caso sublinear)**.** *Suponha que* f *e* g *satisfazem* (H_f)*,* (H_g) *e que a função* h *definida por* (4.6) *pertence a* $C^{1,1}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^-) \cap C(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-})$*. Além disso, assuma* (4.7) *e* f *sublinear. Então, o problema* (4.1) *tem uma solução não trivial* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*.*

Demonstração. Assim como na prova do Teorema 4.1, para provar o Teorema 4.2 combinamos a Proposição 3.1 com o resultado de existência em [5, Teorema 1.3]. Na verdade, segundo [5, Teorema 1.3], a equação (4.15) admite uma solução $u \in C^{3,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0, 1)$ desde que Ω seja da classe $C^{3,1}$, $\psi \in C^{1,1}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^-) \cap C(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-})$, com $\psi(x, z) > 0$ para $z < 0$ e satisfaça

$$\lim_{z \to 0^-} \frac{\psi(x, z)}{|z|^k} > \lambda_1 \ \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}, \tag{4.16}$$

e

$$\lim_{z \to -\infty} \frac{\psi(x, z)}{|z|^k} < \lambda_1 \ \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}. \tag{4.17}$$

Estamos assumindo que $h \in C^{1,1}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^-) \cap C(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-})$ com $h(x,z) > 0$ para $z < 0$. Portanto, a partir da Proposição 3.1 e [5, Teorema 1.3], é suficiente mostrar que h dado por (4.6) satisfaz (4.16) e (4.17). No entanto, isso é uma consequência direta de (4.7), (4.3) e do Lema 4.1. $\square$

Os Teoremas 4.1 e 4.2 melhoram e complementam [5, Teoremas 1.2 e 1.3] ao incluir o termo k-gradiente H_k. Além disso, esses resultados complementam, para $k > 1$, resultados anteriores para o operador Laplaciano $k = 1$ em [1,11,18,19]. Para problemas relacionados envolvendo o operador p-Laplaciano, recomendamos [6, 23, 27] e referências citadas neles.

Observamos que o par de funções $f(x,z) = (e^{-z}-1)^p e^{kz}$ e $g \equiv 1$ satisfazem as condições do Teorema 4.2 para $1 \leqslant p < k$ e as hipóteses do Teorema 4.1 se $p \in (k, k^*-1)$. Como subproduto dos Teoremas 4.1 e 4.2, temos o seguinte:

Corolário 4.1. *Assumindo que* $f(x,z) = (e^{-z}-1)^p e^{kz}$ *para* $1 \leqslant p < k^* - 1$, $p \neq k$, *e* $g \equiv 1$, *então o problema* (4.1) *admite uma solução não trivial* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Inicialmente consideremos o caso $1 \leqslant p < k$. Observe que as funções $f(x,z) = (e^{-z}-1)^p e^{kz}$ e $g \equiv 1$ claramente satisfazem as condições (H_f) e (H_g). Veja que, nesse caso, h definida por (4.6) é a função $h(x,z) = |z|^p$ cujas derivadas parciais de primeira ordem são Lipschitz contínuas quando $p \geqslant 1$. Além disso, ocorre que

$$\lim_{z\to-\infty} \frac{e^{kG(z)} f(x,z)}{\left(\int_z^0 e^{G(s)} ds\right)^k} = \lim_{z\to-\infty} \frac{1}{(e^{-z}-1)^{k-p}} = 0 < \lambda_1, \quad \text{uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Para a hipótese em (4.3) observe que

$$\lim_{z\to 0^-} \left[\frac{e^{-z}-1}{-ze^{-z}}\right]^k = 1$$

logo

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0^-} \frac{f(x,z)}{|z|^k} &= \lim_{z\to 0^-} \frac{(e^{-z}-1)^p e^{kz}}{|z|^k} \left[\frac{-ze^{-z}}{e^{-z}-1}\right]^k \left[\frac{e^{-z}-1}{-ze^{-z}}\right]^k \\
&= \lim_{z\to 0^-} \frac{(e^{-z}-1)^p e^{kz}}{|z|^k} \left[\frac{-ze^{-z}}{e^{-z}-1}\right]^k \lim_{z\to 0^-} \left[\frac{e^{-z}-1}{-ze^{-z}}\right]^k \\
&= \lim_{z\to 0^-} \frac{1}{(e^{-z}-1)^{k-p}} = \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, o Teorema 4.2 garante que, quando $1 \leqslant p < k$, o problema (4.1) admite uma solução não trivial $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Agora considere $p \in (k, k^* - 1)$. Já comprovamos que f e g satisfazem as condições (H_f) e (H_g) e que $h \in C^{1,1}(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-})$. Agora observe que

$$\lim_{z\to-\infty} \frac{e^{kG(z)}f(x,z)}{\left(\int_z^0 e^{G(s)}ds\right)^k} = \lim_{z\to-\infty}(e^{-z}-1)^{p-k} > \lambda_1, \quad \text{uniformemente em } \overline{\Omega},$$

e; além disso

$$\lim_{z\to-\infty} \frac{e^{kG(z)}f(x,z)}{\left(\int_z^0 e^{G(s)}ds\right)^{k^*-1}} = \lim_{z\to-\infty}(e^{-z}-1)^{(k^*-1)-p} = 0, \quad \text{uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Agora considere $\theta \leqslant \dfrac{p-k}{p+1}$ e M suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned}
\int_z^0 e^{(k+1)G(s)}f(x,s)ds &\leqslant \int_z^0 e^{-(k+1)s}(e^{-s}-1)^p e^{ks}ds \\
&= \frac{(e^{-z}-1)^{p+1}}{p+1} \\
&\leqslant \frac{1-\theta}{k+1}(e^{-z}-1)^{p+1} \\
&= \frac{1-\theta}{k+1} e^{kG(z)} f(x,z) \int_z^0 e^{G(s)}ds
\end{aligned}$$

para $z < -M$. Para a hipótese em (4.2) veja que

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0^-} \frac{f(x,z)}{|z|^k} &= \lim_{z\to 0^-} \frac{(e^{-z}-1)^p e^{kz}}{|z|^k} \left[\frac{-ze^{-z}}{e^{-z}-1}\right]^k \left[\frac{e^{-z}-1}{-ze^{-z}}\right]^k \\
&= \lim_{z\to 0^-} \frac{(e^{-z}-1)^p e^{kz}}{|z|^k} \left[\frac{-ze^{-z}}{e^{-z}-1}\right]^k \lim_{z\to 0^-}\left[\frac{e^{-z}-1}{-ze^{-z}}\right]^k \\
&= \lim_{z\to 0^-}(e^{-z}-1)^{p-k} = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, estamos sob as hipóteses do Teorema 4.1 que, portanto, nos assegura que o problema (4.1) tem uma solução não trivial $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ quando $p \in (k, k^* - 1)$.

□

4.2 O caso de Trudinger-Moser

Esta seção é dedicada a provar os resultados de existência para crescimento subcrítico e crescimento crítico exponencial. Para alcançar nosso objetivo, combinamos a Proposição 3.1 com os resultados de existência em [9, Teorema 1.1 e Teorema 1.2].

Ao longo dessa seção, assumiremos que $\Omega = B \subset \mathbb{R}^n$ é a bola unitária e a condição de Trudinger-Moser $k = n/2$. Além disso, considere as seguintes condições:

($\mathcal{H}_f$) $f \in C(\overline{B} \times \mathbb{R}, [0, \infty))$, $x \mapsto f(x, s)$ é uma função radialmente simétrica, e $f \equiv 0$ em $\overline{B} \times [0, \infty)$.

($\mathcal{H}_{AR}$) Existem $\vartheta > k + 1$, $0 < r_1 < r_2 < 1$ e $z_0 > 0$ tais que

$$\vartheta \int_z^0 e^{(k+1)G(s)} f(x, s) ds \leqslant e^{kG(z)} f(x, z) \int_z^0 e^{G(s)} ds \quad \text{se} \quad z < -z_0 \quad \text{e} \quad x \in \overline{B}$$
$$\int_z^0 e^{(k+1)G(s)} f(x, s) ds > 0 \quad \text{se} \quad z < -z_0 \quad \text{e} \quad x \in B_{r_2} \setminus B_{r_1},$$

onde $G(z) = \int_z^0 g(\tau) d\tau$.

($\mathcal{H}_{AR_1}$) Existem constantes $L, M > 0$ tais que

$$0 < \int_z^0 e^{(k+1)G(s)} f(x, s) ds \leqslant M e^{kG(z)} f(x, z),$$

para todo $z < -L$ e $x \in \overline{B}$.

Inspirados por [7], dizemos que o par f, g tem crescimento exponencial subcrítico se, para qualquer $\alpha > 0$,

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{e^{kG(s)} f(x, s)}{e^{\alpha \left(\int_s^0 e^{G(t)} dt \right)^{\frac{n+2}{n}}}} = 0, \quad \text{uniformemente para } x \in \overline{B}. \tag{4.18}$$

Além disso, o par f, g tem crescimento exponencial crítico se existir $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{e^{kG(s)} f(x, s)}{e^{\alpha \left(\int_s^0 e^{G(t)} dt \right)^{\frac{n+2}{n}}}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \alpha > \alpha_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \alpha < \alpha_0 \end{cases}, \tag{4.19}$$

uniformemente para $x \in \overline{B}$.

Esta noção de criticidade é motivada pela desigualdade do tipo Trudinger-Moser para o operador k-Hessiano, já mencionada no capítulo 1. Na verdade, a condição (4.18) (ou (4.19)) no par f, g significa que a função transformada h em (3.6) tem crescimento exponencial subcrítico (ou crescimento exponencial crítico) no sentido estabelecido em [7, 9], observe isso no Lema 4.5-(a) abaixo.

Denotamos por X_0 o conjunto de todas as funções localmente absolutamente contínuas $u : (0, 1] \to \mathbb{R}$ que satisfazem $u(1) = 0$ e $\int_0^1 r^{n-k} |u'|^{k+1} dr < \infty$. Consideramos a constante $\Lambda_1 > 0$ (cf. [9]) definida por

$$\Lambda_1 = \inf_{u \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{c_n \int_0^1 r^{n-k} |u'|^{k+1} dr}{\tau \int_0^1 r^{n-1} |u|^{k+1} dr}, \tag{4.20}$$

onde $c_n = \frac{\omega_{n-1}}{k}\binom{n-1}{k-1}$, com ω_{n-1} sendo a área da superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ e $\tau = \omega_{n-1}$.

Em [9], os autores investigam a existência de soluções k-admissíveis radialmente simétricas para a equação k-Hessiana

$$\begin{cases} S_k[u] = \varphi(x, -u) & \text{em } B \\ u < 0 & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B, \end{cases} \tag{4.21}$$

onde a função $\varphi : \overline{B} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui crescimento exponencial subcrítico, isto é,

$$\lim_{s\to\infty} |\varphi(x,s)|e^{-\alpha|s|^{\frac{n+2}{n}}} = 0, \quad \text{uniformemente para } x \in \overline{B}, \quad \text{para todo } \alpha > 0 \tag{4.22}$$

ou crescimento exponencial crítico, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s\to\infty} |\varphi(x,s)|e^{-\alpha|s|^{\frac{n+2}{n}}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \alpha > \alpha_0 \\ \infty, & \text{para todo } \alpha < \alpha_0 \end{cases}, \quad \text{uniformemente para } x \in \overline{B}. \tag{4.23}$$

As seguintes hipóteses sobre φ foram consideradas em [9].

(φ_0) φ é contínua e $\varphi \geqslant 0$ em $\overline{B} \times \mathbb{R}$, $\varphi(\cdot, s)$ é uma função radialmente simétrica e $\varphi(x,s) = 0$ para $(x,s) \in \overline{B} \times (-\infty, 0]$.

(φ_1) Existem $\vartheta > k+1$, $0 < r_1 < r_2 < 1$ e $s_0 > 0$ tais que para $s > s_0$

$$\vartheta\Phi(x,s) \leqslant s\varphi(x,s) \text{ se } x \in \overline{B} \text{ e } \Phi(x,s) > 0 \text{ se } x \in B_{r_2} \setminus B_{r_1},$$

onde $\Phi(x,s) = \int_0^s \varphi(x,\tau)d\tau$.

(φ_2) Existem $L > 0$ e $M > 0$ tais que $0 < \Phi(x,s) \leqslant M\varphi(x,s)$, para $s > L$ e $x \in \overline{B}$.

Com essa notação, a existência de uma solução k-admissível radialmente simétrica para (4.21) é garantida em [9] para as seguintes condições:

Caso 1: Subcrítico. Se φ possui crescimento exponencial subcrítico (4.22) e satisfaz (φ_0), (φ_1) e

$$\limsup_{s\to 0^+} \frac{(k+1)\Phi(x,s)}{|s|^{k+1}} < \Lambda_1, \quad \text{uniformemente para } x \in \overline{B} \tag{4.24}$$

onde $\Phi(x,s) = \int_0^s \varphi(x,\tau)d\tau$ e Λ_1 é dada por (4.20).

Caso 2: Crítico. Se φ possui crescimento exponencial crítico (4.23) e satisfaz (φ_0), (φ_1), (φ_2), (4.24) e a estimativa

$$\lim_{s\to+\infty}|s|\varphi(x,s)e^{-\alpha_0|s|^{\frac{n+2}{n}}}=b_0>\frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{n}{\tau},\quad \text{uniformemente para } x\in\overline{B} \tag{4.25}$$

onde $\alpha_n=n[\frac{\omega_{n-1}}{k}\binom{n-1}{k-1}]^{\frac{2}{n}}=nc_n^{\frac{2}{n}}$ é a constante crítica de Moser para o k-Hessian (cf. [32]) e $\tau=\omega_{n-1}$ é a área superficial da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

Uma vez que as hipóteses sobre φ na equação (4.21) foram consideradas em $\overline{B}\times[0,\infty)$ e nosso problema aqui (3.3) é colocado em $\overline{B}\times(-\infty,0]$, precisamos traduzir essas suposições para este contexto. Os próximos dois lemas são apenas para cumprir esse papel.

Lema 4.3. *Seja* $h:\overline{B}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *uma função contínua e defina* $H(x,s)=\int_s^0 h(x,\tau)d\tau$. *Então, a função* $\varphi:\overline{B}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dada por* $\varphi(x,s)=h(x,-s)$ *satisfaz*

$$\begin{cases}\lim\limits_{s\to+\infty}|\varphi(x,s)|e^{-\alpha|s|^{\frac{n+2}{n}}}=\lim\limits_{s\to-\infty}|h(x,s)|e^{-\alpha|s|^{\frac{n+2}{n}}}\\ \lim\limits_{s\to+\infty}s\varphi(x,s)e^{-\alpha|s|^{\frac{n+2}{n}}}=\lim\limits_{s\to-\infty}|s|h(x,s)e^{-\alpha|s|^{\frac{n+2}{n}}}\\ \limsup\limits_{s\to0^+}\dfrac{(k+1)\Phi(x,s)}{|s|^{k+1}}=\limsup\limits_{s\to0^-}\dfrac{(k+1)H(x,s)}{|s|^{k+1}},\end{cases}$$

onde $\Phi(x,s)=\int_0^s\varphi(x,\tau)d\tau$.

Demonstração. Observe que para cada $s\in\mathbb{R}$ temos

$$H(x,s)=\int_s^0 h(x,\tau)d\tau=-\int_{-s}^0 h(x,-t)dt=\int_0^{-s}h(x,-t)dt=\int_0^{-s}\varphi(x,t)dt=\Phi(x,-s). \tag{4.26}$$

Portanto, o resultado segue da mudança de variáveis $t=-s$. □

Lema 4.4. *Seja* $h:\overline{B}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *uma função contínua e considere as seguintes condições:*

(h_0) $h\geqslant0$ *em* $\overline{B}\times\mathbb{R}$, $h(\cdot,s)$ *é uma função radialmente simétrica e* $h(x,s)=0$ *para* $(x,s)\in\overline{B}\times[0,\infty)$.

(h_1) *Existem* $\vartheta>k+1$, $0<r_1<r_2<1$ *e* $s_0>0$ *tais que para* $s<-s_0$

$$\vartheta H(x,s)\leqslant|s|h(x,s) \text{ se } x\in\overline{B} \text{ e } H(x,s)>0 \text{ se } x\in B_{r_2}\setminus B_{r_1},\quad \text{onde } H(x,s)=\int_s^0 h(x,\tau)d\tau.$$

(h_2) *Existem* $L>0$ *e* $M>0$ *tais que* $0<H(x,s)\leqslant Mh(x,s)$, *para* $s<-L$ *e* $x\in\overline{B}$.

Então, $\varphi:\overline{B}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $\varphi(x,s)=h(x,-s)$ *satisfaz cada condição* (h_i) *implica a correspondente hipótese* (φ_i), *para* $i=0,1,2$.

Demonstração. Claro, (h_0) implica (φ_0). Além disso, a partir de (4.26) temos também $H(x,-s) = \Phi(x,s)$. Assim, para $s > s_0$ temos $-s < -s_0$ e a partir de (h_1), obtemos $\vartheta H(x,-s) \leqslant |s|h(x,-s)$ se $x \in \overline{B}$ e $H(x,-s) > 0$ se $x \in B_{r_2} \setminus B_{r_1}$ ou equivalentemente $\vartheta\Phi(x,s) \leqslant s\varphi(x,s)$ se $x \in \overline{B}$ e $\Phi(x,s) > 0$ se $x \in B_{r_2} \setminus B_{r_1}$. Isso prova que (h_1) implica (φ_1). Analogamente, para $s > L$ temos $-s < -L$ e (h_2) implica (φ_2). □

Lema 4.5. *Suponha* (H_g) *e* $(\mathcal{H}_f)$. *Seja* h *dado por* (3.6) *e* $H(x,s) = \int_s^0 h(x,\tau)d\tau$. *Então,*

(a)
$$\lim_{s\to-\infty} |h(x,s)|e^{-\alpha|s|^{\frac{n+2}{n}}} = \lim_{z\to-\infty} e^{kG(z)-\alpha|A_g(z)|^{\frac{n+2}{n}}} f(x,z).$$

(b)
$$\limsup_{s\to0^-} \frac{(k+1)H(x,s)}{|s|^{k+1}} \leqslant \limsup_{t\to0^-} \frac{e^{kG(t)}f(x,t)}{(\int_t^0 e^{G(t)}d\tau)^k}.$$

(c) *Se* f, g *satisfazem* $(\mathcal{H}_{AR})$ *então, para qualquer* $s < A_g(-z_0)$ *temos*

$$\vartheta H(x,s) \leqslant |s|h(x,s) \ \text{ se } x \in \overline{B} \ \text{ e } \ H(x,s) > 0 \ \text{ se } \ x \in B_{r_2} \setminus B_{r_1}.$$

(d) *Se* f, g *satisfazem* $(\mathcal{H}_{AR_1})$ *então* $0 < H(x,s) \leqslant Mh(x,s)$, *para* $s < A_g(-L)$ *e* $x \in \overline{B}$.

Demonstração. (a). Ao definir $z = A_g^{-1}(s)$, temos $z \to -\infty$ quando $s \to -\infty$. Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to-\infty} |h(x,s)|e^{-\alpha|s|^{\frac{n+2}{n}}} &= \lim_{s\to-\infty} e^{kG(A_g^{-1}(s))-\alpha|s|^{\frac{n+2}{n}}} f(x,A_g^{-1}(s)) \\ &= \lim_{z\to-\infty} e^{kG(z)-\alpha|A_g(z)|^{\frac{n+2}{n}}} f(x,z).\end{aligned}$$

(b). Analogamente, uma vez que temos $\limsup(f/g) \leqslant \limsup(f'/g')$, segue que

$$\begin{aligned}\limsup_{s\to0^-} \frac{(k+1)H(x,s)}{|s|^{k+1}} &= \limsup_{s\to0^-} \frac{(k+1)\int_{A_g^{-1}(s)}^0 e^{(k+1)G(z)}f(x,z)dz}{|s|^{k+1}} \\ &= \limsup_{t\to0^-} \frac{(k+1)\int_t^0 e^{(k+1)G(z)}f(x,z)dz}{(\int_t^0 e^{G(t)}d\tau)^{k+1}} \\ &\leqslant \limsup_{t\to0^-} \frac{e^{kG(t)}f(x,t)}{(\int_t^0 e^{G(t)}d\tau)^k}.\end{aligned}$$

Observe que

$$H(x,s) = \int_s^0 e^{kG(A_g^{-1}(t))} f(x,A_g^{-1}(t))dt = \int_{A_g^{-1}(s)}^0 e^{(k+1)G(t)} f(x,t)dt. \tag{4.27}$$

(c). Para qualquer $s < A_g(-z_0)$ e $x \in \overline{B}$, a hipótese ($\mathcal{H}_{AR}$) e (4.27) implicam

$$
\begin{aligned}
\vartheta H(x,s) &= \vartheta \int_{A_g^{-1}(s)}^{0} e^{(k+1)G(t)} f(x,t)ds \\
&\leqslant e^{kG(A_g^{-1}(s))} f(x, A_g^{-1}(s)) \int_{A_g^{-1}(s)}^{0} e^{G(t)}dt \\
&= |s| h(x,s)
\end{aligned}
$$

e $H(x,s) > 0$ para $x \in B_{r_2} \setminus B_{r_1}$.

(d). Para $s < A_g(-L)$ e $x \in \overline{B}$, a hipótese ($\mathcal{H}_{AR_1}$) e (4.27) implicam

$$
0 < H(x,s) = \int_{A_g^{-1}(s)}^{0} e^{(k+1)G(t)} f(x,t)dt \leqslant M e^{kG(A_g^{-1}(s))} f(x, A_g^{-1}(s)) = Mh(x,s).
$$

□

Teorema 4.3 (caso subcrítico). *Assumindo que* f *e* g *satisfazem* (H_g)*,* ($\mathcal{H}_f$)*,* ($\mathcal{H}_{AR}$) *e* (4.18)*. Além disso, assumindo que*

$$
\limsup_{s \to 0^-} \frac{e^{kG(s)} f(x,s)}{\left(\int_s^0 e^{G(t)}dt\right)^k} < \Lambda_1, \tag{4.28}
$$

então (4.1) *possui uma solução radialmente simétrica* $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$.

Demonstração. Vamos combinar a Proposição 3.1 com o resultado de existência para crescimento subcrítico, ver **Caso 1** acima. Assim, usando o Lema 4.3 e o Lema 4.4, só precisamos verificar se a função transformada h em (3.6) satisfaz $(h_0), (h_1)$, a condição (4.22) com $s \to -\infty$ em vez de $s \to +\infty$, e a suposição (4.24) com $s \to 0^-$ e $H(x,s) = \int_s^0 h(x,\tau)d\tau$. Primeiro, a partir de (H_g) e ($\mathcal{H}_f$), a função $h(x,s)$ é contínua e não negativa em $\overline{B} \times (-\infty, 0]$. Além disso, como $A_g^{-1}(0) = 0$ e $f(x,0) = 0$, temos $h(x,0) = 0$. Assim, substituindo h por sua extensão contínua para ser zero em $\overline{B} \times [0,\infty)$, podemos assumir ($h_0$). A condição ($h_1$) segue do Lema 4.5-($c$). A condição subcrítica (4.22) segue de (4.18) e do Lema 4.5-(a). Por fim, o Lema 4.5-(b) e (4.28) fornecem (4.24). □

Para garantir nosso resultado de existência para crescimento exponencial crítico, também precisamos da condição

$$
\lim_{s \to -\infty} \frac{e^{kG(s)}|s| f(x,s)}{e^{\alpha_0 \left(\int_s^0 e^{G(t)}dt\right)^{\frac{n+2}{n}}}} = b_0 > \frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}} \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{n}{\tau}, \tag{4.29}
$$

uniformemente em $x \in \overline{B}$, onde $\alpha_n = n\left[\frac{\omega_{n-1}}{k}\binom{n-1}{k-1}\right]^{\frac{2}{n}} = nc_n^{\frac{2}{n}}$ é a constante crítica de Moser para a desigualdade de tipo Trudinger-Moser para o operador k-Hessiano, veja [32].

Teorema 4.4 (Caso crítico)**.** *Suponha* (H_g), $(\mathcal{H}_f)$, $(\mathcal{H}_{AR})$, $(\mathcal{H}_{AR_1})$, (4.19), (4.28) *e* (4.29)*. Então a equação* (3.3) *admite uma solução radialmente simétrica* $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$.

Demonstração. Aqui, também combinamos a Proposição 3.1 com o resultado de existência para crescimento crítico, ver **Caso 2** acima. Como no argumento anterior, a partir do Lema 4.3 e do Lema 4.4, é suficiente verificar se h em (3.6) satisfaz as hipóteses (h_0), (h_1), (h_2), a condição de crescimento crítico (4.23) e a estimativa (4.25) com $s \to -\infty$ em vez de $s \to +\infty$, e a suposição de origem (4.24) com $s \to 0^-$. As hipóteses (h_0) e (h_1) e a condição (4.24) foram verificadas na prova do Teorema 4.3 acima. Além disso, (h_2) segue do Lema 4.5-(d). Por fim, a estimativa (4.25) e a condição crítica (4.23) seguem de (4.19), (4.29) e do Lema 4.5-(a). □

Fica assim provada a existência de soluções para a equação k-Hessiana (3.3) para os casos de Sobolev $k < n/2$ (cf. [37]) e Trudinger-Moser $k = n/2$ (cf. [32]). A seguir, resultados de não existência para a equação (3.3) onde $k < n/2$.

4.3 Resultados de não-existência

Nesta seção, estabeleceremos resultados de não-existência para a equação k-Hessiana em (4.1).

Inicialmente, consideremos a equação

$$\begin{cases} S_k[u] = \psi(x, u) & \text{em } \Omega \\ u < 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.30}$$

onde $\psi : \overline{\Omega} \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Definição 4.1. *Um conjunto aberto* Ω *é chamado de estrelado em relação à origem, quando para todo* $x \in \overline{\Omega}$*, o segmento* $\{\beta x \ ; \ 0 \leqslant \beta \leqslant 1\}$ *está contido em* $\overline{\Omega}$.

Com base na identidade geral de Pucci-Serrin [28], o seguinte resultado é estabelecido por Tso em [37, Proposição 1].

Proposição 4.1. *Seja Ω um domínio C^2 limitado, que é estrelado em relação à origem. Suponha que ψ pertence a $C(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-}) \cap C^1(\Omega \times \mathbb{R}^-)$, é positiva em $\Omega \times \mathbb{R}^-$ e $\psi \equiv 0$ em $\Omega \times \{0\}$. Então, não existem soluções para (4.30) que pertençam a $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ se*

$$n\Psi(x,z) - \frac{n-2k}{k+1} z\psi(x,z) + x_i \Psi_{x_i}(x,z) > 0, \quad \text{em } \Omega \times (-\infty, 0)$$

onde $\Psi(x,z) = \int_0^z \psi(x,t)dt$. Além disso, se $\langle x, \nu \rangle > 0$ em $\partial\Omega$, a mesma conclusão vale sob

$$n\Psi(x,z) - \frac{n-2k}{k+1} z\psi(x,z) + x_i \Psi_{x_i}(x,z) \geqslant 0.$$

Combinando a Proposição 3.1 e a Proposição 4.1, obtemos o seguinte resultado de não-existência que contém o Teorema 4.5.

Lema 4.6. *Assuma que Ω está nas condições da Proposição 4.1. Suponha que $g : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ é uma função contínua e $f \in C(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^-}) \cap C^1(\Omega \times \mathbb{R}^-)$, é positiva em $\Omega \times \mathbb{R}^-$ e $f \equiv 0$ em $\Omega \times \{0\}$. Seja*

$$h(x,s) = e^{kG(A_g^{-1}(s))} f(x, A_g^{-1}(s)),$$

onde A_g é dado por (3.7). Então, (4.1) não tem solução negativa em $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ quando

$$nH(x,z) - \frac{n-2k}{k+1} zh(x,z) + x_i H_{x_i}(x,z) > 0, \quad \text{em } \Omega \times (-\infty, 0) \tag{4.31}$$

com $H(x,z) = \int_0^z h(x,s)ds$. A mesma conclusão vale sob

$$nH(x,z) - \frac{n-2k}{k+1} zh(x,z) + x_i H_{x_i}(x,z) \geqslant 0 \tag{4.32}$$

se $\langle x, \nu \rangle > 0$ em $\partial\Omega$.

Demonstração. As hipóteses assumidas em g e f garantem que h satisfaz todas as hipóteses da Proposição 4.1. Portanto, obtemos a não-existência para a equação (3.5), e consequentemente, a partir da Proposição 3.1, obtemos a não-existência para a equação k-Hessiana em (4.1). □

O resultado de não existência abaixo mostra que a condição estrita $p < k^* - 1$ no Corolário 4.1 é o limite para a existência pelo menos para aquele par de funções f e g.

Teorema 4.5. *Suponha que Ω é estrelado em relação à origem e seja $f(x,z) = (e^{-z} - 1)^p e^{kz}$ e $g \equiv 1$. Então o problema (4.1) não possui solução negativa em $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ quando $p \geqslant k^* - 1$.*

Demonstração. Para $f(x,z) = (e^{-z}-1)^p e^{kz}$ e $g \equiv 1$, temos $h(x,s) = (-s)^p$. Assim, para $p+1 > k^* = n(k+1)/(n-2k)$ obtemos

$$nH(x,z) - \frac{n-2k}{k+1} zh(x,z) + x_i H_{x_i}(x,z) = \Big[-\frac{n}{p+1} + \frac{n-2k}{k+1} \Big] (-z)^{p+1} > 0.$$

Se $p+1 = k^* = n(k+1)/(n-2k)$, obtemos $nH(x,z) - \dfrac{n-2k}{k+1} zh(x,z) + x_i H_{x_i}(x,z) = 0$ e a não-existência ainda vale, desde que a condição de contorno $\langle x, \nu \rangle > 0$ em $\partial\Omega$ seja assumida. Assim, o Teorema 4.5 segue do Lema 4.6. $\square$

Observação 4.2. *No Teorema 4.5, estamos assumindo a condição de contorno* $\langle x, \nu \rangle > 0$ *em* $\partial\Omega$*, onde* ν *é a normal externa unitária, mas isso é necessário apenas para o caso limite* $p = k^* - 1$*. Veja o Lema 4.6 acima.*

Note que a prova do Teorema 4.5 se baseia na identidade geral apresentada no Lema 4.6, que pode ser aplicada a um par geral f, g. Escolhemos o par $f(x,z) = (e^{-z}-1)^p e^{kz}$ e $g \equiv 1$ apenas para deixar claro que, de certa forma, o termo k-gradiente em (2.24) preserva a criticidade derivada do expoente k^*, veja por exemplo [37].

Capítulo 5

Naturalidade do termo k-gradiente

Nesse capítulo, inicialmente apresentaremos a naturalidade do termo gradiente quadrático na equação de Laplace, que é a motivação para estudar a naturalidade do termo $H_k[u]$ na equação k-Hessiana. Vamos mostrar que o termo k-gradiente H_k satisfaz o que chamamos de "hipótese natural"para o problema correspondente associado ao operador k-Hessiano, fazendo assim o mesmo papel do termo natural $|\nabla u|^2$. Por fim, provaremos um resultado de inexistência (relacionado a "hipótese natural") para uma equação k-Hessiana que contém o autovalor principal do operador k-Hessiano.

5.1 Naturalidade na equação de Laplace

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Em [30] estudou-se a existência de soluções de uma equação da forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,\nabla u)u_{x_i x_j} = b(x,u,\nabla u) \ \text{ em } \Omega \tag{5.1}$$

com condições de fronteira Dirichlet

$$u = \phi \ \text{ em } \ \partial\Omega \tag{5.2}$$

onde $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é contínua e $b, a_{ij} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 com

$$a_{ij}(x,u,p) > 0 \ \text{ para todo } \ (x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Motivado pelos resultados de Leray e Schauder [22], em 1976 Serrin [30] investigou a existência de solução do problema (5.1) com foco no crescimento do gradiente ∇u. Para isso, Serrin considerou as funções ξ e ω definidas por

$$\xi(x,u,p) = p_i a_{ij}(x,u,p)p_j \quad \text{para todo} \quad (x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{5.3}$$

e

$$\omega(x,u,p) = \frac{\xi(x,u,p)}{|b| + |p|\text{traço}(a_{ij})}, \tag{5.4}$$

para todo $(x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, com $|b|+|p|\text{traço}(a_{ij}) \neq 0$. Com esta notação, supondo que exista uma função contínua $\Psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\omega \leqslant \Psi(|p|) \ \text{ e } \ \int^{\infty} \Psi(\rho)\frac{d\rho}{\rho} < \infty,$$

Serrin provou os seguintes resultados:

a) Se $\dfrac{|b|}{|p|\text{traço}(a_{ij})} \to \infty$ quando $|p| \to \infty$, então para qualquer domínio suave Ω existem dados suaves ϕ para os quais o problema de Dirichlet para a equação (5.1) não tem solução.

b) Se $\dfrac{|b|}{|p|\text{traço}(a_{ij})}$ é limitado, então existem domínios suaves Ω e dados suaves ϕ para os quais o problema de Dirichlet para a equação (5.1) não tem solução.

No caso do problema de Dirichlet para a equação de Laplace, isto é, $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Vários autores (veja [2, 6, 19, 20]) consideraram $b(x,u,p)$ com comportamento quadrático $|p|^2$ em p, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$|b(x,u,p) \leqslant C(1+|p|^2).$$

Note que se b cresce mais rápido do que $|p|^2$, ou seja,

$$\lim_{|p|\to+\infty} \frac{|b(x,u,p)|}{|p|^2} = \infty$$

então necessariamente ocorre o item a) acima, pois

$$\lim_{|p|\to+\infty} \frac{|b(x,u,p)|}{|p|\text{traço}(a_{ij})} = \lim_{|p|\to+\infty} \frac{|b(x,u,p)|}{|p|n} \geqslant \lim_{|p|\to+\infty} \frac{|p|^2}{|p|n} = \lim_{|p|\to+\infty} \frac{|p|}{n} = \infty.$$

Este fato, associado a invariância pela mudança de Kadzan-Kramer [20], levou alguns autores (veja [2, 6, 19, 20]) a considerarem o crescimento quadrático como natural. Em [6], os autores consideraram $|\nabla u|^p$ como crescimento natural para o problema correspondente associado ao operador p-Laplaciano o qual é também invariante pela mudança de Kadzan-Kramer. Na próxima seção vamos mostrar que o termo k-gradiente H_k satisfaz a "hipótese natural" a) para o problema correspondente associado ao operador k-Hessiano, fazendo assim o mesmo papel do termo natural $|\nabla u|^2$.

5.2 Naturalidade na equação k-Hessiana

Motivados por [30] investigamos a existência de soluções de uma equação da forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,p,A)u_{x_i x_j} = b(x,u,p,A) \quad \text{em } \Omega \tag{5.5}$$

com dados de fronteira Dirichlet

$$u = \phi \quad \text{em} \quad \partial\Omega,$$

onde $\phi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e b, a_{ij} são tais que

$$b, a_{ij} \in C^1 \quad \text{e} \quad a_{ij}(x,u,p,A) > 0 \quad \text{para todo} \quad (x,u,p,A) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}.$$

Motivados pela discussão da seção anterior definiremos a seguir a condição de naturalidade de crescimento relacionada a uma equação do tipo (5.5).

Definição 5.1. *Dizemos que* b *satisfaz a hipótese natural com respeito a* (5.5) *se*

$$\lim_{|p|\to+\infty} \frac{|B(x,u,p,A)|}{|p|\mathit{traço}(a_{ij}(x,u,p,A))} = \infty, \quad \forall \;\; x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R} \;\; e \;\; A \in S^{n x n}, \tag{5.6}$$

para qualquer $B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *satisfazendo*

$$\lim_{|p|\to+\infty} \frac{|B(x,u,p,A)|}{|b(x,u,p,A)|} = \infty. \tag{5.7}$$

O resultado a seguir mostra que o termo k-gradiente satisfaz a hipótese natural.

Lema 5.1. *O termo* k*-gradiente* $b(x,u,p,A) = H_k[x,u,p,A]$ *satisfaz a hipótese natural com respeito a equação* k*-Hessiana.*

Demonstração. Como vimos anteriormente, para toda $u \in C^2(\Omega)$

$$S_k[u] = \frac{1}{k}\sum_{i,j=1}^{n} u_{ij} S_k^{ij}[D^2 u]$$

onde $u_{ij} = u_{x_i x_j}$. Comparando com a equação (5.5) devemos ter

$$a_{ij} = \frac{1}{k}S^{ij}[A] \quad \text{onde} \quad S^{ij}[A] = \frac{\partial}{a_{ij}}S_k[A].$$

Por outro lado, pelo Lema 2.1, temos

$$H_k[x,u,p,A] = \frac{1}{k}\sum_{i,j=1} p_i p_j S^{ij}[A].$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{|p|\to+\infty} \frac{|B(x,u,p,A)|}{|p|\text{traço}(a_{ij}(x,u,p,A))} &\geqslant \lim_{|p|\to+\infty} \frac{|H_k(x,u,p,A)|}{|p|\text{traço}(a_{ij}(x,u,p,A))} \\
&= \lim_{|p|\to+\infty} \frac{\frac{1}{k}\sum p_i p_j S^{ij}[A]}{\frac{1}{k}|p|\,[S^{11}[A]+\cdots+S^{nn}[A]]} \\
&= \lim_{|p|\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^n p_i^2 S^{ii}[A]}{|p|\sum_{i=1}^n S^{ii}[A]} + \lim_{|p|\to+\infty} \frac{\sum_{i,j=1}^n p_i p_j S^{ij}[A]}{|p|\sum_{i=1}^n S^{ii}[A]}, \\
&\geqslant \lim_{|p|\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^n p_i^2 S^{ii}[A]}{|p|\sum_{i=1}^n S^{ii}[A]} \\
&\geqslant \lim_{|p|\to+\infty} C(A)|p| \\
&= \infty
\end{aligned}$$

onde $C = \dfrac{\min S^{ii}[A]}{\max S^{ii}[A]}$. □

Pelo resultado acima, e as discussões nos capítulos anteriores consideramos que o termo k-gradiente é natural na equação k-Hessiana por três razões:

- Para $k = 1$, $H_1[u, \nabla u, D^2u] = |\nabla u|^2$ que corresponde ao termo natural para o operador de Laplace $\Delta u = S_1[u]$;
- A equação k-Hessiana com o termo k-gradiente H_k é invariante por uma mudança de Kadzan-Kramer, Proposição 3.1.
- O termo k-gradiente H_k satisfaz a hipótese natural, Lema 5.1.

5.3 Problema de autovalor

Assuma que Ω é um domínio suave $(k-1)$-convexo em $\mathbb{R}^n$. Considere a seguinte equação

$$\begin{cases} S_k[u] = \lambda|u|^k, & x \in \Omega, \\ u < 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.8}$$

Wang em [41], provou que existe uma constante positiva $\lambda_1(\Omega)$ tal que o problema (5.8) possui uma solução suave única $u_1(x)$ até a multiplicação por um número positivo para

$\lambda = \lambda_1(\Omega)$. Além disso, $\lambda_1(\Omega_1) \leqslant \lambda_1(\Omega_2)$ quando $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. Essa propriedade de $\lambda_1(\Omega)$ é muito semelhante à do primeiro autovalor do operador elíptico linear $\Delta u = S_1(D^2 u)$.

Considere $\lambda_1(\Omega)$ o primeiro autovalor do operador k-Hessiano. Inspirados pelos trabalhos de Wang [40, 41], chamaremos $\lambda_1(\Omega)$ de o autovalor principal de $S_k(D^2u)$, uma vez que o primeiro autovalor do operador Laplaciano também é chamado de autovalor principal. Também é apontado por Wang que $\lambda_1(\Omega)$ pode ser caracterizado pela seguinte fórmula variacional:

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u \in \Phi_0^k(\Omega)} -\frac{\int_\Omega u S_k[u] dx}{\int_\Omega |u|^{k+1} dx}. \tag{5.9}$$

a qual, utilizando integração por partes, resulta

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u \in \Phi_0^k(\Omega)} \frac{\int_\Omega H_k[u] dx}{\int_\Omega |u|^{k+1} dx}. \tag{5.10}$$

Considere o problema

$$-\operatorname{div}(a(x, u, Du, D^2u)) = b(x, u, Du, D^2u) + \lambda f(x, u), \quad u \in \phi_0^k(\Omega) \tag{5.11}$$

onde $\lambda > 0$ e f e b são funções não-negativas e

1. $|a(x, u, Du, D^2u)| \leqslant c_1 |H_k[u]|^{\frac{k}{k+1}}$.

2. $b(x, u, Du, D^2u) \geqslant c_2(1 + H_k[u])$.

Observe que para a equação k-Hessiana com o termo k-gradiente, devemos ter

$$a(x, u, Du, D^2u) = -\frac{1}{k} \sum_{j=1} S_k^{ij}[D^2u] u_j$$

e

$$b(x, u, \nabla u, D^2u) = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1} u_{x_i} u_{x_j} S^{ij}[D^2u].$$

Para $k = 1$, temos $a(x, u, Du, D^2u) = \nabla u$ e $b(x, u, \nabla u, D^2u) = |\nabla u|^2$ e as condições 1. e 2. significam

$$|a(x, u, Du, D^2u)| \leqslant c_1 |\nabla u|^{\frac{1}{2}}$$

e

$$b(x, u, Du, D^2u) \geqslant c_2(1 + |\nabla u|^2)$$

Para definir as condições 1. e 2. acima, adequamos para a equação k-Hessiana com termo k-gradiente o que foi feito em [1] para a equação de Laplace.

A seguir, no Teorema 5.1, utilizaremos a hipótese natural (5.6) para obter um resultado de não existência para a equação (5.11) quando $\lambda > \lambda_1$. Novamente utilizamos a metodologia adotada em [1] na equação Laplaciana e adaptamos pra equação (5.11).

Teorema 5.1. *Assuma que* $f \in L^1(\Omega)$ *e considere*

$$\lambda_1(f) = \inf_{\phi \in \Phi_0^k(\Omega)} \frac{\int_\Omega H_k[\phi]dx}{\int_\Omega f|\phi|^{k+1}dx} \geqslant 0. \tag{5.12}$$

a) Se $\lambda_1(f) = 0$ *então, para todo* $\lambda > 0$*, a equação* (5.11) *não possui solução.*

b) Se $\lambda_1(f) > 0$ *então existe* λ^* *tal que a equação* (5.11) *não possui solução para* $\lambda > \lambda^*$.

Demonstração. Seja $-\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $-\phi \geqslant 0$ considere uma função teste $(-\phi)^{k+1}$ em (5.11) e suponha que as propriedades (1) e (2) são satisfeitas. Pelo teorema da divergência temos que

$$\operatorname{div}(-(-\phi)^{k+1}.a(x,u,Du,D^2u)) = 0$$

e isso implica que

$$\langle (k+1)(-\phi)^k\nabla\phi, a(x,u,Du,D^2u)\rangle + \langle -(-\phi)^{k+1}, \operatorname{div}(a(x,u,Du,D^2u))\rangle = 0$$

e portanto,

$$(k+1)(-\phi)^k\langle\nabla\phi, a(x,u,Du,D^2u)\rangle = (-\phi)^{k+1}.\operatorname{div}(a(x,u,Du,D^2u)). \tag{5.13}$$

Multiplicando por $(-\phi)^{k+1}$ em (5.11) e passando a integral em Ω obtemos:

$$\int_\Omega (-\phi)^{k+1}\operatorname{div}(a(x,u,Du,D^2u))dx = \int_\Omega (-\phi)^{k+1}b(x,u,Du,D^2u)dx + \lambda\int_\Omega (-\phi)^{k+1}fdx$$

e isso implica, por (5.13), que

$$\int_\Omega (k+1)(-\phi)^k\langle\nabla\phi, a(x,u,Du,D^2u)\rangle dx = \int_\Omega (-\phi)^{k+1}b(x,u,Du,D^2u)dx + \lambda\int_\Omega (-\phi)^{k+1}fdx.$$

Agora, por 1. e 2., estabelecemos o seguinte

$$\int_\Omega (k+1)(-\phi)^k|\nabla\phi||a(x,u,Du,D^2u)|dx \geqslant c_2\int_\Omega (-\phi)^{k+1}H_k[u]dx + \lambda\int_\Omega (-\phi)^{k+1}fdx$$
$$(k+1)c_1\int_\Omega (-\phi)^k|\nabla\phi||H_k[u]|^{\frac{k}{k+1}}dx \geqslant c_2\int_\Omega (-\phi)^{k+1}H_k[u]dx + \lambda\int_\Omega (-\phi)^{k+1}fdx$$

e pela desigualdade de Young

$$\lambda\int_\Omega (-\phi)^{k+1}fdx + c_2\int_\Omega (-\phi)^{k+1}H_k[u]dx \leqslant \varepsilon\int_\Omega (-\phi)^{k+1}H_k[u]dx + C(\varepsilon,k)\int_\Omega |\nabla\phi|^{k+1}dx$$

e para ε suficientemente pequeno

$$\lambda \int_\Omega (-\phi)^{k+1} f dx \leqslant C(\varepsilon, k) \int_\Omega |\nabla \phi|^{k+1} dx \leqslant C(\varepsilon, k) \int_\Omega H_k[\phi] dx.$$

No caso que $\lambda_1(f) = 0$ a desigualdade acima implica $\lambda \leqslant 0$, o que contradiz $\lambda > 0$. Além disso, para $\lambda_1(f) > 0$ a desigualdade acima ainda leva a uma contradição para λ suficientemente grande. □

Referências Bibliográficas

[1] Abdellaoui, B., Dall'Aglio, A., Peral, I. *Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient.* J. Differential Equations. **222** (2006), no. 1, 21-62.

[2] Arcoya, D., Aparício, P. J. M. *Quasilinear equations with natural growth.* Revista Matemática Iberoamericana. **24** (2008), no.2 597-616.

[3] Caffarelli, L., Nirenberg, L., Spruck, J. *The Dirichlet problem for nonlinear second elliptic equations, I. Monge-Ampere equations.* Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 369-402.

[4] Caffarelli, L., Nirenberg, L., Spruck, J. *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. **155** (1985) 261-301.

[5] Chou, K. S., Wang, X.-J. *Variational theory for Hessian equations.* Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), 1029-1064.

[6] De Figueiredo, D. G., Gossez, J. P., Quoirin, H. R., Ubilla, P. *Elliptic equations involving the* $\mathtt{p}$*-Laplacian and a gradient term having natural growth.* Rev. Mat. Iberoam. **35** (2019), 173-194

[7] De Figueiredo, D. G., Miyagaki, O. H., Ruf, B. *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range.* Calc. Var. Partial Differential Equations. **3** (1995), 139-153

[8] De Oliveira, J.F., Do Ó, J. M., Ubilla, P. *Existence for a* $\mathtt{k}$*-Hessian equation involving supercritical growth.* J. Differential Equations. **267** (2019), 1001-1024.

[9] De Oliveira, J.F., Ubilla. P. *Admissible solutions to Hessian equations with exponential growth.* Revista Matemática Iberoamericana. **37** (2021), 747-773.

[10] Evans, L. C. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society. Second edition. **19** (2010).

[11] García-Melían, J., Iturriaga, L., Quoirin, H. R. *A priori bounds and existence of solutions for slightly superlinear elliptic problems.* Adv. Nonlinear Stud. **15** (2015), no. 4, 923-938.

[12] Gilbarg, D.,Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Reprint of the 1998. Springer. (2001), vol 224.

[13] Guan, B. *The Dirichlet problem for Hessian equations on Riemannian manifolds.* Calc. Var. Partial Differential Equations. **8** (1999), 45-69.

[14] Guowei, D. *Bifurcation and admissible solutions for the Hessian equation.* J. Funct. Anal. **273** (2017), 3200-3240.

[15] Hamid, H. A., Bidaut-Veron, M. F. *On the connection between two quasilinear elliptic problems with source terms of order* 0 *or* 1. Commun. Contemp.Math. **12** (2010), no. 5, 727-788.

[16] Horn, R.A., Johnson, C.R. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, New York, 2013

[17] Ivochkina, N., Filimonenkova, N. *On the Backgrounds of the Theory ok* $\mathfrak{m}$*-Hessian equations.* Communications on pure and applied analysis, volume 12, number **4**, July (2013), St. Petersburg, Russia, pp. 1687-1703

[18] Jeanjean, L., Quoirin, H. R *Multiple solutions for an indefinite elliptic problem with critical growth in the gradient.* Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 2, 575-586.

[19] Jeanjean, L., Sirakov, B. *Existence and multiplicity for elliptic problems with quadratic growth in the gradient.* Comm. Partial Differential Equations. **38** (2013), no. 2, 244-264.

[20] Kazdan, J. L. Kramer, R. J. *Invariant criteria for existence of solutions to second–order quasilinear elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no. 5, 619-645.

[21] Labutin, D. *Potential estimates for a class of fully nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J. **111** (2002) 1-49.

[22] Leray, J., Schauder, J. *Topologie et équations fonctionnelles.* Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. **3**, (1934), volume 51, pp. 45-78.

[23] Li, J., Yin, J., Ke, Y. *Existence of positive solutions for the p-Laplacian with p-gradient term.* J. Math. Anal. Appl. **383** (2011), no. 1, 147-158.

[24] Moser, J. *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. 20 (1971) 1077–1092.

[25] Murnaghan, F. D. *The Generalized Kronecker Symbol and its Application to the Theory of Determinants.* The American Mathematical Monthly , Vol. **32**, May, 1925, No. 5, 233-241.

[26] Phuc, N. C., Verbisky, I. E. *Quasilinear and Hessian equations of Lane-Emden type.* Ann. of Math. **168** (2008), 859-914.

[27] Porretta, A., Segura de Leon, S. *Nonlinear elliptic equations having a gradient term with natural growth.* J. Math. Pures Appl. (9) **85** (2006), no. 3, 465-492.

[28] Pucci, P., Serrin, J. *A General Variational Identity.* Indiana Univ. Math. J. **35** (1986), 681-703.

[29] Reilly, R. C., *On the Hessian of a function and the curvature of its groph*, Michigan Math. J. **20** (1973/74), 373-383.

[30] Serrin, J.: *The solvability of boundary value problems.* In Mathematical developments arising from Hilbert problems (Northern Illinois Univ., 1974), 507-524. Proc. Sympos. Pure Math. **28**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976.

[31] Sheng, W.M., Trudinger, N .S., Wang, X. J. *The Yamabe problem for higher order curvatures.* J. Differential Geom. **77** (2007), 515-553.

[32] Tian, G.-T., Wang, X.-J. *Moser-Trudinger type inequalities for the Hessian equation.* J. Funct. Anal. **259** (2010), no. 8, 1974-2002.

[33] Trudinger, N.S. *On imbedding into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. 17 (1967) 473–484.

[34] Trudinger, N.S., Wang, X.-J. *A Poincaré type inequality for Hessian integrals*, Calc. Var. Partial Differential Equations 6 (1998) 315–328.

[35] Trudinger, N.S., Wang, X-J. *Hessian measures II.* Annals of Mathematics. **150** (1999), 579-604.

[36] Tso, K. *On symmetrization and Hessian equations*, J. Anal. Math. 52 (1989) 94–116.

[37] Tso, K. *Remarks on critical exponents for Hessian operators*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. **7** (1990), 113-122.

[38] Wei, W. *Existence and multiplicity for negative solutions of k-Hessian equations.* J. Differential Equations. **263** (2017) 615-640.

[39] Wei, W. *Uniqueness theorems for negative radial solutions of k-Hessian equations in a ball*, J. Differential Equations. **261** (2016), 3756-3771.

[40] Wang, X.-J. *The k-Hessian Equation*, Lecture Notes in Math., **(**1977), Springer (2009), 177-252.

[41] Wang, X.-J. *A Class of Fully Nonlinear Elliptic Equations and Related Functionals*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), no. 1, 25-54.

[42] Zhang, X., Feng, M. *The existence and asymptotic behavior of boundary blow-up solutions to the k-Hessian equation.* J. Differential Equations. **267** (2019), 4626-4672.