Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Controlabilidade de Sistemas de Equações Diferenciais Parciais

Pedro Paulo Alves Oliveira

Teresina - 2023

Pedro Paulo Alves Oliveira

Tese de Doutorado:

Controlabilidade de Sistemas de Equações Diferenciais Parciais

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus

Teresina - 2023

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

O48c Oliveira, Pedro Paulo Alves.
Controlabilidade de sistemas de equações diferencias parciais / Pedro Paulo Alves Oliveira. -- 2024.
99 f.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Piauí. Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
"Orientador: Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus ."

1. Equações diferenciais parciais. 2. Controlabilidade. 3. Estratégia de Stackelberg. I. Jesus, Isaías Pereira de. II. Título.

CDD 516.36

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Controlabilidade de Sistemas de Equações Diferenciais Parciais

Pedro Paulo Alves Oliveira

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 25 de janeiro de 2024.

Banca Examinadora:

Isaías Pereira de Jesus

Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus - Orientador

Prof. Dr. Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto - UFPI

Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark – UFDPar

José Lucas Ferreira Machado

Prof. Dr. José Lucas Ferreira Machado – IFCE

Luciano Cipriano da Silva

Prof. Dr. Luciano Cipriano da Silva – IFRN

Ao meu filho Otto, que vem ao mundo um mês e meio após a defesa desta tese.

Agradecimentos

Aos meus pais, José de Arimatéa e Valdirene Alves, responsáveis por onde passei, onde estou e onde vou chegar.

À minha esposa Júlia Peixoto, que está comigo desde o primeiro ano da graduação, e nesses dez longos anos de trajetória acadêmica, foi muito importante nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador e pai acadêmico, Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus, por me orientar desde o quarto período da graduação, em 2 anos de Iniciação Científica, Mestrado e Doutorado.

Aos professores Haroldo Rodrigues Clark, Luciano Cipriano da Silva, Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto e José Lucas Ferreira Machado por aceitarem participar da banca examinadora.

Aos docentes da graduação e pós-graduação que tive na UFPI, em especial, aos professores Marcondes Rodrigues Clark, Roger Peres de Moura, Gleison do Nascimento Santos, Halyson Irene Baltazar, José Francisco Alves de Oliveira, Mykael de Araújo Cardoso e Barnabé Pessoa Lima, que são espelhos para mim como pessoa e como profissionais.

Aos meus amigos que entraram comigo na turma 2014.1, Francimar Vieira, Dieme Pereira, Raimundo Bruno e Pedro Rodrigues, pela parceria de estudo, pela troca de ideias, vivências e risadas. Aos amigos que fiz pelo caminho, Christopher Queiroz, Erisvaldo Veras, João Vinícius, Gustavo Dias, José Márcio, Jonas Bloch, Ruan Diego, Thássio Luan e Edimilson.

À todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta, meus sinceros agradecimentos.

À Capes pelo apoio financeiro.

"*Como em qualquer outra coisa, também para uma teoria matemática, a beleza pode ser percebida mas não explicada.*".

Arthur Cayley.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar resultados de controlabilidade para equações diferenciais parciais de evolução. Mais especificamente, numa primeira etapa, estudamos uma equação do calor com não-linearidade globalmente Lipschitz com termo de memória, onde o sistema original é linearizado e em seguida aplicamos o Teorema do Ponto Fixo de Schaefer, o qual é uma consequência do Teorema do Ponto Fixo de Schauder, para concluir um resultado de controlabilidade aproximada. Numa segunda etapa é analisada uma equação de ondas em um domínio com fronteira variável, seguindo a estratégia de Stackelberg, onde um resultado de controlabilidade aproximada é obtido.

Palavras-chave: Controlabilidade, Equações Diferenciais Parciais, Continuação Única, Estratégia de Stackelberg.

Abstract

The aim of this work is to present controllability results for partial differential equations of evolution. More specifically, in a first step, we study a heat equation with globally Lipschitz nonlinearity with memory term, where the original system is linearized and then Schaefer's Fixed-Point Theorem, which is a consequence of Schauder's Fixed-Point Theorem, is applied to obtain a result of approximate controllability. In a second step, a wave equation is analyzed in a domain with a variable boundary, following the Stackelberg strategy, where a result of approximate controllability is obtained.

Keywords: Controllability, Partial Differential Equations, Unique Continuation, Stackelberg Strategy.

Conteúdo

Introdução

Ao longo da história, o homem tem feito tentativas de controlar o comportamento de fenômenos naturais, tecnológicos ou de qualquer outra natureza, o que em geral nos faz pensar: conhecendo como um determinado sistema se comporta, como é possível atuar sobre ele para que se comporte de um modo desejado? Por exemplo, um engenheiro pode tentar controlar um maquinário ou uma barragem, por meio da aplicação de forças ou de barreiras de contenção, um economista pode atuar sobre uma variação financeira por meio da modificação de taxas ou da inserção de mais moeda, um químico pode melhorar um processo por meio da regulação da temperatura do experimento ou retirando ou adicionando mais compostos para alterar a concentração, enquanto um médico pode controlar uma enfermidade usando de medicamentos e assim por diante.

Com o propósito de entender a essas questões é que surge a *Teoria do Controle*, que é uma teoria matemática que visa compreender como podemos atuar com um comando que pode ser aplicado de modo a alterar um sistema dinâmico, para que o mesmo atinja um certo objetivo pré-determinado. Teoria essa que na história moderna teve início a partir do século XVIII durante a revolução industrial, com a aplicação da teoria das equações diferenciais ao estudo da eficiência dos sistemas mecânicos, o que levou à resolução de problemas de controle em certos mecanismos e permitiu um enorme crescimento da produção.

Atualmente, devido aos trabalhos de matemáticos como R. Bellman, H. Fattorini, R. Kalman, J. -L. Lions, L. S. Potryagin e D. Russell, e muitos outros, a *Teoria do Controle* tornou-se uma rica área da matemática, com aplicações em outros campos do conhecimento, como biologia, economia, medicina e engenharia (veja [21, 50]). Um grande marco para o desenvolvimento da teoria matemática do controle foi devido ao matemático francês J. -L. Lions no final do anos 80 (veja [38, 40]), quando o mesmo introduziu o Método de Unicidade de Hilbert (HUM) para resolução de problemas lineares de controlabilidade.

Nessa direção, podemos estabelecer várias noções diferentes de controlabilidade. Mais precisamente, um sistema de controle é uma equação de evolução (EDO ou EDP) que depende de um parâmetro y, descrito pela expressão:

$$y' = f(t, y, u), \tag{1}$$

onde $y : [0, T] \to X$ é a função estado, $u : [0, T] \to Y$ é um controle e $t \in [0, T]$ representa a variável temporal. Nesse modelo, X e Y são espaços de funções adequados, $T > 0$ é um valor real fixado e y' representa a derivada de y em relação ao tempo t.

Em seguida, destacamos algumas das principais definições de controlabilidade presentes na literatura.

Definição 0.1. ***(Controlabilidade exata)*** *Sejam* $T > 0$ *e* $y_0, y_1 \in X$ *dois estados do sistema* (1). *Dizemos que tal sistema é exatamente controlável se existe* $u : [0, T] \to Y$ *tal que:*

$$\begin{aligned} &y' = f(t, y, u) \ \textit{em} \ [0, T], \\ &y(0) = y_0, \quad y(T) = y_1. \end{aligned}$$

Definição 0.2. ***(Controlabilidade aproximada)*** *Sejam* $T > 0$ *e* y_0, y_1 *dois possíveis estados do sistema* (1). *Dizemos que tal sistema é aproximadamente controlável se, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existir* $u_\epsilon : [0, T] \to Y$ *tal que;*

$$\begin{aligned} &y' = f(t, y, u_\epsilon) \ \textit{em} \ [0, T], \\ &y(0) = y_0, \quad \|y(T) - y_1\| \leqslant \epsilon. \end{aligned}$$

Definição 0.3. ***(Controlabilidade nula)*** *Sejam* $T > 0$ *e* $y_0 \in X$ *um estado arbitrário do sistema* (1). *Dizemos que tal sistema é nulamente controlável se existe* $u : [0, T] \to Y$ *tal que;*

$$\begin{aligned} &y' = f(t, y, u) \ \textit{em} \ [0, T], \\ &y(0) = y_0, \quad y(T) = 0. \end{aligned}$$

Definição 0.4. ***(Controlabilidade exata às trajetórias)*** *Sejam* $T > 0$, $y_0 \in X$ *um estado e* $\overline{y}$ *uma trajetória (isto é, uma solução arbitrária do sistema* (1) *sem controle). Dizemos que tal sistema é exatamente controlável às trajetórias se existe* $u : [0, T] \to Y$ *tal que;*

$$\begin{aligned} &y' = f(t, y, u) \ \textit{em} \ [0, T], \\ &y(0) = y_0, \quad y(T) = \overline{y}(T). \end{aligned}$$

É possível mostrar que, em problemas lineares, as definições de controle nulo e exato às trajetórias são equivalentes.

Nosso trabalho está dividido em duas etapas. Inicialmente, como em de Jesus et al. [30], estudamos a controlabilidade aproximada para um sistema envolvendo uma equação do calor com não-linearidade globalmente Lipschitz com termo de memória dado por

$$\begin{cases} u' - \Delta u - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma + f(u, \nabla u) = v\chi_{\mathcal{O}} & \text{em} \quad Q, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Em (2), $u = u(x,t)$ é o estado do sistema, $v = v(x,t)$ é a função controle distribuída num subconjunto $\mathcal{O}$ de Ω, e $\chi_{\mathcal{O}}$ denota a função característica do subconjunto $\mathcal{O}$. Por $u' = u'(x,t)$ representamos a derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$.

O sistema (2) para o caso especial $g = 0$ foi estudado por Zuazua [57]. No presente trabalho, adaptamos as ideias do referido artigo para o caso de g satisfazendo

$$g \in L^1(0,\infty) \quad \text{e} \quad \alpha := 1 - \int_0^\infty g(s)\, ds > 0.$$

Um exemplo de função satisfazendo a propriedade acima é dado por

$$g(s) = e^{-\beta s} \quad \forall s \geqslant 0,$$

com $\beta > 1$.

Podemos encontrar na literatura vários trabalhos em conexão com termos de memória. Em Barbu [6] é dado um resultado de controlabilidade aproximada da equação do calor com memória

$$y'(x,t) - \gamma\Delta y(x,t) - \int_0^t a(t-s)\Delta y(x,s)\, ds = u(x,t)\mathbf{1}_{\mathcal{O}},$$

quando $a \in C^\infty(0,+\infty)$ é localmente integrável e completamente monótono, ou seja,

$$(-1)^j a^{(j)}(t) \geqslant 0 \quad \forall t > 0, \quad j = 0, 1, ...$$

Ao leitor são indicados os trabalhos de G. Leugering [35], I. Lasiecka [34], J. U. Kim [31] e o livro clássico de J. Lagnese & J.-L. Lions [33], enquanto os problemas sem memória tem sido objeto de pesquisa intensa nos últimos anos. Em Fabre et al. [18], os autores adaptaram o método do ponto fixo de Zuazua [58] para provar a controlabilidade aproximada de um sistema do mesmo tipo de (2), sem memória, no caso particular $f = f(y)$, f sendo globalmente Lipschitz. Observe que não foi permitido que a não-linearidade dependesse do gradiente do estado neste resultado. O caso completo onde $f(y, \nabla y)$ foi analisado por Fernández & Zuazua em [20], sem o termo de memória, por meio da abordagem de controle ótimo introduzida por J.-L. Lions [41].

Para obter os resultados em Fernández & Zuazua [20], foi fundamental aproveitar um resultado de continuação única devido a Fabre [17] no contexto das equações lineares de calor envolvendo termos gradientes. O resultado em Fabre [17] serve para concluir que a propriedade de continuação única pode ser aplicada para equações da forma

$$-p' - \Delta p + a(x,t)p + div\left(\vec{b}(x,t)\, p\right) = 0,$$

assumindo que $(a, \vec{b}) \in (L^\infty(\Omega \times (0,T)))^{n+1}$.

Seguindo as ideias de Zuazua [57] mostramos como o ponto fixo pode ser adaptado a esses problemas de controlabilidade para o sistema completo (2) em que a não linearidade pode depender tanto do estado quanto de seu gradiente. No entanto, a inovação aqui é o termo de memória.

Em uma segunda etapa, como em Oliveira et al. [47], obtemos um resultado de controlabilidade hierárquica aproximada no contexto de uma equação de onda dada por

$$\begin{aligned} &u'' - u_{xx} = 0 && \text{em} \quad Q_{T,\alpha}, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) && \text{em} \quad (0,1), \end{aligned} \tag{3}$$

onde

$$Q_{T,\alpha} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < \alpha(t),\ t \in (0,T)\},$$

u_0, u_1 são dados iniciais e α é uma função $C^2(\mathbb{R}_+)$ com as seguintes propriedades:

(H1) $\alpha(0) = 1$;

(H2) $\alpha'(t) \in (m, M) \subset (0,1) \subset \mathbb{R}_+$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$;

(H3) α' é monótona.

Estudamos a situação onde a solução u do sistema (3) está sujeita a cada uma das condições de fronteira

$$u = \begin{cases} f + v & \text{sobre} \quad \Sigma_T^0, \\ 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_T^\alpha, \end{cases} \tag{4}$$

ou

$$u = \begin{cases} 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_T^0, \\ g + w & \text{sobre} \quad \Sigma_T^\alpha, \end{cases} \tag{5}$$

onde $f, v \in L^2(\Sigma_T^0)$, $g, w \in L^2(\Sigma_T^\alpha)$ são funções controle e Σ_T^0 e Σ_T^α são dados, respectivamente, por

$$\Sigma_T^0 = \{(0,t);\ t \in (0,T)\} \quad \text{e} \quad \Sigma_T^\alpha = \{(\alpha(t),t);\ t \in (0,T)\},$$

isto é, $\Sigma_T^0 \cup \Sigma_T^\alpha = \Sigma_{T,\alpha}$ forma a fronteira $\Sigma_{T,\alpha}$ de $Q_{T,\alpha}$.

A fim de resolver nosso problema multiobjetivo relativo aos sistemas (3) - (4) e (3) - (5), assumimos um cenário de cooperatividade entre os controles f e v, onde v depende de f.

Para cada um dos controles f, v atuando no sistema da onda (3) - (4) e g, w em (3) - (5) damos uma tarefa:

1. **Tarefa para f e g:** Controlabilidade aproximada

   O objetivo é encontrar os melhores controles f e g que aproximam arbitrariamente a solução u de (3) - (4) e (3) - (5), respectivamente, de um dado u^T no tempo final T, isto é, que faz o sistema satisfeito por u aproximadamente controlável.

2. **Tarefa para v e w:** Minimização

   O objetivo é fazer a melhor aproximação (no sentido de distância calculada pelas normas) da solução u de (3) - (4) a outro dado u_2 com a menor escolha possível de v. Esta situação pode ser traduzida para uma minimização de um funcional adequado. Da mesma forma para uma solução u de (3) - (5).

Esta escolha de cenário configura a chamada *estratégia hierárquica de Stackelberg* (ver Stackelberg [52]) e, devido a essa estrutura, costumamos nomear f como o *controle líder* e v como o *controle seguidor.* Esta atribuição hierárquica dos controles nos permite proceder da seguinte forma: em primeiro lugar, para qualquer f fixo, provamos a existência de um controle v unicamente definido por f e que minimiza um certo funcional. Por causa de tal unicidade, escrevendo $v = v(f)$, nos tornamos capazes de contornar a busca de (f, v) em encontrar apenas um controle f. Isso é feito a partir de um sistema auxiliar que fornece uma caracterização de v. O referido sistema auxiliar, combinado com (3), (4), gera o que conhecemos como *sistema de otimalidade,* que tem apenas o controle f atuando. Portanto, provando a controlabilidade aproximada para o sistema de otimalidade, encontramos controles que satisfazem as tarefas $1-2$. Para finalizarmos, minimizamos um outro funcional $\mathcal{J}$ no conjunto composto por todos os controles do sistema de otimalidade a fim de encontrar uma caracterização do controle líder $\mathtt{f}$. Esta etapa final fornece o par de controles que resolvem o Teorema 3.1. A mesma abordagem será usada para provarmos o Teorema 3.2.

Existem algumas abordagens além da estratégia cooperativa hierárquica de Stackelberg a serem usadas para resolver um problema multiobjetivo envolvendo equações diferenciais parciais. Por exemplo, citamos a estratégia de otimização não cooperativa proposta por Nash [46] e a estratégia cooperativa de Pareto [48], onde ambas são ideias originadas na teoria dos jogos e motivadas principalmente pela economia.

No contexto da controlabilidade aproximada, vários problemas multiobjetivos foram estudados. Com efeito, em J. -L. Lions [37], o autor usa a estratégia de Stackelberg para uma equação parabólica com controles distribuidos. Por outro lado, o conceito de *controle hierárquico* no contexto de EDP's hiperbólicas foi introduzido pelo mesmo autor em [39], quando o mesmo analizou a controlabilidade aproximada para um sistema associado com uma equação da onda seguindo uma estratégia de Stackelberg. Mais tarde, nessa mesma direção, algumas adaptações em relação a esse mesmo tópico podem ser encontrados nos trabalhos de Jesus [28, 29, 26, 27], onde a estratégia hierárquica de Stackelberg é seguida. Em Díaz & Lions [14], os autores estabeleceram a controlabilidade aproximada de um sistema de controle, seguindo uma estratégia de Stackelberg-Nash, e a sua extensão em Díaz [13], onde o autor usa a teoria da dualidade de Fenchel-Rockafellar para dar uma caracterização da solução. Nos trabalhos de Glowinski et al. [22, 23], os autores analisam o equilíbrio de Nash para EDP's parabólicas lineares e para a equação de Burger. No artigo de González et al. em [24], a controlabilidade aproximada para o sistema Stokes é estabelecida usando a estratégia de Stackelberg-Nash . Com relação à controlabilidade nula, trazemos os recentes trabalhos [3, 2, 1, 4] sobre problemas parabólicos estudados por Araruna et al. utilizando a estratégia de Stackelberg-Nash. Para a equação de onda, até o momento, Araruna et al. [4] é o único trabalho que trata da controlabilidade nula hierárquica.

Em resumo, o trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentamos os resultados preliminares, essenciais ao desenvolvimento do nosso trabalho.

No capítulo 2, estabelecemos um resultado de controle aproximado para a equação (2), onde inicialmente lineariazamos um sistema original e em seguida aplicamos o Teorema do Ponto Fixo de Schaefer para atingirmos nosso objetivo desejado.

O capítulo 3 é dedicado a obtermos um resultado de controle aproximado para a equação (3) sujeita a uma das condições (4) ou (5), seguindo uma estratégia de Stackelberg.

Finalmente, nos apêndices A e B apresentamos, respectivamente, a existência, unicidade e regularidade para a solução fraca e solução forte de um sistema situada no capítulo 2 e, por fim, estabelecemos algumas justificativas para as expressões de funções conjugadas e adjunta que aparecem no capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resultados básicos

Neste capítulo apresentamos alguns resultados que serão utilizados no decorrer do texto para ajudar o leitor a ter uma melhor compreensão do conteúdo abordado nos capítulos seguintes.

Teorema 1.1 (Aubin-Lions). *Sejam* X, B *e* Y *espaços de Banach com* $X \subset B \subset Y$. *Suponha que* X *está compactamente imerso em* B *e* B *está continuamente imerso em* Y. *Então,*

(i) Se F *é limitado em* $L^p(0,T;X)$, *onde* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $\partial F/\partial t = \{\partial f/\partial t : \ f \in F\}$ *é limitado em* $L^1(0,T;Y)$, *então F é relativamente compacto em* $L^p(0,T;B)$.

(ii) Se F *é limitado em* $L^\infty(0,T;X)$ *e* $\partial F/\partial t$ *é limitado em* $L^r(0,T;Y)$ *onde* $r > 1$, *então* F *é relativamente compacto em* $C([0,T];B)$.

Demonstração. Ver ([51]). □

Teorema 1.2 (Desigualdade de Grönwall). *Sejam* x, φ *e* ψ *funções contínuas em* $[a,b]$ *com* $\psi(t) \geqslant 0$ *para todo* $t \in [a,b]$. *Se*

$$x(t) \leqslant \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)x(s)\,ds, \quad \forall t \in [a,b],$$

então

$$x(t) \leqslant \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(\tau)\,d\tau\right)\,ds, \quad \forall t \in [a,b]. \tag{1.1}$$

Em particular, se $\varphi \equiv C$*, então* (1.1) *se reduz a*

$$x(t) \leqslant C \exp\left(\int_s^t \psi(s)\, ds\right), \quad \forall t \in [a, b]$$

Demonstração. Ver [7]. □

Teorema 1.3 (Desigualdade de Young com ε)**.** *Sejam* $1 < p, q < \infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e um número real* $\varepsilon > 0$*. Então,*

$$ab \leqslant \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q, \quad \forall a, b \geqslant 0,$$

onde $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}} q^{-1}$*. No caso particular quando* $p = q = 2$*, a desigualdade reduz-se a*

$$ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad \forall a, b \geqslant 0.$$

Demonstração. Ver [16]. □

Teorema 1.4 (Desigualdade de Young para Convoluções)**.** *Sejam* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *e* $g \in L^p(\mathbb{R})$*, com* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Então* $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ *e*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Demonstração. Ver [9]. □

Teorema 1.5 (Outra versão para a desigualdade de Young para Convoluções)**.** *Considere números reais* $p, q, r \geqslant 1$ *tais que* $1/p + 1/q + 1/r = 2$*. Sejam* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*,* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *e* $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$*. Então*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x - y) h(y)\, dx dy \right| \leqslant C_{p,q,r;n} \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

A melhor constante $C_{p,q,r;n}$ *é igual a* $(C_p C_q C_r)^n$*, onde* $(1/p + 1/p' = 1)$

$$C_p^2 = p^{1/p} / p'^{1/p'}.$$

Demonstração. Ver [36]. □

Teorema 1.6 (Teorema do Ponto Fixo de Schaefer)**.** *Suponhamos que* $A : X \to X$ *é uma aplicação contínua e compacta, onde* X *é um espaço de Banach. Assuma além disso que o conjunto*

$$\{u \in X \,:\, u = \lambda A(u) \text{ para algum } \lambda \in [0, 1]\}$$

é limitado. Então A *possui um ponto fixo.*

Demonstração. Ver [16]. □

Teorema 1.7. *Seja* C *um subconjunto fechado e convexo de um espaço reflexivo. Suponha que* $F = F_1 + F_2$*, onde* F_1 *e* F_2 *são funções convexas e semicontínuas inferiormente de* C *em* $\mathbb{R}$ *e* F_1 *Gâteaux-diferenciável com derivada* F_1'*. Então, se* $u \in C$*, são equivalentes:*

(a) u *é uma solução de* $\inf_{u \in C} F(u)$*;*

(b) $\langle F_1'(u), v - u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geqslant 0 \quad \forall v \in C$*;*

(c) $\langle F_1'(v), v - u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geqslant 0 \quad \forall v \in C$*.*

Demonstração. Ver [15]. □

Teorema 1.8 (Dualidade de Fenchel-Rockafellar)**.** *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach, funções convexas* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *e* $g : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *e* $A : X \to Y$ *uma aplicação linear limitada. Suponha que* f, g *e* A *satisfaçam uma das seguintes condições:*

(a) f *e* g *são semicontínuas inferiormente e* $0 \in \textit{core}(\textit{dom}\, g - A\,\textit{dom}\, f)$*, onde core é o interior algébrico e dom* h*, onde* h *é uma função qualquer, é o conjunto*

$$\textit{dom}\, h = \{z : h(z) < +\infty\};$$

(b) $A\textit{dom}\ f \cap \textit{cont}\ g \neq \emptyset$*, onde cont é o conjunto dos pontos onde a função é contínua.*

Então,

$$\inf_{x \in X}\{f(x) + g(Ax)\} = \sup_{x^* \in Y'}\{-f^*(A^*x^*) - g^*(-x^*)\}$$

e o supremo é atingido.

Demonstração. Ver [8]. □

Teorema 1.9. *Seja* D *um subconjunto de um espaço de Hilbert* H*. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) D *gera um subespaço vetorial que é denso em* H*.*

(b) Toda funcional linear contínuo em H *que se anula em* D *é identicamente zero em* H*.*

Demonstração. Ver [5]. □

Teorema 1.10. *Para* $T > T_1$*, onde* T_1 *é dado em* (3.7) *e* $(z^0, z^1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$*, existe uma constante* $C > 0$ *tal que a solução correspondente de*

$$\begin{aligned} &z'' + L^* z = 0 && \text{em} \quad Q,\\ &z(0,t) = 0, \quad z_y(1,t) = 0 && \text{sobre} \quad \Gamma,\\ &z(y,0) = z_0(y), \quad z'(y,0) = z_1(y) && \text{em} \quad \Omega, \end{aligned}$$

satisfaz

$$\int_0^T \beta(0,t)|z_x(0,t)|^2 \, dt \geqslant C(\|z_0\|^2_{H_0^1(0,1)} + \|z^1\|^2_{L^2(0,1)}).$$

Demonstração. Ver [55]. □

Teorema 1.11. *Para* $T > T_2$*, onde* T_2 *é dado em* (3.8) *e* $(z^0, z^1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$*, existe uma constante* $C > 0$ *tal que a solução correspondente de*

$$\begin{aligned} &z'' + L^* z = 0 && \text{em} \quad Q,\\ &z(0,t) = 0, \quad z_y(1,t) = 0 && \text{sobre} \quad \Gamma,\\ &z(y,0) = z_0(y), \quad z'(y,0) = z_1(y) && \text{em} \quad \Omega, \end{aligned}$$

satisfaz

$$\int_0^T \beta(1,t)|z_x(1,t)|^2 \, dt \geqslant C(\|z_0\|^2_{H_0^1(0,1)} + \|z^1\|^2_{L^2(0,1)}).$$

Demonstração. Ver [55]. □

Teorema 1.12 (Lions-Magenes)**.** *Sejam* V, H *e* V' *três espaços de Hilbert tais que*

$$V \subset H \equiv H' \subset V',$$

onde cada espaço é denso no seguinte, as injeções são contínuas e V' *é o dual de* V*. Se uma função* u *pertence a* $L^2(0,T;V)$ *e sua derivada* u' *pertence a* $L^2(0,T;V')$*, então* u *é igual q.t.p. a uma função contínua de* $[0,T]$ *em* H *e temos a seguinte igualdade, a qual vale no sentido de distribuição escalar sobre* $(0,T)$*:*

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u', u\rangle.$$

Demonstração. Ver [42]. □

Teorema 1.13 (Du Bois-Reymond)**.** *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Então,*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

se, e somente, se $u = 0$ *q.t.p em* Ω*.*

Demonstração. Ver [43]. □

Capítulo 2

Controlabilidade para uma equação do calor semilinear com não-linearidade globalmente Lipschitz e termo de memória

2.1 Introdução

Neste capítulo, investigamos a controlabilidade para uma equação do calor semilinear com termo de memória e controle interno em um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$. A semilinearidade possui termos gradiente e é globalmente Lipschitziana. Como o termo de memória não permite diretamente a aplicação do teorema de continuação única de Fabre [17] no contexto da equação do calor, fizemos alguns ajustes nos termos da equação. Além disso, a prova da controlabilidade usa uma variante de um método clássico de ponto fixo e uma técnica devida a Zuazua [57] e Fabre-Puel-Zuazua [18].

2.1.1 Apresentação do problema e o resultado principal

A controlabilidade de EDP's lineares e não-lineares tem sido objeto de muitos trabalhos nas últimas décadas. Aspectos teóricos e sua conexão com aplicações têm sido considerados por muitos autores e muitos avanços podem ser mencionados.

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2. Seja $T > 0$ um tempo dado e denotemos por Q o cilindro $\Omega \times (0,T)$ do $\mathbb{R}^{n+1}$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

Para um aberto limitado e não-vazio $\mathcal{O} \subset \Omega$, nosso propósito é investigar a controlabilidade aproximada para o sistema semilinear dado por:

$$\begin{array}{lll} u' - \Delta u - \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma + f(u, \nabla u) = v\chi_{\mathcal{O}} & \text{em} & Q, \\ u = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em} & \Omega. \end{array} \tag{2.1}$$

Em (2.1), $u = u(x,t)$ é o estado do sistema, $v = v(x,t)$ é a função controle distribuída em $\mathcal{O}$, e $\chi_{\mathcal{O}}$ denota a função característica do subconjunto $\mathcal{O}$. Por $u' = u'(x,t)$ representamos a derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Ao longo deste capítulo, adotaremos as seguintes hipóteses:

(A1) Semilinearidade: Assumimos que a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é globalmente Lipschitz, isto é, para quaisquer $y, z \in \mathbb{R}$ e $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ existe uma constante positiva K tal que

$$|f(y,\xi) - f(z,\eta)|_{\mathbb{R}} \leqslant K\{|y-z|_{\mathbb{R}} + |\xi - \eta|_{\mathbb{R}^n}\}. \tag{2.2}$$

(A2) Termo de Memória: A função $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisfaz

$$g \in L^1(0,\infty) \quad \text{e} \quad \alpha := 1 - \int_0^\infty g(s)\, ds > 0. \tag{2.3}$$

(A3) Continuação Única: Seja $\{a, \overrightarrow{b}\} \in L^\infty(Q) \times (L^\infty(Q))^n$. Se

$$\psi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)) \tag{2.4}$$

é solução do problema

$$\begin{array}{lll} -\psi' - \Delta\psi + a\psi - div(\overrightarrow{b}\psi) - \displaystyle\int_t^T g(\eta - t)\Delta\psi(\eta)\, d\eta = 0 & \text{em} & Q, \\ \psi = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\ \psi(x,T) = \psi_0(x) & \text{em} & \Omega, \\ \psi \equiv 0 & \text{em} & \mathcal{O} \times (0,T), \end{array} \tag{2.5}$$

onde $\mathcal{O}$ é um subconjunto aberto de Ω, então $\psi \equiv 0$ em Q.

A condição restritiva na suposição **(A2)** significa que o termo de memória é pequeno. Esta condição é suficiente para garantir a existência e unicidade de uma função $u : Q \to \mathbb{R}$, como veremos na Seção 2.2. Além disso, a afirmação (2.3) é também usada para mostrar que um funcional é contínuo e coercivo. Posteriormente na Seção 2.3, explicitaremos com mais profundidade a hipótese sobre α.

No contexto da Física, o termo de memória em (2.1) está relacionado a propriedades de viscoelasticidade do material. O termo $g * \Delta u$ dá origem a algumas dificuldades técnicas nesta adaptação.

O problema de controlalbilidade para (2.1) pode ser formulado da seguinte maneira: Dados $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, um estado ideal $u^T \in L^2(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, encontrar uma função controle $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ tal que a solução correspondente u de (2.1) satisfaz

$$|u(T) - u^T|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon. \tag{2.6}$$

Em outras palavras, o problema de controlabilidade aproximada de (2.1) consiste em mostrar que a família de soluções de (2.1) no tempo T dada por

$$R(u_0, T) = \{u(\cdot, T) : u \text{ é solução de (2.1) com } v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\}. \tag{2.7}$$

é densa em $L^2(\Omega)$.

Mais precisamente, nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 2.1. *Suponhamos que valem as condições **(A1)**, **(A2)** e **(A3)**. Então o sistema* (2.1) *é aproximadamente controlável, isto é, para cada* $T > 0$ *e* $u_0, u^T \in L^2(\Omega)$, *existe um controle* $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ *tal que a solução correspondente de* (2.1) *satisfaz* (2.6).

2.1.2 Organização do capítulo

Os conteúdos deste capítulo estão organizados como segue. Na Seção 2.2, linearizamos o problema (2.1) e descrevemos o método do ponto fixo. Na Seção 2.3 obtemos a controlabilidade aproximada para o sistema linearizado. Na Seção 2.4 provamos a controlabilidade para o sistema original (2.1). Finalmente, apresentamos alguns comentários adicionais e questões na Seção 2.5.

2.2 Sistema Linearizado

Os objetivos desta seção, seguindo ideias de Zuazua [57], são linearizar o sistema (2.1), e em seguida descrever como usaremos o teorema do ponto fixo de Schaefer (Teorema 1.6) para atingir nosso propósito.

Com efeito, notemos que para $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, vale a seguinte identidade

$$\begin{aligned} f(u,\nabla u) - f(0,0) &= \int_0^1 \frac{d}{d\sigma}\big\{f(\sigma u, \sigma\nabla u)\big\}d\sigma \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \theta}(\sigma u, \sigma \nabla u)\frac{d(\sigma u)}{d\sigma}d\sigma + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta}(\sigma u, \sigma\nabla u)\cdot \frac{d(\sigma\nabla u)}{d\sigma}d\sigma \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \theta}(\sigma u, \sigma\nabla u)u d\sigma + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta}(\sigma u, \sigma \nabla u)\cdot \nabla u d\sigma, \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial f}{\partial \theta}$, $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ denotam, respectivamente, as derivadas parciais da função f com respeito às variáveis u e ∇u.

Consideremos

$$F(u) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \theta}(\sigma u, \sigma \nabla u)d\sigma \quad \text{e} \quad G(u) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta}(\sigma u, \sigma\nabla u)d\sigma.$$

Com essas notações, temos que

$$f(u,\nabla u) - f(0,0) = F(u)u + G(u)\cdot \nabla u.$$

Usando a propriedade Lipschitziana de f, deduzimos que

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \left|\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \theta}(\sigma u, \sigma\nabla u)d\sigma\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial \theta}(\sigma u, \sigma \nabla u)\right| d\sigma \\ &= \int_0^1 \left|\lim_{h\to 0} \frac{f(\sigma u + h, \sigma\nabla u) - f(\sigma u, \sigma\nabla u)}{h}\right| d\sigma \\ &= \int_0^1 \lim_{h\to 0}\frac{|f(\sigma u + h, \sigma \nabla u) - f(\sigma u, \sigma\nabla u)|}{|h|}d\sigma \\ &\leqslant \int_0^1 \lim_{h\to 0}\frac{K\big\{|\sigma u + h - \sigma u| + |\sigma\nabla u - \sigma\nabla u|\big\}}{|h|}d\sigma \\ &= K, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |G(u)| &= \left|\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta}(\sigma u, \sigma\nabla u)d\sigma\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial \eta}(\sigma u, \sigma \nabla u)\right| d\sigma \\ &= \int_0^1 \left|\lim_{h\to 0} \frac{f(\sigma u, \sigma\nabla u + h) - f(\sigma u, \sigma\nabla u)}{h}\right| d\sigma \\ &= \int_0^1 \lim_{h\to 0}\frac{|f(\sigma u, \sigma \nabla u + h) - f(\sigma u, \sigma\nabla u)|}{|h|}d\sigma \\ &\leqslant \int_0^1 \lim_{h\to 0}\frac{K\big\{|\sigma u - \sigma u| + |\sigma\nabla u + h - \sigma\nabla u|\big\}}{|h|}d\sigma \\ &= K, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|F(u)| \leqslant K \text{ e } |G(u)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant K,$$

onde K é uma constante de Lipschitz de f.

Portanto,

$$\|F(u)\|_{L^\infty(Q)} \leqslant K \text{ e } \|G(u)\|_{(L^\infty(Q))^n} \leqslant K \quad \forall u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

onde $(L^\infty(Q))^n = L^\infty(Q) \times L^\infty(Q) \times \cdots \times L^\infty(Q)$.

Logo, estão bem definidas as aplicações

$$F : L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \longrightarrow L^\infty(Q) \quad \text{e} \quad G : L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \longrightarrow (L^\infty(Q))^n.$$

Assim, o sistema (2.1) pode ser reescrito como sendo:

$$\begin{aligned}
& u' - \Delta u - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma + F(u)u + G(u)\cdot\nabla u + f(0,0) = v\chi_{\mathcal{O}} && \text{em} \quad Q,\\
& u = 0 && \text{em} \quad \Sigma,\\
& u(x,0) = u_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Fixado $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, consideramos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
& u' - \Delta u - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma + F(y)u + G(y)\cdot\nabla u + f(0,0) = v\chi_{\mathcal{O}} && \text{em} \quad Q,\\
& u = 0 && \text{em} \quad \Sigma,\\
& u(x,0) = u_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

O sistema (2.9) é linear no estado u com potenciais

$$a(x,t) := F(y(x,t)) \in L^\infty(Q) \text{ e } \overrightarrow{b}(x,t) := G(y(x,t)) \in (L^\infty(Q))^n$$

satisfazendo a seguinte limitação uniforme

$$\|a\|_{L^\infty(Q)} \leqslant K \quad \text{e} \quad \|b\|_{(L^\infty(Q))^n} \leqslant K. \tag{2.10}$$

Nesta configuração, o sistema linearizado (2.9) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned}
& u' - \Delta u - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma + au + \overrightarrow{b}\cdot\nabla u + f(0,0) = v\chi_{\mathcal{O}} && \text{em} \quad Q,\\
& u = 0 && \text{sobre} \quad \Sigma,\\
& u(x,0) = u_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Logo, valem as seguintes afirmações, cujas demonstrações podem ser encontradas no Apêndice A:

(i) Se $l = v\chi_{\mathcal{O}} - f(0,0) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\{a, \overrightarrow{b}\} \in L^\infty(Q) \times (L^\infty(Q))^n$ e g satisfaz (2.3), então existe uma única função $u : Q \to \mathbb{R}$, solução do sistema (2.11) satisfazendo

$$u \in C^0([0,T];L^2(\Omega)), u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

no sentido de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e $u(0) = u_0$.

(ii) Se $l = v\chi_{\mathcal{O}} - f(0,0) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\{a, \overrightarrow{b}\} \in L^\infty(Q) \times (L^\infty(Q))^n$ e g satisfaz (2.3), então existe uma única função $u : Q \to \mathbb{R}$, solução do sistema (2.11) satisfazendo

$$u \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)), u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

no sentido de $L^2(Q)$ e $u(0) = u_0$.

Na Seção 2.3, mostraremos que para cada $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, o sistema (2.9) é aproximadamente controlável, ou seja, dados $u_0, u^T \in L^2(\Omega)$, existe um controle $v = v(x,t;y) \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ tal que a única solução $u = u(x,t;y) \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ de (2.9) satisfaz

$$|u(T) - u^T|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

A partir daí, para obter a controlabilidade aproximada para o sistema (2.8), definiremos a aplicação não-linear

$$\mathcal{T} : L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \longrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); \quad \mathcal{T}(y) = u, \tag{2.12}$$

onde u é solução de (2.9), e mostraremos que $\mathcal{T}$ tem um ponto fixo, o que será feito através do teorema do ponto fixo de Schaefer (Teorema 1.6), que é uma consequência do teorema do ponto fixo de Schauder. Com efeito, se $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ é tal que $y = \mathcal{T}(y) = u$, então a solução u de (2.9) é também solução de (2.8).

2.3 Controlabilidade para o sistema linearizado

Nesta seção, provaremos a controlabilidade aproximada para o sistema linearizado (2.11). Para isso, inicialmente é importante notarmos que a solução u de (2.11) depende não somente de $(x,t) \in Q$, mas também da função controle v. Esta dependência é representada por $u(x,t,v)$.

Para $l(x,t) = v(x,t)\chi_{\mathcal{O}}$ temos que $l \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e podemos assumir que $u_0 = 0$ e $f(0,0) = 0$, pois o sistema (2.11) é linear. Logo, estamos no caso regular (ii) apresentado na Seção 2.2. Consequentemente, obtemos uma única solução forte $u = u(x,t,v)$ para o problema (2.11), e além disso, $u \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$ ou $u(\cdot,t,v) \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Isto significa que para uma função arbitrária $u^T \in L^2(\Omega)$, a qual é chamada de estado ideal do sistema, não é possível obter um controle $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ tal que a solução correspondente $u(\cdot,t,v) \in H_0^1(\Omega)$ satisfaça $u(x,t,v) = u^T(x)$.

No entanto, provaremos que os elementos de $L^2(\Omega)$ podem ser pelo menos aproximados por soluções de (2.11) calculadas no tempo T; ver [41]. O resultado a seguir é essencial para estabelecermos a controlabilidade aproximada do sistema (2.11). Mais precisamente, temos:

Lema 2.1. *Seja* $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *uma função de* $L^1(0,\infty)$ *e* $y, \zeta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. *Então, para cada* $t \in [0,T]$*, vale a seguinte igualdade:*

$$\int_{\Omega\times(0,t)} \left[\int_0^s g(s-\sigma)y(\sigma)\,d\sigma\right]\zeta(s)\,ds = \int_{\Omega\times(0,t)} \left[\int_s^T g(\eta-s)\zeta(\eta)\,d\eta\right]y(s)\,ds.$$

Demonstração. Consideremos

$$\tilde{y} = \begin{vmatrix} y \ \text{em} \ [0,t] \\ 0 \ \text{fora de} \ [0,t]; \end{vmatrix} \qquad \tilde{\zeta} = \begin{vmatrix} \zeta \ \text{em} \ [0,t] \\ 0 \ \text{fora de} \ [0,t], \end{vmatrix}$$

$$\tilde{g}(u) = \begin{vmatrix} g(u) \ \text{se} \ u \geqslant 0 \\ 0 \ \text{se} \ u < 0; \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \widetilde{g*y} = \begin{vmatrix} g*y \ \text{em} \ [0,t] \\ 0 \ \text{fora de} \ [0,t]. \end{vmatrix}$$

Logo, $\tilde{y} \in L^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$, $\tilde{\zeta} \in L^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$, $\tilde{g} \in L^1(\mathbb{R})$ e $\widetilde{g*y} \in L^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$. Daí,

$$\int_{\Omega\times(0,t)} \int_0^s [g(s-\sigma)y(\sigma)d\sigma]\,\zeta(s)ds = \int_{\Omega\times(0,t)} g*y(s)\zeta(s)\,ds =$$

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}} \widetilde{g*y}(s)\tilde{\zeta}(s)\,ds := \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \tilde{g}*\tilde{y}(s)\tilde{\zeta}(s)\,ds = \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \tilde{y}(s)\breve{\tilde{g}}*\tilde{\zeta}(s)\,ds =$$

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \breve{\tilde{g}}(s-\eta)\tilde{\zeta}(\eta)d\eta\right]\tilde{y}(s)\,ds = \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(\eta-s)\tilde{\zeta}(\eta)d\eta\right]\tilde{y}(s)\,ds =$$

$$\int_{\Omega\times(0,t)} \int_s^T [g(\eta-s)\zeta(\eta)d\eta]\,y(t)ds,$$

onde por $\breve{g}$ denotamos $\breve{\tilde{g}}(x) = \tilde{g}(-x)$. □

Agora, usando o Lema 2.1, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *(Controlabilidade Aproximada para o Sistema Linearizado) Seja* $R(T)$ *o conjunto de todas as soluções fortes* $u(x,T,v)$ *para a equação de estado* (2.11) *com* v *variando em* $L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$. *Assumindo as hipóteses **(A1)**, **(A2)** e **(A3)**, então* $R(T)$ *é denso em* $L^2(\Omega)$.

Demonstração. Mostraremos que dados $u^T \in L^2(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, existe $v \in L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$ tal que a solução correspondente u do problema (2.11) satisfaz (2.6).

Denotamos por $\psi(x,t) \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, $(x,t) \in Q$ a solução fraca de

$$\begin{aligned}
&-\psi' - \Delta\psi + a\psi - div(\overrightarrow{b}\psi) - \int_t^T g(\eta - t)\Delta\psi(\eta)\,d\eta = 0 && \text{em} \quad Q,\\
&\psi = 0 && \text{sobre} \quad \Sigma,\\
&\psi(x,T) = \psi_0(x),\ \psi_0 \in L^2(\Omega) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Observação 2.1. *Escrevendo* $\theta(x,t) = \psi(x,T-t)$, *transformamos* (2.13) *em um sistema equivalente*

$$\begin{aligned}
&\theta' - \Delta\theta + a\theta + \overrightarrow{b}\cdot\nabla\theta - \int_0^t g(t-\eta)\Delta\theta(\eta)\,d\eta = 0 && \textit{em} \quad Q,\\
&\theta = 0 && \textit{sobre} \quad \Sigma,\\
&\theta(x,0) = \psi_0(x),\ \psi_0 \in L^2(\Omega) && \textit{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

na função desconhecida θ, *mas com* $\theta(0) = \psi_0$, *onde* $\psi_0 \in L^2(\Omega)$. *Logo, estamos no caso **(i)** de existência; ver Seção 2.2.*

Usando a solução de (2.13) e o dado $\psi_0 \in L^2(\Omega)$, definimos para um dado $\varepsilon > 0$, o seguinte funcional $J : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$J(\psi_0) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi(x,t)|^2\,dx\,dt + \varepsilon|\psi_0|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega u^T\psi_0\,dx. \tag{2.15}$$

Provaremos agora algumas propriedades a respeito deste funcional:

- **J é contínuo.**

  De fato, consideremos $\psi_0^n \to \psi_0$ em $L^2(\Omega)$. Então,

$$\varepsilon|\psi_0^n|_{L^2(\Omega)} \to \varepsilon|\psi_0|_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \int_\Omega u^T\psi_0^n\,dx \to \int_\Omega u^T\psi_0\,dx.$$

Por outro lado, seja $(\theta_n - \theta)$ a solução do sistema:

$$\begin{array}{lll}
(\theta_n - \theta)' - \Delta(\theta_n - \theta) + a(\theta_n - \theta) + \overrightarrow{b} \cdot \nabla(\theta_n - \theta) & & \\
-\displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)\Delta(\theta_n(\sigma) - \theta(\sigma))\, d\sigma = 0 & \text{em} & Q, \\
\theta_n - \theta = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\
(\theta_n - \theta)(0) = \psi_0^n - \psi_0 & \text{em} & \Omega.
\end{array} \tag{2.16}$$

Multiplicando cada parcela da primeira equação de (2.16) por $\theta_n - \theta$ e integrando em $\Omega \times (0, t)$, obtemos

- $$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega (\theta_n - \theta)(x,s)(\theta_n - \theta)'(x,s)\, dxds &= \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^t \frac{d}{ds}|\theta_n(x,s) - \theta(x,s)|^2\, dsdx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\theta_n(t) - \theta(t)|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\theta_n(0) - \theta(0)|^2\, dx \\ &= \frac{1}{2}|\theta_n(t) - \theta(t)|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}|\theta_n(0) - \theta(0)|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2}|\theta_n(t) - \theta(t)|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}|\psi_0^n - \psi_0|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}-\int_0^t \int_\Omega (\theta_n - \theta)\Delta(\theta_n - \theta)\, dxds &= \int_0^t \int_\Omega |\nabla(\theta_n - \theta)|^2\, dxds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\theta_n - \theta)}{\partial\nu} \underbrace{(\theta_n - \theta)}_{=0}\, dS \\ &= \int_0^t \int_\Omega |\nabla(\theta_n - \theta)|^2\, dxds \\ &= \int_0^t \|\theta_n(s) - \theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega a(\theta_n - \theta)^2\, dxds &\leqslant \int_0^t \int_\Omega \|a\|_{L^\infty(Q)}(\theta_n - \theta)^2\, dxds \\ &= \|a\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \int_\Omega |\theta_n - \theta|^2\, dxds \\ &= \|a\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t |\theta_n(s) - \theta(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bullet\ & -\int_0^t\int_\Omega(\theta_n-\theta)(s)\int_0^s g(s-\sigma)\Delta(\theta_n(\sigma)-\theta(\sigma))\ d\sigma dx ds\\
&=-\int_0^t\int_\Omega\int_0^s(\theta_n-\theta)(s)g(s-\sigma)\Delta(\theta_n(\sigma)-\theta(\sigma))\ d\sigma dx ds\\
&=-\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega\int_{\mathbb{R}}(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(s)\tilde g(s-\sigma)\Delta(\tilde\theta_n(\sigma)-\tilde\theta(\sigma))\ d\sigma dx ds\\
&=-\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\tilde g(s-\sigma)\int_\Omega(\tilde\theta_n(s)-\tilde\theta(s))\Delta(\tilde\theta_n(\sigma)-\tilde\theta(\sigma))\ dx d\sigma ds\\
&=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\tilde g(s-\sigma)\int_\Omega\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)\cdot\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,\sigma)\ dx\ d\sigma\ ds\\
&=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega\tilde g(s-\sigma)\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)\cdot\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,\sigma)\ dx\ d\sigma\ ds\\
&=\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega\int_{\mathbb{R}}\tilde g(s-\sigma)\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)\cdot\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,\sigma)\ d\sigma\ dx\ ds\\
&=\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)\cdot\int_{\mathbb{R}}\tilde g(s-\sigma)\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,\sigma)\ d\sigma\ dx\ ds\\
&=\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)\cdot\tilde g*\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)\ dx\ ds\\
&\leqslant\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega\big|\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)|\ |\tilde g*\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)\big|\ dx\ ds\\
&=\int_\Omega\int_{\mathbb{R}}\big|\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)|\ |\tilde g*\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)\big|\ ds\ dx\\
&\leqslant\int_\Omega\left(\int_{\mathbb{R}}\big|\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)|^2\,ds\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}}|\tilde g*\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)(x,s)\big|^2\,ds\right)^{\frac12}\ dx\\
&=\int_\Omega|\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)|_{L^2(\mathbb{R})}\ |\tilde g*\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)|_{L^2(\mathbb{R})}\ dx\\
&\leqslant\int_\Omega|\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)|_{L^2(\mathbb{R})}\ \|\tilde g\|_{L^1(\mathbb{R})}|\nabla(\tilde\theta_n-\tilde\theta)|_{L^2(\mathbb{R})}\ dx\\
&=\|\tilde g\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_\Omega\|\tilde\theta_n-\tilde\theta\|_{H_0^1(\mathbb{R})}\ \|\tilde\theta_n-\tilde\theta\|_{H_0^1(\mathbb{R})}\ dx\\
&=\|\tilde g\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_\Omega\|\tilde\theta_n-\tilde\theta\|^2_{H_0^1(\mathbb{R})}\ dx\\
&=\|\tilde g\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}}\|\tilde\theta_n(s)-\tilde\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\ dx\ ds\\
&=\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\|\theta_n(s)-\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds.
\end{aligned}
$$

- $\displaystyle\int_0^t\int_\Omega \nabla(\theta_n-\theta)\cdot\overrightarrow{b}(\theta_n-\theta)\,dxds.$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^t\int_\Omega |\theta_n-\theta)|\,|\nabla(\theta_n-\theta)|\,|\overrightarrow{b}|\,dxds\\
&\leqslant K\int_0^t\int_\Omega |\theta_n-\theta)|\,|\nabla(\theta_n-\theta)|\,dxds\\
&\leqslant K\int_0^t\left(\int_\Omega |\theta_n-\theta)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla(\theta_n-\theta)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\,ds\\
&= K\int_0^t |\theta_n(s)-\theta(s)|_{L^2(\Omega)}\|\theta_n(s)-\theta(s)\|_{H_0^1(\Omega)}\,ds\\
&\leqslant \frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t |\theta_n(s)-\theta(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds+\varepsilon\int_0^t \|\theta_n(s)-\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds,
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade foi usada a desigualdade de Young com ε (Teorema 1.3), com $\varepsilon>0$ a ser determinado posteriormente.

Daí, combinando as expressões acima, segue que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega (\theta_n-\theta)(\theta_n-\theta)'-(\theta_n-\theta)\Delta(\theta_n-\theta)\,dxds\\
&\quad=-\int_0^t\int_\Omega a(\theta_n-\theta)^2\,dxds+\int_0^t\int_\Omega (\theta_n-\theta)\mathrm{div}(\overrightarrow{b}(\theta_n-\theta))\,dxds\\
&\qquad+\int_0^t\int_\Omega (\theta_n-\theta)\int_0^s g(s-\sigma)\Delta(\theta_n(\sigma)-\theta(\sigma))\,d\sigma dxds\\
&\quad\leqslant K\int_0^t |\theta_n(s)-\theta(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds+\frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t |\theta_n(s)-\theta(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds\\
&\qquad+\varepsilon\int_0^t \|\theta_n(s)-\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds\\
&\qquad+\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t \|\theta_n(s)-\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds,
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|\theta_n(t)-\theta(t)|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{2}|\psi_0^n-\psi_0|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t \|\theta_n(s)-\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds\\
&\quad\leqslant K\int_0^t |\theta_n(s)-\theta(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds+\frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t |\theta_n(s)-\theta(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds\\
&\qquad+\varepsilon\int_0^t \|\theta_n(s)-\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds\\
&\qquad+\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t \|\theta_n(s)-\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds,
\end{aligned}
$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\theta_n(t)-\theta(t)|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \frac{1}{2}|\psi_0^n-\psi_0|^2_{L^2(\Omega)} - \int_0^t \|\theta_n(s)-\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds \\
&+K\int_0^t |\theta_n(s)-\theta(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds + \frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t |\theta_n(s)-\theta(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \\
&+\varepsilon\int_0^t \|\theta_n(s)-\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds + \|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t \|\theta_n(s)-\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds \qquad (2.17)\\
&= \frac{1}{2}|\psi_0^n-\psi_0|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\varepsilon-1+\|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\int_0^t \|\theta_n(s)-\theta(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds \\
&\quad + \left(K+\frac{K^2}{4\varepsilon}\right)\int_0^t |\theta_n(s)-\theta(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds.
\end{aligned}$$

Vamos tomar $\varepsilon = 1-\|g\|_{L^1(0,\infty)}$, de modo que $\varepsilon - 1 + \|g\|_{L^1(0,\infty)} = 0$. Assim, a desigualdade (2.17) se torna

$$\frac{1}{2}|\theta_n(t)-\theta(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2}|\psi_0^n-\psi_0|^2_{L^2(\Omega)} + \left(K+\frac{K^2}{4\varepsilon}\right)\int_0^t |\theta_n(s)-\theta(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds. \qquad (2.18)$$

Se denotarmos

- $x(t) = \frac{1}{2}|\theta_n(t)-\theta(t)|^2_{L^2(\Omega)}$,
- $C = \frac{1}{2}|\psi_0^n-\psi_0|^2_{L^2(\Omega)}$,
- $\beta(t) = 2\left(K+\frac{K^2}{4\varepsilon}\right)$,

então a desigualdade (2.18) se escreve como

$$x(t) \leqslant C + \int_0^t \beta(s)x(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Logo, pela desigualdade de Grönwall (Teorema 1.2), segue que

$$x(t) \leqslant C\exp\left[\int_s^t \beta(u)\, du\right], \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (2.19)$$

Observando que β é constante, temos

$$x(t) \leqslant Ce^{M_1 T}, \quad \forall t \in [0,T],$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}|\theta_n(t)-\theta(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant |\psi_0^n-\psi_0|^2_{L^2(\Omega)}e^{M_1 T}, \quad \forall t \in [0,T],$$

onde M_1 é uma constante positiva.

Daí, $\theta_n \to \theta$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e concluimos que

$$\|\theta_n\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \to \|\theta\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))},$$

ou, equivalentemente,

$$\|\psi_n\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \to \|\psi\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}.$$

Logo,

$$J(\psi_0^n) \to J(\psi_0).$$

- **J é estritamente convexo**.

  Provaremos que

  $$J(\lambda\psi_0 + (1-\lambda)\psi_1) < \lambda J(\psi_0) + (1-\lambda)J(\psi_1),$$

  para $\psi_0 \neq \psi_1$ e $\lambda \in (0,1)$. De fato, inicialmente notemos que

  $$\varepsilon|\lambda\psi_0 + (1-\lambda)\psi_1|_{L^2(\Omega)} \leqslant \lambda\varepsilon|\psi_0|_{L^2(\Omega)} + (1-\lambda)\varepsilon|\psi_1|_{L^2(\Omega)},$$

  e

  $$-\int_\Omega u^T(\lambda\psi_0 + (1-\lambda)\psi_1)\,dx = \lambda\left(-\int_\Omega u^T\psi_0\,dx\right) + (1-\lambda)\left(-\int_\Omega u^T\psi_1\,dx\right).$$

  Por outro lado, $|||\psi_0||| = \left[\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \psi^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$ define uma norma em $L^2(\Omega)$. De fato, se $|||\psi_0||| = 0$, temos que $\psi \equiv 0$ q.t.p. em $\mathcal{O}\times(0,T)$. Logo, pela hipótese (A3) obtemos que $\psi \equiv 0$ em $\Omega\times(0,T)$. Então $\psi_0 = 0$ em Ω. Portanto,

  $$|||\lambda\psi_0 + (1-\lambda)\psi_1||| < \lambda|||\psi_0||| + (1-\lambda)|||\psi_1|||,$$

  pois $\psi_0 \neq \psi_1$. Isso finaliza a prova de que J é estritamente convexo.

- **J é coercivo**. Para provarmos este item, mostraremos que

  $$\lim_{|\psi_0|\to\infty} \frac{J(\psi_0)}{|\psi_0|_{L^2(\Omega)}} \geqslant \varepsilon.$$

  De fato, seja ψ_{0j} uma sequência em $L^2(\Omega)$ tal que $|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)} \to \infty$ e ψ_j a solução do problema (2.13) associada a ψ_{0j}. Consideremos

  $$\widehat{\psi}_{0j} = \frac{\psi_{0j}}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}} \quad \text{e} \quad \widehat{\psi}_j = \frac{\psi_j}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}.$$

Observemos que, $\widehat{\psi}_j$ é a solução normalizada do problema (2.13) associada a $\widehat{\psi}_{0j}$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\frac{J(\psi_{0j})}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}} &= \frac{1}{2|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\psi_j^2\,dxdt+\varepsilon-\frac{1}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}\int_\Omega u^T\psi_{0j}\,dx\\ &= \frac{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\widehat{\psi}_j^2\,dxdt+\varepsilon-\int_\Omega u^T\widehat{\psi}_{0j}\,dx.\end{aligned}$$

Agora, analisaremos dois casos:

Caso 1: $\liminf\displaystyle\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\widehat{\psi}_j^2\,dxdt>0.$

Neste caso, temos que

$$\liminf\frac{J(\psi_{0j})}{2|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}\geqslant\liminf\frac{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\widehat{\psi}_j^2\,dxdt+\varepsilon+\limsup\int_\Omega u^T\widehat{\psi}_{0j}\,dx.$$

Como $\liminf\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\widehat{\psi}_j^2\,dxdt>0$, obtemos

$$\liminf\frac{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\widehat{\psi}_j^2\,dxdt=+\infty.$$

Sendo

$$\left|\int_\Omega u^T\widehat{\psi}_{0j}\right|\leqslant|u^T|_{L^2(\Omega)}\cdot|\widehat{\psi}_{0j}|_{L^2(\Omega)}=|u^T|_{L^2(\Omega)},$$

segue que

$$\liminf\frac{J(\psi_{0j})}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}=+\infty.$$

Caso 2: $\liminf\displaystyle\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\widehat{\psi}_j^2\,dxdt=0.$

Como $\liminf\displaystyle\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\widehat{\psi}_j^2\,dxdt=0$, podemos extrair uma subsequência, ainda denotada por $\widehat{\psi}_j$, tal que

$$\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\widehat{\psi}_j^2\,dxdt\to0\text{ quando }j\to\infty.$$

Por outro lado, sendo $|\widehat{\psi}_{0j}|_{L^2(\Omega)}=1$, podemos extrair uma subsequência tal que

$$\widehat{\psi}_{0j}\rightharpoonup\widehat{\psi}_0\ \text{ em }\ L^2(\Omega).\tag{2.20}$$

Considerando $\widehat{\psi}_j$ solução fraca de

$$\begin{cases}-\widehat{\psi}_j'-\Delta\widehat{\psi}_j+a\widehat{\psi}_j-div(\overrightarrow{b}\,\widehat{\psi}_j)-\displaystyle\int_t^T g(\eta-t)\Delta\widehat{\psi}_j(\eta)\,d\eta=0 & \text{em} & Q,\\ \widehat{\psi}_j=0 & \text{sobre} & \Sigma,\\ \widehat{\psi}_j(x,T)=\widehat{\psi}_{0j}(x),\ \widehat{\psi}_{0j}\in L^2(\Omega) & \text{em} & \Omega,\end{cases}\tag{2.21}$$

obtemos, por meio de um cálculo análogo ao feito acima, o seguinte:

$$\frac{1}{2}|\widehat{\theta}_j(t)|^2_{L^2(\Omega)}+\big(-\varepsilon+1-\|g\|_{L^1(0,\infty)}\big)\int_0^t\|\widehat{\theta}_j(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,ds\leqslant C(T)|\widehat{\psi}_{0j}|^2_{L^2(\Omega)},\ \forall t\in[0,T],$$

onde $\varepsilon>0$ é tomado de modo que $-\varepsilon+1-\|g\|_{L^1(0,\infty)}>0$.

Daí,

$$\frac{1}{2}|\widehat{\psi}_j(T-t)|^2_{L^2(\Omega)}+(-\varepsilon+1-\|g\|_{L^1(0,\infty)})\int_0^t\|\widehat{\psi}_j(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,ds\leqslant C(T),\quad\forall t\in[0,T].$$

Assim, da desigualdade acima, segue que

$$\widehat{\psi}_j \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$\widehat{\psi}_j \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)),$$

donde deduzimos, a menos de subsequência, que

$$\widehat{\psi}_j \overset{*}{\rightharpoonup} \widehat{\psi} \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$\widehat{\psi}_j \rightharpoonup \widehat{\psi} \text{ em } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)).$$

Por meio das convergências acima podemos passar o limite em (2.13) com $\widehat{\psi}_j$ e provarmos que $\widehat{\psi}$ é solução fraca de (2.13) com dado inicial $\widehat{\psi}_0$. Para maiores detalhes, ver Apêndice A.

Como $\widehat{\psi}_j \rightharpoonup \widehat{\psi}$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, temos que $\widehat{\psi}_j \rightharpoonup \widehat{\psi}$ in $L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$. Portanto, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, obtemos

$$|\widehat{\psi}|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}\leqslant\liminf_{j\to\infty}|\widehat{\psi}_j|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}=0.$$

Logo, $\widehat{\psi}=0$ q.t.p. em $\mathcal{O}\times(0,T)$. Pela hipótese (A3), temos que $\widehat{\psi}=0$ em Q, isto é, $\widehat{\psi}_0=0$ em Ω. Agora, de (2.20), vale necessariamente que

$$\widehat{\psi}_{0j}\rightharpoonup 0 \text{ em } L^2(\Omega),$$

e assim, temos que

$$\int_\Omega u^T\widehat{\psi}_{0j}\,dx\to 0.$$

Sendo

$$\liminf_{j\to\infty}\frac{J(\psi_{0j})}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}\geqslant\varepsilon+\limsup_{j\to\infty}\int_\Omega u^T\widehat{\psi}_{0j},$$

temos a desigualdade desejada:

$$\liminf_{j\to\infty}\frac{J(\psi_{0j})}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}\geqslant\varepsilon.$$

□

Tendo em vista as propriedades do funcional J acima, deduzimos que J atinge seu mínimo em um único $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, ou seja,

$$\left| \begin{array}{l} J(\varphi_0) = \min\limits_{\psi_0 \in L^2(\Omega)} J(\psi_0) \\ \\ J(\varphi_0) < J(\psi_0), \;\; \forall\, \psi_0 \in L^2(\Omega), \;\; \varphi_0 \neq \psi_0. \end{array} \right. \tag{2.22}$$

Consideremos o problema com dado inicial φ_0 dado por:

$$\begin{array}{lll} -\varphi' - \Delta\varphi + a\varphi - div(\overrightarrow{b}\varphi) - \displaystyle\int_t^T g(\eta - t)\Delta\varphi(\eta)\, d\eta = 0 & \text{em} & Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\ \varphi(x,T) = \varphi_0(x) & \text{em} & \Omega. \end{array} \tag{2.23}$$

Sendo $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, o problema (2.23) admite uma única solução $\varphi \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Logo, considerando o controle

$$v = \varphi \quad \text{in} \quad \mathcal{O} \times (0,T),$$

onde φ é a solução de (2.23) com dado $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ sendo o mínimo de J em (2.22), segue que a solução u para o problema

$$\begin{array}{lll} u' - \Delta u - \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma + au + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u = \varphi\chi_{\mathcal{O}} & \text{em} & Q, \\ u = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\ u(x,0) = 0 & \text{em} & \Omega, \end{array} \tag{2.24}$$

satisfaz

$$|u(T) - u^T|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

De fato, consideremos ξ a solução fraca do problema adjunto

$$\begin{array}{lll} -\xi' - \Delta\xi + a\xi - div(\overrightarrow{b}\xi) - \displaystyle\int_t^T g(\eta - t)\Delta\xi(\eta)d\eta = 0 & \text{em} & Q, \\ \xi = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\ \xi(x,T) = \xi_0(x) & \text{em} & \Omega, \end{array} \tag{2.25}$$

onde $\xi_0 \in L^2(\Omega)$.

Multiplicando a primeira equação em (2.24) por ξ, e integrando em Q, nos conduz a expressão

$$(u(T), \xi(T)) - (u(0), \xi(0)) + \int_0^T \left\langle u, -\frac{\partial \xi}{\partial t} - \Delta\xi + a\xi - div(\overrightarrow{b}\,\xi) \right\rangle dt -$$
$$\int_0^T \left(\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma, \xi \right) dt = \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi\xi\, dxdt,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a paridade de dualidade entre $H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$, e $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$. Logo, de (2.25), deduzimos que

$$\begin{aligned} &(u(T), \xi(T)) - (u(0), \xi(0)) + \int_0^T \left\langle u, \int_t^T g(\eta - t)\Delta\xi(\eta)\, d\eta \right\rangle dt - \\ &\int_0^T \left(\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma, \xi \right) dt = \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi\xi\, dxdt. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Como u, $\xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, do Lema 2.1, segue que

$$\int_0^T \left(\int_0^t g(t-\sigma)\nabla u(\sigma)\, d\sigma, \nabla\xi(t) \right) dt = \int_0^T \left(\int_t^T g(\eta - t)\nabla\xi(\eta) d\eta, \nabla u(t) \right) dt.$$

Portanto, pelo Teorema de Green, obtemos que

$$\int_0^T \left(\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma, \xi(t) \right) dt - \int_0^T \left\langle \int_t^T g(\eta - t)\Delta\xi(\eta) d\eta, u(t) \right\rangle dt = 0.$$

Assim, de (2.26), temos que

$$(u(T), \xi_0) = \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi\xi\, dxdt, \tag{2.27}$$

para todo ξ solução de (2.25) com dado $\xi_0 \in L^2(\Omega)$.

Lembremos que a solução φ_0 do problema de minimização (2.22) é caracterizada pela equação de Euler

$$J'(\varphi_0)\xi_0 = 0, \ \forall\, \xi_0 \in L^2(\Omega). \tag{2.28}$$

O nosso propósito, nesse momento, é calcularmos a derivada de Gateaux de $J(\varphi_0)$.

Para um elemento arbitrário $\xi_0 \in L^2(\Omega)$ e pela definição de derivada de Gateaux de $J(\varphi)$, temos que

$$\langle J'(\varphi_0), \xi_0 \rangle := \frac{d}{d\lambda} J(\varphi_0 + \lambda\xi_0) \mid_{\lambda=0} .$$

De (2.15), encontramos que

$$\begin{aligned} J(\varphi_0 + \lambda\xi) = \frac{1}{2} (\varphi + \lambda\xi, \varphi + \lambda\xi)_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + \varepsilon\, (\varphi_0 + \lambda\xi_0, \varphi_0 + \lambda\xi_0)^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \\ - \left(u^T, \varphi_0 + \lambda\xi_0\right)_{L^2(\Omega)} . \end{aligned} \tag{2.29}$$

Notemos que a derivada com respeito a λ, calculada em $\lambda = 0$ em (2.29), é dada por

$$\frac{d}{d\lambda}J(\varphi_0 + \lambda\xi_0) \mid_{\lambda=0} = (\varphi, \xi)_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} - (u^T, \xi_0)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\frac{(\varphi_0, \xi_0)_{L^2(\Omega)}}{|\varphi_0|_{L^2(\Omega)}}. \tag{2.30}$$

De (2.28) e (2.30), temos que

$$(\varphi, \xi)_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} - (u^T, \xi_0)_{L^2(\Omega)} = -\varepsilon\frac{(\varphi_0, \xi_0)_{L^2(\Omega)}}{|\varphi_0|_{L^2(\Omega)}}, \ \ \forall \ \xi_0 \in L^2(\Omega). \tag{2.31}$$

Combinando (2.27) e (2.31), deduzimos que

$$\left(u(T) - u^T, \xi_0\right)_{L^2(\Omega)} = -\varepsilon\frac{(\varphi_0, \xi_0)_{L^2(\Omega)}}{|\varphi_0|_{L^2(\Omega)}}, \ \ \forall \ \xi_0 \in L^2(\Omega).$$

Em particular, para $\xi_0 = u(T) - u^T \in L^2(\Omega)$, vale que

$$\left|u(T) - u^T\right|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon \left|u(T) - u^T\right|_{L^2(\Omega)},$$

onde

$$\left|u(T,v) - u^T\right|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon, \ \ \forall \ \varepsilon > 0$$

e assim a prova do Teorema 2.2 está completa.

2.4 Prova do Teorema 2.1

O principal objetivo desta seção é provarmos a controlabilidade aproximada para o sistema semilinear (2.1). Antes, vamos revisar alguns resultados das seções anteriores.

Observação 2.2. *Usando as propriedades da função* f *na Seção 2.2, podemos transformar o sistema* (2.1) *no sistema* (2.8)*. Para um dado* $y \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$ *fixado, consideramos o sistema linearizado* (2.9)*, onde os potenciais* $a(x, t) = F(y(x, t))$ *e* $\overrightarrow{b}(x, t) = G(y(x, t))$ *satisfazem* (2.10)*. Na Seção 2.3 estabelecemos a existência de uma função controle* v *que pertence a* $L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ *e tal que a solução correspondente* $u(x, t, y; v)$ *para* (2.9) *satisfaz*

$$|u(T; v) - u^T|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon,$$

para dados u_0, $u^T \in L^2(\Omega)$, $T > 0$*,* $\varepsilon > 0$*, e* $y \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$ *fixado.*

Agora seja $\mathcal{T}$ *a aplicação não linear definida em* (2.12)*, com u solução do sistema* (2.9)*. Conforme visto anteriormente, a prova do Teorema 2.1 seguirá mostrando que* $\mathcal{T}$ *tem um ponto fixo.*

O seguinte resultado nos fornece uma propriedade de coercividade que será essencial para o nosso propósito. Mais precisamente, vale que:

Proposição 2.1. *Sejam* X *um subconjunto relativamente compacto de* $L^2(\Omega)$ *e* R *uma constante estritamente positiva. Então, a propriedade de coercividade*

$$\lim_{|\psi_0|_{L^2(\Omega)}\to\infty} \frac{J(\psi_0)}{|\psi_0|_{L^2(\Omega)}} \geqslant \varepsilon$$

vale uniformemente sobre $u^T \in X$ *com os potenciais* $\{a, \overrightarrow{b}\} \in (L^\infty(Q))^{n+1}$ *satisfazendo*

$$\|a\|_{L^\infty(Q)} \leqslant R, \quad \|\overrightarrow{b}\|_{(L^\infty(Q))^n} \leqslant R.$$

Consequentemente, os minimizantes φ_0 do funcional J em (4.4) são uniformemente limitados quando $u^T \in X$ e os potenciais a, $\overrightarrow{b}$ também os são. Logo, o controle $v = \varphi$, onde φ é solução do problema adjunto associado a φ_0 é uniformemente limitado, ou seja, existe uma constante positiva $C(R)$ tal que $\|v\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leqslant C(R)$.

Prova da Proposição 2.1. Suponhamos, por contradição, que a propriedade de coercividade não vale uniformemente. Assim, existem sequências $u_j^T \in X$, $\psi_{0j} \in L^2(\Omega)$ tal que $|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)} \to \infty$ e a_j, b_j com

$$\|a_j\|_{L^\infty(Q)} \leqslant R, \quad \|\overrightarrow{b_j}\|_{(L^\infty(Q))^n} \leqslant R,$$

tais que

$$\frac{J_j(\psi_{0j})}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}} \leqslant \varepsilon - \delta, \tag{2.32}$$

para algum $\delta < \varepsilon$, onde J_j denota o funcional correspondente a u_j^T e aos potenciais a_j, b_j.

Pondo

$$\widehat{\psi}_{0j} = \frac{\psi_{0j}}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}} \quad \text{e} \quad \widehat{\psi}_j = \frac{\psi_j}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}},$$

onde ψ_j é tal que

$$\begin{cases} -\psi_j' - \Delta\psi_j + a_j\widehat{\psi}_j - div(\overrightarrow{b_j}\psi_j) - \displaystyle\int_t^T g(\eta - t)\Delta\psi_j(\eta)\, d\eta = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \psi_j = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \psi(x,T) = \psi_{0j}(x), \ \psi_{0j} \in L^2(\Omega) & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.33}$$

então podemos notar que $\widehat{\psi}_j$ satisfaz

$$\begin{cases} -\widehat{\psi}_j' - \Delta\widehat{\psi}_j + a_j\widehat{\psi}_j - div(\overrightarrow{b_j}\widehat{\psi}_j) - \displaystyle\int_t^T g(\eta - t)\Delta\widehat{\psi}_j(\eta)\, d\eta = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \widehat{\psi}_j = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \widehat{\psi}(x,T) = \widehat{\psi}_{0j}(x), \ \widehat{\psi}_{0j} \in L^2(\Omega) & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.34}$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
\frac{J_j(\psi_{0j})}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}} &= \frac{1}{2|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \psi_j^2\,dxdt + \varepsilon - \frac{1}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}\int_\Omega u_j^T\psi_{0j}\,dx \\
&= \frac{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \widehat{\psi}_j^2\,dxdt + \varepsilon - \int_\Omega u_j^T\widehat{\psi}_{0j}\,dx.
\end{aligned}$$

Como $|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)} \to \infty$, então por (2.32), segue que

$$\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \widehat{\psi}_j^2\,dxdt \to 0, \text{ quando } j \to \infty. \tag{2.35}$$

Extraindo subsequências, temos

$$\widehat{\psi}_{0j} \rightharpoonup \widehat{\psi}_0 \text{ em } L^2(\Omega), \tag{2.36}$$

$$\widehat{\psi}_j \rightharpoonup \widehat{\psi} \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

$$u_j^T \to u^T \text{ em } L^2(\Omega),$$

$$a_j \overset{*}{\rightharpoonup} a \text{ em } L^\infty(Q), \tag{2.37}$$

$$b_j \overset{*}{\rightharpoonup} b \text{ em } L^\infty(Q)^n. \tag{2.38}$$

Por (2.35), vale que

$$\widehat{\psi} = 0 \text{ em } \mathcal{O}\times(0,T). \tag{2.39}$$

Agora, mostraremos que $\widehat{\psi}$ satisfaz

$$\begin{cases}
-\widehat{\psi}' - \Delta\widehat{\psi} + a\widehat{\psi} - div(\overrightarrow{b}\,\widehat{\psi}) - \displaystyle\int_t^T g(\eta - t)\Delta\widehat{\psi}(\eta)\,d\eta = 0 & \text{em} \quad Q, \\
\widehat{\psi} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\
\widehat{\psi}(x,T) = \widehat{\psi}_0(x), \; \psi_0 \in L^2(\Omega) & \text{em} \quad \Omega.
\end{cases} \tag{2.40}$$

De fato, multiplicando a primeira equação em (2.34) por $\widehat{\psi}_j$, integrando em $\Omega\times(0,t)$, usando as desigualdades de Young, Young para convoluções e Hölder, e posteriormente a desigualdade de Grönwall (Teorema 1.2), concluimos que

$$\widehat{\psi}_j' \text{ é limitado em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Assim, pelo Teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.1), segue que

$$\widehat{\psi}_j' \text{ é relativamente compacto em } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

o que implica,

$$\widehat{\psi}_j \to \widehat{\psi} \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.41}$$

Por (2.37), (2.38) e (2.41), podemos concluir que

$$a_j\widehat{\psi}_j \rightharpoonup a\widehat{\psi} \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

e

$$b_j\widehat{\psi}_j \rightharpoonup b\widehat{\psi} \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega))^n.$$

Das convergências acima, segue que o limite $\widehat{\psi}$ satisfaz (2.40).

Assim, como $\widehat{\psi}$ satisfaz (2.39) e (2.40), então a hipótese (A3) nos diz que

$$\widehat{\psi} = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T),$$

e em particular, $\widehat{\psi}_0 = 0$ em $L^2(\Omega)$. Retornando a (2.36), vemos que

$$\widehat{\psi}_{0j} \rightharpoonup 0 \text{ em } L^2(\Omega),$$

o que implica

$$\int_\Omega u_j^T \widehat{\psi}_{0j}\, dx \to 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{J_j(\psi_{0j})}{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}} &= \frac{|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)}}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \widehat{\psi}_j^2\, dxdt + \varepsilon - \int_\Omega u_j^T\widehat{\psi}_{0j}\, dx.\\ &\geqslant \varepsilon - \int_\Omega u_j^T\widehat{\psi}_{0j} \to \varepsilon,\end{aligned}$$

mas isso contradiz (2.32). Logo, a prova da Proposição 2.1 está concluída.

Agora a próxima etapa é provar o principal resultado deste capítulo.

Prova do Teorema 2.1. Consideremos a aplicação $\mathcal{T}$ definida em (2.12). Mostraremos que $\mathcal{T}$ admite um ponto fixo via Teorema do Ponto Fixo de Schaefer (Teorema 1.6). Para isto é suficiente mostrarmos que

- $\mathcal{T}$ é contínuo;
- $\mathcal{T}$ é compacto;
- $\mathcal{T}$ tem imagem limitada, isto é, existe $\beta > 0$ tal que

$$\|\mathcal{T}(y)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant \beta, \quad \forall\, y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

No que segue, mostraremos os três itens acima.

• Continuidade de $\mathcal{T}$

Inicialmente, consideremos uma sequência $y_j \to y$ em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Então mostraremos que os potenciais $F(y_j)$, $G(y_j)$ satisfazem as seguintes condições:

(a) $F(y_j) \to F(y)$ em $L^p(Q)$ para todo $1 \leqslant p < \infty$;

(b) $G(y_j) \to G(y)$ em $(L^p(Q))^n$ para todo $1 \leqslant p < \infty$;

(c) $\|F(y_j)\|_{L^\infty(Q)} \leqslant K$, $\|G(y_j)\|_{(L^\infty(Q))^n} \leqslant K$.

Para provarmos o item (a), observamos que

$$F(y_j) \to F(y) \text{ q.t.p. em } Q \text{ e } \int_Q (|F(y_j)|^p + |F(y)|^p), dxdt \leqslant 2K^p \; med(Q).$$

Então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$F(y_j) \to F(y) \text{ em } L^p(Q),$$

para todo $1 \leqslant p < \infty$. Isto encerra a prova do item (a). A prova do item (b) é análoga. O item (c) segue pela hipótese sobre f.

Agora, do caso linearizado, da Proposição 2.1 e pelo item (c), temos que os controles são uniformemente limitados. Mais precisamente, os controles $v_j = \psi_j \chi_{\mathcal{O}}$, onde ψ_j são soluções do sistema

$$\begin{aligned}
&-\psi_j' - \Delta\psi_j + F(y_j)\psi_j - div(G(y_j)\psi_j) - \int_t^T g(\eta - t)\Delta\psi_j(\eta)d\eta = 0 && \text{em} \quad Q,\\
&\psi_j = 0 && \text{sobre} \quad \Sigma,\\
&\psi_j(x,T) = \psi_{0j}(x), \; \psi_{0j} \in L^2(\Omega) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

onde ψ_{0j} é o minimizante do funcional correspondente J_j dado por (2.22), satisfazem

$$\|v_j\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leqslant C \;\; \forall\, j \geqslant 1,$$

de acordo com a Proposição 2.1.

Também obtemos, da Proposição 2.1, que

$$|\psi_{0j}|_{L^2(\Omega)} \leqslant C, \;\; \forall\, j \geqslant 1.$$

Assim, existe uma subsequência de (ψ_{0j}) tal que

$$\psi_{0j} \rightharpoonup \psi_0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{2.43}$$

Multiplicando a primeira equação em (2.42) por ψ_j, integrando em $\Omega \times (0, t)$, usando as desigualdades de Young, Young para convoluções e Hölder, e após isso a desigualdade de Grönwall (Teorema 1.2), deduzimos que

$$(\psi_j') \text{ é limitado em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \tag{2.44}$$

e

$$\psi_j \rightharpoonup \psi \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.45}$$

onde ψ é a solução do sistema

$$\begin{cases} -\psi' - \Delta\psi + F(y)\psi - div(G(y)\psi) - \int_t^T g(\eta - t)\Delta\psi(\eta)d\eta = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \psi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \psi(x, T) = \psi_0(x), \; \psi_0 \in L^2(\Omega) & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.46}$$

De (2.44), (2.45) e pelo Teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.1), obtemos que

$$\psi_j \to \psi \text{ em } L^2(Q). \tag{2.47}$$

Sendo $v_j = \psi_j \chi_{\mathcal{O}}$, segue que

$$v_j \to v \text{ em } L^2(\mathcal{O} \times (0, T)), \tag{2.48}$$

onde $v = \psi\chi_{\mathcal{O}}$, ψ solução do problema (2.46).

Seja $u_j = \mathcal{T}(y_j)$ a solução do sistema

$$\begin{cases} u_j' - \Delta u_j - \int_0^t g(t - \sigma)\Delta u_j(\sigma)d\sigma + F(y_j)u_j + G(y_j) \cdot \nabla u_j + f(0, 0) = v_j\chi_{\mathcal{O}} & \text{em} \quad Q, \\ u_j = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ u_j(x, 0) = u_0(x), & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.49}$$

com $|u_j(T) - u^T| \leqslant \varepsilon$.

Então, por (2.48) e pelos itens (a) e (b), vale que

$$u_j \to u \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega), \tag{2.50}$$

onde u resolve o sistema (2.9), com $|u(T) - u^T| \leqslant \varepsilon$.

De fato, para vermos que vale (2.50), consideremos $w_j = u_j - u$, solução do sistema

$$\begin{aligned}&w_j' - \Delta w_j - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta w_j(\sigma)d\sigma + F(y_j)w_j + G(y_j)\nabla w_j + \big(F(y_j) - F(y)\big)u\\&+\big(G(y_j) - G(y)\big)\nabla u = \big(v_j - v\big)\chi_{\mathcal{O}} \text{ em } Q,\\&w_j = 0 \text{ sobre } \Sigma,\\&w_j(0) = 0 \text{ em } \Omega,\end{aligned} \tag{2.51}$$

a qual satisfaz

$$w_j \to 0 \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.52}$$

Para mostrar a afirmação (2.52), multiplicamos a primeira equação em (2.51) por w_j, em seguida integramos em $\Omega\times(0,t)$, após isso usando as desigualdades de Young, Young para convoluções e Hölder, e por último a desigualdade de Grönwall (Teorema 1.2), obtemos que

$$\begin{aligned}&|w_j|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \big(-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\big)\,|w_j|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\\&\leqslant K\|F(y_j) - F(y)\|^2_{L^p(Q)} + K\|G(y_j) - G(y)\|^2_{(L^p(Q))^n} + |v_j - v|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))},\end{aligned} \tag{2.53}$$

onde $\varepsilon > 0$ é escolhido de modo que $-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)} > 0$. Assim, da hipótese (2.3), itens (a), (b) e (2.48) segue (2.52). Portanto, (2.50) vale.

Para concluirmos a prova da continuidade de $\mathcal{T}$, é suficiente mostrarmos que $\mathcal{T}(y) = u$. Para este propósito é suficiente provar que ψ_0 (condição inicial em (2.46)), a qual é limite fraco de ψ_{0j} (condição inicial em (2.42)), minimiza o funcional J em (2.22) associada ao problema de controle limite (2.9). Para isso, mostraremos que

$$J(\psi_0) \leqslant J(\xi_0), \ \ \forall \ \xi_0 \in L^2(\Omega). \tag{2.54}$$

De fato, consideremos o funcional

$$J_j(\xi_0) = \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi_j^2 dx\, dt + \varepsilon|\xi_0|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega u^T \xi_0 dx\, dt, \tag{2.55}$$

onde ξ_j é a solução para o problema

$$\begin{aligned}&-\xi_j' - \Delta\xi_j + F(y_j)\xi_j - div(G(y_j)\xi_j) - \int_t^T g(\eta - t)\Delta\xi_j(\eta)d\eta = 0 && \text{em} \quad Q,\\&\xi_j = 0 && \text{sobre} \quad \Sigma,\\&\xi_j(x,T) = \xi_0(x), \quad \xi_0 \in L^2(\Omega) && \text{em} \quad \Omega.\end{aligned}$$

Similarmente a (2.47), obtemos que

$$\xi_j \to \xi \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.56}$$

onde ξ resolve o sistema

$$\begin{aligned}
&-\xi' - \Delta\xi + F(y)\xi - div(G(y)\xi) - \int_t^T g(\eta - t)\Delta\xi(\eta)d\eta = 0 && \text{em} \quad Q,\\
&\xi = 0 && \text{sobre} \quad \Sigma,\\
&\xi(x,T) = \xi_0(x), \quad \xi_0 \in L^2(\Omega) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned}$$

Logo, usar a convergência (2.56) em (2.55), implica que

$$J(\xi_0) = \liminf_{j\to\infty} J_j(\xi_0). \tag{2.57}$$

De (2.43) e (2.45), deduzimos que

$$J(\psi_0) \leqslant \liminf_{j\to\infty} J_j(\psi_{0j}). \tag{2.58}$$

Por outro lado, como ψ_{0j} é o minimizante de J_j, resulta que

$$\liminf_{j\to\infty} J_j(\psi_{0j}) \leqslant \liminf_{j\to\infty} J_j(\xi_0), \quad \forall\ \xi_0 \in L^2(\Omega). \tag{2.59}$$

Combinando (2.57), (2.58), e (2.59), segue (2.54). Isso encerra a prova da continuidade de $\mathcal{T}$.

• **Compacidade de $\mathcal{T}$**

Seja $y \in B$, onde B é limitado em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Então da hipótese **(A1)** segue que $\|F(y)\|_{L^\infty(Q)} \leqslant L$ e $\|G(y)\|_{L^\infty(Q)^n} \leqslant L$. Da Proposição 2.1, os controles do problema linearizado são tais que

$$|v|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leqslant C.$$

Logo, a solução $u = \mathcal{T}(y)$ de (2.9) satisfaz

$$\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant C. \tag{2.60}$$

Consideremos $m = v\chi_{\mathcal{O}} - F(y)u - G(y)\cdot\nabla u - f(0,0)$. Então de (2.60), temos que m é uniformemente limitado em $L^2(Q)$.

Portanto, a solução u do sistema (2.9) pode ser decomposta como $u = p + q$, com p e q satisfazendo

$$\begin{aligned}
&p' - \Delta p - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta p(\sigma)\,d\sigma = 0 && \text{em} \quad Q,\\
&p = 0 && \text{sobre} \quad \Sigma,\\
&p(x,0) = u_0(x) && \text{em} \quad \Omega,
\end{aligned} \tag{2.61}$$

e

$$
\begin{aligned}
& q' - \Delta q - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta q(\sigma)\, d\sigma = m && \text{em} && Q, \\
& q = 0 && \text{sobre} && \Sigma, \\
& q(x,0) = 0 && \text{em} && \Omega.
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

O problema (2.61) admite uma única solução $p \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Por outro lado, sabemos que (2.62) possui uma única solução q, que satisfaz

$$
\begin{aligned}
& q \ \text{ é limitada em } \ L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\
& q' \ \text{ é limitada em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Consequentemente, pelo Teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.1), temos que q varia em um conjunto relativamente compacto de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Daí, segue que

$$
\mathcal{T}(y) = u = p + q \text{ é relativamente compacto em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).
$$

Isto mostra que $\mathcal{T}$ é compacto.

• **Limitação da imagem de $\mathcal{T}$**

Sendo $\|F(y)\|_{L^\infty(Q)} \leqslant K$ e $\|G(y)\|_{L^\infty(Q)^n} \leqslant K$, segue da Proposição 2.1 que existe uma constante $C > 0$ tal que o controle $v = v(y)$ do sistema (2.9) satisfaz

$$
\|v(y)\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leqslant C, \quad \forall\, y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).
$$

Com isso, conseguimos provar que

$$
\|u(y)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant C.
$$

Com efeito, sem perda de generalidade, supondo $f(0,0) = 0$ em $(2.9)_1$ e multiplicando cada parcela da equação

$$
u' - \Delta u - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma + F(y)u + G(y)\cdot\nabla u = v\chi_{\mathcal{O}}
$$

por u e integrando em $\Omega \times (0,t)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\bullet \quad \int_0^t \int_\Omega u u' \, dx\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \frac{d}{dt}|u|^2\, dx\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u(t)|^2 - |u(0)|^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}|u(0)|^2_{L^2(\Omega)};
\end{aligned}
$$

$$\bullet \; -\int_0^t\int_\Omega u\Delta u \, dx \, dt = \int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, dt = \int_0^t \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, dt;$$

$$\bullet \; -\int_0^t\int_\Omega F(y)u^2 \, dx \, dt \leqslant \|F(y)\|_{L^\infty(Q)}\int_0^t |u(t)|^2_{L^2(\Omega)} \, dx \, dt \leqslant K\int_0^t |u(t)|^2_{L^2(\Omega)} \, dx \, dt;$$

$$\begin{aligned}\bullet \; -\int_0^t\int_\Omega uG(y)\cdot\nabla u \, dx \, dt &\leqslant \int_0^t\int_\Omega |u||G(y)\cdot\nabla u| \, dx \, dt\\ &\leqslant \int_0^t\int_\Omega |u||G(y)||\nabla u| \, dx \, dt\\ &\leqslant \|G(y)\|_{(L^\infty(Q))^n}\int_0^t\int_\Omega |u||\nabla u| \, dx \, dt\\ &\leqslant K\int_0^t\left(\int_\Omega |u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \, dx \, dt\\ &= K\int_0^t |u(t)|_{L^2(\Omega)}\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \, dt\\ &\leqslant \frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t |u(t)|^2_{L^2(\Omega)} \, dt + \varepsilon\int_0^t \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, dt,\end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi usada a desigualdade de Young com ε (Teorema 1.3), com $\varepsilon > 0$ a ser determinado posteriormente.

$$\begin{aligned}\bullet \; \int_0^t\int_\Omega uv\chi_{\mathcal{O}} \, dx \, dt &= \int_0^t (u(t),v(t))_{L^2(\mathcal{O})} \, dt\\ &\leqslant \int_0^t |u(t)|_{L^2(\mathcal{O})}|v(t)|_{L^2(\mathcal{O})} \, dt\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t |u(t)|^2_{L^2(\mathcal{O})} \, dt + \frac{1}{2}\int_0^t |v(t)|^2_{L^2(\mathcal{O})} \, dt\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t |u(t)|^2_{L^2(\mathcal{O})} \, dt + \frac{1}{2}|v|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,t))}.\end{aligned}$$

Na próxima desigualdade, vamos usar a desigualdade de Young na forma do Teorema 1.5.

- $$\int_0^t\int_\Omega u\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,d\sigma\,dx\,dt = \int_0^t\int_\Omega\int_0^t ug(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,d\sigma\,dx\,dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t\int_0^t\int_\Omega ug(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,dx\,d\sigma\,dt\\
&= \int_0^t\int_0^t g(t-\sigma)\int_\Omega u\Delta u(\sigma)\,dx\,d\sigma\,dt\\
&= -\int_0^t\int_0^t g(t-\sigma)\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla u(x,\sigma)\,dx\,d\sigma\,dt\\
&= -\int_0^t\int_0^t\int_\Omega g(t-\sigma)\nabla u(x,t)\cdot\nabla u(x,\sigma)\,dx\,d\sigma\,dt\\
&\leqslant \int_0^t\int_0^t\int_\Omega |g(t-\sigma)||\nabla u(x,t)\cdot\nabla u(x,\sigma)|\,dx\,d\sigma\,dt\\
&\leqslant \int_0^t\int_0^t\int_\Omega |g(t-\sigma)||\nabla u(x,t)||\nabla u(x,\sigma)|\,dx\,d\sigma\,dt\\
&= \int_\Omega\int_0^t\int_0^t |g(t-\sigma)||\nabla u(x,t)||\nabla u(x,\sigma)|\,d\sigma\,dt\,dx\\
&\leqslant \int_\Omega\left(\int_0^t|\nabla u(x,t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t|g|\,dt\right)\left(\int_0^t|\nabla u(x,\sigma)|^2\,d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\,dx\\
&= \int_\Omega\left(\int_0^t|\nabla u(x,t)|^2\,dt\right)\left(\int_0^t|g|\,dt\right)\,dx\\
&= \|g\|_{L^1(0,t)}\int_\Omega\left(\int_0^t|\nabla u(x,t)|^2\,dt\right)\,dx\\
&= \|g\|_{L^1(0,t)}\int_0^t\left(\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\,dx\right)\,dt\\
&= \|g\|_{L^1(0,t)}\int_0^t\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,dt;
\end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_\Omega(uu'-u\Delta u)\,dx\,dt &= \int_0^t\int_\Omega uv\chi_{\mathcal{O}}\,dx\,dt + \int_0^t\int_\Omega u\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,d\sigma\,dx\,dt\\
&\quad -\int_0^t\int_\Omega F(y)u^2\,dx\,dt - \int_0^t\int_\Omega uG(y)\cdot\nabla u\,dx\,dt\\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t|u(t)|^2_{L^2(\mathcal{O})}\,dt + \frac{1}{2}|v|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,t))} + \|g\|_{L^1(0,t)}\int_0^t\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,dt\\
&\quad +K\int_0^t|u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t|u(t)|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \varepsilon\int_0^t\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,dt\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}|u(0)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t |u(t)|^2_{L^2(\mathcal{O})}\, dt$$
$$+ \frac{1}{2}|v|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,t))} + \|g\|_{L^1(0,t)}\int_0^t \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, dt$$
$$+K\int_0^t |u(t)|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t |u(t)|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \varepsilon\int_0^t \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, dt\, dx\, dt,$$

e assim, concluimos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \frac{1}{2}|v|^2_{L^2(Q)} - \left(-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,t)}\right)\int_0^t \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, dt + \frac{1}{2}|u(0)|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+ \int_0^t 2\left(\frac{1}{2} + K + \frac{K^2}{4\varepsilon}\right)\frac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)}\, dt.\end{aligned}$$

Vamos tomar $\varepsilon > 0$ de modo que $-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,t)} > 0$, ou seja, $0 < \varepsilon < 1 - \|g\|_{L^1(0,t)}$.

Denotando,

- $x(t) = \frac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)}$
- $\psi(t) = \frac{1}{2}|v|^2_{L^2(Q)} - \left(-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,t)}\right)\int_0^t \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, dt + \frac{1}{2}|u(0)|^2_{L^2(\Omega)}$
- $\varphi(t) = 2\left(\frac{1}{2} + K + \frac{K^2}{4\varepsilon}\right)$

temos que

$$x(t) \leqslant \psi(t) + \int_0^t \varphi(s)x(s)\, ds.$$

Pela desigualdade de Grönwall (Teorema 1.2), segue que

$$x(t) \leqslant \psi(t) + \int_0^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left[\int_s^t \varphi(u)\, du\right] ds. \tag{2.63}$$

Observando que $\varphi(s)$ é constante e que valem as desigualdades

$$\psi(s) \leqslant \frac{1}{2}|v|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}|u(0)|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1$$

e

$$\exp\left[\int_s^t \varphi(u)\, du\right] \leqslant C_2$$

então pela desigualdade (2.63), resulta que

$$x(t) \leqslant \psi(t) + C_3$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \left(-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,t)}\right)\int_0^t \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, dt \leqslant C_1 + C_3.$$

Portanto, $\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$ é limitado e assim $\mathcal{T}$ tem imagem limitada. Logo, a prova do Teorema 2.1 está concluída.

2.5 Comentários e problemas em aberto

Vimos neste capítulo que é possível analisar problemas de controlabilidade aproximada para uma equação semilinear do calor com não-linearidade globalmente Lipschitz e com um termo de memória. As mesmas ideias e técnicas podem ser aplicadas em muitas outras situações semelhantes, como por exemplo: controlabilidade aproximada hierárquica para equações lineares e semilineares do calor e de ondas, domínios de controle não cilíndricos, problemas de controle de contorno semelhantes, etc. No contexto da controlabilidade nula, em geral, não é possivel obter resultados para o sistema (2.1). De fato, a principal dificuldade encontrada ao estudarmos a controlabilidade para uma EDP com memória se deve ao caráter não local da mesma, devido ao termo de memória, que faz com que os métodos clássicos da Teoria do Controle não possam ser aplicados diretamente. Com efeito, é sabido na literatura que as equações parabólicas com memória não são controláveis quando o controle está aplicado em uma região fixa do domínio (ver Guerrero & Imanuvilov [25]). Por outro lado, no trabalho de Chaves-Silva et al. [10], os autores mostram que é possível controlar um sistema governado por uma EDP parabólica com memória por meio de controles móveis numa dada região. No trabalho de Fernández-Cara et al. [19], os autores apresentam resultados de não controlabilidade nula para uma equação de Stokes. Por outro lado, no trabalho de Tao & Gao [54], a controlabilidade nula para uma equação do calor com memória é estabelecida. Nesse contexto, seria interessante como um trabalho futuro, analisar como seria possível obter ou não, sob certas condições restritivas, resultados de controlabildade nula para o problema (2.1), por exemplo, inicialmente no caso de núcleos de memória do tipo polinomial ou exponencial.

Capítulo 3

Problema de controlabilidade multiobjetivo de uma equação da onda em um domínio não-cilíndrico

3.1 Introdução

O objetivo desse capítulo é obter um resultado de controlabilidade hierárquica aproximada para uma equação de ondas em um domínio com fronteira móvel. A ideia é estabelecermos uma mudança de variáveis em um sistema de ondas em um domínio com fronteira móvel para um domínio com fonteira fixada para após isso usar uma desigualdade inversa como em Wang et al. [55].

3.1.1 Apresentação do problema e resultados principais

Seja $Q_{T,\alpha}$ um domínio não-cilíndrico associado a uma função $\alpha(t) > 0$ e a uma constante $T > 0$, dado por

$$Q_{T,\alpha} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < \alpha(t),\ t \in (0,T)\}.$$

Neste capítulo, analisamos um problema de controlabilidade multiobjetivo relativo à equação da onda linear unidimensional

$$\begin{aligned} & u'' - u_{xx} = 0 && \text{em} \quad Q_{T,\alpha}, \\ & u(\cdot,0) = u_0, \quad u'(\cdot,0) = u_1 && \text{em} \quad (0,1), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde u_0, u_1 são dados iniciais e α é uma função $C^2(\mathbb{R}_+)$ com as seguintes propriedades:

(H1) $\alpha(0) = 1$;

(H2) $\alpha'(t) \in (m, M) \subset (0,1) \subset \mathbb{R}_+$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$;

(H3) α' é monótona.

Do ponto de vista físico, a equação (3.1) juntamente com as hipóteses feitas sobre α, modela pequenas vibrações de uma corda, onde um ponto final é fixado e o outro é móvel, com velocidade $\alpha'(t)$.

A fronteira lateral $\Sigma_{T,\alpha}$ de $Q_{T,\alpha}$ é composta por dois conjuntos disjuntos Σ_T^0 e Σ_T^α dados, respectivamente, por

$$\Sigma_T^0 = \{(0,t);\ t \in (0,T)\} \quad \text{e} \quad \Sigma_T^\alpha = \{(\alpha(t),t);\ t \in (0,T)\},$$

isto é, $\Sigma_{T,\alpha} = \Sigma_T^0 \cup \Sigma_T^\alpha$. Estamos interessados no estudo da situação onde a solução u da equação da onda (3.1) está sujeita a uma das condições de fronteira

$$u = \begin{cases} f + v & \text{sobre} \quad \Sigma_T^0, \\ 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_T^\alpha, \end{cases} \tag{3.2}$$

ou

$$u = \begin{cases} 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_T^0, \\ g + w & \text{sobre} \quad \Sigma_T^\alpha, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $f, v \in L^2(\Sigma_T^0)$ e $g, w \in L^2(\Sigma_T^\alpha)$ são funções controle.

A partir de agora apresentaremos os problemas a serem estudados no presente capítulo. Para cada um dos controles f, v atuando no sistema da onda (3.1) - (3.2) e g, w em (3.1) - (3.3) damos uma tarefa que podem ser descritas como segue:

1. **Tarefa para f e g:** Controlabilidade aproximada.

   O objetivo é encontrar os melhores controles f e g que aproximam arbitrariamente a solução u de (3.1) - (3.2) e (3.1) - (3.3), respectivamente, de um dado u^T no tempo final T.

2. **Tarefa para v e w:** Minimização.

   O objetivo é fazer a melhor aproximação (no sentido de distância calculada pelas normas) da solução u de (3.1) - (3.2) a outro dado u_2 com a menor escolha possível de v. Esta situação pode ser traduzida para uma minimização de um funcional adequado. Da mesma forma para uma solução u de (3.1) - (3.3).

Nosso problema consiste em analisar a existência de um par (f, v) que cumprem as tarefas acima simultaneamente. Como cada tarefa tem um diferente objetivo a ser atingido por u, então encontrar o par (f, v) é chamado *problema multiobjetivo.* A mesma abordagem será considerada para o sistema (3.1), (3.3), onde as tarefas de f e v são dadas a g e w, respectivamente.

Consideremos os funcionais $\mathcal{J} : L^2(\Sigma_T^0) \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{K} : L^2(\Sigma_T^\alpha) \to \mathbb{R}$ definidos, respectivamente, como sendo

$$\mathcal{J}(f) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_T^0} |f|^2 \, d\Sigma, \qquad \mathcal{K}(g) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_T^\alpha} |g|^2 \, d\Sigma, \tag{3.4}$$

e os funcionais $\mathcal{J}_f : L^2(\Sigma_T^0) \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{K}_g : L^2(\Sigma_T^\alpha) \to \mathbb{R}$ dados por

$$\mathcal{J}_f(v) = \frac{1}{2}\int_{Q_{T,\alpha}} |u(x,t;f,v,u_0,u_1) - u_2|^2 \, dx\, dt + \frac{\sigma_2}{2}\int_{\Sigma_T^0} |v|^2 \, d\Sigma, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{K}_g(w) = \frac{1}{2}\int_{Q_{T,\alpha}} |u(x,t;g,w,u_0,u_1) - u_4|^2 \, dx\, dt + \frac{\sigma_4}{2}\int_{\Sigma_T^\alpha} |w|^2 \, d\Sigma. \tag{3.6}$$

Na definição dos dois funcionais acima, σ_2 e σ_4 são constantes positivas; denotamos por $u(x,t;f,v,u_0,u_1)$ a solução do sistema (3.1), (3.2) associada aos dados f, v, u_0, u_1; e denotamos por $u(x,t;g,w,u_0,u_1)$ a solução do sistema (3.1), (3.3) associada a g, w, u_0, u_1.

Com base no exposto acima, podemos enunciar nossos principais resultados como segue:

Teorema 3.1. *Sejam* $u_0 \in L^2(0,1)$*,* $u_1 \in H^{-1}(0,1)$*,* $u^T \in L^2(0,\alpha(T))$*, e* $u_2 \in L^2(Q_{T,\alpha})$*. Assumamos que as condições* $(H1) - (H3)$ *valem e que*

$$T > T_1 := \frac{1}{M}\left(e^{\frac{2M^2(1-m)}{m(1-M)^3}} - 1\right). \tag{3.7}$$

Então, se σ_2 *é suficientemente grande, para cada* $\varepsilon > 0$ *existem controles*

$$f_\varepsilon \in L^2(\Sigma_T^0) \text{ e } v_\varepsilon(f_\epsilon) \in L^2(\Sigma_T^0)$$

tais que

(a) $\|u(\cdot,T;f_\varepsilon,v_\varepsilon,u_0,u_1) - u^T\|_{L^2(0,\alpha(T))} < \varepsilon$*;*

(b) $\mathcal{J}_{f_\varepsilon}(v_\varepsilon) = \min\limits_{L^2(\Sigma_T^0)} \mathcal{J}_{f_\varepsilon}(v)$*;*

(c) $\mathcal{J}(f_\varepsilon) = \min\limits_{L^2(\Sigma_T^0)} \mathcal{J}(f)$*.*

Teorema 3.2. *Sejam* $u_0 \in L^2(0,1)$, $u_1 \in H^{-1}(0,1)$, $u^T \in L^2(0,\alpha(T))$, *e* $u_4 \in L^2(Q_{T,\alpha})$. *Suponhamos que as condições* $(H1)-(H3)$ *valem e que*

$$T > T_2 := \frac{1}{M}\left(e^{\frac{2M^2(1-m)(1+M)}{m(1-M)^2}} - 1\right). \tag{3.8}$$

Então, se σ_4 *é suficientemente grande, para cada* $\varepsilon > 0$ *existem controles*

$$g_\varepsilon \in L^2(\Sigma_T^\alpha) \text{ e } w_\varepsilon(g_\varepsilon) \in L^2(\Sigma_T^\alpha)$$

tais que

(a) $\|u(\cdot,T;g_\varepsilon,w_\varepsilon,u_0,u_1)-u^T\|_{L^2(0,\alpha(T))} < \varepsilon$;

(b) $\mathcal{K}_{g_\varepsilon}(w_\varepsilon) = \min_{\Sigma_T^\alpha} \mathcal{K}_{g_\varepsilon}(w)$;

(c) $\mathcal{K}(g_\varepsilon) = \min_{\Sigma_T^\alpha} \mathcal{K}(g)$.

Nos Teoremas 3.1 e 3.2, as condições $(a), (b)$ e (c) traduzem as tarefas que devem ser cumpridas pelos pares de controles (f,v) e (g,w). A condição (a) em ambos os teoremas representa a bem conhecida propriedade de controlabilidade aproximada.

3.1.2 Organização do capítulo

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 3.2 declaramos brevemente a boa colocação dos problemas. Na seção 3.3 reorganizamos os problemas visando obter os sistemas de otimalidade a serem utilizados na prova dos Teoremas 3.1 e 3.2. As seções 3.4 e 3.5 são dedicadas a provar, respectivamente, o Teorema 3.1 e o Teorema 3.2. A seção final é reservada para comentários e problemas em aberto.

3.2 Boa colocação do problema

O objetivo desta seção é estabelecermos a boa colocação dos problemas (3.1), (3.2) e (3.1), (3.3). Inicialmente, faremos uma mudança de variáveis para transformar os problemas (3.1), (3.2) e (3.1), (3.3). Ao separar uma das fronteiras laterais do domínio cilíndrico em cada problema, nos deparamos com quatro controles f, v, g, w atuando nessa separação, onde pensamos f, g como controles líderes e v, w como seguidores na terminologia de Stackelberg.

Observamos que quando (x, t) varia em $Q_{T,\alpha}$, o ponto

$$(y, t) = \left(\frac{x}{\alpha(t)}, t\right)$$

varia em $Q = \Omega \times (0, T)$, onde $\Omega = (0, 1)$. Considerando o difeomorfismo $\zeta : Q_{T,\alpha} \to Q$ definido por $\zeta(x, t) = (y, t)$, escrevemos $\Gamma = \zeta(\Sigma), \Gamma_0 = \zeta(\Sigma_T^0), \Gamma_\alpha = \zeta(\Sigma_T^\alpha)$. A partir da mudança de variáveis $u(x, t) = z(y, t)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
u''(x,t) &= [u'(x,t)]' \\
&= [z'(y,t)]' \\
&= [z_y(y,t) \cdot y' + z'(y,t)]' \\
&= [z_y(y,t)]' \cdot y' + z_y(y,t) \cdot y'' + [z'(y,t)]' \\
&= (z_{yy}(y,t) \cdot y' + z'_y(y,t)) \cdot y' + z_y(y,t) \cdot y'' + z'_y(y,t) \cdot y' + z''(y,t),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x,t) = [u_x(x,t)]_x &= [z_x(y,t)]_x \\
&= [z_y(y,t) \cdot y_x]_x \\
&= \left[z_y(y,t) \cdot \frac{1}{\alpha(t)}\right]_x \\
&= \frac{1}{\alpha(t)} \cdot z_{yy}(y,t) \cdot y_x \\
&= \frac{1}{\alpha(t)^2} z_{yy}(y,t).
\end{aligned}$$

Logo, obtemos que

$$\begin{aligned}
u''(x,t) - u_{xx}(x,t) &= \left[z_{yy}(y,t)\cdot y' + z_y'(y,t)\right]\cdot y' + z_y(y,t)\cdot y'' \\
&+ z_y'(y,t)\cdot y' + z''(y,t) - \frac{1}{\alpha^2(t)} z_{yy}(y,t) \\
&= z_{yy}(y,t)\left[(y')^2 - \frac{1}{\alpha^2(t)}\right] + z_y'(y,t)[y'+y'] \\
&+ z_y(y,t)y'' + z''(y,t) \\
&= z_{yy}(y,t)\left[y^2\frac{\alpha'(t)^2}{\alpha(t)^2} - \frac{1}{\alpha(t)^2}\right] + z_y'(y,t)\left[-2y\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right] \\
&+ z_y(y,t)\left[2y\frac{\alpha'(t)^2}{\alpha(t)^2} - y\frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)}\right] + z''(y,t) \\
&= z_{yy}(y,t)\frac{1}{\alpha(t)}\left[\frac{-1+y^2\alpha'(t)^2}{\alpha(t)}\right] + z_y(y,t)\frac{1}{\alpha(t)}\left[\frac{2y\alpha'(t)^2}{\alpha(t)}\right] \\
&- z_y(y,t)\frac{1}{\alpha(t)}[y\alpha''(t)] + z_y'(y,t)\frac{1}{\alpha(t)}[-2y\alpha'(t)] + z''(y,t) \\
&= \left[\frac{\theta(y,t)}{\alpha(t)} z_y\right]_y - z_y(y,t)\frac{1}{\alpha(t)}[y\alpha''(t)] \\
&+ z_y'(y,t)\frac{1}{\alpha(t)}[-2y\alpha'(t)] + z''(y,t),
\end{aligned}$$

onde

$$\theta(y,t) = \frac{-1+y^2\alpha'(t)^2}{\alpha(t)}.$$

Como $u''(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$, segue que

$$\left[\frac{\theta(y,t)}{\alpha(t)} z_y\right]_y - z_y(y,t)\frac{1}{\alpha(t)}[y\alpha''(t)] + z_y'(y,t)\frac{1}{\alpha(t)}[-2y\alpha'(t)] + z''(y,t) = 0.$$

Portanto, a mudança de variáveis $u(x,t) = z(y,t)$ transforma os problemas de fronteira (3.1), (3.2) e (3.1), (3.3) nos sistemas equivalentes dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
& z'' + Lz = 0 && \text{em} \quad Q, \\
& z(y,t) = (f+v)\mathbf{1}_{\Gamma_0} && \text{sobre} \quad \Gamma, \\
& z(y,0) = z_0, \quad z'(y,0) = z_1 && \text{em} \quad \Omega,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

e

$$\begin{aligned}
& z'' + Lz = 0 && \text{em} \quad Q, \\
& z(y,t) = (g+w)\mathbf{1}_{\Gamma_\alpha} && \text{sobre} \quad \Gamma, \\
& z(y,0) = z_0, \quad z'(y,0) = z_1 && \text{em} \quad \Omega,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde

$$
\begin{aligned}
&Lz = -\Big[\frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} z_y\Big]_y + \frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} z_y' + \frac{\tau(y,t)}{\alpha(t)} z_y,\\
&\beta(y,t) = \frac{1-\alpha'^2(t)y^2}{\alpha(t)}, \quad \gamma(y,t) = -2\alpha'(t)y, \quad \tau(y,t) = -\alpha''(t)y,\\
&z_0(y) = u_0(x), \quad z_1(y) = u_1(x) + \alpha'(0)yu_x(0),\\
&\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_\alpha,\ \Gamma_0 = \{(0,t) : t \in (0,T)\},\ \Gamma_\alpha = \{(1,t) : t \in (0,T)\},
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

com regularidade

$$\beta \in C^1(\overline{Q}), \quad \gamma, \tau \in W^{1,\infty}(Q). \tag{3.12}$$

Tal mudança de variável também define os funcionais como sendo:

$$J(f) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} |f|^2 \, d\Gamma, \qquad K(g) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\alpha} |g|^2 \, d\Gamma, \tag{3.13}$$

e

$$J_f(v) = \frac{1}{2}\int_Q \alpha(t)|z(y,t;f,v,z_0,z_1) - z_2|^2 \, dy\, dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Gamma_0} |v|^2 \, d\Gamma, \tag{3.14}$$

$$K_g(w) = \frac{1}{2}\int_Q \alpha(t)|z(y,t;g,w,z_0,z_1) - z_4|^2 \, dy\, dt + \frac{\tilde{\sigma}}{2}\int_{\Gamma_\alpha} |w|^2 \, d\Gamma, \tag{3.15}$$

onde $\sigma, \tilde{\sigma} > 0$ são constantes e $z_2(y,t), z_4(y,t)$ são funções dadas em $L^2(Q)$.

Observação 3.1. *Por Milla Miranda [45], vale que para cada* $z_0 \in L^2(\Omega), z_1 \in H^{-1}(\Omega)$ *e* $f, v \in L^2(\Gamma_0)$, $g, w \in L^2(\Gamma_\alpha)$, *existe uma única solução por transposição* z *dos problemas* (3.9) *e* (3.10). *Esta solução tem a regularidade*

$$z \in C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \cap C^1\big([0,T]; H^{-1}(\Omega)\big).$$

Portanto, os problemas (3.1), (3.2) e (3.1), (3.3) são também bem postos, o que significa que os funcionais $\mathcal{J}_f$, $\mathcal{K}_g$, J_f e K_g são bem definidos.

3.3 Caracterização dos problemas

Nesta seção, nosso objetivo é obtermos os sistemas de otimalidade, que caracterizam os controles seguidores e darão suporte à prova dos teoremas principais. Fixados controles líderes $f \in L^2(\Gamma_0)$ e $g \in L^2(\Gamma_\alpha)$ determinaremos a existência e unicidade de soluções para os problemas

$$\inf_{\widehat{v} \in L^2(\Gamma_0)} J_f(\widehat{v}) \tag{3.16}$$

e

$$\inf_{\widehat{w}\in L^2(\Gamma_\alpha)} K_g(\widehat{w}), \tag{3.17}$$

e também uma caracterização de tais soluções usando um sistema adjunto.

A seguir, mostraremos que para cada $f \in L^2(\Gamma_0)$ e $g \in L^2(\Gamma_\alpha)$ fixados, temos que os funcionais J_f, K_g são fracamente semicontínuos inferiormente, estritamente convexos e coercivos. De fato,

- J_f é fracamente semicontínuo inferiormente.

  Com efeito, suponha que $z_n \rightharpoonup z$ em $L^2(Q)$ e $v_n \rightharpoonup v$ em $L^2(\Gamma_0)$. Então

$$\alpha(t)^{1/2}(z_n - z_2) \rightharpoonup \alpha(t)^{1/2}(z - z_2),$$

  e assim temos

$$\|\alpha(t)^{1/2}(z - z_2)\|_{L^2(Q)} \leqslant \liminf \|\alpha(t)^{1/2}(z_n - z_2)\|_{L^2(Q)}$$

  e

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_0)} \leqslant \liminf \|v_n\|_{L^2(\Gamma_0)}.$$

  Logo,

$$\begin{aligned}
\liminf J_f(z_n, v_n) &= \liminf \left\{ \frac{1}{2}\|\alpha(t)^{1/2}(z_n - z_2)\|^2_{L^2(Q)} + \frac{\sigma}{2}\|v_n\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \right\} \\
&\geqslant \liminf \left\{ \frac{1}{2}\|\alpha(t)^{1/2}(z_n - z_2)\|^2_{L^2(Q)} \right\} + \liminf \left\{ \frac{\sigma}{2}\|v_n\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \right\} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|\alpha(t)^{1/2}(z - z_2)\|^2_{L^2(Q)} + \frac{\sigma}{2}\|v\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \\
&= J_f(z, v),
\end{aligned}$$

  ou seja,

$$\liminf J_f(z_n, v_n) \geqslant J_f(z, v).$$

  Portanto, J_f é fracamente semicontínuo inferiormente. Analogamente, o mesmo raciocínio vale para o funcional K_g.

- J_f é estritamente convexo.

  Sejam $\lambda \in (0,1)$, $v, \overline{v} \in L^2(\Gamma_0)$ e $z, \overline{z}$ as soluções associadas a $v, \overline{v}$, respectivamente. Então, usando a condição estrita da desigualdade de Young para produtos, segue que

$$
\begin{aligned}
J_f(\lambda v + (1-\lambda)\overline{v}) &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)[\lambda z + (1-\lambda)\overline{z} - z_2]^2\,dy\,dt \\
&\quad + \frac{\sigma}{2}\int_{\Gamma_0} |\lambda v + (1-\lambda)\overline{v}|^2\,d\Gamma \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)[\lambda z + (1-\lambda)\overline{z} - (\lambda z_2 + (1-\lambda)z_2)]^2\,dy\,dt \\
&\quad + \frac{\sigma}{2}\int_{\Gamma_0} |\lambda v + (1-\lambda)\overline{v}|^2\,d\Gamma \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)[\lambda(z - z_2) + (1-\lambda)(\overline{z} - z_2)]^2\,dy\,dt \\
&\quad + \frac{\sigma}{2}\int_{\Gamma_0} |\lambda v + (1-\lambda)\overline{v}|^2\,d\Gamma \\
&= \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(z-z_2)^2 dy\,dt + \lambda(1-\lambda)\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(z-z_2)(\overline{z}-z_2)dy\,dt \\
&\quad + \frac{(1-\lambda)^2}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(\overline{z}-z_2)^2 dy\,dt + \frac{\sigma\lambda^2}{2}\int_{\Gamma_0}|v|^2 d\Gamma + \sigma\lambda(1-\lambda)\int_{\Gamma_0} v\overline{v}\,d\Gamma \\
&\quad + \frac{\sigma(1-\lambda)^2}{2}\int_{\Gamma_0}|\overline{v}|^2 d\Gamma \\
&< \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(z-z_2)^2 dy\,dt + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(z-z_2)^2 dy\,dt \\
&\quad + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(\overline{z}-z_2)^2 dy\,dt \\
&\quad + \frac{(1-\lambda)^2}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(\overline{z}-z_2)^2 dy\,dt \\
&\quad + \frac{\sigma\lambda^2}{2}\int_{\Gamma_0}|v|^2 d\Gamma + \frac{\sigma\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Gamma_0}|v|^2 d\Gamma + \frac{\sigma\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Gamma_0}|\overline{v}|^2 d\Gamma \\
&\quad + \frac{\sigma(1-\lambda)^2}{2}\int_{\Gamma_0}|\overline{v}|^2 d\Gamma \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(z-z_2)^2 dy\,dt + \frac{(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(\overline{z}-z_2)^2 dy\,dt \\
&\quad + \frac{\sigma\lambda}{2}\int_{\Gamma_0}|v|^2 d\Gamma + \frac{\sigma(1-\lambda)}{2}\int_{\Gamma_0}|\overline{v}|^2 d\Gamma \\
&= \lambda J_f(v) + (1-\lambda)J_f(\overline{v}),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
J_f(\lambda v + (1-\lambda)\overline{v}) < \lambda J_f(v) + (1-\lambda)J_f(\overline{v}), \quad \forall v, \overline{v} \in L^2(\Gamma_0), \lambda \in (0,1).
$$

Similarmente, essa mesma afirmação vale para o funcional K_g.

- J_f é coercivo.

Com efeito, como

$$J_f(v) = \frac{1}{2}\|\alpha(t)^{\frac{1}{2}}(z - z_2)\|^2_{L^2(Q)} + \frac{\sigma}{2}\|v\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \geqslant \frac{\sigma}{2}\|v\|^2_{L^2(\Gamma_0)},$$

então

$$J_f(v) \longrightarrow \infty \text{ quando } \|v\| \longrightarrow \infty.$$

De modo análogo, segue que o funcional K_g é coercivo.

Portanto, existe uma única solução $v \in L^2(\Gamma_0)$ de (3.16) e $w \in L^2(\Gamma_\alpha)$ de (3.17), isto é,

$$J_f(v) = \inf_{\widehat{v} \in L^2(\Gamma_0)} J_f(\widehat{v}), \quad K_g(w) = \inf_{\widehat{w} \in L^2(\Gamma_\alpha)} K_g(\widehat{w}).$$

Agora, calcularemos a derivada de Gateaux dos funcionais J_f e K_g e, em seguida escreveremos a equação de Euler que está associada a cada problema de minimização.

Fixado $\widehat{v} \in L^2(\Gamma_0)$ e $\widehat{z}$ como solução do sistema

$$\begin{aligned}
&\widehat{z}'' + L\widehat{z} = 0 && \text{em} && Q,\\
&\widehat{z}(y,t) = \widehat{v}\mathbf{1}_{\Gamma_0}, && \text{sobre} && \Gamma,\\
&\widehat{z}(y,0) = 0, \quad \widehat{z}'(y,0) = 0 && \text{em} && \Omega,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

temos que,

$$\begin{aligned}
J'_f(z,v) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J_f(z+\varepsilon\widehat{z}, v+\varepsilon\widehat{v})}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(z+\varepsilon\widehat{z}-z_2)^2\,dy\,dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Gamma_0}(v+\varepsilon\widehat{v})^2\,d\Gamma\right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(z-z_2)^2\,dy\,dt - \frac{\sigma}{2}\int_{\Gamma_0} v^2\,d\Gamma\right\}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)[(z-z_2)^2 + 2(z-z_2)\varepsilon\widehat{z} + \varepsilon^2\widehat{z}^2]\,dy\,dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Gamma_0} v^2\,d\Gamma\right.\\
&\qquad +\varepsilon\sigma\int_{\Gamma_0} v\widehat{v}\,d\Gamma + \varepsilon^2\frac{\sigma}{2}\int_{\Gamma_0}\widehat{v}^2\,d\Gamma - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(z-z_2)^2\,dy\,dt\\
&\qquad \left. -\frac{\sigma}{2}\int_{\Gamma_0} v^2\,d\Gamma\right\}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)[2(z-z_2)\varepsilon\widehat{z} + \varepsilon^2\widehat{z}^2]\,dy\,dt + \varepsilon\sigma\int_{\Gamma_0} v\widehat{v}\,d\Gamma + \varepsilon^2\frac{\sigma}{2}\int_{\Gamma_0}\widehat{v}^2\,d\Gamma\right\}\\
&= \int_0^T\int_\Omega \alpha(t)(z-z_2)\widehat{z}\,dy\,dt + \sigma\int_{\Gamma_0} v\widehat{v}\,d\Gamma.
\end{aligned}$$

Como v é o mínimo de J_f, temos $J_f'(v) = 0$, ou seja,

$$\int_0^T \int_\Omega \alpha(t)(z - z_2)\widehat{z}dy\, dt + \sigma \int_{\Gamma_0} v\widehat{v}d\Gamma = 0, \quad \forall \widehat{v} \in L^2(\Gamma_0), \tag{3.19}$$

onde $\widehat{z}$ é solução de (3.18). Analogamente,

$$\int_0^T \int_\Omega \alpha(t)(z - z_4)\tilde{z}dy\, dt + \tilde{\sigma} \int_{\Gamma_\alpha} w\widehat{w}d\Gamma = 0, \quad \forall \widehat{w} \in L^2(\Gamma_\alpha),$$

onde $\tilde{z}$ é solução do sistema

$$\begin{array}{lll} \tilde{z}'' + L\tilde{z} = 0 & \text{em} & Q, \\ \tilde{z}(y,t) = \widehat{w}\mathbf{1}_{\Gamma_\alpha} & \text{sobre} & \Gamma, \\ \tilde{z}(y,0) = 0, \quad \tilde{z}'(y,0) = 0 & \text{em} & \Omega. \end{array} \tag{3.20}$$

Agora, encontraremos o sistema adjunto de (3.18) e (3.20). Para isso, multiplicando (3.18) por $p = p(y,t)$ e integrando de 0 a T, deduzimos que

$$\int_0^T pz''\, dt + \int_0^T pLz\, dt = 0,$$

onde uma integração por partes nos conduz a equação

$$p(T)z'(T) - p(0)z'(0) - p'(T)z(T) + p'(0)z(0) + \int_0^T p''z\, dt + \int_0^T pLz\, dt = 0.$$

Escrevendo a expressão do operador L e integrando em Ω, resulta que

$$\begin{gathered}\int_\Omega p(T)z'(T)\, dy - \int_\Omega p(0)z'(0)\, dy - \int_\Omega p'(T)z(T)\, dy + \int_\Omega p'(0)z(0)\, dy \\ + \int_0^T \int_\Omega p''z\, dydt + \int_0^T \int_\Omega p\left(-\left[\frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} z_y \right]_y + \frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} z_y' + \frac{\tau(y,t)}{\alpha(t)} z_y \right) dydt = 0.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Agora, denotaremos as integrais I_1, I_2, eI_3 como sendo

$$I_1 = \int_0^T \int_\Omega p\left(-\left[\frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} z_y \right]_y \right) dydt, \qquad I_2 = \int_0^T \int_\Omega p\left(\frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} z_y' \right) dydt$$

e

$$I_3 = \int_0^T \int_\Omega p\left(\frac{\tau(y,t)}{\alpha(t)} z_y \right) dydt.$$

Supondo $p = 0$ sobre Γ e $p(y, T) = p'(y, T) = 0$ para todo $y \in \Omega$, temos que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T \int_\Omega p\left(-\Big[\frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} z_y\Big]_y\right) dy\,dt \\
&= \underbrace{-\int_0^T p\frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} z_y\Big|_0^1 dt}_{=0} + \int_0^T \int_\Omega p_y \frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} z_y\, dy\,dt \\
&= \int_0^T p_y \frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} z\Big|_0^1 dt - \int_0^T \int_\Omega \left[p_y \frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)}\right]_y z\, dy\,dt \\
&= \int_\Gamma p_y \frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} z\, d\Gamma + \int_0^T \int_\Omega \left[-p_y \frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)}\right]_y z\, dy\,dt.
\end{aligned}
$$

Para I_2, vale que

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^T \int_\Omega p\left(\frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} z'_y\right) dy\,dt \\
&= \underbrace{\int_0^T \frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} p z'\Big|_0^1 dt}_{=0} - \int_0^T \int_\Omega \left[\frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} p\right]_y z'\, dy\,dt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega \left[\frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} p\right]_y z'\, dy\,dt \\
&= \underbrace{-\int_\Omega \left[\frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} p\right]_y z\Big|_0^T dy}_{=0} + \int_0^T \int_\Omega \left[\frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} p\right]_y' z\, dy\,dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \left[\frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} p\right]_y' z\, dy\,dt.
\end{aligned}
$$

Finalmente, ao desenvolvermos a integral I_3 nos leva a expressão

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^T \int_\Omega p\left(\frac{\tau(y,t)}{\alpha(t)} z_y\right) dy\,dt \\
&= \underbrace{\int_0^T \frac{\tau(y,t)}{\alpha(t)} p z\Big|_0^1 dt}_{=0} - \int_0^T \int_\Omega \left[\frac{\tau(y,t)}{\alpha(t)} p\right]_y z\, dy\,dt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega \left[\frac{\tau(y,t)}{\alpha(t)} p\right]_y z\, dy\,dt.
\end{aligned}
$$

Substituindo as expressões encontradas acima para as integrais I_1, I_2 e I_3 em (3.21), obtemos que

$$
\int_0^T \int_\Omega p'' z\, dy\,dt + \int_0^T \int_\Omega \left\{ \left[-\frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} p_y\right]_y + \left[\frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} p\right]_y' - \left[\frac{\tau(y,t)}{\alpha(t)} p\right]_y \right\} z\, dy\,dt
$$

$$
+ \int_\Gamma \frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} p_y z\, d\Gamma = 0.
$$

Consideremos o sistema adjunto a (3.18) e (3.20) definido por

$$\begin{aligned} & p'' + L^* p = \alpha(t)\,(z - z_2) && \text{em} \quad Q, \\ & p(y,t) = 0 && \text{sobre} \quad \Gamma, \\ & p(y,T) = p'(y,T) = 0 && \text{em} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde L^* é o adjunto formal do operador L dado por

$$L^* p = -\left[\frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} p_y\right]_y + \left[\frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} p\right]_y' - \left[\frac{\tau(y,t)}{\alpha(t)} p\right]_y$$

ou ainda,

$$L^* p = -\left[\frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} p_y\right]_y + \frac{\gamma(y,t)}{\alpha(t)} p_{yt} + Rp$$

onde,

$$Rp = \left[\frac{-\alpha''(t)\alpha(t) + 2\alpha'(t)^2}{\alpha(t)^2}\right] p + \left[\frac{-\alpha''(t)\alpha(t) + 2\alpha'(t)^2}{\alpha(t)^2}\right] y p_y + \left[\frac{-2\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right] p_t$$

e $\beta(y,t)$, $\gamma(y,t)$, e $\tau(y,t)$ são dadas em (3.11).

Multiplicando $(3.22)_1$ por $\widehat{z}$ e integrando por partes, concluimos que

$$\int_0^T \int_\Omega \alpha(t)(z - z_2)\widehat{z}\, dy\, dt + \int_\Gamma \frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)}\, p_y\, \widehat{z}\, d\Gamma = 0.$$

Separando a fronteira $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_\alpha$ na integral e usando (3.18), temos que

$$\int_0^T \int_\Omega \alpha(t)(z - z_2)\widehat{z}\, dy\, dt + \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\alpha^2(t)}\, p_y\, \widehat{v}\, d\Gamma = 0,$$

de modo que por (3.19), obtemos que

$$v = \frac{1}{\sigma\alpha^2(t)} p_y \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0.$$

Similarmente, podemos encontrar uma expressão explícita para w dada por

$$w = \frac{1}{\tilde{\sigma}\alpha^2(t)} p_y \quad \text{sobre} \quad \Gamma_\alpha.$$

Portanto, fica provado o seguinte teorema:

Teorema 3.3 (Sistema de otimalidade para o controle seguidor)**.** *Para cada* $f \in L^2(\Gamma_0)$ *e* $g \in L^2(\Gamma_\alpha)$ *existe um único equilíbrio de Nash* v *e* w *no sentido de* (3.16) *e* (3.17)*, respectivamente. Além disso, os seguidores* v, w *são dados por*

$$v = v(f) = \frac{1}{\sigma\alpha^2(t)}\; p_y \quad \textit{sobre} \quad \Gamma_0, \tag{3.23}$$

$$w = w(g) = \frac{1}{\tilde{\sigma}\alpha^2(t)}\ p_y \ \ \textit{sobre}\ \ \Gamma_\alpha, \tag{3.24}$$

onde no primeiro caso $\{z, p\}$ *é a solução única de*

$$\begin{array}{lll} z_{tt} + Lz = 0, \quad p'' + L^* p = \alpha(t)\,(z - z_2) & \textit{em} & Q, \\ z = \left(f + \dfrac{1}{\sigma\alpha^2(t)}\ p_y\right)\mathbf{1}_{\Gamma_0}, \quad p = 0 & \textit{sobre} & \Gamma, \\ z(0) = z_0, \quad z_t(0) = z_1, \quad p(T) = p'(T) = 0 & \textit{em} & \Omega, \end{array} \tag{3.25}$$

e no segundo caso $\{z, p\}$ *é a solução única de*

$$\begin{array}{lll} z_{tt} + Lz = 0, \quad p'' + L^* p = \alpha(t)\,(z - z_4) & \textit{em} & Q, \\ z = \left(g + \dfrac{1}{\tilde{\sigma}\alpha^2(t)}\ p_y\right)\mathbf{1}_{\Gamma_\alpha}, \quad p = 0 & \textit{sobre} & \Gamma, \\ z(0) = z_0, \quad z_t(0) = z_1, \quad p(T) = p'(T) = 0 & \textit{em} & \Omega. \end{array} \tag{3.26}$$

3.4 Prova do Teorema 3.1

Após caracterizarmos o controle seguidor, nos concentraremos em provar a existência de um controle líder f como solução do problema

$$\inf_{f \in \mathcal{U}(\nu^0, \nu^1, \varepsilon)} J(f), \tag{3.27}$$

onde $\mathcal{U}(\nu^0, \nu^1, \varepsilon)$, é o conjunto de controles admissíveis

$$\mathcal{U}(\nu^0, \nu^1, \varepsilon) = \{f \in L^2(\Gamma_0);\ \|\{z(\cdot, T; f, v), z'(\cdot, T; f, v)\} - \{\nu^0, \nu^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} < \varepsilon\},$$

com v como em (3.23).

Em outras palavras, o controle líder f trabalha de modo que a solução z de (3.9) e z', calculadas no tempo $t = T$, se aproximem de $\{\nu^0, \nu^1\}$. Como o sistema (3.9) é linear, é suficiente provar isto para dados iniciais nulos.

Inicialmente, decompomos a solução (z, p) de (3.25) como sendo

$$(z, p) = (v_0, p_0) + (h, q) \tag{3.28}$$

onde v_0, p_0 são soluções de

$$\begin{array}{lll} v_0'' + L\, v_0 = 0, \quad p_0'' + L^* p_0 = \alpha(t)\,(v_0 - z_2) & \text{em} & Q, \\ v_0 = \dfrac{1}{\sigma\alpha^2(t)}\,(p_0)_y \mathbf{1}_{\Gamma_0}, \quad p_0 = 0 & \text{sobre} & \Gamma, \\ v_0(0) = v_0'(0) = 0, \quad p_0(T) = p_0'(T) = 0 & \text{em} & \Omega, \end{array} \tag{3.29}$$

e h, q são soluções de

$$\begin{array}{lll} h'' + L\,h = 0, \quad q'' + L^* q = \alpha(t) h & \text{em} & Q, \\ h = \left(f + \dfrac{1}{\sigma\alpha^2(t)}\, q_y \right) \mathbf{1}_{\Gamma_0}, \quad q = 0 & \text{sobre} & \Gamma, \\ h(0) = h'(0) = 0, \quad q(T) = q'(T) = 0 & \text{em} & \Omega. \end{array} \tag{3.30}$$

Seja A o operador definido por

$$\begin{array}{rcl} A \ : \ L^2(\Gamma_0) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ f & \longmapsto & Af = \big\{ h'(T; f), -h(T; f) \big\}, \end{array} \tag{3.31}$$

o qual é linear e contínuo (devido à boa colocação do sistema (3.30)), ou seja,

$$A \in \mathcal{L}\left(L^2(\Gamma_0);\ H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \right).$$

Consideremos as funções $F_1 : L^2(\Gamma_0) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $F_2 : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definidas, respectivamente, por

$$F_1(f) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |f|^2 \, d\Gamma,$$

e

$$\begin{aligned} F_2(Af) &= F_2\big(\{ h'(T,f), -h(T,f) \} \big) \\ &= \begin{cases} 0, \ \text{se} \begin{cases} h'(T) \in -\nu_0'(T) + B_{H^{-1}(\Omega)}(\nu^1, \varepsilon), \\ -h(T) \in \nu_0(T) - B_{L^2(\Omega)}(\nu^0, \varepsilon), \end{cases} \\ +\infty, \ \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

as quais são convexas e próprias.

Então, o problema (3.27) torna-se equivalente a

$$\inf_{f \in L^2(\Gamma_0)} \big[F_1(f) + F_2(Af) \big] \tag{3.32}$$

se provarmos que a imagem de A gera um subconjunto denso em $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

De fato, vamos supor que a imagem de A gera um subconjunto denso do espaço vetorial $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Se o problema (3.27) tem uma solução, isso significa que existe $f \in L^2(\Gamma_0)$ tal que

$$\| \{ z(\cdot, T; f, \nu), z'(\cdot, T; f, \nu) \} - \{ \nu^0, \nu^1 \} \|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} < \varepsilon$$

e

$$\|f\|_{L^2(\Gamma_0)} \leqslant \|\bar{f}\|_{L^2(\Gamma_0)} \quad \forall \bar{f} \in \mathcal{U}(\nu^0, \nu^1, \varepsilon).$$

Para provar a densidade, usamos o Teorema 1.9. Com efeito, basta mostrar que

$$\text{se} \ \left\langle\left\langle Af, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\right\rangle\right\rangle = 0 \quad \forall f \in L^2(\Gamma_0) \quad \text{então} \quad \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} = \{0,0\},$$

onde $\left\langle\left\langle .,.\right\rangle\right\rangle$ representa a dualidade de paridade entre o espaço $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e o espaço $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Consideremos o sistema adjunto de (3.30) dado por:

$$\begin{array}{lll} \varphi'' + L^*\varphi = \alpha(t)\psi, \quad \psi'' + L\psi = 0 & \text{em} & Q, \\ \varphi = 0, \quad \psi = \dfrac{1}{\sigma\alpha^2(t)}\,\varphi_y \mathbf{1}_{\Gamma_0} & \text{sobre} & \Gamma, \\ \varphi(T) = f^0, \quad \varphi'(T) = f^1, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 0 & \text{em} & \Omega. \end{array} \tag{3.33}$$

Multiplicando por q a equação satisfeita por ψ em $(3.33)_1$, onde q é solução de (3.30), e integrando em Q, obtemos que

$$\int_0^T\int_\Omega \psi q''\,dy\,dt + \int_0^T\int_\Omega \psi L^* q\,dy\,dt + \int_\Gamma \frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)} q_y \psi\,d\Gamma = 0. \tag{3.34}$$

Usando a equação satisfeita por q em $(3.30)_1$ e a condição de ψ sob Γ em $(3.33)_2$, então (3.34) torna-se

$$\int_0^T\int_\Omega \alpha(t) h\,\psi\,dy\,dt = -\frac{1}{\sigma}\int_{\Gamma_0}\frac{1}{\alpha^4(t)}\,q_y\,\varphi_y\,d\Gamma. \tag{3.35}$$

Multiplicando por h a equação satisfeita por φ em (3.33), onde h é solução de (3.30), e integrando em Q, resulta que

$$\int_0^T\int_\Omega \alpha(t)\psi h\,dy\,dt = \big(h(T), f^1\big) - \langle h'(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \int_\Gamma \frac{\beta(y,t)}{\alpha(t)}\varphi_y h\,d\Gamma = 0.$$

Usando a condição de h sobre Γ em $(3.30)_2$, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega \alpha(t)\psi h\,dy\,dt &= \big(h(T), f^1\big) - \langle h'(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \\ -\int_{\Gamma_0}\frac{1}{\alpha(t)^2}\,\varphi_y\,f\,d\Gamma &- \frac{1}{\sigma}\int_{\Gamma_0}\frac{1}{\alpha(t)^4}\,\varphi_y\,q_y\,d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Combinando as equações (3.35) e (3.36), concluimos que

$$-\int_{\Gamma_0}\frac{1}{\alpha^2(t)}\varphi_y f\,d\Gamma = \langle h'(T), f^0\rangle - (h(T), f^1). \tag{3.37}$$

Considerando o lado direito da equação (3.37) como um produto interno entre os espaços $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ de $\{h'(T), -h(T)\}$ com $\{f^0, f^1\}$, obtemos que

$$\left\langle\left\langle Af, \{f^0, f^1\}\right\rangle\right\rangle = -\int_{\Gamma_0}\frac{1}{\alpha^2(t)}\,\varphi_y\,f\,d\Gamma. \tag{3.38}$$

Logo, se

$$\Big\langle \big\langle Af, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\big\rangle \Big\rangle = 0 \quad \forall f \in L^2(\Gamma_0), \tag{3.39}$$

então de (3.38), deduzimos que

$$\widehat{\varphi}_y = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \tag{3.40}$$

onde $\widehat{\varphi}$ é a solução de (3.38) associada a $\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}$.

Portanto, de (3.33), temos que

$$\widehat{\psi} = 0 \text{ sobre } \Gamma, \tag{3.41}$$

de modo que $\widehat{\psi} \equiv 0$.

Assim, $\widehat{\varphi}$ satisfaz

$$\begin{array}{lll} \widehat{\varphi}'' + L^*\widehat{\varphi} = 0 & \text{em} & Q, \\ \widehat{\varphi}(y,t) = 0, \quad \widehat{\varphi}_y \mathbf{1}_{\Gamma_0}(y,t) = 0 & \text{sobre} & \Gamma, \\ \widehat{\varphi}(y,T) = \widehat{f}^0, \quad \widehat{\varphi}'(y,T) = \widehat{f}^1 & \text{em} & \Omega. \end{array}$$

Portanto, de acordo com o Teorema 1.10, para $z(y,t) = \widehat{\varphi}(y, T-t)$ e $\{z^0, z^1\} = \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}$, concluimos que $\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} = \{0, 0\}$ se $T > T_1$. Isto finaliza a prova da densidade.

Retornamos agora à prova do problema de minimização (3.32). Usando o Teorema de Fenchel-Rockafellar (Teorema 1.8) ([49], [9], [15]), obtemos que

$$\begin{aligned} &\inf_{f \in L^2(\Gamma_0)} [F_1(f) + F_2(Af)] \\ &= - \inf_{\{f^0, f^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} [F_1^*\big(A^*\{f^0, f^1\}\big) + F_2^*\{-f^0, -f^1\}], \end{aligned} \tag{3.42}$$

onde $A^* : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma_0)$ é a adjunta de A e F_i^* é a função conjugada convexa de F_i $(i = 1, 2)$ dadas, respectivamente, por:

$$A^*\{f^0, f^1\} = -\frac{1}{\alpha^2(t)}\, \varphi_y, \quad F_1^*(f) = F_1(f),$$

onde φ é dado em (3.33), e

$$\begin{aligned} F_2^*(\{f^0, f^1\}) \;&=\; \langle \nu^1 - \nu_0'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + \big(\nu_0(T) - \nu^0, f^1\big) + \varepsilon\|f^0\| + \varepsilon|f^1|. \end{aligned}$$

As justificativas destas expressões podem ser encontradas no Apêndice B.

Então, podemos reescrever a expressão em (3.42) como sendo

$$\inf_{f \in L^2(\Gamma_0)} [F_1(f) + F_2(Af)] = - \inf_{\{f^0, f^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \Theta\big(\{f^0, f^1\}\big), \tag{3.43}$$

onde o funcional $\Theta : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$\begin{aligned}\Theta\big(\{f^0, f^1\}\big) &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha^2(t)}\right)^2 \varphi_y^2 d\,\Gamma + \big(\nu^0 - \nu_0(T), f^1\big)\\ &-\langle \nu^1 - \nu_0'(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \varepsilon\|f^0\| + \varepsilon|f^1|,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\Theta\big(\{f^0, f^1\}\big) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha^2(t)}\right)^2 \varphi_y^2 d\,\Gamma + \Big\langle\Big\langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{f^0, f^1\}\Big\rangle\Big\rangle + \varepsilon\|f^0\| + \varepsilon|f^1|,$$

onde $\eta^0 = \nu^0 - \nu_0(T)$ e $\eta^1 = \nu^1 - \nu_0'(T)$.

Como Θ definido acima é um funcional contínuo, coercivo e estritamente convexo, existe uma única solução $f = \{f^0, f^1\}$ de

$$\inf_{\{f^0,f^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \Theta\big(\{f^0, f^1\}\big).$$

Pelo item (b) do Teorema 1.7 com $F = \Theta$, $F_1 = \Theta_1$, $F_2 = \Theta_2$,

$$\Theta_1 = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha^2(t)}\right)^2 \varphi_y^2 d\,\Gamma = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} |A^*(f^0, f^1)|^2,$$

$$\Theta_2 = \Big\langle\Big\langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{f^0, f^1\}\Big\rangle\Big\rangle + \varepsilon\|f^0\| + \varepsilon|f^1|,$$

$$u = f = \{f^0, f^1\} \text{ e } v = \widehat{f} = \{\widehat{f^0}, \widehat{f^1}\},$$

temos que

$$\langle \Theta_1'(f), \widehat{f} - f\rangle + \Theta_2(\widehat{f}) - \Theta_2(f) \geqslant 0 \quad \forall \widehat{f} \in C,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\langle \Theta_1'(f), \widehat{f} - f\rangle + \Big\langle\Big\langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f^0}, \widehat{f^1}\}\Big\rangle\Big\rangle + \varepsilon\|\widehat{f^0}\| + \varepsilon|\widehat{f^1}|\\ &- \langle\langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{f^0, f^1\}\rangle\rangle - \varepsilon\|f^0\| - \varepsilon|f^1| \geqslant 0 \quad \forall \widehat{f} \in C.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Analisaremos o termo

$$\langle \Theta_1'(f), \widehat{f} - f\rangle.$$

Da definição de derivada de Gateaux (ver Ekeland [15]), temos que

$$
\begin{aligned}
\langle \Theta_1'(f), \widehat{f} - f \rangle &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\Theta_1(f + \lambda(\widehat{f} - f)) - \Theta_1(f)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |A^*(f + \lambda(\widehat{f} - f))|^2 \, d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |A^*(f)|^2 \, d\Gamma \right) \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |A^*(f) + \lambda A^*(\widehat{f}) - \lambda A^*(f)|^2 \, d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |A^*(f)|^2 \, d\Gamma \right) \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |A^*(f)|^2 + 2A^*(f)(\lambda A^*(\widehat{f}) - \lambda A^*(f)) \right. \\
&+ \left. |\lambda A^*(\widehat{f}) - \lambda A^*(f)|^2 \, d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |A^*(f)|^2 \, d\Gamma \right) \\
&= \int_{\Gamma_0} A^*(f)(A^*(\widehat{f}) - A^*(f)) d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha^2(t)} \right)^2 \varphi_y (\widehat{\varphi}_y - \varphi_y) d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Assim, a desigualdade (3.44) torna-se

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha^2(t)} \right)^2 \varphi_y (\widehat{\varphi}_y - \varphi_y) d\,\Gamma + \left\langle \left\langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \right\rangle \right\rangle + \varepsilon \|\widehat{f}^0\| \\
&+ \varepsilon |\widehat{f}^1| - \langle\langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{f^0, f^1\} \rangle\rangle - \varepsilon \|f^0\| - \varepsilon |f^1| \geqslant 0, \quad \forall \widehat{f} \in C.
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

De (3.37) com $f = -\frac{1}{\alpha^2(t)} \varphi_y$, temos que

$$
\langle h'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \big(h(T), f^1\big) = \int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha^2(t)} \right)^2 \varphi_y^2 \, d\Gamma, \tag{3.46}
$$

além disso,

$$
\langle h'(T), \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \big(h(T), \widehat{f}^1\big) = \int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha^2(t)} \right)^2 \varphi_y \widehat{\varphi}_y \, d\Gamma. \tag{3.47}
$$

Combinando (3.45), (3.46) e (3.47), resulta que

$$
\begin{aligned}
&\langle z'(T) - \nu^1, \widehat{f}^0 - f^0 \rangle - (z(T) - \nu^0, \widehat{f}^1 - f^1)) \\
&+ \varepsilon (\|\widehat{f}^0\| - \|f^0\|) + \varepsilon (|\widehat{f}^1| - |f^1|) \geqslant 0, \quad \forall \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}.
\end{aligned}
$$

A partir da desigualdade acima, podemos ver que $f = -\frac{1}{\alpha^2(t)} \varphi_y$ induz a solução z a satisfazer

$$
\|\{z(\cdot, T; f, \nu), z'(\cdot, T; f, \nu)\} - \{\nu^0, \nu^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} < \varepsilon. \tag{3.48}
$$

Com efeito, usando a desigualdade triangular $|x| - |y| \leqslant |x - y|$, temos que

$$
\left\langle \left\langle \{z'(T), z(T)\} - \{\nu^1, \nu^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} - \{f^0, f^1\} \right\rangle \right\rangle + \varepsilon \|\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} - \{f^0, f^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \geqslant 0 \quad \forall \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\},
$$

ou seja,

$$\left\langle\left\langle \{v^1, v^0\} - \{z'(T), z(T)\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} - \{f^0, f^1\} \right\rangle\right\rangle \leqslant \varepsilon \|\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} - \{f^0, f^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \quad \forall \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\},$$

donde

$$\left\langle\left\langle \{v^1, v^0\} - \{z'(T), z(T)\}, \frac{\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} - \{f^0, f^1\}}{\|\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} - \{f^0, f^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}} \right\rangle\right\rangle \leqslant \varepsilon \quad \forall \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\},$$

o que nos dá (3.48). Logo, a prova do Teorema 3.1 está concluída.

3.5 Prova do Teorema 3.2

O objetivo desta seção é encontrarmos um controle líder g como solução do problema

$$\inf_{g \in \mathcal{W}(v^0, v^1, \varepsilon)} K(g), \tag{3.49}$$

onde $\mathcal{W}(v^0, v^1, \varepsilon)$ é o conjunto de controles admissíveis

$$\mathcal{W}(v^0, v^1, \varepsilon) = \{g \in L^2(\Gamma_\alpha);\ \|\{z(\cdot, T; g, w), z'(\cdot, T; g, w)\} - \{v^0, v^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} < \varepsilon\},$$

com w como em (3.24). Como o sistema (3.10) é linear, é suficiente provar isto para dados iniciais nulos. A prova do Teorema 3.2 é similar à prova do Teorema 3.1.

Inicialmente, decompondo a solução (z, p) de (3.26) como

$$(z, p) = (\tilde{v}_0, \tilde{p}_0) + (\tilde{h}, \tilde{q}) \tag{3.50}$$

onde $\tilde{v}_0$, $\tilde{p}_0$ são dados como soluções de

$$\begin{array}{lll}
\tilde{v}_0'' + L\,\tilde{v}_0 = 0, \quad \tilde{p}_0'' + L^*\tilde{p}_0 = \alpha(t)\,(\tilde{v}_0 - z_4) & \text{em} & Q, \\
\tilde{v}_0 = \dfrac{1}{\tilde{\sigma}\alpha^2(t)}\,(\tilde{p}_0)_y \mathbf{1}_{\Gamma_\alpha}, \quad \tilde{p}_0 = 0 & \text{sobre} & \Gamma, \\
\tilde{v}_0(0) = \tilde{v}_0'(0) = 0, \quad \tilde{p}_0(T) = \tilde{p}_0'(T) = 0 & \text{em} & \Omega,
\end{array}$$

e $\tilde{h}$, $\tilde{q}$ são dados como soluções de

$$\begin{array}{lll}
\tilde{h}'' + L\,\tilde{h} = 0, \quad \tilde{q}'' + L^*\tilde{q} = \alpha(t)\tilde{h} & \text{em} & Q, \\
\tilde{h} = \left(g + \dfrac{1}{\tilde{\sigma}\alpha^2(t)}\,\tilde{q}_y\right)\mathbf{1}_{\Gamma_\alpha}, \quad \tilde{q} = 0 & \text{sobre} & \Gamma, \\
\tilde{h}(0) = \tilde{h}'(0) = 0, \quad \tilde{q}(T) = \tilde{q}'(T) = 0 & \text{em} & \Omega.
\end{array} \tag{3.51}$$

A aplicação

$$\begin{aligned} A \ : \ L^2(\Gamma_\alpha) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ g \quad &\longmapsto Ag = \left\{\tilde{h}'(T; g), -\tilde{h}(T; g)\right\}, \end{aligned} \tag{3.52}$$

é tal que

$$A \in \mathcal{L}\left(L^2(\Gamma_\alpha);\ H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)\right).$$

Consideremos as funções $G_1 : L^2(\Gamma_\alpha) \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ e $G_2 : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ definidas, respectivamente, por

$$G_1(g) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\alpha} |f|^2 \, d\Gamma,$$

e

$$G_2(Ag) = F_2\big(\{\tilde{h}'(T, g), -\tilde{h}(T, g)\}\big)$$
$$= \begin{cases} 0, \ \text{se} \begin{cases} \tilde{h}'(T) \in -\tilde{\nu}_0'(T) + B_{H^{-1}(\Omega)}(\nu^1, \varepsilon), \\ -\tilde{h}(T) \in \tilde{\nu}_0(T) - B_{L^2(\Omega)}(\nu^0, \varepsilon), \end{cases} \\ +\infty, \ \text{caso contrário}, \end{cases}$$

as quais são convexas e próprias.

Então, o problema (3.49) torna-se equivalente a

$$\inf_{g \in L^2(\Gamma_\alpha)} \big[G_1(g) + G_2(Ag)\big] \tag{3.53}$$

se provarmos que a imagem de A gera um conjunto denso em $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. A prova da densidade segue como na demonstração anterior vista na Seção 3.4, onde na conclusão usamos o Teorema 1.11.

Retornando à prova do problema (3.53), usamos o Teorema de Fenchel-Rockafellar (Teorema 1.8) para obtermos

$$\inf_{g \in L^2(\Gamma_\alpha)} [G_1(g) + G_2(Ag)] = - \inf_{\{g^0, g^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \Theta\big(\{g^0, g^1\}\big),$$

onde o funcional $\Theta : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$\begin{aligned} \Theta\big(\{g^0, g^1\}\big) = &\frac{1}{2}\int_{\Gamma_\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2(t)}\right)^2 \varphi_y^2 d\,\Gamma + \big(\nu^0 - \tilde{\nu}_0(T), g^1\big) \\ &- \langle \nu^1 - \tilde{\nu}_0'(T), g^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \varepsilon \|g^0\| + \varepsilon |g^1|. \end{aligned}$$

A solução $\{g^0, g^1\}$ de

$$\inf_{\{g^0, g^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \Theta\big(\{g^0, g^1\}\big).$$

satisfaz a desigualdade variacional

$$\begin{aligned}&\langle z'(T)-\nu^1, \widehat{g}^0 - g^0\rangle - (z(T)-\nu^0, \widehat{g}^1 - g^1))\\&+\varepsilon(\|\widehat{g}^0\| - \|g^0\|) + \varepsilon(|\widehat{g}^1| - |g^1|) \geqslant 0, \quad \forall\{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\} \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega).\end{aligned}$$

com $g = -\frac{1}{\alpha^2(t)}\varphi_y$, que é a função desejada em (3.49). Portanto, a prova do Teorema 3.2 está completa.

3.6 Comentários e problemas em aberto

Neste capítulo mostramos que é possível obter controlabilidade aproximada para uma equação de ondas com fronteira variável, onde o domínio $Q_{T,\alpha}$ cresce linearmente no tempo (função α). Os resultados obtidos aqui podem gerar vários problemas interessantes, generalizando ou melhorando os resultados para outros modelos, como por exemplo, equação da onda com memória [56], equação de Kirchoff [32], domínios de controle mais geral [44], etc. Por outro lado, sabemos que o tempo T para uma equação de ondas é suficientemente grande, devido a velocidade da propagação ser finita. Nessa direção, existem alguns trabalhos (ver por exemplo, [11], [12],[53]) onde o melhor tempo T e a velocidade de um ponto final k é estudada para obter resultados de controlabilidade exata, usando o método do multiplicador. Nesse sentido, seria interessante para o nosso propósito estimar, se possível, o melhor tempo T para obtermos controle aproximado para o problema estudado nesse tópico. Nessa mesma direção, num contexto mais geral, estabelecer condições para obter controlabilidade exata hierárquica inicialmemte para o caso linear, e após isso, o caso não-linear.

Apêndice A

Esse apêndice é dedicado a estabelecer a existência, unicidade e regularidade de solução fraca e solução forte para a equação (2.11), vista no Capítulo 2. Para isso, inicialmente faremos a definição formal de solução fraca para a equação (2.11). Após isso, utilizaremos o Método de Faedo-Galerkin para mostrarmos a existência de soluções. A unicidade segue de um método padrão. O mesmo sendo feito para a solução forte a posteriormente. Os produtos internos e as normas de L^2 e H_0^1 serão denotados, respectivamente, por $(\cdot,\cdot)$, $((\cdot,\cdot))$, $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$.

Definição 3.1. *Dizemos que* $u : Q \to \mathbb{R}$ *é solução fraca de* (2.11) *quando*

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

e satisfaz

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(u(t),v) + ((u(t),v)) + (a(t)u(t),v) + (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u(t),v)\\ &-\int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma),v))\,d\sigma = (l(t),v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\end{aligned}$$

no sentido de $D'(0,T)$ *com* $u(0) = u_0$.

Teorema 3.4. *Se* $l \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *e* $u_0 \in L^2(\Omega)$*, então o problema* (2.11) *admite uma única solução fraca* u *com regularidade*

$$u \in C^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

Demonstração. A prova é baseada no método de Faedo-Galerkin que consiste, inicialmente, em obter soluções aproximadas em um espaço de dimensão finita, após isso estebelecer estimativas para as soluções aproximadas e finalmente, na passagem ao limite das soluções aproximadas.

- **Existência**

Soluções Aproximadas.

Seja $(w_n)_{n\geqslant 1}$ uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ formada por autofunções do operador $-\Delta$ e $V_m = [w_1, ..., w_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros vetores dessa base. Definimos o *problema aproximado* como sendo

$$\begin{gathered} u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t) w_i(x) \in V_m \text{ tal que} \\ (u_m'(t), w_j) \;+\; ((u_m(t), w_j)) \;+\; (a(t)u_m(t), w_j) \\ -\int_0^t g(t-\sigma)\,((u_m(\sigma), w_j))\,d\sigma + (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u_m(t), w_j) = (l(t), w_j) \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \;\in\; L^2(\Omega),\; m \to +\infty. \end{gathered} \tag{3.54}$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias acima tem solução em $[0, t_m]$, $t_m < T$. Agora estenderemos a solução local para o intervalo $[0, T]$ como consequência das estimativas que faremos abaixo.

Estimativas a priori.

Multiplicando (3.54) por $h_{jm}(t)$ e somando de 1 até m, obtemos que

$$\begin{aligned} &(u_m'(t), u_m(t)) + ((u_m(t), u_m(t))) + (a(t)u_m(t), u_m(t)) \\ &-\int_0^t g(t-\sigma)\,((u_m(\sigma), u_m(t)))\,d\sigma + (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u_m(t), u_m(t)) = (l(t), u_m(t)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 = -(a(t)u_m(t), u_m(t)) \\ &+\int_0^t g(t-\sigma)\,((u_m(\sigma), u_m(t)))\,d\sigma - (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u_m(t), u_m(t)) + (l(t), u_m(t)). \end{aligned}$$

Integrando essa última expressão de 0 a t e usando as desigualdades de Young, Hölder, Young para convoluções e Young com ε, concluimos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}|u_m(t)|^2\,dt + \int_0^t \|u_m(t)\|^2\,dt \leqslant K\int_0^t |u_m(t)|^2\,dt + \|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t \|u_m(t)\|^2\,dt \\ &+\frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t |u_m(t)|^2\,dt + \varepsilon\int_0^t \|u_m(t)\|^2\,dt + \int_0^t |l(t)|^2\,dt + \int_0^t |u_m(t)|^2\,dt, \end{aligned}$$

onde $K = \max\{\|a\|_{L^\infty(Q)}, \|\overrightarrow{b}\|_{L^\infty(Q)}\}$.

Assim, vale que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \int_0^t \|u_m(t)\|^2\,dt \leqslant \left(K + \frac{K^2}{4\varepsilon} + 1\right)\int_0^t |u_m(t)|^2\,dt + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 \\ &+\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t \|u_m(t)\|^2\,dt + \varepsilon\int_0^t \|u_m(t)\|^2\,dt + \int_0^t |l(t)|^2\,dt, \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u_m(t)|^2 &\leqslant \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 - \left(-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\int_0^t \|u_m(t)\|^2\, dt \\ &+ \left(K + \frac{K^2}{4\varepsilon} + 1\right)\int_0^t |u_m(t)|^2\, dt + |l|_{L^2(Q)}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Vamos tomar $\varepsilon > 0$ de modo que $-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)} > 0$, ou seja, $0 < \varepsilon < 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}$.

Se denotarmos

- $x(t) = \frac{1}{2}|u_m(t)|^2$,
- $\alpha(t) = |l|^2_{L^2(Q)} - \left(-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\int_0^t \|u_m(t)\|^2\, dt + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2$,
- $\beta(t) = 2\left(K + \frac{K^2}{4\varepsilon} + 1\right)$,

então a expressão (3.55) é equivalente a

$$x(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)x(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

donde, pela desigualdade de Grönwall (Teorema 1.2), nos leva a estimativa

$$x(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\alpha(s)\exp\left[\int_s^t \beta(u)\, du\right]\, ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Observando que $\beta(s)$ é constante e que valem as desigualdades

$$\alpha(s) \leqslant |l|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 \leqslant C,$$

e

$$\exp\left[\int_s^t \beta(u)\, du\right] \leqslant e^{M_1 T} \quad (M_1 \text{ constante positiva})$$

então concluimos que

$$\int_0^t \beta(s)\alpha(s)\exp\left[\int_s^t \beta(u)\, du\right]\, ds \leqslant Ce^{M_1 T}.$$

Assim, temos que para todo $t \in [0,T]$, vale que

$$\begin{aligned} x(t) &\leqslant \alpha(t) + Ce^{M_1 T} \\ &= |l|^2_{L^2(Q)} - \left(-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\int_0^t \|u_m(t)\|^2\, dt + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 + Ce^{M_1 T}, \end{aligned}$$

isto é,

$$x(t) + \left(-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\int_0^t \|u_m(t)\|^2\, dt \leqslant |l|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 + Ce^{M_1 T}, \quad \forall t \in [0,T].$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + (-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}) \int_0^t \|u_m(t)\|^2 \, dt \leqslant Ce^{M_1 T}, \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.56}$$

onde $-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}$ é positivo e M_1 é uma constante positiva.

Assim, da desigualdade (3.56), segue que

$$u_m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$u_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

donde deduzimos, a menos de subsequência, que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.57}$$

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.58}$$

Passagem ao limite.

Multiplicando (3.54) por $\theta \in D(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta(t)\, dt + \int_0^T ((u_m(t), w_j))\, \theta(t)\, dt + \int_0^T (a(t)u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt \\
&- \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)\, ((u_m(\sigma), w_j))\, \theta(t)\, d\sigma dt + \int_0^T (\overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt \\
&\qquad = \int_0^T (l(t), w_j)\theta(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Integrando por partes essa última expressão, temos que

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)\, dt + \int_0^T ((u_m(t), w_j))\, \theta(t)\, dt + \int_0^T (a(t)u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt \\
&- \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)\, ((u_m(\sigma), w_j))\, \theta(t)\, d\sigma dt + \int_0^T (\overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt \\
&\qquad = \int_0^T (l(t), w_j)\theta(t)\, dt,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T (u_m(t), w_j\theta'(t))\, dt + \int_0^T ((u_m(t), w_j\theta(t)))\, dt + \int_0^T (a(t)u_m(t), w_j\theta(t))\, dt \\
&- \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)\, ((u_m(\sigma), w_j\theta(t)))\, d\sigma dt + \int_0^T (\overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla u_m(t), w_j\theta(t))\, dt \\
&\qquad = \int_0^T (l(t), w_j\theta(t))\, dt.
\end{aligned}$$

De (3.57) e (3.58), obtemos as convergências

$$\int_0^T ((u_m(t), w_j\theta(t)))\, dt \to \int_0^T ((u(t), w_j\theta(t)))\, dt,$$

$$\int_0^T (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u_m(t), w_j\theta(t))\, dt \to \int_0^T (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u(t), w_j\theta(t))\, dt,$$

$$\int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)\,((u_m(\sigma), w_j\theta(t)))\, d\sigma dt \to \int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)\,((u(\sigma), w_j\theta(t)))\, d\sigma dt,$$

$$\int_0^T (u_m(t), w_j\theta'(t))\, dt \to \int_0^T (u(t), w_j\theta'(t))\, dt$$

e

$$\int_0^T (a(t)u_m(t), w_j\theta(t))\, dt \to \int_0^T (a(t)u(t), w_j\theta(t))\, dt.$$

Das convergências acima resulta que

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T (u(t), w_j\theta'(t))\, dt \;+\; \int_0^T ((u(t), w_j\theta(t)))\, dt \;+\; \int_0^T (a(t)u(t), w_j\theta(t))\, dt\\
&-\int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)\,((u(\sigma), w_j\theta(t)))\, d\sigma dt + \int_0^T (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u(t), w_j\theta(t))\, dt\\
&\qquad = \int_0^T (l(t), w_j\theta(t))\, dt.
\end{aligned}$$

Sendo o conjunto das combinações lineares finitas dos w_j's denso em $H_0^1(\Omega)$, concluimos que

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T (u(t), v\theta'(t))\, dt \;+\; \int_0^T ((u(t), v\theta(t)))\, dt \;+\; \int_0^T (a(t)u(t), v\theta(t))\, dt\\
&-\int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)\,((u(\sigma), v\theta(t)))\, d\sigma dt + \int_0^T (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u(t), v\theta(t))\, dt\\
&\qquad = \int_0^T (l(t), v\theta(t))\, dt,
\end{aligned}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Dessa última expressão, deduzimos que

$$\begin{aligned}
&-\Big\langle (u(t), v), \theta'(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} + \Big\langle ((u(t), v)), \theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)}\\
&+\Big\langle (a(t)u(t), v), \theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} - \Big\langle \int_0^t g(t-\sigma)(\nabla u, \nabla v)\, d\sigma, \theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)}\\
&+\Big\langle (\overrightarrow{b}\cdot\nabla u(t), v), \theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} = \Big\langle (l(t), v), \theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Big\langle \frac{d}{dt}(u(t),v) + ((u(t),v)) + (a(t)u(t),v) - \int_0^t g(t-\sigma)(\nabla u, \nabla v)\, d\sigma$$
$$+(\overrightarrow{b} \cdot \nabla u(t),v) - (l(t),v), \theta(t) \Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} = 0,$$

para todo $\theta \in D(0,T)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$, donde concluimos que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(u(t),v) + ((u(t),v)) + (a(t)u(t),v) - \int_0^t g(t-\sigma)(\nabla u, \nabla v)\, d\sigma \\ &+(\overrightarrow{b} \cdot \nabla u(t),v) = (l(t),v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{3.59}$$

no sentido de $D'(0,T)$.

Resta mostrarmos que $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Com efeito, em particular, se $v \in D(\Omega)$, então de (3.59) segue que

$$\begin{aligned} &\Big\langle u'(t),v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} - \Big\langle \Delta u(t),v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} + \Big\langle a(t)u(t),v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} \\ &+\Big\langle \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma, v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} + \Big\langle \overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla u(t),v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} \\ &= \Big\langle l(t),v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{3.60}$$

no sentido de $D'(0,T)$, ou ainda,

$$\begin{aligned} &\Big\langle u'(t),v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} - \Big\langle \Delta u(t),v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} + \Big\langle a(t)u(t),v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} \\ &+\Big\langle \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma, v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} + \Big\langle \overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla u(t),v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} \\ &= \Big\langle l(t),v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

$$\Big\langle u'(t) - \Delta u(t) + a(t)u(t) + \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma$$
$$+ \overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla u(t) - l(t), v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = 0,$$

no sentido de $D'(0,T)$.

Logo, resulta que

$$u' - \Delta u + au + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma = l \text{ em } D'(Q).$$

Lembrando que $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, temos

$$au \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

$$\Delta u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$
$$\overrightarrow{b} \cdot \nabla u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,d\sigma \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$
$$l \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

donde concluimos que $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Assim, de

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ e } u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

deduzimos, pelo Lema de Lions-Magenes (Teorema 1.12), que $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$.

- **Dado inicial**

Agora mostraremos que $u(0) = u_0$. Com efeito, multiplicando a equação do problema aproximado (3.54) por uma função $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e integrando de 0 a T, obtemos que

$$\int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta(t)\,dt \;+\; \int_0^T ((u_m(t), w_j))\,\theta(t)\,dt \;+\; \int_0^T (a(t)u_m(t), w_j)\theta(t)\,dt$$
$$-\int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)\,((u_m(\sigma), w_j))\,\theta(t)\,d\sigma dt + \int_0^T (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u_m(t), w_j)\theta(t)\,dt$$
$$= \int_0^T (l(t), w_j)\theta(t)\,dt,$$

ou, equivalentemente, após usar integração por partes na primeira integral, resulta que

$$\begin{aligned} &-(u_m(0), w_j) - \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)\,dt \;+\; \int_0^T ((u_m(t), w_j))\,\theta(t)\,dt \\ &+\int_0^T (a(t)u_m(t), w_j)\theta(t)\,dt - \int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)\,((u_m(\sigma), w_j))\,\theta(t)\,d\sigma dt \\ &+\int_0^T (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u_m(t), w_j)\theta(t)\,dt = \int_0^T (l(t), w_j)\theta(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Das convergências

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$
$$u_m(0) \to u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

podemos passar o limite em (3.61), obtendo

$$-(u_0, w_j) - \int_0^T (u(t), w_j\theta'(t))\,dt + \int_0^T ((u(t), w_j\theta(t)))\,dt + \int_0^T (au(t), w_j\theta(t))\,dt$$
$$+\int_0^T (\overrightarrow{b}\cdot\nabla u(t), w_j\theta(t))\,dt - \int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma), w_j\theta(t)))d\sigma\,dt = \int_0^T (l(t), w_j\theta(t))\,dt.$$

Sendo o conjunto das combinações lineares finitas dos w_j's denso em $H_0^1(\Omega)$, concluimos que

$$\begin{aligned} -(u_0,v) - \int_0^T (u(t), v\theta'(t))\,dt + \int_0^T ((u(t), v\theta(t)))\,dt + \int_0^T (a(t)u(t), v\theta(t))\,dt \\ + \int_0^T (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u(t), v\theta(t))\,dt - \int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma), v\theta(t)))d\sigma\,dt \\ = \int_0^T (l(t), v\theta(t))\,dt, \end{aligned} \tag{3.62}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, como

$$u' = \Delta u - au - \overrightarrow{b}\cdot\nabla u - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,d\sigma + l \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

então,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle u'(t), v\theta(t)\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt = -\int_0^T ((u(t), v\theta(t)))\,dt - \int_0^T (au(t), v\theta(t))\,dt \\ - \int_0^T (\overrightarrow{b}\cdot\nabla u(t), v\theta(t))\,dt + \int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma), v\theta(t)))d\sigma\,dt \\ + \int_0^T (l(t), v\theta(t))\,dt. \end{aligned} \tag{3.63}$$

De (3.62) e (3.63), temos que

$$\int_0^T \left\langle u'(t), v\theta(t)\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt = -(u_0,v) - \int_0^T (u(t), v\theta'(t))\,dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$-\int_0^T \frac{d}{dt}(u(t), v\theta(t))\,dt = (u_0, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$(u(0), v) = (u_0, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Da densidade de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, temos

$$(u(0), v) = (u_0, v) \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

donde concluimos que $u(0) = u_0$.

- **Unicidade**

Para provarmos a unicidade, suponhamos que u_1 e u_2 são soluções fracas de (2.11). Considerando $w = u_1 - u_2$, temos que

$$\begin{aligned}
&w' - \Delta w - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta w(\sigma)\, d\sigma + a w + \overrightarrow{b} \cdot \nabla w = 0 \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),\\
&w = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma,\\
&w(x,0) = 0 \ \text{ em } \ \Omega,\\
&w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \qquad w' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Multiplicando $(3.64)_1$ por w e integrando em Ω, nos conduz a expressão

$$\begin{aligned}
&\Big\langle w'(t), w(t) \Big\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + ((w(t), w(t))) - \int_0^t g(t-\sigma)((w(\sigma), w(t)))\, d\sigma\\
&+ (a(t)w(t), w(t)) + (\overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla w(t), w(t)) = 0.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \|w(t)\|^2 &= -(a(t)w(t), w(t))\\
&+ \int_0^t g(t-\sigma)\,((w(\sigma), w(t)))\, d\sigma - (\overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla w(t), w(t)).
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t e utilizando as desigualdades de Young, Hölder, Young para convoluções e Young com ε, concluimos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}|w(t)|^2\, dt + \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt \leqslant K \int_0^t |w(t)|^2\, dt\\
&+ \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt + \frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t |w(t)|^2\, dt + \varepsilon \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt,
\end{aligned}$$

onde $K = \max\{\|a\|_{L^\infty(Q)}, \|\overrightarrow{b}\|_{L^\infty(Q)}\}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|w(t)|^2\, dt + \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt \leqslant K \int_0^t |w(t)|^2\, dt + \frac{1}{2}|w(0)|^2\, dt\\
&+ \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt + \frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t |w(t)|^2\, dt + \varepsilon \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt,
\end{aligned}$$

donde,

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2\, dt + \big(-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\big) \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt \leqslant \frac{1}{2}|w(0)|^2 + C \int_0^t |w(t)|^2\, dt, \tag{3.65}$$

onde $C = K + \dfrac{K^2}{4\varepsilon}$. Vamos tomar $\varepsilon > 0$ de modo que $-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)} > 0$, ou seja, $0 < \varepsilon < 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}$.

Como $w(0)=0$ e $\left(-\varepsilon+1-\|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\displaystyle\int_0^t \|w(t)\|^2\,dt \geqslant 0$, então a desigualdade (3.65) nos leva a

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 \leqslant C\int_0^t |w(t)|^2\,dt,$$

ou seja,

$$|w(t)|^2 \leqslant C\int_0^t |w(t)|^2\,dt.$$

Pela desigualdade de Grönwall (Teorema 1.2), concluimos que

$$|w(t)|^2 \leqslant 0\cdot\exp\left(\int_0^t C\,dt\right) = 0,$$

e portanto, $|w(t)|^2 = 0$ para todo $t\in[0,T]$. Logo, $u_1 = u_2$.

□

Definição 3.2. *Dizemos que* $u: Q\to\mathbb{R}$ *é solução forte de* (2.11) *quando*

$$u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\quad u'\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

e satisfaz

$$u' - \Delta u + au + \overrightarrow{b}\cdot\nabla u + g*\Delta u = l,$$

em $L^2(Q)$ *com* $u(0)=u_0$.

Teorema 3.5. *Se* $l\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *e* $u_0\in H_0^1(\Omega)$, *então o problema* (2.11) *admite uma única solução forte* u *com regularidade*

$$u\in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)).$$

Demonstração. Para provarmos a existência, usaremos novamente o método de Faedo-Galerkin.

- **Existência**

Soluções Aproximadas.

Seja $(w_n)_{n\geqslant 1}$ uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ formada por autofunções do operador $-\Delta$ e $V_m=[w_1,...,w_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros vetores dessa base. Definimos o *problema aproximado* como sendo

$$\begin{gathered} u_m(x,t)=\sum_{i=1}^m h_{im}(t)w_i(x)\in V_m \text{ tal que} \\ (u_m'(t),w_j) + ((u_m(t),w_j)) + (a(t)u_m(t),w_j) \\ -\int_0^t g(t-\sigma)\,((u_m(\sigma),w_j))\,d\sigma + (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u_m(t),w_j) = (l(t),w_j) \\ u_m(0)=u_{0m}\to u_0 \ \in\ H_0^1(\Omega),\ m\to+\infty. \end{gathered} \tag{3.66}$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias acima tem solução em $[0, t_m]$, $t_m < T$. Agora estenderemos a solução local para o intervalo $[0, T]$ como consequência das estimativas que faremos abaixo.

Estimativas a priori.

Multiplicando (3.66) por $-\lambda_j h_{jm}(t)$ e somando de 1 até m, obtemos que

$$-((u_m'(t), u_m(t))) - (\Delta u_m(t), \Delta u_m(t)) + (a(t)u_m(t), \Delta u_m(t))$$

$$-\int_0^t g(t-\sigma)\,(\Delta u_m(\sigma), \Delta u_m(t))\,d\sigma + (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u_m(t), \Delta u_m(t)) = (l(t), \Delta u_m(t)),$$

ou seja,

$$((u_m'(t), u_m(t))) + (\Delta u_m(t), \Delta u_m(t)) = -(l(t), \Delta u_m(t)) + (a(t)u_m(t), \Delta u_m(t))$$

$$-\int_0^t g(t-\sigma)\,(\Delta u_m(\sigma), \Delta u_m(t))\,d\sigma + (\overrightarrow{b}(t)\cdot\nabla u_m(t), \Delta u_m(t)),$$

donde

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + |\Delta u_m(t)|^2\\
&\leqslant |l(t)||\Delta u_m(t)| + K|u_m(t)||\Delta u_m(t)|\\
&\qquad + K|\Delta u_m(t)|\|u_m(t)\| + \int_0^t g(t-\sigma)\,(\Delta u_m(\sigma), \Delta u_m(t))\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Integrando essa última expressão de 0 a t, e aplicando de Young com ε, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\,dt + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2\\
&\leqslant \int_0^t |l(t)||\Delta u_m(t)|\,dt + K\int_0^t |u_m(t)||\Delta u_m(t)|\,dt\\
&\qquad + K\int_0^t |\Delta u_m(t)|\|u_m(t)\|\,dt + \int_0^t\int_0^t g(t-\sigma)\,(\Delta u_m(\sigma), \Delta u_m(t))\,d\sigma\\
&\leqslant \int_0^t \varepsilon|l(t)|^2\,dt + \int_0^t \frac{1}{4\varepsilon}|\Delta u_m(t)|^2 + \int_0^t \varepsilon K^2|u_m(t)|^2\,dt + \int_0^t \frac{1}{4\varepsilon}|\Delta u_m(t)|\,dt\\
&\qquad + \int_0^t \varepsilon K^2\|u_m(t)\|^2\,dt + \int_0^t \frac{1}{4\varepsilon}|\Delta u_m(t)|^2\,dt + \int_0^t\int_0^t g(t-\sigma)\,(\Delta u_m(\sigma), \Delta u_m(t))\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré na terceira integral do lado direito da última desigualdade acima, nos conduz a expressão

$$\begin{aligned}
&\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\,dt + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2\\
&\leqslant \int_0^t \varepsilon|l(t)|^2\,dt + \int_0^t \frac{1}{4\varepsilon}|\Delta u_m(t)|^2 + \int_0^t \varepsilon K^2 c_1\|u_m(t)\|^2\,dt + \int_0^t \frac{1}{4\varepsilon}|\Delta u_m(t)|\,dt\\
&\qquad + \int_0^t \varepsilon K^2\|u_m(t)\|^2\,dt + \int_0^t \frac{1}{4\varepsilon}|\Delta u_m(t)|^2\,dt + \int_0^t\int_0^t g(t-\sigma)\,(\Delta u_m(\sigma), \Delta u_m(t))\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\, dt + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 \\
&\leqslant \int_0^t \varepsilon |l(t)|^2\, dt + \frac{3}{4\varepsilon}\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2 + (\varepsilon K^2 c_1 + \varepsilon K^2)\int_0^t \|u_m(t)\|^2\, dt \\
&\qquad + \int_0^t\int_0^t g(t-\sigma)\left(\Delta u_m(\sigma), \Delta u_m(t)\right) d\sigma.
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Usando que

$$
\int_0^t\int_0^t g(t-\sigma)\left(\Delta u_m(\sigma), \Delta u_m(t)\right) d\sigma \leqslant \|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\, dt
$$

em (3.67), segue que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\, dt + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 \\
&\leqslant \int_0^t \varepsilon |l(t)|^2\, dt + \frac{3}{4\varepsilon}\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\, dt + (\varepsilon K^2 c_1 + \varepsilon K^2)\int_0^t \|u_m(t)\|^2\, dt \\
&\qquad + \|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\, dt.
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 \\
&\leqslant \varepsilon |l|^2_{L^2(Q)} - \left(-\frac{3}{4\varepsilon} + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\, dt \\
&\qquad + (\varepsilon K^2 c_1 + \varepsilon K^2)\int_0^t \|u_m(t)\|^2\, dt + \|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\, dt.
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

Vamos tomar $\varepsilon > 0$ de modo que $-\dfrac{3}{4\varepsilon} + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)} > 0$, ou seja, $\varepsilon > \dfrac{3}{4(1-\|g\|)}$

Se denotarmos

- $x(t) = \dfrac{1}{2}\|u_m(t)\|^2$,
- $\alpha(t) = \varepsilon |l|^2_{L^2(Q)} - \left(-\dfrac{3}{4\varepsilon} + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\displaystyle\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\, dt + \dfrac{1}{2}\|u_m(0)\|^2$,
- $\beta(t) = 2\left(\varepsilon K^2 c_1 + \varepsilon K^2\right)$,

então a desigualdade (3.69) é equivalente a

$$
x(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)x(s)\, ds, \quad \forall t \in [0, T].
$$

Pela desigualdade de Grönwall (Teorema 1.2), segue que

$$x(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\alpha(s)\exp\left[\int_s^t \beta(u)\, du\right]\, ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.70}$$

Observando que $\beta(s)$ é constante e que valem as desigualdades

$$\alpha(s) \leqslant \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 + \varepsilon|l|^2_{L^2(Q)} \leqslant C$$

e

$$\exp\left[\int_s^t \beta(u)\, du\right] \leqslant e^{M_1 T}$$

então

$$\int_0^t \beta(s)\alpha(s)\exp\left[\int_s^t \beta(u)\, du\right]\, ds \leqslant Ce^{M_1 T}.$$

Assim, pela desigualdade (3.70), temos para todo $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} x(t) &\leqslant \alpha(t) + Ce^{M_1 T} \\ &= \varepsilon|l|^2_{L^2(Q)} - \left(-\frac{3}{4\varepsilon} + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\, dt + \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 \\ &+ Ce^{M_1 T}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} x(t) + \left(-\frac{3}{4\varepsilon} + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\, dt &\leqslant \varepsilon|l|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 \\ &+ Ce^{M_1 T}, \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 + \left(-\frac{3}{4\varepsilon} + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\int_0^t |\Delta u_m(t)|^2\, dt \leqslant Ce^{M_1 T}, \quad \forall t \in [0,T],$$

onde $-\frac{3}{4\varepsilon} + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}$ é positivo e M_1 é uma constante positiva.

Assim, da última desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} u_m &\text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \Delta u_m &\text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

donde deduzimos, a menos de subsequência, que

$$\begin{aligned} u_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \Delta u_m &\rightharpoonup \Delta u \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Passagem ao limite.

Multiplicando (3.66) por $\theta \in D(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtemos que

$$\int_0^T (u_m'(t), v)\theta(t)\,dt + \int_0^T ((u_m(t), v))\theta(t)\,dt + \int_0^T (a u_m(t), v)\theta(t)\,dt$$
$$+ \int_0^T (\overrightarrow{b} \cdot \nabla u_m(t), v)\theta(t)\,dt - \int_0^T \theta(t) \int_0^t g(t-\sigma)((u_m(\sigma), v))\,d\sigma dt$$
$$= \int_0^T (l(t), v)\theta(t)\,dt,$$

ou, equivalentemente, após usarmos integração por partes nessa última expressão e notando que $\theta(0) = \theta(T) = 0$, então temos que

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (u_m(t), v\theta'(t))\,dt + \int_0^T ((u_m(t), v\theta(t)))\,dt + \int_0^T (a u_m(t), v\theta(t))\,dt \\ &+ \int_0^T (\overrightarrow{b} \cdot \nabla u_m(t), v\theta(t))\,dt - \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)((u_m(\sigma), v\theta(t)))\,dt \\ &= \int_0^T (l(t), v\theta(t))\,dt. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Da convergência $\Delta u_m \rightharpoonup \Delta u$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, vale que

$$\int_0^T ((u_m(t), v))\theta(t)\,dt = \int_0^T (-\Delta u_m(t), v)\theta(t)\,dt$$

converge para

$$\int_0^T (-\Delta u(t), v)\theta(t)\,dt = \int_0^T ((u(t), v))\theta(t)\,dt.$$

Da convergência $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, resulta que

$$\int_0^T (\overrightarrow{b} \cdot \nabla u_m(t), v\theta(t))\,dt \to \int_0^T (\overrightarrow{b} \cdot \nabla u(t), v\theta(t))\,dt.$$

Da convergência $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, segue que

$$\int_0^T (a u_m(t), v\theta(t))\,dt \to \int_0^T (a u(t), v\theta(t))\,dt.$$

e

$$-\int_0^T (u_m(t), v\theta'(t))\,dt \to -\int_0^T (u(t), v\theta'(t))\,dt.$$

Agora, observe que da convergência $u_m \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, obtemos que

$$\int_0^T ((u_m(t), z(t)))\,dt \to \int_0^T ((u(t), z(t)))\,dt, \quad \forall z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Tomando as extensões

$$\tilde{u}_m = \left|\begin{array}{l} u_m \text{ em } [0,T] \\ 0 \text{ fora de } [0,T]; \end{array}\right. , \quad \tilde{g}(u) = \left|\begin{array}{l} g(u) \text{ se } u \geqslant 0 \\ 0 \text{ se } u < 0; \end{array}\right. ,$$

$$\tilde{z} = \begin{vmatrix} z \text{ em } [0,T] \\ 0 \text{ fora de } [0,T]; \end{vmatrix}$$

temos que $\nabla\tilde{u}_m, \nabla\tilde{z} \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, $\tilde{g} \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)((u_m(\sigma), z(t)))\, d\sigma dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t-\sigma) \int_{\Omega} \nabla\tilde{u}_m(\sigma) \cdot \nabla\tilde{z}(t)\, dx d\sigma dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \nabla\tilde{z}(t) \cdot \tilde{g} * \nabla\tilde{u}_m(t)\, dx dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \nabla\tilde{u}_m(t) \cdot \tilde{\tilde{g}} * \nabla\tilde{z}(t)\, dx dt.$$

Como $\tilde{\tilde{g}} * \tilde{z} \in L^2(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega))$, então

$$\int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)((u_m(\sigma), z(t)))\, d\sigma dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \nabla\tilde{u}_m(t) \cdot \tilde{\tilde{g}} * \nabla\tilde{z}(t)\, dx dt$$
$$\to \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \nabla\tilde{u}(t) \cdot \tilde{\tilde{g}} * \nabla\tilde{z}(t)\, dx dt = \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma), z(t)))\, d\sigma dt,$$

donde

$$\int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)((u_m(\sigma), v\theta(t)))\, d\sigma dt \to \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma), v\theta(t)))\, d\sigma dt.$$

Assim, fazendo $m \to \infty$ em (3.71), nos leva a expressão

$$-\int_0^T (u(t), v\theta'(t))\, dt + \int_0^T ((u(t), v\theta(t)))\, dt + \int_0^T (au(t), v\theta(t))\, dt$$
$$+ \int_0^T (\overrightarrow{b} \cdot \nabla u(t), v\theta(t))\, dt - \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma), v\theta(t))) d\sigma\, dt = \int_0^T (l(t), v\theta(t))\, dt,$$

e portanto segue que

$$\int_0^T (u'(t), v\theta(t))\, dt + \int_0^T ((u(t), v\theta(t)))\, dt + \int_0^T (au(t), v\theta(t))\, dt$$
$$+ \int_0^T (\overrightarrow{b} \cdot \nabla u(t), v\theta(t))\, dt - \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma), v\theta(t))) d\sigma\, dt = \int_0^T (l(t), v\theta(t))\, dt.$$

Como $\Delta u(t) \in L^2(\Omega)$, então da última desigualdade acima, nos conduz a expressão

$$\int_0^T (u'(t) - \Delta u(t) + a(t)u(t) + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u(t) + \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma - l(t), v\theta(t))\, dt = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in D(0,T)$. Em particular,

$$\int_0^T (u'(t) - \Delta u(t) + a(t)u(t) + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u(t) + \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma - l(t), \varphi\theta(t))\, dt = 0,$$

para todo $\varphi \in D(\Omega)$ e $\theta \in D(0,T)$.

Como $\{\varphi\theta : \varphi \in D(\Omega), \theta \in D(0,T)\}$ é denso em $D(Q)$, temos que

$$\int_0^T (u'(t) - \Delta u(t) + a(t)u(t) + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u(t) + \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma - l(t), \psi(t))\, dt = 0,$$

para todo $\psi \in D(Q)$.

Pelo Lema de du Bois-Reymond (Teorema 1.13), concluimos que

$$u' - \Delta u + a u + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u + \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma = l,$$

em $L^2(Q)$.

Resta mostrarmos que $u \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Com efeito, como

$$u'(t) = l(t) + \Delta u(t) - a(t)u(t) - \overrightarrow{b} \cdot \nabla u(t) - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\, d\sigma,$$

e o lado direito dessa última igualdade pertence a $L^2(\Omega)$, então temos que $u' \in L^2(\Omega)$. Assim, da regularidade

$$u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \text{ e } u' \in L^2(0,T; L^2(\Omega)),$$

concluimos, pelo Teorema de Lions-Magenes (Teorema 1.12), que $u \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$.

- **Dado inicial**

Finalmente, mostraremos que $u(0) = u_0$. Com efeito, multiplicando (3.66) por uma função $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e integrando de 0 a T, obtemos que

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta(t)\, dt \; + \int_0^T ((u_m(t), w_j))\, \theta(t)\, dt \; + \int_0^T (a(t)u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt \\ &- \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)\, ((u_m(\sigma), w_j))\, \theta(t)\, d\sigma dt + \int_0^T (\overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt \\ &\quad = \int_0^T (l(t), w_j)\theta(t)\, dt, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente, após usarmos integração por partes na primeira integral dessa última expressão, deduzimos que

$$\begin{aligned} &-(u_m(0), w_j) - \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)\, dt \; + \int_0^T ((u_m(t), w_j))\, \theta(t)\, dt \\ &+ \int_0^T (a(t)u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt - \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)\, ((u_m(\sigma), w_j))\, \theta(t)\, d\sigma dt \\ &+ \int_0^T (\overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt = \int_0^T (l(t), w_j)\theta(t)\, dt. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Das convergências

$$\begin{aligned} u_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \\ \Delta u_m &\rightharpoonup \Delta u \text{ em } L^2(0,T; L^2(\Omega)), \\ u_m(0) &\to u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

podemos tomar o limite em (3.72), obtendo que

$$
\begin{aligned}
-(u_0, w_j) - \int_0^T (u(t), w_j\theta'(t))\,dt + \int_0^T ((u(t), w_j\theta(t)))\,dt + \int_0^T (au(t), w_j\theta(t))\,dt \\
+ \int_0^T (\overrightarrow{b} \cdot \nabla u(t), w_j\theta(t))\,dt - \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma), w_j\theta(t)))d\sigma\,dt \\
= \int_0^T (l(t), w_j\theta(t))\,dt.
\end{aligned}
$$

Sendo o conjunto das combinações lineares finitas dos w_j's denso em $H_0^1(\Omega)$, concluimos que

$$
\begin{aligned}
-(u_0, v) - \int_0^T (u(t), v\theta'(t))\,dt + \int_0^T ((u(t), v\theta(t)))\,dt + \int_0^T (a(t)u(t), v\theta(t))\,dt \\
+ \int_0^T (\overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla u(t), v\theta(t))\,dt - \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma), v\theta(t)))d\sigma\,dt \\
= \int_0^T (l(t), v\theta(t))\,dt.
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, como

$$
u' = \Delta u - au - \overrightarrow{b} \cdot \nabla u - \int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,d\sigma + l \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),
$$

então,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T (u'(t), v\theta(t))\,dt = -\int_0^T ((u(t), v\theta(t)))\,dt - \int_0^T (au(t), v\theta(t))\,dt \\
- \int_0^T (\overrightarrow{b} \cdot \nabla u(t), v\theta(t))\,dt + \int_0^T \int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma), v\theta(t)))d\sigma\,dt \\
+ \int_0^T (l(t), v\theta(t))\,dt.
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

Por (3.73) e (3.74), resulta que

$$
\int_0^T (u'(t), v\theta(t))\,dt = -(u_0, v) - \int_0^T (u(t), v\theta'(t))\,dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),
$$

isto é,

$$
-\int_0^T \frac{d}{dt}(u(t), v\theta(t))\,dt = (u_0, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),
$$

ou seja,

$$
(u(0), v) = (u_0, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).
$$

Da densidade de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, temos

$$
(u(0), v) = (u_0, v) \quad \forall v \in L^2(\Omega),
$$

donde concluimos que $u(0) = u_0$.

- **Unicidade**

Para provarmos a unicidade, suponhamos que u_1 e u_2 são soluções fortes de (2.11). Considerando $w = u_1 - u_2$, temos que

$$
\begin{cases}
w' - \Delta w - \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)\Delta w(\sigma)\, d\sigma + aw + \overrightarrow{b} \cdot \nabla w = 0 & \text{q.t.p em} \quad Q, \\
w = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\
w(x,0) = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\
w \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \qquad w' \in L^2(0,T; L^2(\Omega)).
\end{cases} \tag{3.75}
$$

Multiplicando $(3.75)_1$ por w e integrando em Ω, obtemos que

$$
\begin{aligned}
&(w'(t), w(t)) + ((w(t), w(t))) - \int_0^t g(t-\sigma)((w(\sigma), w(t)))\, d\sigma \\
&+(a(t)w(t), w(t)) + (\overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla w(t), w(t)) = 0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \|w(t)\|^2 = -(a(t)w(t), w(t)) \\
&+ \int_0^t g(t-\sigma)\,((w(\sigma), w(t)))\, d\sigma - (\overrightarrow{b}(t) \cdot \nabla w(t), w(t)).
\end{aligned}
$$

Integrando essa última expressão de 0 a t e utilizando as desigualdades de Young, Hölder, Young para convoluções e Young com ε, concluimos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}|w(t)|^2\, dt + \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt \leqslant K \int_0^t |w(t)|^2\, dt \\
&+\|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt + \frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t |w(t)|^2\, dt + \varepsilon \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt,
\end{aligned}
$$

onde $K = \max\{\|a\|_{L^\infty(Q)}, \|\overrightarrow{b}\|_{L^\infty(Q)}\}$.

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|w(t)|^2\, dt + \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt \leqslant K \int_0^t |w(t)|^2\, dt + \frac{1}{2}|w(0)|^2\, dt \\
&+\|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt + \frac{K^2}{4\varepsilon}\int_0^t |w(t)|^2\, dt + \varepsilon \int_0^t \|w(t)\|^2\, dt,
\end{aligned}
$$

donde,

$$
\frac{1}{2}|w(t)|^2\, dt + \left(-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\int_0^t \|w(t)\|^2\, dt \leqslant \frac{1}{2}|w(0)|^2 + C\int_0^t |w(t)|^2\, dt, \tag{3.76}
$$

onde $C = K + \dfrac{K^2}{4\varepsilon}$. Vamos tomar $\varepsilon > 0$ de modo que $-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)} > 0$, ou seja, $0 < \varepsilon < 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}$.

Como $w(0) = 0$ e $\left(-\varepsilon + 1 - \|g\|_{L^1(0,\infty)}\right)\int_0^t \|w(t)\|^2\,dt \geqslant 0$, então da última desigualdade acima, segue que

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 \leqslant C\int_0^t |w(t)|^2\,dt,$$

ou seja,

$$|w(t)|^2 \leqslant C\int_0^t |w(t)|^2\,dt.$$

Pela desigualdade de Grönwall (Teorema 1.2), concluímos que

$$|w(t)|^2 \leqslant 0 \cdot \exp\left(\int_0^t C\,dt\right) = 0,$$

e portanto, $|w(t)|^2 = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Substituindo em (3.76), temos $\|w(t)\| = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Logo, $u_1 = u_2$.

$\square$

Apêndice B

O objetivo deste apêndice é estabelecermos formalmente as noções de função adjunta e conjugada, a fim justificar as expressões de A^*, F_1^* e F_2^* vistas no Capítulo 3. Para isso, faremos algumas definições que serão necessárias para o nosso propósito.

Definição 3.3 (Função conjugada). *Seja* $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ *uma função tal que* $\varphi \not\equiv 0$. *Definimos a função conjugada* $\varphi^* : E^* \to (-\infty, +\infty]$ *como*

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in E}\{\langle f, x\rangle - \varphi(x)\}, \quad f \in E^*.$$

Definição 3.4 (Função adjunta). *Seja* $A : E \to F$ *um operador linear. A adjunta de* A *é o operador* $A^* : F' \to E'$ *tal que*

$$\langle v, Au\rangle_{F',F} = \langle A^*v, u\rangle_{E',E}.$$

Mostraremos que $F_1^*(f) = F_1(f)$ para cada $f \in L^2(\Gamma_0)$, ou seja,

$$F_1(f) = \sup_{x \in L^2(\Gamma_0)}\{\langle f, x\rangle - F_1(x)\}.$$

Inicialmente, observamos que para cada $f \in L^2(\Gamma_0)$ fixado, temos que $F_1(f)$ pertence a este conjunto, visto que

$$F_1(f) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} |f|^2\, d\Gamma = \langle f, f\rangle - F_1(f).$$

Agora para concluirmos, basta mostrar que $F_1(f)$ é cota superior do conjunto. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
F_1(f) - \langle f, x\rangle + F_1(x) &= F_1(f) - \int_{\Gamma_0} fx\, d\Gamma + \int_{\Gamma_0} |x|^2\, d\Gamma \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} |f|^2\, d\Gamma - \int_{\Gamma_0} fx\, d\Gamma + \int_{\Gamma_0} |x|^2\, d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_0} f(f-x)\, d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} (x^2 - f^2)\, d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_0} f(f-x)\, d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} (x+f)(x-f)\, d\Gamma \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} 2f(f-x)\, d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} (x+f)(x-f)\, d\Gamma \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} (f-x)(2f-(x+f))\, d\Gamma \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} |f-x|^2\, d\Gamma \geqslant 0, \quad \forall x \in L^2(\Gamma_0),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$F_1(f) \geqslant \langle f, x\rangle - F_1(x), \quad \forall x \in L^2(\Gamma_0),$$

o que prova que $F_1(f)$ é cota superior. Logo, $F_1^*(f) = F_1(f)$ para cada $f \in L^2(\Gamma_0)$.

Para F_2^*, observe que

$$\begin{aligned}
F_2^*(\{f^0, f^1\}) &= \sup_{Af \in H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)} \left\{ \left\langle\left\langle Af, \{f^0, f^1\}\right\rangle\right\rangle - F_2(Af) \right\} \\
&= \sup_{Af \in H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)} \left\{ \left\langle\left\langle \{h'(T), -h(T)\}, \{f^0, f^1\}\right\rangle\right\rangle - F_2(Af) \right\} \\
&= \sup_{Af \in H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)} \left\{ \langle h'(T), f^0\rangle - (h(T), f^1) \right\} \\
&= \sup \left\{ \langle -v_0'(T) + v^1 + \varepsilon\gamma_1, f^0\rangle - (-v_0(T) + v^0 - \varepsilon\gamma_0, f^1) \right\} \\
&= \sup \left\{ \langle -v_0'(T) + v^1 + \varepsilon\gamma_1, f^0\rangle + (v_0(T) - v^0 + \varepsilon\gamma_0, f^1) \right\} \\
&= \langle -v_0'(T) + v^1, f^0\rangle + (v_0(T) - v^0, f^1) + \sup \left\{ \langle \varepsilon\gamma_1, f^0\rangle + (\varepsilon\gamma_0, f^1) \right\} \\
&= \langle -v_0'(T) + v^1, f^0\rangle + (v_0(T) - v^0, f^1) + \varepsilon\|f^0\| + \varepsilon|f^1|.
\end{aligned}$$

Para calcularmos a adjunta A^*, lembramos que por (3.37), vale que

$$-\int_{\Gamma_0} \frac{1}{\alpha^2(t)} \varphi_y f\, d\Gamma = \langle h'(T), f^0\rangle - (h(T), f^1), \quad \forall f \in L^2(\Gamma_0).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_0} \frac{1}{\alpha^2(t)}\varphi_y f d\Gamma &= \langle h'(T), f^0\rangle - (h(T), f^1) \\
&= \left\langle\left\langle \{h'(T), -h(T)\}, \{f^0, f^1\}\right\rangle\right\rangle \\
&= \left\langle\left\langle Af, \{f^0, f^1\}\right\rangle\right\rangle \\
&= (f, A^*\{f^0, f^1\}) \\
&= \int_{\Gamma_0} A^*\{f^0, f^1\} f d\Gamma, \quad \forall f \in L^2(\Gamma_0),
\end{aligned}$$

e portanto, segue que

$$A^*\{f^0, f^1\} = -\frac{1}{\alpha^2(t)}\varphi_y.$$

Bibliografia

[1] Araruna, F. D., Araújo, B. S. V., Fernández-Cara, E. - *Stackelberg-Nash null controllability for some linear and semilinear degenerate parabolic equations.* Math. Control Signals Syst. **30,** 14 (2018). https://doi.org/10.1007/s00498-018-0220-6.

[2] Araruna, F. D., Fernández-Cara, E., Guerrero, S., Santos, M. C. - *New results on the Stackelberg-Nash exact control of linear parabolic equations*, Systems & Control Letters, **104** (2017), 78-85.

[3] Araruna, F. D., Fernández-Cara, E., Santos, M. C. - *Stackelberg-Nash exact controllability for linear and semilinear parabolic equations, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations,* **21** (3) (2015), 835-856.

[4] Araruna, F. D., Fernández-Cara, E., da Silva, L. C. - *Hierarchic control for the wave equation*, Journal of Optimization Theory and Applications, 178 (1) (2018), 264-288.

[5] Aubin, J. P. - *Applied Functional Analysis, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, 2000.

[6] Barbu, V. - *Controllability of the heat equation with memory*, Differential and Integral Equations, **13** (2000) 1393-1412.

[7] Barbu, V. - *Differential Equations*, 1st Edition, Springer, 2016.

[8] Borwein, J., Zhu, Q. J. - *Techniques of Variational Analysis.* Springer, 2005.

[9] Brezis, H - *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer-Verlag, 2010.

[10] Chaves-Silva, F.W., Zhang, X., Zuazua, E. - *Controllability of Evolution equations with memory,* Siam J. Control Optim., **55** (2017) 2437–2459.

[11] Cui, L., Liu, X., Gao, H. - *Exact controllability for a one-dimensional wave equation in non-cylindrical domains.* J. Math. Anal. Appl. **402**, (2013) 612-625.

[12] Cui, L., Jiang, Y., Wang, Y. - *Exact controllability for a one-dimensional wave equation with the fixed endpoint control.* Boundary Value Problems, (2015). doi: 10.1186/s13661-015-0476-4.

[13] Díaz, J. - *On the von Neumann problem and the approximate controllability of Stackelberg - Nash strategies for some environmental problems*, Rev. R. Acad. Cien., Serie A. Math., **96** (3), (2002) 343-356.

[14] Díaz, J., Lions, J.-L. - *On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies. in: J.I. Díaz (Ed.), Ocean Circulation and Pollution Control Mathematical and Numerical Investigations*, 17-27, Springer, Berlin, (2005).

[15] Ekeland, I., Temam, R. - *Convex Analysis and Variational Problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1999.

[16] Evans, L. - *Partial Differential Equations*, 2nd Edition, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, American Mathematical Society, 2010.

[17] Fabre, C. - *Uniqueness result for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems,* ESAIM: COCV **1** (1996) 267–302.

[18] Fabre, C., Puel, J. P., Zuazua, E. - *Approximate controllability of the semilinear heat equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 125A (1995) 31-61.

[19] Fernández-Cara, E., Machado, J., Souza, D. - *Non null controllability of Stokes equations with memory,* ESAIM: COCV, doi: 10.1051/cocv/2019067, (2020).

[20] Fernández, L. A., Zuazua, E. - *Approximate controllabillity for the semilinear heat equation involving gradiente terms*, J. Optim. Theory Appls., **101** (2) (1999) 307–328.

[21] Fernández-Cara, E., Zuazua, E., - *Control Theory: History, Mathematical Achievements and Perspectives,* Bol. Soc. Esp. Mat. Aplic., **23**, 79-140, (2003).

[22] Glowinski, R., Ramos, A., Periaux, J. - *Nash equilibria for the multi-objective control of linear differential equations*, Journal of Optimization Theory and Applications **112** (3), (2002) 457-498.

[23] Glowinski, R., Ramos, A., Periaux, J. - *Pointwise Control of the Burgers Equation and Related Nash Equilibrium Problems : Computational Approach*, Journal of Optimization Theory and Applications **112** (3), (2002) 499-516.

[24] González, G., Lopes, F., Rojas-Medar, M. - *On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies for Stokes equations* Proc. Amer. Math. Soc. **141** (5), (2013) 1759-1773.

[25] Guerrero, S., Imanuvilov, O. Y. - *Remarks on non controllability of the heat equation with memory,* ESAIM : COCV, **19** (1) (2013) 288-300.

[26] Jesus, I. P. - *Approximate controllability for a one-dimensional wave equation with the fixed endpoint control,* Journal of Differential Equations, **263**, (2017) 5175-5188.

[27] Jesus, I. P. - *Controllability for a one-dimensional wave equation in a non-cylindrical domain, Mediterr. J. Math.,* **16** (2019) p.111.

[28] Jesus, I. P. - *Hierarchical control for the wave equation with a moving boundary,* Journal of Optimization Theory and Applications, **171**, (2016) 336-350.

[29] Jesus, I. P. - *Hierarchic control for the one-dimensional wave equation in domains with moving boundary*, Nonlinear Analysis: Real World Applications **32**, (2016) 377-388.

[30] Jesus, I. P., Oliveira, A. M., Clark, M. R., Oliveira, P. P. A. - *Controllability for semilinear heat equation with globally Lipschitz nonlinearities and memory term.* Nonlinear Analysis - Real World Applications, **60** 60 (2021) p. 103277.

[31] Kim, J. U. - *Control of a second-order integro-differential equation,* SIAM J. Control Optim. **31** (1993) 101–110.

[32] Lagnese, J. E. - *Boundary Stabilization of Thin Plates,* SIAM Studies in Applied Mathematics **10**, SIAM, Philadelphia, PA, 1989.

[33] Lagnese, J., Lions, J.-L. - *Modelling Analysis and Control of Thin Plates,* Maason, Paris, (1988).

[34] Lasiecka, I. - *Controllability of a viscoelastic Kirchhoff plate,* Intermat. Ser. Numer. Math. **91** (1989) 237–247.

[35] Leugering, G. - *Exact Boundary Controllability of an Integrodiferential Equation,* Appl. Math. Optim. **15** (1987) 223–250.

[36] Lieb, E. H., Loss, M. - *Analysis*, 2nd Edition, American Mathematical Society, Rhode Island, 2001.

[37] Lions, J.-L. - *Some remarks on Stackelberg's optimization*, Math. Models Methods Appl. Sci., **4** (1994), 477-487.

[38] Lions, J. -L., - *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.* Tome 1, Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], **8,** Masson, Paris, 1988, Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch. MR 953547 (90a:49040).

[39] Lions, J. -L. - *Hierarchic control,* Proc. Indian Academic Science Mathematical Science, **104**, 295-304, (1994).

[40] Lions, J. -L., - *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems,* SIAM Rev. **30** (1988), 1-68. MR 931277 (89e:93019).

[41] Lions, J. -L. - *Remarques sur le contrôlabilité approchée*, in Jornadas Hispano-Francesas sobre Controle de Sistemas Distribuidos, University of Málaga, Spain, (1991) 77–87.

[42] Lions, J. -L., Magenes, E. - *Nonhomogeneous boundary value problems and applications*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1972.

[43] Medeiros, L. A., Miranda, M. M. - *Espaços de Sobololev e Equações Diferenciais Parciais, Textos e Métodos Matemáticos,* **9**, IM - UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[44] Miranda, M. M. - *Exact controllability for the wave equation in domains with variable boundary*, Rev. Mat. Univ., **9** (1996), 435-457.

[45] Miranda, M. M. - *HUM and the wave equation with variable coeficients*, Asymptotic Analysis **11**, (1995) 317-341.

[46] Nash, J. F. - *Noncooperative games*, Ann. Math., **54** (1951), 286-295.

[47] Oliveira, P. P. A., Jesus, I. P., Sousa-Neto, G. R., - *Numerical analysis of a wave equation multi-objective controllability problem in a non-cylindrical domain,* Submitted, 2023.

[48] Pareto, V. - *Cours d'économie politique*, Rouge, Laussane, Switzerland, 1896.

[49] Rockafellar, R. - *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1969.

[50] SIAM, Future directions in Control Theory, report of the panel of future Directions in Control Theory, SIAM Report on Issues in Mathematical Sciences, Philadelphia, 1988.

[51] Simon, J. - *Compact sets in the space* $\mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,\mathsf{T};\mathsf{B})$, Annali de Matematica Pura ed Applicata, v. 146 , p. 65-96, 1986.

[52] von Stackelberg, H. - *Marktform und gleichgewicht*, Springer, Berlin, Germany, 1934.

[53] Sun, H., Li, H., Lu, L. - *Exact controllability for a string equation in domains with moving boundary in one dimension,* Eletronic Journal of Differential Equations, **2015**, (2015) 1-7.

[54] Tao, Q., Gao, H. - *On the null controllability of heat equation with memory,* J. Math. Anal. Appl. **1** (2016) 1–13.

[55] Wang, H., He, Y., Li, S. - *Exact controllability problem of a wave equation in non-cylindrical domains*, Eletronic Journal of Differential Equations, **2015**, (2015) 1-13.

[56] Zhang, Q. Lü, X., Zuazua, E. - *Null Controllability for Wave Equations with Memory,* J. Math. Pures Appl. **108** (2017) 500–531.

[57] Zuazua, E. - *Approximate controllabillity for semilinear heat equation with globally Lipschitz nonlinearities,* Control and Cybernetics **28** (1999) 665–683.

[58] Zuazua, E. - *Exact boundary controllabillity for the semilinear heat equation*, Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications. Collège de France Seminar 1987/1988. Vol. X, Research Notes in Mathematics, Pitman, (1991), 357–391.