



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Sobre Boa Colocação Global e Comportamento
Assintótico para a Equação de Schrödinger 3D
Cúbica**

José Vitor Sekeff Budaruiche Sousa

Teresina - 2024

José Vitor Sekeff Budaruiche Sousa

Dissertação de Mestrado:

**Sobre Boa Colocação Global e Comportamento Assintótico para
a Equação de Schrödinger 3D Cúbica**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Mykael de Araujo Cardoso

Teresina - 2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S725s Sousa, José Vitor Sekeff Budaruiche.
 Sobre boa colocação global e comportamento assintótico
 para a equação de Schrödinger 3D cúbica / José Vitor
 Sekeff Budaruiche Sousa. -- 2024.
 80 f. : il.

 Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí,
 Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-
 Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
 “Orientador: Prof. Dr. Mykael de Araújo Cardoso.”

 1. Equação de Schrödinger. 2. Colocação global. 3.
 Espalhamento. I. Cardoso, Mykael de Araújo. II. Título.

CDD 510



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Sobre Boa Colocação Global e Comportamento Assintótico para a Equação de Equação de Schrödinger 3D Cúbica

José Vitor Sekeff Budaruiche Sousa

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 19 de julho de 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Mykael de Araujo Cardoso – Orientador

Prof. Dr. Roger Peres de Moura - UFPI

Prof. Dr. Lucas Cassimiro Campos – UFMG

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha – UESPI

Ao meu filho Benício e minha esposa Isabella.

Aos meus pais Kátia e Isauro.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de estudar e crescer profissionalmente.

Agradeço a minha esposa Isabella e ao meu filho Benício por todo o apoio que sempre me deram.

Agradeço aos meus pais Kátia e Isauro por todo o amor e carinho. Jamais conseguirei expressar minha gratidão.

Agradeço ao meu orientador, Professor Mykael de Araujo Cardoso por todo o apoio, amizade, atenção e orientação durante todo o curso. Sem ele não chegaria onde cheguei.

Agradeço aos meus amigos Danilo e Lázaro por sempre me ajudarem nas horas que mais precisei.

Agradeço a todos os amigos que fiz na UFPI durante o Mestrado. Ana Júlia, Eduardo, Emanuely, Honório, Suerlan, Fáuster, Isaque, Jeffersson Galvão, José Alencar, José Rufino, Luis Estevão, Luzivânia, Vinícius, Wilkreffy, Gabriel, Dieme, João Vinicius, etc. obrigado por todo o apoio!

Agradeço Aos professores Andressa Gomes e Natã Firmino por todo o conhecimento passado nos seminários.

Agradeço aos professores, Cícero, Gleison, Ítalo, Joel e Mykael, por terem ministrados disciplinas incríveis, que jamais esquecerei.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“É justo que muito custe o que muito vale”.

Santa Teresa D’Ávila.

Resumo

Neste trabalho, consideramos o Problema de Valor Inicial associado à equação não linear de Schrödinger cúbica com dado inicial radial em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Para este modelo, estudamos a boa colocação global e o comportamento assintótico de soluções em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Aqui analisamos condições suficientes para obtermos soluções com intervalo máximo de existência infinito e intervalo máximo de existência finito (*blow-up*), baseados no trabalho de Holmer-Roudenko, 2008 [20]. Além disso, usando a técnica aplicada no trabalho de Dodson-Murphy, 2017 [10], mostramos que, no caso das soluções globais estabelecidas, temos a propriedade de espalhamento quando o tempo tende a $\pm\infty$.

Palavras-chave: Equação de Schrödinger; *Blow-up*; Boa Colocação Global; Espalhamento.

Abstract

In this work, we consider the Initial Value Problem associated with the cubic nonlinear Schrödinger equation with radially symmetric initial data in $H^1(\mathbb{R}^3)$. For this model, we study the global well-posedness and the asymptotic behavior of solutions in $H^1(\mathbb{R}^3)$. Here we analyze sufficient conditions to obtain solutions with infinite maximal interval of existence and finite maximal interval of existence (blow-up), based on the work of Holmer-Roudenko, 2008 [20]. Furthermore, using the technique applied in the work of Dodson-Murphy, 2017 [10], we show that in the case of the established global solutions we have the scattering effect when time goes to $\pm\infty$.

Keywords: Schrödinger's Equation; Blow-up; Global Well-Posedness; Scattering.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
2 Noções Preliminares	6
2.1 Notações Utilizadas	6
2.2 Espaços L^p	7
2.3 Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^N)$	11
2.4 Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz	12
2.5 A Transformada de Fourier no Espaço das Distribuições temperadas	13
2.6 Espaços de Sobolev	15
3 Equação de Schrödinger	17
3.1 Equação Linear de Schrödinger	17
3.2 Equação não-linear de Schrödinger em $H^1(\mathbb{R}^N)$	20
3.3 Alguns resultados sobre <i>Ground State</i>	23
4 Resultados Auxiliares	26
4.1 Alguns Resultados Importantes	26
4.2 Evacuação de Energia	33
4.3 Identidades Viriais	41
5 Demonstrações dos Teoremas 1.1 e 1.2	47
5.1 Critério de Espalhamento de Tao	47
5.2 Demonstração do Teorema 1.2	57

Sumário	vii
5.3 Demonstração do Teorema 1.1	60
Apêndice	63
Construção de η	65
Construção de φ	65
Construção de ω	67
Referências Bibliográficas	68

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, consideramos o problema de valor inicial (PVI) associado à equação não linear de Schrödinger (NLS) cúbica

$$\begin{cases} i\partial_t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N), \text{ com } N = 3. \end{cases} \quad (1.1)$$

Segundo Fibich [15], esta equação é geralmente associada à mecânica quântica, porém, também é utilizada na modelagem de fenômenos da física clássica. Na ótica, por exemplo, a equação de Schrödinger surge das equações de Maxwell, que são equações da física clássica (veja o capítulo 1 de [15]). Dentre os fenômenos que são modelados por esta equação está a propagação de raios laser de alta intensidade em meios transparentes. Segundo Sulem e Sulem [23], esta equação modela o comportamento de ondas de água sobre a superfície livre de um fluido ideal e de ondas de plasma. Entende-se por solução de (1.1), uma função $\mathbf{u} \in C(I, H^1(\mathbb{R}^N))$, com $I \ni 0$ um intervalo, tal que para todo $t \in I$ seja satisfeito o princípio de Duhamel em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$\mathbf{u}(t) = e^{it\Delta} \mathbf{u}_0 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(s) ds.$$

Sabemos que o problema (1.1) é localmente bem posto em $H^1(\mathbb{R}^N)$, com $N \in \mathbb{N}$ (veja Ginibre e Velo [18], Cazenave [8], Linares e Ponce [21], Tao [25]), ou seja, para cada dado inicial $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, existe um intervalo $I \in \mathbb{R}$ e uma única solução $\mathbf{u} \in C(I, H^1(\mathbb{R}^N)) \cap E$, onde E é um espaço de Banach auxiliar, e a solução depende continuamente do dado inicial. Além disso, as soluções possuem as seguintes quantidades conservadas, a massa $M(\mathbf{u}(t)) = M(\mathbf{u}(0))$ e a energia $E(\mathbf{u}(t)) = E(\mathbf{u}(0))$, onde

$$M(\mathbf{u}(t)) = \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2,$$

e

$$E(\mathbf{u}(\mathbf{t})) = \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{u}(\mathbf{t})\|_{L^4(\mathbb{R}^N)}^4.$$

No caso em que o intervalo maximal de existência da solução é finito, dizemos que ocorre *blow-up* em tempo finito, ou seja, a solução explode em tempo finito. De acordo com Sulem e Sulem [23] e Fibich [15], na propagação de raios lasers, o fenômeno de *blow-up* corresponde ao colapso das ondas que se propagam. Se a solução existe para qualquer instante $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$, dizemos a solução é global.

A equação não-linear elíptica

$$\Delta Q + |Q|^2 Q - Q = 0, \quad Q = Q(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

tem um número infinito de soluções em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Dentre essas soluções, existe exatamente uma que tem norma $L^2(\mathbb{R}^3)$ mínima, chamada de *ground state*, denotada por Q , e é positiva, radial, suave e decai exponencialmente. Para mais detalhes, veja o apêndice B do trabalho de Terence Tao [25].

Uma solução global \mathbf{u} de (1.1) se espalha, ou seja, acontece o fenômeno de *scattering*, se existir $\mathbf{u}_\pm \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \pm\infty} \|\mathbf{u}(\mathbf{t}) - e^{it\Delta} \mathbf{u}_\pm\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Nosso principal objetivo é mostrar o seguinte teorema devido a Holmer e Roudenko [20].

Teorema 1.1. *Sejam $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ uma função radial e \mathbf{u} a correspondente solução maximal de (1.1), com intervalo maximal de existência I . Suponha que*

$$M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0) < M(Q)E(Q).$$

(1) *Se $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, então*

(a) *$I = \mathbb{R}$ (a solução é global), e,*

(b) *\mathbf{u} se espalha em $H^1(\mathbb{R}^3)$, isto é, existe $\mathbf{u}_\pm \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que*

$$\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \pm\infty} \|\mathbf{u}(\mathbf{t}) - e^{it\Delta} \mathbf{u}_\pm\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

(2) *Se $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} > \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, então I é limitado (a solução explode em tempo finito).*

Em Holmer e Roudenko [20], a prova da afirmação (b) do item (1) do Teorema 1.1 foi feita baseando-se na concentração compacidade-rigidez. No trabalho de Dodson e Murphy [10], é apresentada uma demonstração alternativa para este resultado. Usa-se a imersão Radial de Sobolev para estabelecer a estimativa virial de Morawetz, que implica na 'evacuação da energia' quando $t \rightarrow \pm\infty$. Juntando essas informações e o critério de espalhamento introduzido por Tao em [24], é possível demonstrar a afirmação (b). Em Holmer e Roudenko [20], para a demonstração da afirmação (a) do item (1) e o item (2) do Teorema 1.1, utiliza-se o seguinte Teorema, conhecido como Dicotomia Global versus *Blow-up*, demonstrado em [20].

Teorema 1.2 (Dicotomia Global versus *Blow-up*). *Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ (possivelmente não radial) e seja $I = (-T_{min}, T_{max})$ o intervalo maximal de existência de u solução de (1.1). Então são válidas as seguintes afirmações*

1. *Se $M(u_0)E(u_0) < M(Q)E(Q)$ e $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, então $I = \mathbb{R}$, e para todo instante de tempo $t \in \mathbb{R}$, temos*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

2. *Se $M(u_0)E(u_0) < M(Q)E(Q)$ e $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} > \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, então, para todo instante de tempo $t \in I$, temos*

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} > \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Além disso, se (a) $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ou (b) u_0 é radial, então I é finito, implicando que a solução explode em tempo finito.

Um ingrediente importante na demonstração do Teorema 1.2 vem da aplicação da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 \leq C_{GN} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3,$$

com constante ótima $C_{GN} = \frac{4}{3\|Q\|_{L^2}\|\nabla Q\|_{L^2}}$, estabelecida por M. Weinstein [26]. Duyckaerts e Roudenko em [13] e [12] exploram o comportamento da solução acima do limiar de massa-energia, ou seja, $M(u_0)E(u_0) > M(Q)E(Q)$, onde em [12] explora-se o comportamento no limiar massa-energia, ou seja, o caso em que $M(u_0)E(u_0) = M(Q)E(Q)$. O trabalho

de Cardoso e Campos [7] também explora o comportamento da solução acima do limiar de massa-energia no caso da equação de Schrödinger não-linear e não-homogênea (INLS)

$$\begin{cases} i\partial_t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + |\mathbf{x}|^{-b} |\mathbf{u}|^{p-1} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Nos últimos anos houve avanços no estudo do comportamento assintótico dessas soluções. Dodson e Murphy [11], por exemplo, obtiveram o resultado (1) do Teorema 1.1 sem a hipótese de \mathbf{u}_0 ser radial. Outros trabalhos recentes são os de Arora, Dodson e Murphy [3], que tratam sobre o espalhamento abaixo do *ground state* para a NLS 2D radial, Arora [2], que trata sobre o espalhamento da NLS do tipo focusing para dados radiais e sobre equações hartree generalizadas, Campos [6], que trata sobre o espalhamento de soluções radiais na INLS, e Dinh [9], que trata da teoria do espalhamento da NLS com potencial.

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. No segundo capítulo, apresentamos algumas noções preliminares para os resultados utilizados no trabalho, como, as notações utilizadas, espaços L^p , transformada de Fourier e sua aplicação no espaço de Schwartz e distribuições temperadas, transformada inversa de Fourier e espaços de Sobolev.

No terceiro capítulo introduzimos o PVI associado à equação de Schrödinger linear, que é a motivação para definir o operador $e^{it\Delta}$, introduzimos o PVI associado à equação não-linear de Schrödinger, mostramos a motivação por trás do princípio de Duhamel, definimos o que se entende por solução do PVI não-linear, definimos a boa colocação em $H^1(\mathbb{R}^N)$, apresentamos as estimativas de Strichartz, discutimos sobre o espalhamento e introduzimos resultados sobre o *ground state*.

No quarto capítulo, apresentamos os resultados importantes para a demonstração dos Teoremas 1.1 e 1.2. Inicialmente provamos alguns lemas, como a Imersão Radial de Sobolev, também conhecida como Lema de Strauss, introduzido por Strauss [22]. Após isso, provamos os Lemas 4.4, 4.6 e 4.8, que são resultados de coercividade. A coercividade no Lema 4.4 serve, por exemplo, para mostrar a boa colocação global no Teorema 1.1. Provamos a Identidade Virial, que é necessária para provar a Estimativa Virial de Morawetz. Provamos então a evacuação de energia, que juntamente com o critério de espalhamento de Tao são essenciais para a demonstração da afirmação (1) do Teorema 1.1. Após isso, provam-se alguns lemas necessários para a demonstração do Teorema 1.2.

Finalmente, no quinto capítulo, introduzimos o Lema 5.2 que é o Critério de Espalhamento de Tao que, juntamente com os resultados dos capítulos anteriores, são utilizados

nas demonstrações dos Teoremas 1.1 e 1.2.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados básicos sobre Espaços $L^p(\mathbb{R}^N)$, transformada de Fourier e suas aplicações no espaço de Schwartz e nas distribuições temperadas, e sobre a transformada inversa de Fourier e sobre espaços de Sobolev. Tais resultados são utilizados ao longo de todo este trabalho.

2.1 Notações Utilizadas

- Dado um número $z \in \mathbb{C}$, denotamos por $\Re(z)$ e $\Im(z)$ a parte real de z e a parte imaginária de z respectivamente.
- Dado um número $z \in \mathbb{C}$, denotamos por \bar{z} o conjugado de z .
- Dados dois números reais não negativos \mathbf{a} e \mathbf{b} , escrevemos $\mathbf{a} \lesssim \mathbf{b}$ quando existe uma constante $c > 0$ independente de \mathbf{a} e \mathbf{b} tal que $\mathbf{a} \leq c\mathbf{b}$.
- Denotamos por $B(\mathbf{x}, R)$ a bola aberta de raio R centrada em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.
- Seja $N \in \mathbb{N}$. Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$. Denotamos por $|\mathbf{v}|$ a norma euclidiana de \mathbf{v} . Em particular, se $z \in \mathbb{C}$, o módulo de z é dado por $|z|$.
- Seja E um espaço vetorial normado. Denotamos por $\|\cdot\|_E$ a norma adotada em E .
- Seja \mathbb{Z}_+ o conjunto dos números inteiros não negativos. Seja $N \in \mathbb{N}$. Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$. Seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Definimos $|\alpha| := \sum_{j=1}^N |\alpha_j|$; $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$; $\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N}$.

- Seja $N \in \mathbb{N}$. Em \mathbb{R}^N , definimos $\nabla\phi := (\partial_{x_1}\phi, \dots, \partial_{x_N}\phi)$.
- Sejam E e F espaços topológicos. Denotamos por $C(E, F)$ o conjunto das funções contínuas de E em F . Quando $F = \mathbb{C}$, denotamos simplesmente por $C(E)$. Denotamos por $C_c(E, F)$ o conjunto das funções contínuas de E em F com suporte compacto em E .
- Seja E um espaço topológico. Seja $f \in C(E)$. Dizemos que f se anula no infinito se para todo $\epsilon > 0$, o conjunto $\{x \in E : |f(x)| \geq \epsilon\}$ é compacto. O conjunto das funções que se anulam no infinito é chamado de $C_0(E)$.
- Seja E um espaço vetorial normado. Denotamos por E' o espaço dual de E , isto é, o espaço dos funcionais lineares contínuos de E em \mathbb{C} .
- Dizemos que um espaço vetorial normado E é um espaço de Banach quando este é completo com a métrica induzida pela norma do espaço.
- Dizemos que um espaço vetorial normado E completo munido com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um espaço de Hilbert quando $\|x\|_E^2 = \langle x, x \rangle$ para todo $x \in E$.
- Seja $p \in [1, \infty]$. Denotamos por $p' \in [1, \infty]$ o par conjugado de p , ou seja, p' satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
- Seja $N \in \mathbb{N}$. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f é radial se para quaisquer $x, y \in \Omega$ tais que $|x| = |y|$, temos $f(x) = f(y)$.

Para o restante deste capítulo, consideremos $N \in \mathbb{N}$.

2.2 Espaços L^p

Definição 2.1. *Seja $p \in [1, \infty]$. Denotamos por $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções mensuráveis $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} < \infty$ com*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{\text{ess } x \in \mathbb{R}^N} |f(x)| & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

É conhecido que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}$ é uma seminorma em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. Definamos os espaços $L^p(\mathbb{R}^N)$ por

$$L^p(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) / \sim,$$

onde $f \sim g \iff f \equiv g$ qtp. em \mathbb{R}^N . Seja $[f] \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Denotemos $\|[f]\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ por

$$\|[f]\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}.$$

É um fato conhecido que $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ é uma norma em $L^p(\mathbb{R}^N)$ (veja [1]). De agora em diante não faremos distinção entre $[f]$ e f , e entre $\|[f]\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ e $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$. Também é conhecido que os espaços $L^p(\mathbb{R}^N)$ são espaços de Banach quando munidos com as normas $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ (veja [1]) e que $L^2(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert quando equipado com o produto interno

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \Re \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{u}(x) \bar{\mathbf{v}}(x) dx,$$

(veja [8]). Vemos que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$. Abaixo temos alguns teoremas importantes sobre esses espaços.

Teorema 2.2 (Desigualdade de Hölder). *Seja $p \in [1, \infty]$. Sejam f, g funções mensuráveis de \mathbb{R}^N em \mathbb{C} . Então,*

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}, \text{ para } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Demonstração. Veja o Teorema 4.6, página 92 de [5]. □

Corolário 2.3. *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ satisfazendo*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Sejam f, g funções mensuráveis de \mathbb{R}^N em \mathbb{C} . Então,

$$\|fg\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração. Veja o Corolário 2.5, página 25 de [1]. □

Corolário 2.4 (Desigualdade de Hölder Generalizada). *Seja $M \in \mathbb{N}$. Seja $f = \prod_{j=1}^M f_j$, onde cada f_j é uma função mensurável de \mathbb{R}^N em \mathbb{C} . Sejam $p_j \geq 1$ com $(1 \leq j \leq M)$ e $q \geq 1$ satisfazendo*

$$\frac{1}{q} = \sum_{j=1}^M \frac{1}{p_j}.$$

Então,

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{j=1}^M \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração. Veja o Corolário 2.6, página 25 de [1]. \square

Teorema 2.5 (Desigualdade de Minkowski). *Seja $p \in [1, \infty]$. Sejam f, g funções mensuráveis de \mathbb{R}^N em \mathbb{C} . Então,*

$$\|f + g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração. Veja o Teorema 1.2.2, página 7 de [4]. \square

Teorema 2.6 (Desigualdade de Minkowski para Integrais). *Sejam $M \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty]$. Seja $f : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável tal que $f(\cdot, \mathbf{y}) \in L^p(\mathbb{R}^M)$ para quase todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$. e que a função $\mathbf{y} \mapsto \|f(\cdot, \mathbf{y})\|_{L^p(\mathbb{R}^M)}$ pertença a $L^1(\mathbb{R}^N)$. Então $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^M$, a função $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^M)$ e*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^N} f(\cdot, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^M)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|f(\cdot, \mathbf{y})\|_{L^p(\mathbb{R}^M)} d\mathbf{y}.$$

Demonstração. Veja o Teorema 6.19, página 194 de [16]. \square

Proposição 2.7 (Interpolação da Desigualdade de Hölder). *Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável e $p, q, r \in \mathbb{R}$ tais que $1 \leq p < q < r$ e*

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r},$$

para algum θ satisfazendo $0 < \theta < 1$. Então,

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^\theta \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^{(1-\theta)}.$$

Demonstração. Como $|f| = |f|^\theta |f|^{(1-\theta)}$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\frac{p}{\theta}} + \frac{1}{\frac{r}{1-\theta}},$$

basta aplicarmos o Corolário 2.3. \square

Em vista do Teorema 2.2, para $p = 2$ ($p' = 2$), obtemos a chamada Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}| &= \left| \Re \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \bar{g}(x) dx \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \bar{g}(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| |g(x)| dx \\ &= \|fg\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Teorema 2.8 (Teorema de Riesz-Thorin). *Sejam p_0, p_1, q_0, q_1 números reais tais que $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Seja $T : L^{p_0}(\mathbb{R}^N) + L^{p_1}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{q_0}(\mathbb{R}^N) + L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$ um operador linear limitado de $L^{p_0}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{q_0}(\mathbb{R}^N)$ com norma M_0 e de $L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$ com norma M_1 . Então T é limitado de $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{q_\theta}(\mathbb{R}^N)$ com norma M_θ tal que*

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

Com

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_0}, \quad e \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_0}, \quad \theta \in [0, 1].$$

Demonstração. Veja [21], página 26. □

Teorema 2.9 (Integração por Partes). *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto limitado cuja fronteira ∂U é C^1 . Para cada ponto de ∂U , seja $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ o vetor unitário normal a U que aponta para fora da superfície. Seja $u, v \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$\int_U \partial_i u v dx = - \int_U u \partial_i v dx + \int_{\partial U} u v n_i dS \quad (i = 1, \dots, N).$$

Demonstração. Veja o Teorema 2 da página 712 de [14]. □

Vamos definir agora o que são espaços mistos. Esses espaços serão usados nas estimativas de Strichartz, que são ferramentas importantes no estudo da Equação não-linear de Schrödinger. Para mais detalhes, veja [21].

Definição 2.10. *Sejam $N \in \mathbb{N}$, I um intervalo, $p, q \in (0, \infty)$ e $f : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que para quase todo $t \in I$, $f(t, \cdot) \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Definimos $\|\cdot\|_{L_t^p L_x^q(I \times \mathbb{R}^N)}$ por*

$$\|f\|_{L_t^p L_x^q(I \times \mathbb{R}^N)} := \left(\int_I \|f(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p = \infty$, então,

$$\|f\|_{L_t^p L_x^q(I \times \mathbb{R}^N)} := \sup_{t \in I} \text{ess} \|f(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

Definimos os espaços mistos $L_t^p L_x^q(I \times \mathbb{R}^N)$ por

$$L_t^p L_x^q(I \times \mathbb{R}^N) = \left\{ f : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C} ; \|f\|_{L_t^p L_x^q(I \times \mathbb{R}^N)} < \infty \right\}.$$

2.3 Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^N)$

Nesta seção, definimos e apresentamos resultados sobre a transformada de Fourier. Esta ferramenta é de extrema importância no estudo de equações diferenciais. A transformada de Fourier é inicialmente definida em $L^1(\mathbb{R}^N)$, mas com o auxílio do espaço de Schwartz, pode ser definida em espaços mais gerais.

Definição 2.11. Chamamos de Transformada de Fourier o operador \mathcal{F} definido nas funções em $L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2\pi i(\xi \cdot x)} dx,$$

onde $\xi \cdot x = \sum_{j=1}^N \xi_j x_j$ é o produto interno em \mathbb{R}^N .

Proposição 2.12. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Temos que $\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$. Além disso, $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é linear, contínuo e $\|\mathcal{F}\| = 1$.

Demonstração. Veja a página 249 de [16]. Para provar que $\|\mathcal{F}\| = 1$, basta ver que para $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $g \geq 0$, temos que

$$\mathcal{F}g(0) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) e^{-2\pi i(0 \cdot x)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) dx = \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Logo, temos $\|\mathcal{F}g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$. □

Abaixo temos algumas propriedades conhecidas da transformada de Fourier

Teorema 2.13. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então,

(a) $(f(\cdot - y))^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i(\xi \cdot y)} \widehat{f}(\xi)$ e $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \kappa)$, onde $h(x) = e^{2\pi i(\kappa \cdot x)} f(x)$.

(b) $\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, onde $*$ é o operador convolução.

(c) Se $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, para $|\alpha| \leq k$, então $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^N)$ e $\partial^\alpha \widehat{f} = [(-2\pi i(\cdot))^\alpha f(\cdot)]^\wedge$.

(d) Se $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, para $|\alpha| \leq k$ e $\partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^N)$, para $|\alpha| \leq k - 1$, então $(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(e) $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^N)) \subset C_0(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Veja o Teorema 8.22, página 249 de [16]. □

O item (e) do Teorema 2.13 também é chamado de Lema de Riemann-Lebesgue.

2.4 Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz

Nesta seção, definimos o espaço de Schwartz, que é um espaço de funções de alta regularidade em que todas as suas derivadas (incluindo as de ordem zero) decaem mais rapidamente que qualquer polinômio. Uma importante propriedade deste espaço é sua densidade nos espaços $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < \infty$, o que nos permite, por exemplo, generalizar a definição de transformada de Fourier no espaço $L^1(\mathbb{R}^N) + L^2(\mathbb{R}^N)$.

Definição 2.14. Chamamos de Espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções de decaimento rápido, mais precisamente,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N); \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta f| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N \right\}.$$

Proposição 2.15. O espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ com a topologia gerada pelas semi-normas $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ é completo.

Demonstração. Veja a referência [17]. □

Proposição 2.16. Temos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (e por consequência $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) é denso em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Veja o Teorema 8.17, página 245 de [16]. □

Vemos então que as propriedades listadas no Teorema 2.13 podem ser estendidos para funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, sendo que as hipóteses dos itens (c) e (d) são sempre satisfeitas para essas funções.

Proposição 2.17. $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e a aplicação $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é contínua.

Demonstração. Veja o Corolário 8.23, página 250 de [16]. □

Vamos definir agora a transformada inversa de Fourier.

Definição 2.18. Chamamos de Transformada Inversa de Fourier o operador \mathcal{F}^{-1} definido nas funções em $L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \check{f}(x) := \hat{f}(-x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) e^{2\pi i(\xi \cdot x)} d\xi.$$

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Assim como \mathcal{F} , temos que $\|\mathcal{F}^{-1}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$. Além disso, $\mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é linear, contínuo e $\|\mathcal{F}^{-1}\| = 1$.

Lema 2.19. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\widehat{g}(x)dx.$$

Demonstração. Veja o Lema 8.25, página 251 de [16]. □

Teorema 2.20 (Teorema da Inversão de Fourier). *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ então $f = f_0$ q.t.p., onde f_0 é uma função contínua, e $(\widehat{f})^\sim = (\check{f})^\wedge = f_0$.*

Demonstração. Veja o Teorema 8.26, página 251 de [16]. □

Corolário 2.21. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é um isomorfismo, ou seja, \mathcal{F} é uma bijeção e tanto \mathcal{F} como \mathcal{F}^{-1} são contínuas.

Demonstração. Veja o Corolário 8.28, página 252 de [16]. □

Teorema 2.22 (Teorema de Plancherel). *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e \mathcal{F} com domínio restrito a $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ pode ser estendido unicamente para uma isometria em $L^2(\mathbb{R}^N)$, ou seja, se $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.*

Demonstração. Veja o Teorema 8.29, página 252 de [16]. □

O domínio de \mathcal{F} pode ser então estendido unicamente para $L^1(\mathbb{R}^N) + L^2(\mathbb{R}^N)$ e o Lema 2.19 vale para $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) + L^2(\mathbb{R}^N)$ (veja [21]).

2.5 A Transformada de Fourier no Espaço das Distribuições temperadas

Nesta seção introduzimos o espaço das distribuições temperadas, que é utilizado para generalizar a ideia de funções. Os elementos deste espaço são funcionais lineares contínuos que atuam nas funções do espaço de Schwartz. Este espaço engloba as funções do espaço de Schwartz, assim como funções em $L^p(\mathbb{R}^N)$ (por meio de identificação). Definimos também, nesta seção, a transformada de Fourier para as distribuições temperadas, que serão importantes, por exemplo, para definir os espaços de Sobolev, cujos elementos são distribuições temperadas que tem boas propriedades.

Definição 2.23. *Chamamos de espaço das distribuições temperadas, o espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ (espaço dos funcionais complexos contínuos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$).*

Definição 2.24. *Seja $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Definimos a multiplicação ψF como sendo a distribuição temperada definida a seguir*

$$\langle \psi F, \phi \rangle = \langle F, \psi \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Definição 2.25. *Seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ um multi-índice. Definimos a derivada distribucional de ordem α de $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ como a distribuição temperada $\partial^\alpha F$ definida por*

$$\langle \partial^\alpha F, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Definição 2.26. *Uma função $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é de crescimento polinomial se existirem $C, M \geq 0$ tais que $|f| \leq C(1 + |\cdot|)^M$ q.t.p. em \mathbb{R}^N .*

Proposição 2.27. *Toda função localmente integrável de crescimento polinomial define uma distribuição temperada. Mais precisamente, definimos $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ como*

$$\langle F_f, \phi \rangle = F_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \quad (2.1)$$

Demonstração. Veja a referência [21]. □

De maneira análoga, toda função $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p \leq \infty$, define uma distribuição temperada como em (2.1).

Definição 2.28. *Seja $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Denotamos a transformada de Fourier de F por \widehat{F} , definida por*

$$\widehat{F}(\phi) = \langle \widehat{F}, \phi \rangle := \langle F, \widehat{\phi} \rangle,$$

e a transformada inversa de Fourier de F por \check{F} , definida por

$$\check{F}(\phi) = \langle \check{F}, \phi \rangle := \langle F, \check{\phi} \rangle.$$

Se tivermos $f \in L^1(\mathbb{R}^N) + L^2(\mathbb{R}^N)$, da Definição 2.28, vemos que

$$\langle \widehat{F}_f, \phi \rangle = \langle F_f, \widehat{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\widehat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\phi(\xi)d\xi = \langle F_{\widehat{f}}, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Observa-se então que \widehat{f} coincide com sua Transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

2.6 Espaços de Sobolev

Nesta seção, introduzimos os espaços de Sobolev do tipo $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ e $H^s(\mathbb{R}^N)$, sendo que o primeiro espaço mede a diferenciabilidade de funções $L^p(\mathbb{R}^N)$ e o segundo a diferenciabilidade de distribuições temperadas em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Estes espaços são amplamente usados no estudo de equações diferenciais (veja [8] e [21]). As imersões de Sobolev, por exemplo, mostram que alguns espaços $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ estão imersos em espaços $L^q(\mathbb{R}^N)$, com k, p e q satisfazendo certas propriedades.

Definição 2.29. *Sejam $k \in \mathbb{Z}_+$ e $p \in [1, \infty]$. Chamamos de Espaço de Sobolev os espaços $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ definidos a seguir*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^N) : \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^N), \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N; |\alpha| \leq k\},$$

com a norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Em particular, no caso em que $p = 2$, podemos generalizar os espaços de Sobolev para o caso em que o índice k seja qualquer número real.

Definição 2.30. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $p \in [1, \infty]$. Chamamos de Espaço de Sobolev de ordem s o espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$ definido por*

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{f \in S'(\mathbb{R}^N) : J^s f \in L^2(\mathbb{R}^N), \text{ onde } J^s f(x) = ((1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f})^\vee(x)\},$$

com a norma

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} := \|J^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Usando o Lema 2.19, obtemos que

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição 2.31. *Valem as seguintes afirmações:*

1. Se tivermos $s < s'$, então $H^{s'}(\mathbb{R}^N) \subsetneq H^s(\mathbb{R}^N)$.
2. $H^s(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^N} J^s f(x) \overline{J^s g(x)} dx, \quad \forall f, g \in H^s(\mathbb{R}^N).$$

3. Para cada $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Veja a referência [21]. □

Teorema 2.32. *Se $s \in \mathbb{R}$, então a dualidade entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ induz um isomorfismo unitário entre $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ e $(H^s(\mathbb{R}^N))^*$. Mais precisamente, se $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$, o funcional $\phi \mapsto \langle f, \phi \rangle$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se estende para um funcional linear contínuo em $H^s(\mathbb{R}^N)$ com a norma igual a $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^N)}$, e todo elemento de $(H^s(\mathbb{R}^N))^*$ é desta forma.*

Demonstração. Veja a Proposição 9.16, página 302 de [16]. □

Pelo Teorema 2.32, $(H^s(\mathbb{R}^N))^*$ é identificado com $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 2.33. *Se k é um inteiro não negativo, então $H^k(\mathbb{R}^N)$ coincide com o espaço $W^{k,2}(\mathbb{R}^N)$. Neste caso, as normas $\|f\|_{H^k(\mathbb{R}^N)}$ e $\|f\|_{W^{k,2}(\mathbb{R}^N)}$ são equivalentes.*

Demonstração. Veja o Teorema 3.1, página 47 de [21]. □

Teorema 2.34 (Teorema das Imersões de Sobolev). *Sejam $j \geq 0$ e $m \geq 1$ números inteiros e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Temos então que*

- Se $mp > N$ ou $m = N$, $p = 1$, então,

$$W^{j+m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{j,q}(\mathbb{R}^N), \text{ para } p \leq q \leq \infty.$$

Em particular,

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ para } p \leq q \leq \infty.$$

- Se $mp = N$, então,

$$W^{j+m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{j,q}(\mathbb{R}^N), \text{ para } p \leq q < \infty.$$

Em particular,

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ para } p \leq q < \infty.$$

- Se $mp < N$, então,

$$W^{j+m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{j,q}(\mathbb{R}^N), \text{ para } p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}.$$

Em particular,

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ para } p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}.$$

Demonstração. Veja o Teorema 4.12, página 85 de [1]. □

Capítulo 3

Equação de Schrödinger

Neste capítulo introduzimos a equação de Schrödinger linear, onde as soluções são dadas pelo operador $e^{it\Delta}$, apresentamos a equação não-linear de Schrödinger, definimos o que são soluções dessa equação, bem como a boa colocação para o PVI associado. Enunciamos as estimativas de Strichartz, mostram-se as conservações de energia e massa, definimos o que são soluções globalmente bem postas, definimos o espalhamento de uma solução global e introduzimos o *ground state*, bem como suas propriedades.

3.1 Equação Linear de Schrödinger

Definição 3.1. O operador $\Delta : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ chamado de laplaciano, é definido por

$$\langle \Delta u, \phi \rangle = -\Re \left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla \bar{\phi}(x) dx \right), \text{ com } u, \phi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

É importante notarmos que se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, tem-se que $\Delta u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e coincide com o laplaciano clássico. Agora consideremos o seguinte PVI associado à equação de Schrödinger linear

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (3.1)$$

Vamos supor que exista uma solução de (3.1), $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$. Tomando-se a transformada de Fourier em ambos os lados da equação e aplicando o Teorema 2.13, temos

$$\begin{cases} i\partial_t \hat{u}(t, \xi) - 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0, \\ \hat{u}(0, \cdot) = \widehat{u_0}(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

isto é, um PVI associado a uma EDO separável. Logo, a solução desta EDO é dada por

$$\widehat{u}(t, \xi) = e^{-4\pi^2 i t |\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi)$$

Tomando a transformada inversa, temos

$$u(t, x) = \left(e^{-4\pi^2 i t |\cdot|^2} \widehat{u}_0 \right)^\vee(x)$$

Isto nos motiva a definir o operador $e^{it\Delta}$.

Definição 3.2. *Seja $N \in \mathbb{N}$. Definimos a função $e^{it\Delta} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ como sendo*

$$e^{it\Delta} f = \left(e^{-4\pi^2 i t |\cdot|^2} \widehat{f} \right)^\vee, \text{ com } f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Desta definição, e usando o item (b) do Teorema 2.13, vemos que se $f \in L^1(\mathbb{R}^N) + L^2(\mathbb{R}^N)$, então $e^{it\Delta} f$ é uma função de \mathbb{R}^N em \mathbb{C} dada por

$$\begin{aligned} e^{it\Delta} f(x) &= \left(e^{-4\pi^2 i t |\cdot|^2} \widehat{f} \right)^\vee(x) = \left(\left(e^{-4\pi^2 i t |\cdot|^2} \right)^\vee * f \right)(x) \\ &= \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} f(y) dy. \end{aligned}$$

Daí, temos

$$\overline{e^{it\Delta} f}(x) = \frac{1}{(4\pi i(-t))^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{i|x-y|^2}{4(-t)}} \bar{f}(y) dy = e^{i(-t)\Delta} \bar{f}(x).$$

Temos também que

$$|e^{it\Delta} f(x)| = \left| \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} f(y) dy \right| \lesssim \frac{1}{t^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} f(y) \right| dy \lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{N}{2}}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Obtemos então a desigualdade de dispersão

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{C}{|t|^{\frac{N}{2}}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \quad (3.2)$$

para alguma constante $C \geq 0$. Também, usando o Teorema de Plancherel 2.22, temos

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left\| \left(e^{-4\pi^2 i t |\cdot|^2} \widehat{f} \right)^\vee \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left\| e^{-4\pi^2 i t |\cdot|^2} \widehat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Disso, vemos que $e^{it\Delta}$ é unitário e contínuo em $L^1(\mathbb{R}^N) + L^2(\mathbb{R}^N)$. Seja $\theta \in [0, 1]$. Então tomemos $p \in [1, 2]$ e $q \in [2, \infty]$ tais que

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{2}, \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{\infty} + \frac{1-\theta}{2} = \frac{1-\theta}{2}.$$

Notemos que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

logo, $q = p'$. É um fato conhecido que se $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, então $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ (veja [19]). Podemos então usar o Teorema de Riesz-Thorin 2.8 para obter a seguinte estimativa

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq c |t|^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad (3.3)$$

onde $c > 0$ é uma constante. Se tivermos $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, com $s \in \mathbb{R}$, então temos que $e^{it\Delta}f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, pelo Teorema 2.22, vemos que

$$\begin{aligned} \infty > \left\| \left((1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \right)^\vee \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \left\| (1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \left\| (1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} e^{-4\pi^2 i t |\cdot|^2} \widehat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \left\| \left((1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \left(e^{-4\pi^2 i t |\cdot|^2} \widehat{f} \right)^\vee \right)^\vee \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

A seguir falamos sobre as estimativas de Strichartz, uma ferramenta de grande importância para a demonstração de vários resultados. Utilizando as estimativas de Strichartz e o Teorema do Ponto Fixo de Banach é possível, por exemplo, mostrar a boa colocação do problema (3.6), tratado na próxima seção (veja [21]).

Definição 3.3. *Seja $N \in \mathbb{N}$. Dizemos que um par (q, r) , com $q, r \in \mathbb{R}$ é admissível se*

$$\frac{2}{q} = N \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right),$$

e

$$2 \leq r \leq \frac{2N}{N-2} \quad (2 \leq r \leq \infty \text{ se } N = 1, \quad 2 \leq r < \infty \text{ se } N = 2).$$

Teorema 3.4 (Estimativas de Strichartz). *São válidas as seguintes propriedades*

- (i) *Para toda função $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, a aplicação $t \mapsto e^{it\Delta}u_0$ pertence a $L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^N)) \cap C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$ para todo par admissível (q, r) . Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)} \leq C \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

- (ii) *Seja I um intervalo em \mathbb{R} (limitado ou não), $J = \bar{I}$ e $t_0 \in J$. Se (γ, ρ) é um par admissível e $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$, então para qualquer par admissível (q, r) , a aplicação*

$$t \mapsto \Phi_f(t) := \int_{t_0}^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds, \text{ com } t \in I$$

pertence a $L^q(I, L^r(\mathbb{R}^N)) \cap C(J, L^2(\mathbb{R}^N))$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ independente de I tal que

$$\|\Phi_f(\cdot)\|_{L_t^q L_x^r(I \times \mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}(I \times \mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração. Veja o Teorema 2.2.3., página 33 de [8]. □

3.2 Equação não-linear de Schrödinger em $H^1(\mathbb{R}^N)$

Consideremos agora o PVI

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + g(u) = 0, \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (3.4)$$

com $g \in C(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$. Suponha que exista uma solução u para (3.4) tal que $u \in C(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$. Tomando-se a transformada de Fourier em ambos os lados da equação, temos

$$\begin{cases} i\partial_t \hat{u}(t, \xi) - 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) + (g(u(t, \cdot)))^\wedge(\xi) = 0, \\ \hat{u}(0, \cdot) = \hat{u}_0(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Utilizando o método do fator integrante, temos que

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(u(s)) ds. \quad (3.5)$$

Pelo princípio de Duhamel, dizemos que u é solução integral de (3.4) se satisfaz a equação integral (3.5).

Sejam $g \in C(H^1(\mathbb{R}^N), H^{-1}(\mathbb{R}^N))$ e um intervalo $I \ni 0$. Consideremos agora o PVI conhecido como Equação não-linear de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + g(u) = 0, \\ u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (3.6)$$

Definição 3.5. Dizemos que $u \in C(I, H^1(\mathbb{R}^N))$ é uma solução integral em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para (3.6) em I se para todo $t \in I$ o princípio de Duhamel é satisfeito em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(u(s)) ds. \quad (3.7)$$

Definição 3.6. Dizemos que $\mathbf{u} \in C(I, H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(I, H^{-1}(\mathbb{R}^N))$ é uma solução fraca em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para (3.6) em I se $i\partial_t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ para todo $t \in I$ e $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$.

Proposição 3.7. Seja I um intervalo tal que $0 \in I$. Sejam $\mathbf{g} \in C(H^1(\mathbb{R}^N), H^{-1}(\mathbb{R}^N))$ e $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Uma função $\mathbf{u} \in C(I, H^1(\mathbb{R}^N))$ é uma solução integral em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para (3.6) em I se e somente se é uma solução fraca em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para (3.6) em I .

Demonstração. Veja a referência [8]. □

Uma vez que a Proposição 3.7 é válida, chamaremos \mathbf{u} apenas de solução.

Definição 3.8. Seja $\mathbf{g} \in C(H^1(\mathbb{R}^N), H^{-1}(\mathbb{R}^N))$. Dizemos que (3.6) tem solução única em $H^1(\mathbb{R}^N)$ se, para qualquer $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, e qualquer intervalo $I \ni 0$, quaisquer duas soluções em $H^1(\mathbb{R}^N)$ de (3.6) em I coincidem.

Definição 3.9. Seja $\mathbf{g} \in C(H^1(\mathbb{R}^N), H^{-1}(\mathbb{R}^N))$. Dizemos que \mathbf{u} é uma solução maximal em $H^1(\mathbb{R}^N)$ de (3.6) em um intervalo $I = (-T_{min}, T_{max})$, com $T_{max} \in (0, \infty]$ e $T_{min} \in (0, \infty]$, se $\mathbf{u} \in C(I, H^1(\mathbb{R}^N))$ é solução em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para (3.6) em I e que para todo intervalo $J \supsetneq I$, não exista solução em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para (3.6) em J . Nesse caso, o intervalo I é chamado de intervalo maximal de existência e os tempos T_{max} e $-T_{min}$ são chamados de tempo máximo de existência e tempo mínimo de existência respectivamente.

Definição 3.10 (Boa Colocação Local). Seja $\mathbf{g} \in C(H^1(\mathbb{R}^N), H^{-1}(\mathbb{R}^N))$. Dizemos que o PVI (3.6) é localmente bem posto em $H^1(\mathbb{R}^N)$, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) (3.6) tem única solução em $H^1(\mathbb{R}^N)$.
- (ii) Para todo $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, existe uma solução maximal \mathbf{u} em $H^1(\mathbb{R}^N)$ de (3.6) em um intervalo maximal $I = (-T_{min}, T_{max})$ em que $T_{min} = T_{min}(\mathbf{u}_0)$ e $T_{max} = T_{max}(\mathbf{u}_0)$.
- (iii) Tem-se a alternativa de blow-up: se $T_{max} < \infty$, então $\lim_{t \uparrow T_{max}} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = +\infty$ (respectivamente, se $T_{min} < \infty$, então $\lim_{t \downarrow -T_{min}} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = +\infty$).
- (iv) Seja \mathbf{u} a solução maximal em $H^1(\mathbb{R}^N)$ do problema (3.6) com dado inicial \mathbf{u}_0 . A solução depende continuamente do dado inicial, isto é, se $\phi_n \rightarrow \mathbf{u}_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ quando $n \rightarrow \infty$, e se $I \subset (-T_{min}(\mathbf{u}_0), T_{max}(\mathbf{u}_0))$ é um intervalo fechado, então a solução maximal \mathbf{u}_n em $H^1(\mathbb{R}^N)$ de (3.6) com condição inicial $\mathbf{u}_n(0) = \phi_n$ é

definida em I para n grande o suficiente e satisfaz $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$ em $C(I, H^1(\mathbb{R}^N))$ quando $n \rightarrow \infty$.

Existem várias definições de boa colocação local na literatura. Neste trabalho, adotamos a definição utilizada em [8]. Consideremos a partir de agora que $N = 3$ e que $g(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2\mathbf{u}$. O PVI (3.6) fica reescrito na forma

$$\begin{cases} i\partial_t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2\mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (3.8)$$

e do princípio de Duhamel (3.7) temos que

$$\mathbf{u}(t) = e^{it\Delta}\mathbf{u}_0 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(s) ds. \quad (3.9)$$

Seja $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Da imersão de Sobolev, $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$ para $2 \leq q \leq 6$. Temos que

$$\|g(\mathbf{v})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{v}^3\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{v}\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^3 < \infty.$$

Como $g(\mathbf{v}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, podemos tratar (3.9) como uma equação envolvendo funções em \mathbb{C} . Temos também o seguinte resultado:

Proposição 3.11. *O PVI (3.8) é localmente bem posto em $H^1(\mathbb{R}^3)$, e, para todo $t \in (-T_{min}, T_{max})$, temos a conservação da massa $M(\mathbf{u}(t))$ e da energia $E(\mathbf{u}(t))$, ou seja,*

$$M(\mathbf{u}(t)) := \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = M(\mathbf{u}_0), \quad (3.10)$$

e

$$E(\mathbf{u}(t)) := \frac{1}{2}\|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 = E(\mathbf{u}_0), \quad (3.11)$$

onde \mathbf{u} é a solução maximal em $H^1(\mathbb{R}^3)$ de (3.8) com dado inicial \mathbf{u}_0 .

Demonstração. Veja a Proposição 3.2.5., página 60, o Teorema 3.3.9., página 71 e o Teorema 4.3.1., página 92 de [8]. □

Daqui em diante, quando falarmos que \mathbf{u} é uma solução maximal, subentende-se que é solução maximal em $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Proposição 3.12. *Se $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, existe um intervalo $I \ni 0$ e $\mathbf{u} \in C(I, H^1(\mathbb{R}^3))$ tal que \mathbf{u} é solução em $H^1(\mathbb{R}^3)$ para (3.8) em I e $\mathbf{u} \in C(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^3))$.*

Demonstração. Veja a página 113 de [21]. □

Observação 3.13. *Uma vez que o problema (3.8) é bem posto, temos a dependência contínua da solução com relação do dado inicial. Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos que pela Proposição 3.12, para um dado inicial $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, podemos trabalhar com a equação $i\partial_t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} = 0$ no limite em que $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ para todo $t \in I$, onde I é o intervalo maximal.*

Observação 3.14. *É importante observar que se \mathbf{u}_0 for radial, para todo $t \in I$, $\mathbf{u}(t)$ também será radial, onde \mathbf{u} é a solução maximal em $H^1(\mathbb{R}^3)$ de (3.8) com dado inicial \mathbf{u}_0 e I é o intervalo maximal de existência. Com efeito, seja M uma transformação de rotação de coordenadas em \mathbb{R}^3 . Sejam $t \in I$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Pelo princípio de Duhamel*

$$\mathbf{u}(t, M\mathbf{x}) = e^{it\Delta} \mathbf{u}_0(M\mathbf{x}) + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(s, M\mathbf{x}) ds.$$

Mas como \mathbf{u}_0 é radial, $\mathbf{u}_0(M\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$. Logo,

$$\mathbf{u}(t, M\mathbf{x}) = e^{it\Delta} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(s, M\mathbf{x}) ds.$$

Por (3.8) ser localmente bem posto e pela Proposição 3.7, temos que $\mathbf{u}(t, M\mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$.

Definição 3.15. *Seja \mathbf{u} uma solução maximal em $H^1(\mathbb{R}^3)$ de (3.8). Se o intervalo maximal $I = \mathbb{R}$, dizemos que \mathbf{u} é global.*

Em vista de (3.3), temos que se uma função $\mathbf{v} \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$, então a solução do problema linear $e^{it\Delta} \mathbf{v}$ é tal que $e^{it\Delta} \mathbf{v} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ para todo $p \in (2, \infty]$, além disso

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|e^{it\Delta} \mathbf{v}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Isso nos dá a ideia de que $e^{it\Delta} \mathbf{v}$ se "espalha" pelo espaço de modo que as normas $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$ tendam a zero, com $p \in (2, \infty]$. Isso nos motiva a definir o espalhamento de uma solução global, que nos diz se essa solução se aproxima de uma solução do problema linear (que se espalha) quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Definição 3.16. *Uma solução global \mathbf{u} de (3.8) se espalha se existir $\mathbf{u}_\pm \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\mathbf{u}(t) - e^{it\Delta} \mathbf{u}_\pm\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

3.3 Alguns resultados sobre *Ground State*

Em (3.8), consideremos uma solução do tipo $e^{it\mathbf{v}}(\mathbf{x})$. Então,

$$i\partial_t (e^{it\mathbf{v}}(\mathbf{x})) + \Delta (e^{it\mathbf{v}}(\mathbf{x})) + |e^{it\mathbf{v}}(\mathbf{x})|^2 e^{it\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = 0.$$

Logo, temos que

$$-e^{it}v(x) + e^{it}\Delta v(x) + e^{it}|v(x)|^2v(x) = 0.$$

Então, dividindo ambos os lados por e^{it} ,

$$-v(x) + \Delta v(x) + |v(x)|^2v(x) = 0.$$

Por esse motivo, consideremos a seguinte equação não-linear elíptica

$$\Delta Q + |Q|^2Q - Q = 0, \quad Q = Q(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (3.12)$$

Esta equação tem um número infinito de soluções em $H^1(\mathbb{R}^3)$ (veja o apêndice B de [25]).

Tem-se alguns resultados conhecidos sobre essa equação.

Proposição 3.17. *Existe uma solução não-negativa $Q \in H^1(\mathbb{R}^3)$ para (3.12) (no sentido de distribuição) que não é identicamente nula.*

Demonstração. Veja o Corolário B.6. na página 353 de [25]. □

Proposição 3.18. *Seja $Q \in H^1(\mathbb{R}^3)$ uma solução não-negativa para (3.12) que não é identicamente nula. Então Q é estritamente positiva, suave, e tem decaimento exponencial. O gradiente de Q também tem decaimento exponencial.*

Demonstração. Veja a Proposição B.7. na página 353 de [25]. □

Além disso, em [25], prova-se que existe uma única solução de (3.12) em $H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que esta solução é estritamente positiva, radial, suave e de decaimento exponencial. Chamamos essa solução de *ground state*, denotada por Q .

A equação (3.8), com dado inicial $u_0 = Q$, admite uma única solução global que não se espalha (veja [10]),

$$u(t, x) = e^{it}Q(x).$$

Vamos retomar alguns conhecimentos relacionados ao *ground state* Q . M. Weinstein [26] provou que a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 \leq C_{GN} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3, \quad (3.13)$$

tem uma constante C_{GN} ótima, e é obtida no caso em que $f = Q$. Multiplicando (3.12) por Q , integrando sobre \mathbb{R}^3 , e aplicando integração por partes, obtemos

$$-\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|Q\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 = 0.$$

Multiplicando (3.12) por $x \cdot \nabla Q$, integrando sobre \mathbb{R}^3 , e aplicando integração por partes, obtemos a identidade de Pohozaev

$$\frac{3}{2} \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{3}{4} \|Q\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 = 0.$$

Destas identidades, obtemos que

$$\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = 3\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2, \quad \|Q\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 = 4\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (3.14)$$

Logo, da igualdade obtida com Q em (3.13), temos

$$C_{GN} = \frac{4}{3\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}} = \frac{4}{3\sqrt{3}\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}. \quad (3.15)$$

Usando (3.11), também temos

$$M(Q)E(Q) = \frac{1}{6}\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \frac{1}{2}\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4 = \frac{8}{27}C_{GN}^{-2}. \quad (3.16)$$

Capítulo 4

Resultados Auxiliares

Neste capítulo serão listados alguns resultados utilizados na demonstração dos Teoremas 1.1 e 1.2. Entre esses resultados estão a imersão radial de Sobolev, coercividades, identidade Virial, estimativa virial de Morawetz e evacuação da energia. Mostrou-se também as identidades viriais, que são utilizadas na demonstração do Teorema 1.2. Para a demonstração destes resultados, utilizamos os resultados dos capítulos anteriores. Estes resultados estão demonstrados em [8], [10] e [22]. Consideremos então o PVI associado à equação de Schrödinger não-linear

$$\begin{cases} i\partial_t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (4.1)$$

4.1 Alguns Resultados Importantes

Lema 4.1. *Seja \mathbf{u} uma solução de (4.1) com dado inicial $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Então,*

$$\partial_t |\mathbf{u}|^2 = -2\nabla \cdot \Im(\bar{\mathbf{u}}\nabla \mathbf{u}). \quad (4.2)$$

Demonstração. Em (4.1), multipliquemos ambos os lados da equação $i\partial_t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} = 0$ por $\bar{\mathbf{u}}$ e tomemos a parte imaginária. Temos então que

$$\Im(i\bar{\mathbf{u}}\partial_t \mathbf{u}) = \Im(-|\mathbf{u}|^4 - \bar{\mathbf{u}}\Delta \mathbf{u}) = -\Im(\bar{\mathbf{u}}\Delta \mathbf{u}).$$

Por outro lado

$$\Im(\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\nabla \mathbf{u})) = \Im(\nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}\Delta \mathbf{u}) = \Im(|\nabla \mathbf{u}|^2 + \bar{\mathbf{u}}\Delta \mathbf{u}) = \Im(\bar{\mathbf{u}}\Delta \mathbf{u}).$$

Logo,

$$\partial_t |\mathbf{u}|^2 = 2\Re(\bar{\mathbf{u}}\partial_t \mathbf{u}) = 2\Im(i\bar{\mathbf{u}}\partial_t \mathbf{u}) = -2\nabla \cdot \Im(\bar{\mathbf{u}}\nabla \mathbf{u}).$$

□

A seguir apresentamos a Imersão Radial de Sobolev, também conhecida como Lema de Strauss, devido a W. Strauss, e foi provado em [22].

Lema 4.2 (Imersão Radial de Sobolev). *Seja $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$ uma função radial. Então,*

$$\| |\cdot| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \lesssim \| f \|_{H^1(\mathbb{R}^3)}. \quad (4.3)$$

Demonstração. Primeiro, observemos que como f é radial, temos $f(\mathbf{x}) = v(|\mathbf{x}|)$. Temos que, para $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} -(s^2|v(s)|^2)' &= -2s|v(s)|^2 - s^2\overline{v(s)}v'(s) - s^2v(s)\overline{v'(s)} = -2s|v(s)|^2 - 2s^2\Re(v(s)\overline{v'(s)}) \\ &\leq 2s^2|\Re(v(s)\overline{v'(s)})| \\ &\leq 2s^2|v(s)||v'(s)|, \end{aligned}$$

onde usamos que $|\Re(\mathbf{a}\mathbf{b})| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. Temos também que

$$\int_0^\infty 4\pi r^2|v(r)|^2 dr = \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 < \infty.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que $\lim_{r \rightarrow \infty} r|v(r)| = 0$. Integrando ambos os lados em relação a s no intervalo $[r, \infty)$, temos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \overset{0}{-s^2|v(s)|^2} - (-r^2|v(r)|^2) \leq 2 \int_r^\infty s^2|v(s)||v'(s)| ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 4\pi s^2|v(s)||v'(s)| ds.$$

Logo, como $\nabla f(\mathbf{x}) = v'(|\mathbf{x}|)\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$, usando a desigualdade de Hölder temos que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$|\mathbf{x}|^2|f(\mathbf{x})|^2 \lesssim \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})||\nabla f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

Daí,

$$\| |\cdot| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

Usando a desigualdade de Young ($2\mathbf{a}\mathbf{b} \leq \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$), temos

$$\| |\cdot| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}.$$

□

Lema 4.3. *Seja f uma função radial em \mathbb{R}^3 . Para todo $R > 0$, tem-se*

$$\|f\|_{L^4(|x|>R)}^4 \lesssim \frac{1}{R^2} \|f\|_{L^2(|x|>R)}^3 \|\nabla f\|_{L^2(|x|>R)}. \quad (4.5)$$

Demonstração. Usando (4.4), temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^4(|x|>R)}^4 &= \|f^4\|_{L^1(|x|>R)} \leq \|f\|_{L^\infty(|x|>R)}^2 \|f^2\|_{L^1(|x|>R)} \\ &= \left\| \frac{|\cdot|}{|\cdot|} f \right\|_{L^\infty(|x|>R)}^2 \|f^2\|_{L^1(|x|>R)} \leq \frac{1}{R^2} \| |\cdot| f \|_{L^\infty(|x|>R)}^2 \|f^2\|_{L^1(|x|>R)} \\ &\lesssim \frac{1}{R^2} \|f\|_{L^2(|x|>R)} \|\nabla f\|_{L^2(|x|>R)} \|f^2\|_{L^1(|x|>R)} \lesssim \frac{1}{R^2} \|f\|_{L^2(|x|>R)}^3 \|\nabla f\|_{L^2(|x|>R)}. \end{aligned}$$

□

Lema 4.4 (Coercividade I). *Suponhamos que $M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0) < (1 - \delta_0)M(Q)E(Q)$ para algum $\delta_0 \in [0, 1)$, e que*

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Então, existe $\delta' = \delta'(\delta_0) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < (1 - \delta') \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (4.6)$$

para todo $\mathbf{t} \in I$, onde $\mathbf{u} : I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ é a solução maximal de (4.1) e I é o intervalo maximal de existência. Em particular, $I = \mathbb{R}$ e \mathbf{u} é uniformemente limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração. Façamos

$$\delta(\delta_0) = \begin{cases} \frac{M(Q)E(Q) - M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0)}{2M(Q)E(Q)} & \text{se } \delta_0 = 0, \\ \delta_0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em todo caso, podemos observar que $M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0) < (1 - \delta)M(Q)E(Q)$ e que $\delta \in (0, 1)$.

Com efeito, para $\delta_0 \neq 0$ tal fato é imediato. Para $\delta_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{M(Q)E(Q) - M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0)}{2M(Q)E(Q)}\right) M(Q)E(Q) &= \frac{M(Q)E(Q) + M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0)}{2} \\ &> \frac{M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0) + M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0)}{2} \\ &= M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0) \end{aligned}$$

e

$$0 < \frac{M(Q)E(Q) - M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0)}{2M(Q)E(Q)} < 1.$$

Daí, usando a conservação da massa e da energia, e (3.13), temos

$$\begin{aligned}
 (1 - \delta)M(Q)E(Q) &> M(\mathbf{u})E(\mathbf{u}) \\
 &= \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 \\
 &\geq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{C_{GN}}{4} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3 \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3.
 \end{aligned}$$

Então, com o auxílio de (3.15) e (3.16), temos

$$\begin{aligned}
 (1 - \delta) &> \frac{6 \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}{2 \|\mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla \mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2} \\
 &\quad - \frac{6 \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3 \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3}{3 \|\mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla \mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2} \\
 &= 3 \left(\frac{\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{\|\mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{\|\mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}} \right)^3.
 \end{aligned}$$

Analisemos então o seguinte problema: seja $\mathbf{y} \geq 0$ tal que $1 - \delta > 3\mathbf{y}^2 - 2\mathbf{y}^3$. Neste caso,

$$1 - 3\mathbf{y}^2 + 2\mathbf{y}^3 > \delta \implies (1 - \mathbf{y})^2(1 + 2\mathbf{y}) > \delta \implies (1 - \mathbf{y})^2 > \frac{\delta}{1 + 2\mathbf{y}}.$$

Daí, se $\mathbf{y} > \frac{3}{2}$, temos $|1 - \mathbf{y}| = \mathbf{y} - 1 > \frac{1}{2}$. E se $\mathbf{y} \leq \frac{3}{2}$, temos $|1 - \mathbf{y}| > \sqrt{\frac{\delta}{1 + 2\mathbf{y}}} \geq \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{\delta}}{2}$. Fazemos então $\delta' = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{\delta}}{2} \right\}$ (vemos que $\delta' \in (0, \frac{1}{2}]$). Temos então que $|1 - \mathbf{y}| > \delta'$.

Logo, temos

$$\mathbf{y} < 1 - \delta' < 1 \tag{4.7}$$

ou

$$\mathbf{y} > 1 + \delta' > 1. \tag{4.8}$$

Se fizermos

$$\mathbf{y}(t) := \frac{\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{\|\mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}, \tag{4.9}$$

temos que $\mathbf{y}(0) < 1$. De (4.7), temos que $\mathbf{y}(0) < 1 - \delta'$. Da continuidade de \mathbf{y} em t , para todo $t \in I$, temos $\mathbf{y}(t) < 1 - \delta'$. Logo, temos que (4.6) é válida. Sabemos que $M(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$ é conservada, logo, por (4.6), encontramos que $\|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$ é uniformemente limitada, ou seja, $\|\nabla \mathbf{u}\|_{L_t^\infty L_x^2(I \times \mathbb{R}^3)} \lesssim 1$, o que implica que \mathbf{u} é uniformemente limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$, ou seja, $\|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty H_x^1(I \times \mathbb{R}^3)} \lesssim 1$. Logo, pela alternativa de *blow-up* (definição 3.10 item (iii)), $I = \mathbb{R}$. \square

Corolário 4.5. *Se $M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0) < (1 - \delta_0)M(Q)E(Q)$ e*

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} > \|\mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Então existe $\delta' = \delta'(\delta_0) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} > (1 + \delta') \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (4.10)$$

para todo $\mathbf{t} \in I$, onde $\mathbf{u} : I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ é a solução maximal de (4.1) e I é o intervalo maximal de existência.

Demonstração. A demonstração segue os mesmos passos feitos no Lema 4.4, exceto pelo fato de que $\mathbf{y}(0) > 1$ (com $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ definido em (4.9)). De (4.8), temos que $\mathbf{y}(0) > 1 + \delta'$. Da continuidade de \mathbf{y} em \mathbf{t} , temos que para todo $\mathbf{t} \in I$, $\mathbf{y}(\mathbf{t}) > 1 + \delta'$. Logo, (4.10) é válida. \square

Lema 4.6 (Coercividade II). *Se para algum $\delta_0 \in [0, 1)$,*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < (1 - \delta_0) \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (4.11)$$

então existe $\delta' = \delta'(\delta_0) > 0$ tal que

$$\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{3}{4} \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 \geq \delta' \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4.$$

Demonstração. Façamos

$$\delta(\delta_0) = \begin{cases} \frac{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{2\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}} & \text{se } \delta_0 = 0, \\ \delta_0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em todo caso, podemos observar que $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < (1 - \delta) \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ e que $\delta \in (0, 1)$. Com efeito, para $\delta_0 \neq 0$ tal fato é imediato. Para $\delta_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{2\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}} \right) \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= \frac{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{2} \\ &> \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{2} \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

e

$$0 < \frac{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{2\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}} < 1.$$

De (3.11), temos que

$$\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{3}{4} \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 = 3E(f) - \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Aplicando sobre $E(f)$ (3.13) e em seguida (4.11) e (3.15), vemos que

$$\begin{aligned}
 E(f) &= \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{1}{4} \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 \\
 &\geq \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{C_{GN}}{4} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3 \\
 &= \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \left(1 - \frac{C_{GN}}{2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \left(1 - \frac{(1-\delta)C_{GN}}{2} \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \left(1 - \frac{2(1-\delta)}{3} \right) \\
 &= \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{\delta}{3} \right).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{3}{4} \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 \geq \delta \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Rearranjando as parcelas temos

$$\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{3}{4(1-\delta)} \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4.$$

Então, temos que

$$\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{3}{4} \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 \geq \frac{3\delta}{4(1-\delta)} \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4.$$

Basta então fazermos $\delta' = \frac{3\delta}{4(1-\delta)}$. □

Lema 4.7 (Identidade Virial). *Seja $\mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $\nabla \mathbf{a} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.*

Seja N definida por

$$N(t) := 2\mathfrak{I}m \int_{\mathbb{R}^3} \overline{u(t)} (\nabla u(t) \cdot \nabla \mathbf{a}) \, dx.$$

Então,

$$\frac{d}{dt} N(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(-|u(t)|^4 \Delta \mathbf{a} - |u(t)|^2 \Delta \Delta \mathbf{a} + 4\Re e \left(\sum_{j,k=1}^3 a_{jk} \overline{u_j(t)} u_k(t) \right) \right) dx \quad (4.12)$$

para todo $t \in I$, onde $u : I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ é a solução maximal de (4.1) e I é o intervalo maximal de existência.

Demonstração. A hipótese de que $\nabla \mathbf{a} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ é suficiente para que possamos aplicar

as integrações por partes feitas nesta demonstração. Fazendo-se integração por partes

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} N(t) &= 2\Im \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}_t(\nabla u \cdot \nabla a) + \bar{u}(\nabla u_t \cdot \nabla a)) \, dx \\
 &= 2\Im \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}_t(\nabla u \cdot \nabla a) - u_t(\nabla \bar{u} \cdot \nabla a + \bar{u}\Delta a)) \, dx \\
 &= 2\Im \int_{\mathbb{R}^3} (-2i\Im(u_t(\nabla \bar{u} \cdot \nabla a)) - u_t\bar{u}\Delta a) \, dx \\
 &= 2\Im \int_{\mathbb{R}^3} (-2u_t(\nabla \bar{u} \cdot \nabla a) - u_t\bar{u}\Delta a) \, dx.
 \end{aligned}$$

Utilizando a equação (4.1), temos que

$$\begin{aligned}
 \Im \int_{\mathbb{R}^3} u_t \bar{u} \Delta a \, dx &= \Im \int_{\mathbb{R}^3} i \bar{u} \Delta a (\Delta u + |u|^2 u) \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta a |u|^4 \, dx + \Re \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u} \Delta a \Delta u \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta a |u|^4 \, dx - \Re \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta a \nabla \bar{u} + \bar{u} \nabla(\Delta a)) \cdot \nabla u \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta a |u|^4 \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta a |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\Delta a) \cdot \Re(\bar{u} \nabla u) \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta a |u|^4 \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta a |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\Delta a) \cdot \nabla(|u|^2) \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta a |u|^4 \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta a |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \Delta \Delta a \, dx.
 \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
 \Im \int_{\mathbb{R}^3} u_t (\nabla \bar{u} \cdot \nabla a) \, dx &= \Re \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta u + |u|^2 u) (\nabla \bar{u} \cdot \nabla a) \, dx \\
 &= \Re \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta u) (\nabla \bar{u} \cdot \nabla a) \, dx + \Re \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 u (\nabla \bar{u} \cdot \nabla a) \, dx \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Analisemos a primeira parcela de (4.13)

$$\begin{aligned}
 \Re \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta u)(\nabla \bar{u} \cdot \nabla a) dx &= \Re \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_{jj} (\bar{u}_k a_k) dx \\
 &= -\Re \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (a_{jk} u_j \bar{u}_k + \bar{u}_{jk} u_j a_k) dx \\
 &= -\Re \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} a_{jk} u_j \bar{u}_k dx - \Re \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u}_{jk} u_j a_k dx \\
 &= -\Re \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} a_{jk} u_j \bar{u}_k dx - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (|u_j|^2)_k a_k dx \\
 &= -\Re \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} a_{jk} u_j \bar{u}_k dx - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2)_k a_k dx \\
 &= -\Re \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} a_{jk} u_j \bar{u}_k dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(|\nabla u|^2) \cdot \nabla a dx \\
 &= -\Re \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} a_{jk} u_j \bar{u}_k dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \Delta a dx. \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

Analisemos a segunda parcela de (4.13)

$$\begin{aligned}
 \Re \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 u (\nabla \bar{u} \cdot \nabla a) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} (|u|^2 \Re(u \nabla \bar{u})) \cdot \nabla a dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|u|^2 \nabla(|u|^2)) \cdot \nabla a dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(|u|^4) \cdot \nabla a dx \\
 &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 \Delta a dx.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} N(t) &= -2 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 \Delta a dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \Delta a dx - \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \Delta \Delta a dx \\
 &\quad + 4 \Re \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} a_{jk} u_j \bar{u}_k dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \Delta a dx + \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 \Delta a dx.
 \end{aligned}$$

Assim concluímos a demonstração. □

4.2 Evacuação de Energia

Nesta seção, assumiremos as seguintes condições. No PVI (4.1) consideremos

- (i) $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ radial e \mathbf{u} é a solução maximal associada a \mathbf{u}_0 ;
- (ii) $M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0) < M(Q)E(Q)$;
- (iii) $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$;
- (iv) Seja $\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave radial decrescente que vale 1 em $B(0, \frac{1}{2})$ e vale 0 em $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, 1)$ e seja $\eta_R(\mathbf{x}) = \eta(\frac{\mathbf{x}}{R})$, para $R > 0$.

As condições (ii) e (iii) são tais que as hipóteses do Lema 4.4 são satisfeitas. Logo \mathbf{u} é global,

$$\|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty H_x^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)} \lesssim 1, \quad (4.15)$$

e existirá $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < (1 - 2\delta)\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Lema 4.8 (Coercividade em Bolas). *Existe $R = R(\delta, M(\mathbf{u}), Q) > 0$ suficientemente grande tal que*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\eta_R \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(\eta_R \mathbf{u}(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < (1 - \delta)\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (4.16)$$

Além disso, pelo Lema 4.6, existe $\delta' = \delta'(\delta) > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\|\nabla(\eta_R \mathbf{u}(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{3}{4}\|\eta_R \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 \geq \delta'\|\eta_R \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4.$$

Demonstração. Se escrevermos $\eta(\mathbf{x}) = g(|\mathbf{x}|)$, temos que $\nabla\eta(\mathbf{x}) = g'(|\mathbf{x}|)\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ e $\Delta\eta(\mathbf{x}) = g''(|\mathbf{x}|) + \frac{2g'(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}$. Logo, para $\eta_R(\mathbf{x}) = g\left(\frac{|\mathbf{x}|}{R}\right)$ temos

$$\nabla\eta_R(\mathbf{x}) = \frac{1}{R}g'\left(\frac{|\mathbf{x}|}{R}\right)\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

e

$$\Delta\eta_R(\mathbf{x}) = \frac{1}{R^2}g''\left(\frac{|\mathbf{x}|}{R}\right) + \frac{1}{R}\frac{2g'\left(\frac{|\mathbf{x}|}{R}\right)}{|\mathbf{x}|}.$$

Então, temos que $|\Delta\eta_R(\mathbf{x})| \leq \frac{c_1}{R^2} + \frac{4c_2}{R^2} = \frac{c}{R^2}$, com c_1 e c_2 sendo os maiores valores que $|g''|$ e $|g'|$ assumem respectivamente e $c = c_1 + 4c_2$. Notemos primeiramente que $\|\eta_R \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Usando integração por partes, temos também a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla(\eta_{\mathbb{R}}\mathbf{u}(t))|^2 + \eta_{\mathbb{R}}\Delta(\eta_{\mathbb{R}})|\mathbf{u}(t)|^2 \right) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\mathbf{u}(t)\nabla\eta_{\mathbb{R}}|^2 + |\eta_{\mathbb{R}}\nabla\mathbf{u}(t)|^2 + 2\operatorname{Re}(\eta_{\mathbb{R}}\mathbf{u}(t)(\nabla\overline{\mathbf{u}(t)} \cdot \nabla\eta_{\mathbb{R}})) \right) dx \\
 &- \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\mathbf{u}(t)\nabla\eta_{\mathbb{R}}|^2 + \eta_{\mathbb{R}}\overline{\mathbf{u}(t)}(\nabla\mathbf{u}(t) \cdot \nabla\eta_{\mathbb{R}}) + \eta_{\mathbb{R}}\mathbf{u}(t)(\nabla\overline{\mathbf{u}(t)} \cdot \nabla\eta_{\mathbb{R}}) \right) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\eta_{\mathbb{R}}\nabla\mathbf{u}(t)|^2 dx.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \|\nabla(\eta_{\mathbb{R}}\mathbf{u}(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{\mathbb{R}}\Delta(\eta_{\mathbb{R}})|\mathbf{u}(t)|^2 dx \\
 &\leq \|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{c}{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(t)|^2 dx \\
 &= \|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{M(\mathbf{u})c}{\mathbb{R}^2}.
 \end{aligned}$$

Vemos então que

$$\begin{aligned}
 & \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\eta_{\mathbb{R}}\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla(\eta_{\mathbb{R}}\mathbf{u}(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
 &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \left(\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{M(\mathbf{u})c}{\mathbb{R}^2} \right) \\
 &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{(M(\mathbf{u}))^2 c}{\mathbb{R}^2} \\
 &< (1 - 2\delta)^2 \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{(M(\mathbf{u}))^2 c}{\mathbb{R}^2}.
 \end{aligned}$$

Notemos que $(1 - \delta)^2 - (1 - 2\delta)^2 = 2\delta - 3\delta^2$. Escolhendo-se \mathbb{R} suficientemente grande tal que

$$\frac{(M(\mathbf{u}))^2 c}{\mathbb{R}^2} \leq (2\delta - 3\delta^2) \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2,$$

temos que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\eta_{\mathbb{R}}\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla(\eta_{\mathbb{R}}\mathbf{u}(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 < (1 - \delta)^2 \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Tomando a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade acima, temos a validade de (4.16). A segunda parte segue diretamente do Lema 4.6. \square

A seguir, iremos enunciar e exibir a demonstração da Estimativa de Virial de Morawetz. Para demonstrá-la, iremos utilizar o Lema 4.7 com a função \mathbf{a} construída a seguir. Seja

$R \geq 1$. Consideremos \mathbf{a} uma função radial $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \varphi(|\mathbf{x}|)$ que satisfaz

$$\varphi(|\mathbf{x}|) = \begin{cases} \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2 & \text{se } |\mathbf{x}| \leq R, \\ 2R(|\mathbf{x}| - R) & \text{se } |\mathbf{x}| > 2R. \end{cases} \quad (4.18)$$

Na região intermediária ($R < |\mathbf{x}| \leq 2R$), exigimos que

$$\varphi'(|\mathbf{x}|) \geq 0, \quad \varphi''(|\mathbf{x}|) \geq 0, \quad |\partial^\alpha \mathbf{a}(\mathbf{x})| \leq C_\alpha R |\mathbf{x}|^{1-|\alpha|}, \quad (4.19)$$

com C_α uma constante positiva que depende de α . De maneira geral, temos

$$\mathbf{a}_j(\mathbf{x}) = \varphi'(|\mathbf{x}|) \frac{x_j}{|\mathbf{x}|}, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{a}_{jk}(\mathbf{x}) = \varphi''(|\mathbf{x}|) \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2} + \varphi'(|\mathbf{x}|) \left(\frac{\delta_{jk}}{|\mathbf{x}|} - \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^3} \right). \quad (4.21)$$

Logo, para $|\mathbf{x}| \leq R$

$$\mathbf{a}_j(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| \frac{x_j}{|\mathbf{x}|} = x_j, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{a}_{jk}(\mathbf{x}) = \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2} + |\mathbf{x}| \left(\frac{\delta_{jk}}{|\mathbf{x}|} - \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^3} \right) = \delta_{jk}, \quad (4.23)$$

$$\Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}) = 3, \quad (4.24)$$

$$\Delta \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.25)$$

Para $|\mathbf{x}| > 2R$, temos

$$\mathbf{a}_j(\mathbf{x}) = \frac{2R}{|\mathbf{x}|} x_j, \quad (4.26)$$

$$\mathbf{a}_{jk}(\mathbf{x}) = 2R \left(\frac{\delta_{jk}}{|\mathbf{x}|} - \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^3} \right), \quad (4.27)$$

$$\Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{4R}{|\mathbf{x}|}, \quad (4.28)$$

$$\Delta \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{8R}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{4R}{|\mathbf{x}|^2} \frac{2}{|\mathbf{x}|} = 0. \quad (4.29)$$

Lema 4.9 (Estimativa Virial de Morawetz). *Seja $T > 0$. Para $S = S(\delta, M(\mathbf{u}), Q)$ suficientemente grande, temos*

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_{|\mathbf{x}| \leq S} |\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{x})|^4 d\mathbf{x} dt \leq C_{\delta, \mathbf{u}} \left(\frac{S}{T} + \frac{1}{S^2} \right),$$

onde $C_{\delta, \mathbf{u}}$ é uma constante que depende de δ e \mathbf{u} .

Demonstração. Escolhamos $R(\delta, M(\mathbf{u}), Q)$ como no Lema 4.8. Tomemos N como no Lema 4.7, com a função \mathbf{a} definida em (4.18). Aplicando Cauchy-Schwarz, utilizando a limitação uniforme da norma $H^1(\mathbb{R}^3)$ de \mathbf{u} e a limitação do gradiente de \mathbf{a} , temos

$$|N(t)| = |2\mathfrak{I}m \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\mathbf{u}} (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a}) \, dx| \leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}| |\nabla \mathbf{u}| |\nabla \mathbf{a}| \, dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^3} (|\mathbf{u}|^2 + |\nabla \mathbf{u}|^2) R \, dx \lesssim R.$$

Então, temos

$$|N(t)| \leq A_u R,$$

onde $A_u > 0$ é uma constante que depende de \mathbf{u} . Em (4.12), separemos o domínio de integração em $|\mathbf{x}| \leq R$, $R < |\mathbf{x}| \leq 2R$ e $|\mathbf{x}| > 2R$ e utilizemos as equações (4.23), (4.24), (4.25), (4.27), (4.28) e (4.29) para chegar à seguinte identidade para $\frac{d}{dt}N$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &= \int_{|\mathbf{x}| \leq R} 4\Re \left(\sum_{j,k=1}^3 \delta_{jk} \bar{\mathbf{u}}_j \mathbf{u}_k \right) \, dx - 3 \int_{|\mathbf{x}| \leq R} |\mathbf{u}|^4 \, dx \\ &+ \int_{|\mathbf{x}| > 2R} 4\Re \left(\sum_{j,k=1}^3 2R \left(\frac{\delta_{jk}}{|\mathbf{x}|} - \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^3} \right) \bar{\mathbf{u}}_j \mathbf{u}_k \right) \, dx - 4 \int_{|\mathbf{x}| > 2R} \frac{R}{|\mathbf{x}|} |\mathbf{u}|^4 \, dx \\ &+ \int_{R < |\mathbf{x}| \leq 2R} 4\Re \left(\sum_{j,k=1}^3 a_{jk} \bar{\mathbf{u}}_j \mathbf{u}_k \right) \, dx - \int_{R < |\mathbf{x}| \leq 2R} |\mathbf{u}|^4 \Delta \mathbf{a} \, dx - \int_{R < |\mathbf{x}| \leq 2R} |\mathbf{u}|^2 \Delta \Delta \mathbf{a} \, dx. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\int_{|\mathbf{x}| \leq R} 4\Re \left(\sum_{j,k=1}^3 \delta_{jk} \bar{\mathbf{u}}_j \mathbf{u}_k \right) \, dx = 4 \int_{|\mathbf{x}| \leq R} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx.$$

Sendo \mathbf{u} radial, temos que $|\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| = |\nabla \mathbf{u}| |\mathbf{x}|$. Consequentemente,

$$\int_{|\mathbf{x}| > 2R} \frac{8R}{|\mathbf{x}|} \Re \left(\sum_{j,k=1}^3 \left(\delta_{jk} - \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2} \right) \bar{\mathbf{u}}_j \mathbf{u}_k \right) \, dx = \int_{|\mathbf{x}| > 2R} \frac{8R}{|\mathbf{x}|} \left(|\nabla \mathbf{u}|^2 - \left| \nabla \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right|^2 \right) \, dx = 0.$$

Utilizando (4.21), temos que

$$\begin{aligned} &\int_{R < |\mathbf{x}| \leq 2R} 4\Re \left(\sum_{j,k=1}^3 a_{jk} \bar{\mathbf{u}}_j \mathbf{u}_k \right) \, dx \\ &= \int_{R < |\mathbf{x}| \leq 2R} 4\Re \left(\sum_{j,k=1}^3 \left(\varphi''(|\mathbf{x}|) \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2} + \varphi'(|\mathbf{x}|) \left(\frac{\delta_{jk}}{|\mathbf{x}|} - \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^3} \right) \right) \bar{\mathbf{u}}_j \mathbf{u}_k \right) \, dx \\ &= \int_{R < |\mathbf{x}| \leq 2R} 4\Re \left(\varphi''(|\mathbf{x}|) \frac{|\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^2} + \varphi'(|\mathbf{x}|) \left(\frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{|\mathbf{x}|} - \frac{|\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^3} \right) \right) \, dx \\ &= \int_{R < |\mathbf{x}| \leq 2R} 4\Re \left(\varphi''(|\mathbf{x}|) \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2 |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^2} + \varphi'(|\mathbf{x}|) \left(\frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{|\mathbf{x}|} - \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2 |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^3} \right) \right) \, dx \\ &= 4 \int_{R < |\mathbf{x}| \leq 2R} |\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi''(|\mathbf{x}|) \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, desprezando o termo positivo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &\geq 4 \int_{|x| \leq R} |\nabla u|^2 dx - 3 \int_{|x| \leq R} |u|^4 dx - 4 \int_{|x| > 2R} \frac{R}{|x|} |u|^4 dx - \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^4 \Delta a dx \\ &\quad - \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^2 \Delta \Delta a dx. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Como η_R é uma função suave radial decrescente que vale 1 em $B(0, \frac{R}{2})$ e vale 0 em $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R)$, temos que $\mathbf{1}_{|x| \leq R} \geq \eta_R^2$, onde $\mathbf{1}_{|x| \leq R}$ é a função característica do conjunto $|x| \leq R$.

Logo, usando (4.17), temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} &4 \int_{|x| \leq R} |\nabla u|^2 dx - 3 \int_{|x| \leq R} |u|^4 dx \geq 4 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^2 |\nabla u|^2 dx - 3 \int_{|x| \leq R} |u|^4 dx \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^2 |\nabla u|^2 dx - 3 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx + 3 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx - 3 \int_{|x| \leq R} |u|^4 dx \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\eta_R u)|^2 dx - 3 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx + 3 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx \\ &\quad - 3 \int_{|x| \leq R} |u|^4 dx + 4 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R \Delta(\eta_R) |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 4.8, temos que

$$\begin{aligned} &4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\eta_R u)|^2 dx - 3 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx + 3 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx - 3 \int_{|x| \leq R} |u|^4 dx \\ &\geq 4\delta' \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx + 3 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx - 3 \int_{|x| \leq R} |u|^4 dx, \end{aligned}$$

com $\delta' = \delta'(\delta) > 0$. Separando o domínio de integração em $|x| \leq \frac{R}{2}$, $\frac{R}{2} < |x| \leq R$ e observando que $\eta_R^4 \geq \mathbf{1}_{|x| \leq \frac{R}{2}}$, chegamos à estimativa

$$\begin{aligned} &4\delta' \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx + 3 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx - 3 \int_{|x| \leq R} |u|^4 dx \\ &= 4\delta' \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx + 3 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R^4 |u|^4 dx - 3 \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx - 3 \int_{\frac{R}{2} < |x| \leq R} |u|^4 dx \\ &\geq 4\delta' \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx + 3 \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx - 3 \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx - 3 \int_{\frac{R}{2} < |x| \leq R} |u|^4 dx \\ &\geq 4\delta' \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx - 3 \int_{\frac{R}{2} < |x| \leq R} |u|^4 dx. \end{aligned}$$

Logo, uma vez que $\eta_R \Delta(\eta_R) \geq -|\eta_R \Delta(\eta_R)|$, temos da desigualdade (4.30) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N(t) &\geq 4\delta' \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx - 3 \int_{\frac{R}{2} < |x| \leq R} |u|^4 dx - 4 \int_{|x| > 2R} \frac{R}{|x|} |u|^4 dx \\ &\quad - \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^4 |\Delta a| dx - \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^2 |\Delta \Delta a| dx + 4 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R \Delta(\eta_R) |u|^2 dx \\ &\geq 4\delta' \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx - 3 \int_{\frac{R}{2} < |x| \leq R} |u|^4 dx - 4 \int_{|x| > 2R} \frac{R}{|x|} |u|^4 dx \\ &\quad - \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^4 |\Delta a| dx - \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^2 |\Delta \Delta a| dx - 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\eta_R \Delta(\eta_R)| |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Daí, usando as condições (4.19) impostas sobre a e o fato de que $|\eta_R \Delta(\eta_R)| \lesssim \frac{1}{R^2}$, temos

$$\begin{aligned} 4\delta' \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx &\leq \frac{d}{dt} N(t) + 3 \int_{\frac{R}{2} < |x| \leq R} |u|^4 dx + 4 \int_{|x| > 2R} \frac{R}{|x|} |u|^4 dx \\ &\quad + \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^4 |\Delta a| dx + \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^2 |\Delta \Delta a| dx + 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\eta_R \Delta(\eta_R)| |u|^2 dx \\ &\lesssim \frac{d}{dt} N(t) + \int_{\frac{R}{2} < |x| \leq R} |u|^4 dx + \int_{|x| > 2R} \frac{R}{|x|} |u|^4 dx + \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^4 \frac{R}{|x|} dx \\ &\quad + \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^2 \frac{R}{|x|^3} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{R^2} |u|^2 dx \\ &\lesssim \frac{d}{dt} N(t) + \int_{\frac{R}{2} < |x| \leq R} |u|^4 dx + \int_{|x| > 2R} \frac{R}{2R} |u|^4 dx + \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^4 \frac{R}{R} dx \\ &\quad + \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^2 \frac{R}{R^3} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{R^2} |u|^2 dx \\ &\lesssim \frac{d}{dt} N(t) + \int_{\frac{R}{2} < |x| \leq R} |u|^4 dx + \int_{|x| > 2R} |u|^4 dx + \int_{R < |x| \leq 2R} |u|^4 dx \\ &\quad + \int_{R < |x| \leq 2R} \frac{1}{R^2} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{R^2} |u|^2 dx \\ &\lesssim \frac{d}{dt} N(t) + \int_{|x| > \frac{R}{2}} |u|^4 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{R^2} |u|^2 dx, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx \lesssim \frac{d}{dt} N(t) + \int_{|x| > \frac{R}{2}} |u|^4 dx + \frac{1}{R^2} M(u).$$

Utilizando o Lema 4.3, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x| > \frac{R}{2}} |u|^4 dx &\lesssim \frac{1}{R^2} \left(\int_{|x| > \frac{R}{2}} |u|^2 dx \right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{|x| > \frac{R}{2}} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \frac{1}{R^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \frac{1}{R^2} M(u)^{\frac{3}{2}} \|u\|_{L_t^\infty H_x^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Utilizando a limitação (4.15) da norma $H^1(\mathbb{R}^3)$ de u , temos que

$$\int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx \lesssim \frac{d}{dt} N(t) + \frac{1}{R^2}.$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^T \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx dt \lesssim \sup_{t \in \mathbb{R}} |N(t)| + \frac{T}{R^2} \lesssim R + \frac{T}{R^2}.$$

Logo,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |u|^4 dx dt \lesssim \frac{R}{T} + \frac{1}{R^2}.$$

Tomando-se $S = \frac{R}{2}$, obtemos o resultado. \square

Como consequência do Lema 4.9, temos a evacuação da energia, enunciada no lema a seguir.

Lema 4.10 (Evacuação da Energia). *Existem seqüências $\{t_n\}$ e $\{R_n\}$ tais que $t_n \rightarrow \infty$ e $R_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq R_n} |u(t_n, x)|^4 dx = 0. \quad (4.31)$$

Demonstração. Seja $\{T_n\}$ tal que $T_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e façamos $R_n := T_n^{\frac{1}{3}}$. Pelo Lema 4.9, para n grande o suficiente, temos que

$$\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \int_{|x| \leq R_n} |u(t, x)|^4 dx dt \lesssim \frac{R_n}{T_n} + \frac{1}{R_n^2} \lesssim T_n^{-\frac{2}{3}}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_n \in (0, T_n)$ tal que quando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{|x| \leq R_n} |u(t_n, x)|^4 dx = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \int_{|x| \leq R_n} |u(t, x)|^4 dx dt \lesssim T_n^{-\frac{2}{3}} \rightarrow 0.$$

Se $\{t_n\}$ for não limitada, então existe uma subsequência $\{t_{n_k}\}$ de $\{t_n\}$ tal que $t_{n_k} \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Logo, o resultado segue, pois neste caso

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R_{n_k}} |u(t_{n_k}, x)|^4 dx \rightarrow 0.$$

Se $\{t_n\}$ for uma seqüência limitada, então existe uma subsequência $\{t_{n_k}\}$ de $\{t_n\}$ e $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $t_{n_k} \rightarrow t^*$ quando $k \rightarrow \infty$. Usando o Lema 4.3 e a limitação uniforme (4.15) da norma $H^1(\mathbb{R}^3)$ de u , em (4.15), temos que quando $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |u(t_n, x)|^4 dx &= \int_{|x| \leq R_n} |u(t_n, x)|^4 dx + \int_{|x| > R_n} |u(t_n, x)|^4 dx \\ &\lesssim T_n^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{R_n^2} \|u(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3 \|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim T_n^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{R_n^2} \lesssim T_n^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{T_n^{\frac{2}{3}}} \\ &\lesssim T_n^{-\frac{2}{3}} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Logo, por (4.32),

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{t}^*)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\mathbf{t}_{n_k})\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4 = 0.$$

Assim, $\mathbf{u}(\mathbf{t}^*) = 0$ q.t.p. e então, $0 = M(\mathbf{u}(\mathbf{t}^*)) = M(\mathbf{u}(\mathbf{t})) = \|\mathbf{u}(\mathbf{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$ para todo $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$. Portanto $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = 0$ q.t.p para todo $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$. Consequentemente o resultado é imediato, pois para quaisquer outras sequências $\{\tilde{\mathbf{t}}_n\}$ e $\{\tilde{\mathbf{R}}_n\}$ tais que $\tilde{\mathbf{t}}_n \rightarrow \infty$ e $\tilde{\mathbf{R}}_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, tem-se a validade de (4.31). \square

4.3 Identidades Viriais

Nesta seção exibiremos as demonstrações de algumas identidades utilizadas na demonstração do Teorema 1.2. Tais identidades estão demonstradas em [8].

Lema 4.11. *Seja $|\mathbf{x}|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Então, para \mathbf{u} a solução maximal de (4.1) temos $|\mathbf{x}|u(\mathbf{t}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ para todo $\mathbf{t} \in (-T_{min}, T_{max})$, onde T_{max} e $-T_{min}$ são o tempo máximo de existência e o tempo mínimo de existência, respectivamente.*

Demonstração. Faremos o caso em que $\mathbf{t} > 0$, visto que no caso em que $\mathbf{t} < 0$, o processo é semelhante. Fixemos $\mathbf{t} \in (0, T_{max})$. Denotemos $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ apenas por \mathbf{u} para simplificar a leitura. Seja $\epsilon > 0$. Definamos

$$f_\epsilon(\mathbf{t}) := \left\| e^{-\epsilon|\cdot|^2} \cdot |\mathbf{u}(\mathbf{t})| \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (4.33)$$

Veja que $f_\epsilon(\mathbf{t})$ está bem definido, pois a quantidade $e^{-\epsilon|\mathbf{x}|^2}|\mathbf{x}|$ é limitada em \mathbb{R}^3 . Logo, usando (4.1) e integração por partes

$$\begin{aligned} f'_\epsilon(\mathbf{t}) &= 2\Re \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\epsilon|\mathbf{x}|^2} |\mathbf{x}|^2 u_t \bar{u} dx \\ &= -2\Im \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\epsilon|\mathbf{x}|^2} |\mathbf{x}|^2 \bar{u} \Delta u dx - 2\Im \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\epsilon|\mathbf{x}|^2} |\mathbf{x}|^2 |u|^4 dx \\ &= -2\Im \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\epsilon|\mathbf{x}|^2} |\mathbf{x}|^2 \bar{u} \Delta u dx \\ &= 2\Im \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u} \nabla u) \cdot \nabla (e^{-2\epsilon|\mathbf{x}|^2} |\mathbf{x}|^2) dx + 2\Im \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\epsilon|\mathbf{x}|^2} |\mathbf{x}|^2 \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx \\ &= 2\Im \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u} \nabla u) \cdot \nabla (e^{-2\epsilon|\mathbf{x}|^2} |\mathbf{x}|^2) dx \\ &= 4\Im \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-\epsilon|\mathbf{x}|^2} (1 - 2\epsilon|\mathbf{x}|^2)) (e^{-\epsilon|\mathbf{x}|^2} \bar{u} \mathbf{x}) \cdot \nabla u dx. \end{aligned}$$

Então, integrando de 0 a \mathbf{t} a expressão para $f'_\epsilon(\mathbf{t})$ obtida acima, obtemos

$$f_\epsilon(\mathbf{t}) = f_\epsilon(0) + 4 \int_0^{\mathbf{t}} \Im \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-\epsilon|\mathbf{x}|^2} (1 - 2\epsilon|\mathbf{x}|^2)) (e^{-\epsilon|\mathbf{x}|^2} \bar{u}(s) \mathbf{x}) \cdot \nabla u(s) dx ds. \quad (4.34)$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$f_\epsilon(t) \leq f_\epsilon(0) + 4 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |e^{-\epsilon|\chi|^2}(1 - 2\epsilon|\chi|^2)| e^{-\epsilon|\chi|^2} \bar{u}(s)\chi \|\nabla u(s)\| dx ds.$$

Sendo a função $|e^{-\alpha}(1 - 2\alpha)|$ limitada em \mathbb{R}^+ , aplicando a desigualdade de Hölder e observando que $f_\epsilon(0) \leq \|\cdot\| \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$, concluímos que existe $C > 0$ tal que

$$f_\epsilon(t) \leq \|\cdot\| \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C \int_0^t \sqrt{f_\epsilon(s)} \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Definamos $K := \|\cdot\| \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$ e também

$$b(t) := K + C \int_0^t \sqrt{f_\epsilon(s)} \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Logo, integrando de 0 at a desigualdade acima, obtemos:

$$b'(t) = C \sqrt{f_\epsilon(t)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C \sqrt{b(t)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Dividindo ambos os lados por $\sqrt{b(t)}$, temos que

$$\frac{b'(t)}{\sqrt{b(t)}} \leq C \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Logo,

$$2\sqrt{b(t)} - 2\sqrt{b(0)} \leq C \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds,$$

ou seja,

$$\sqrt{b(t)} \leq \sqrt{K} + \frac{C}{2} \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Então, temos

$$\sqrt{f_\epsilon(t)} \leq \|\cdot\| \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{C}{2} \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Logo, utilizando o Lema de Fatou e sabendo que $\|\nabla u(\cdot)\|_{L_t^\infty L_x^2([0,t] \times \mathbb{R}^3)} < \infty$, temos que

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\chi|^2 |\mathbf{u}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-2\epsilon|\chi|^2} |\chi|^2 |\mathbf{u}|^2 dx \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\epsilon|\chi|^2} |\chi|^2 |\mathbf{u}|^2 dx \\ &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(t) \leq \left(\|\cdot\| \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{C}{2} \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \right)^2 < \infty, \end{aligned}$$

finalizando assim a demonstração. □

Lema 4.12. *Se $|\chi|\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, então para todo $t \in (-T_{min}, T_{max})$ temos*

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} |\chi|^2 |\mathbf{u}(t)|^2 dx = 4\mathfrak{Jm} \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}(t)\chi) \cdot (\nabla u(t)) dx.$$

Demonstração. Faremos o caso em que $t \geq 0$, visto que o caso em que $t < 0$ é similar. Fixemos $t \in (0, T_{\max})$. Sejam $\epsilon > 0$ e f_ϵ definido no Lema 4.11. De (4.34), temos que

$$f_\epsilon(t) = f_\epsilon(0) + 4\mathfrak{Jm} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-2\epsilon|x|^2}(1 - 2\epsilon|x|^2))(\bar{u}(s)x) \cdot \nabla u(s) dx ds.$$

Primeiramente observamos que, como $|x|u(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, então,

$$|f_\epsilon(s)| = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\epsilon|x|^2}|x|^2|u(s)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2|u(s)|^2 dx < \infty.$$

Como $|e^{-2\epsilon|x|^2}(1 - 2\epsilon|x|^2)|$ é limitada, temos pelas desigualdades de Cauchy-Schwartz e de Hölder que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-2\epsilon|x|^2}(1 - 2\epsilon|x|^2))(\bar{u}(s)x) \cdot \nabla u(s) dx \right| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3} |(\bar{u}(s)x) \cdot \nabla u(s)| dx \\ &\lesssim \|u(s)\| \cdot \| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(s) = \| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-2\epsilon|x|^2}(1 - 2\epsilon|x|^2))(\bar{u}(s)x) \cdot \nabla u(s) dx = \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}(s)x) \cdot \nabla u(s) dx.$$

Usando a estimativa (4.35), temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-2\epsilon|x|^2}(1 - 2\epsilon|x|^2))(\bar{u}(s)x) \cdot \nabla u(s) dx ds \right| &\lesssim \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |(\bar{u}(s)x) \cdot \nabla u(s)| dx ds \\ &\lesssim \int_0^t \|u(s)\| \cdot \| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \lesssim t \sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\| \cdot \| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \infty. \end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-2\epsilon|x|^2}(1 - 2\epsilon|x|^2))(\bar{u}(s)x) \cdot \nabla u(s) dx ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}(s)x) \cdot \nabla u(s) dx ds.$$

Portanto, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ em (4.34), temos pela definição de f_ϵ que

$$\| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 4\mathfrak{Jm} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}(s)x) \cdot \nabla u(s) dx ds. \quad (4.36)$$

Tomando a derivada em relação a t na equação (4.36), temos o resultado. \square

Lema 4.13. *Se $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, então para todo $t \in (-T_{\min}, T_{\max})$ temos*

$$\partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2|u(t)|^2 dx = 24E(u) - 4\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Demonstração. Nesta demonstração fazemos o caso em que $t \geq 0$, visto que o caso em que $t < 0$ é similar. Fixemos $t \in (0, T_{\max})$. Seja $\epsilon \in (0, 1)$. Definamos h_ϵ por

$$h_\epsilon(t) := 4\Im \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}(t) e^{-\epsilon|x|^2} \chi) \cdot (\nabla u(t)) dx, \quad (4.37)$$

e \mathbf{a} por

$$\mathbf{a} := -\frac{e^{-\epsilon|x|^2}}{2\epsilon}.$$

Observemos então que podemos escrever h_ϵ na forma

$$h_\epsilon(t) = 4\Im \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}(t) \nabla \mathbf{a}) \cdot (\nabla u(t)) dx.$$

Tomemos a derivada em relação a t em h_ϵ . Como $\nabla \mathbf{a} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, podemos usar o Lema 4.7 para obter

$$h'_\epsilon(t) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(-|u(t)|^4 \Delta \mathbf{a} - |u(t)|^2 \Delta \Delta \mathbf{a} + 4\Re \left(\sum_{j,k=1}^3 a_{jk} \overline{u_j(t)} u_k(t) \right) \right) dx.$$

Temos também que a_{jk} , $\Delta \mathbf{a}$ e $\Delta \Delta \mathbf{a}$ são dados por

$$a_{jk}(x) = e^{-\epsilon|x|^2} (\delta_{jk} - 2\epsilon x_j x_k),$$

$$\Delta \mathbf{a} = e^{-\epsilon|x|^2} (3 - 2\epsilon|x|^2),$$

$$\Delta \Delta \mathbf{a} = -2e^{-\epsilon|x|^2} \epsilon (15 - 20\epsilon|x|^2 + 4\epsilon^2|x|^4).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^3 a_{jk} \overline{u_j(t)} u_k(t) &= \sum_{j,k=1}^3 e^{-\epsilon|x|^2} (\delta_{jk} - 2\epsilon x_j x_k) \overline{u_j(t)} u_k(t) \\ &= e^{-\epsilon|x|^2} (|\nabla u(t)|^2 - 2\epsilon |\nabla u(t) \cdot x|^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} h'_\epsilon(t) &= -6 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\epsilon|x|^2} |u(t)|^4 dx + 4 \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon|x|^2 e^{-\epsilon|x|^2} |u(t)|^4 dx + 60 \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon e^{-\epsilon|x|^2} |u(t)|^2 dx \\ &\quad - 80 \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^2|x|^2 e^{-\epsilon|x|^2} |u(t)|^2 dx + 16 \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^3|x|^4 e^{-\epsilon|x|^2} |u(t)|^2 dx \\ &\quad + 8 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\epsilon|x|^2} |\nabla u(t)|^2 dx - 16 \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon e^{-\epsilon|x|^2} |\nabla u(t) \cdot x|^2 dx. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\begin{aligned}
 h_\epsilon(t) &= h_\epsilon(0) - 6 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\epsilon|x|^2} |u(s)|^4 dx ds + 4 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon|x|^2 e^{-\epsilon|x|^2} |u(s)|^4 dx ds \\
 &+ 60 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon e^{-\epsilon|x|^2} |u(s)|^2 dx ds - 80 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^2|x|^2 e^{-\epsilon|x|^2} |u(s)|^2 dx ds \\
 &+ 16 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^3|x|^4 e^{-\epsilon|x|^2} |u(s)|^2 dx ds + 8 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\epsilon|x|^2} |\nabla u(s)|^2 dx ds \\
 &- 16 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon e^{-\epsilon|x|^2} |\nabla u(s) \cdot x|^2 dx ds.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Notemos que utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \epsilon e^{-\epsilon|x|^2} |\nabla u(t) \cdot x|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon|x|^2 e^{-\epsilon|x|^2} |\nabla u(t)|^2 dx.$$

Designando $h(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(t)$, visto que as funções $e^{-\alpha}$, $\alpha e^{-\alpha}$ e $\alpha^2 e^{-\alpha}$ são uniformemente limitadas em \mathbb{R}^+ , tomando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ em (4.38) e utilizando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\begin{aligned}
 h(t) &= h(0) - 6 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |u(s)|^4 dx ds + 8 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\epsilon|x|^2} |\nabla u(s)|^2 dx ds \\
 &= h(0) + \int_0^t \left(12 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(s)|^2 dx - 6 \int_{\mathbb{R}^3} |u(s)|^4 dx - 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(s)|^2 dx \right) ds \\
 &= h(0) + \int_0^t \left(24E(u) - 4\|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right) ds.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando o Teorema da convergência dominada diretamente à fórmula (4.37) e pelo Lema 4.12, temos que

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\mathfrak{I}m \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}(t)e^{-\epsilon|x|^2} x) \cdot (\nabla u(t)) dx = 4\mathfrak{I}m \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}(t)x) \cdot (\nabla u(t)) dx \\
 &= \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |u(t)|^2 dx.
 \end{aligned}$$

Notemos que $h(0) = 4\mathfrak{I}m \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}_0 x) \cdot (\nabla u_0) dx$. Logo,

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |u(t)|^2 dx = 4\mathfrak{I}m \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}_0 x) \cdot (\nabla u_0) dx + \int_0^t \left(24E(u) - 4\|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right) ds.$$

Derivando ambos os lados da equação acima em relação a t , temos o resultado. □

Lema 4.14. *Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ radial, tal que $\chi(x) = g(|x|)$, e seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ radial. Se u é a solução de (4.1), então,*

$$\partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi(x) |u(t)|^2 dx = 4 \int_{\mathbb{R}^3} g''(|x|) |\nabla u(t)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^2 \chi(x) |u(t)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \chi(x) |u(t)|^4 dx.$$

Demonstração. Em (4.2), multipliquemos ambos os lados por χ e tomemos a integral sobre \mathbb{R}^3 :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \chi |u|^2 dx = -2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi \nabla \cdot \mathfrak{I}m(\bar{u} \nabla u) dx.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \chi |u|^2 dx = 2 \mathfrak{I}m \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u} \nabla \chi) \cdot \nabla u dx.$$

Então,

$$\partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi |u|^2 dx = \partial_t \left(\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \chi |u|^2 dx \right) = \partial_t \left(2 \mathfrak{I}m \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u} \nabla \chi) \cdot \nabla u dx \right).$$

Utilizando o Lema 4.7 com a como χ , vemos que

$$\partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi |u|^2 dx = - \int_{\mathbb{R}^3} |u(t)|^4 \Delta \chi dx - \int_{\mathbb{R}^3} |u(t)|^2 \Delta^2 \chi dx + 4 \Re \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,k=1}^3 \chi_{jk} \overline{u_j(t)} u_k(t) dx.$$

Como χ é radial, temos que

$$\chi_{jk}(x) = g''(|x|) \frac{x_j x_k}{|x|^2} + g'(|x|) \left(\frac{\delta_{jk}}{|x|} - \frac{x_j x_k}{|x|^3} \right).$$

Como u é radial, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^3 \chi_{jk} \overline{u_j(t)} u_k(t) &= \sum_{j,k=1}^3 \left(g''(|x|) \frac{x_j x_k}{|x|^2} + g'(|x|) \left(\frac{\delta_{jk}}{|x|} - \frac{x_j x_k}{|x|^3} \right) \right) \overline{u_j(t)} u_k(t) \\ &= \sum_{j,k=1}^3 g''(|x|) \frac{x_j x_k}{|x|^2} \overline{u_j(t)} u_k(t) + \sum_{j,k=1}^3 g'(|x|) \frac{\delta_{jk}}{|x|} \overline{u_j(t)} u_k(t) \\ &\quad - \sum_{j,k=1}^3 g'(|x|) \frac{x_j x_k}{|x|^3} \overline{u_j(t)} u_k(t) \\ &= g''(|x|) \frac{|\nabla u \cdot x|^2}{|x|^2} + g'(|x|) \frac{|\nabla u|^2}{|x|} - g'(|x|) \frac{|\nabla u \cdot x|^2}{|x|^3} \\ &= g''(|x|) \frac{|\nabla u|^2 |x|^2}{|x|^2} + g'(|x|) \frac{|\nabla u|^2}{|x|} - g'(|x|) \frac{|\nabla u|^2 |x|^2}{|x|^3} \\ &= g''(|x|) |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi(x) |u(t)|^2 dx = 4 \int_{\mathbb{R}^3} g''(|x|) |\nabla u(t)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^2 \chi(x) |u(t)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \chi(x) |u(t)|^4 dx.$$

□

Capítulo 5

Demonstrações dos Teoremas 1.1 e 1.2

Neste Capítulo demonstramos o critério de espalhamento de Tao, originalmente demonstrado em [24], e os Teoremas 1.1 (demonstrado em [10]) e 1.2 (demonstrado em [20]) utilizando os resultados expostos nos capítulos anteriores.

5.1 Critério de Espalhamento de Tao

O critério de espalhamento de Tao, devido a Terence Tao, foi provado em [24]. Este critério expõe condições suficientes para que uma solução se espalhe (vide Definição 3.16). Temos interesse em provar que, se $M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0) < M(Q)E(Q)$ e $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, então as hipóteses deste critério são satisfeitas.

Sendo $(2, 6)$ e $(4, 3)$ pares admissíveis (vide Definição 3.3), usando as estimativas de Strichartz enunciadas no Teorema 3.4, temos

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L_t^2L_x^6(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (5.1)$$

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L_t^4L_x^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (5.2)$$

Uma vez que $e^{it\Delta}$ comuta com as derivadas no espaço, temos que

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L_t^2W_x^{1,6}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \lesssim \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}, \quad (5.3)$$

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L_t^4W_x^{1,3}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \lesssim \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}. \quad (5.4)$$

Além disso, temos pelas imersões de Sobolev $W^{1,6}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $W^{1,3}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, que

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L_t^2 L_x^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}, \quad (5.5)$$

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L_t^4 L_x^6(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}. \quad (5.6)$$

Uma estimativa importante é

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L_t^4 L_x^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (5.7)$$

A demonstração desta estimativa faz uso da decomposição de Littlewood-Paley e iremos omiti-la. Para os detalhes veja o trabalho de Tao [24], Lema 3.1.

Em vista do PVI (1.1), seja \mathbf{u} a solução maximal em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $I = (-T_{\min}, T_{\max})$ o intervalo maximal de existência desta solução. Seja $t_0 \in I$. Vemos que a função $\mathbf{u}(t + t_0)$ é solução maximal de (1.1) em $H^1(\mathbb{R}^3)$ com dado inicial $\mathbf{u}(t_0)$ e intervalo maximal de existência $J = (-T_{\min} - t_0, T_{\max} - t_0)$. Pelo princípio de Duhamel (3.9), temos

$$\mathbf{u}(t + t_0) = e^{it\Delta}\mathbf{u}(t_0) - i \int_0^t e^{i(t-\zeta)\Delta}(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(\zeta + t_0)d\zeta.$$

Fazendo $t = t_1 - t_0$, temos

$$\mathbf{u}(t_1) = e^{i(t_1-t_0)\Delta}\mathbf{u}(t_0) - i \int_0^{t_1-t_0} e^{i(t_1-t_0-\zeta)\Delta}(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(\zeta + t_0)d\zeta.$$

Na integral, fazendo a substituição $s = \zeta + t_0$, o princípio de Duhamel se torna

$$\mathbf{u}(t_1) = e^{i(t_1-t_0)\Delta}\mathbf{u}(t_0) - i \int_{t_0}^{t_1} e^{i(t_1-s)\Delta}(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(s)ds. \quad (5.8)$$

Lema 5.1. *Seja \mathbf{u} uma solução de (1.1) tal que $\|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty H_x^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \leq E$, onde E é uma constante. Então,*

$$\|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty L_x^q([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \lesssim 1, \quad (5.9)$$

para todo $q \in [2, 6]$, e

$$\|\mathbf{u}\|_{L_t^2 W_x^{1,6}([T, T+\tau] \times \mathbb{R}^3)} \lesssim (1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}, \quad (5.10)$$

para todo $T > 0$ e $\tau > 0$. Em particular

$$\|\mathbf{u}\|_{L_t^2 L_x^\infty([T, T+\tau] \times \mathbb{R}^3)} \lesssim (1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}, \quad (5.11)$$

para todo $T > 0$ e $\tau > 0$.

Demonstração. A limitação em (5.9) segue da imersão de Sobolev, pois temos $H^1(\mathbb{R}^3) = W^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$, uma vez que $q \in [2, \frac{3 \cdot 2}{3-2}]$. Façamos $K = [T, T + \tau] \times \mathbb{R}^3$. Para provar (5.10) e (5.11), vamos definir a quantidade

$$X(\tau) := \|\mathbf{u}\|_{L_t^2 W_x^{1,6}(K)} + \|\mathbf{u}\|_{L_t^4 L_x^\infty(K)}.$$

Pela definição, $X(0) = 0$, e quando τ cresce, $X(\tau)$ também cresce de maneira contínua. Primeiramente notemos que, usando a formulação (5.8), para todo $t \in [T, T + \tau]$, tem-se

$$\mathbf{u}(t) = e^{i(t-T)\Delta} \mathbf{u}(T) - i \int_T^t e^{i(t-s)\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(s) ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}(t)| &\leq |e^{i(t-T)\Delta} \mathbf{u}(T)| + \left| \int_T^t e^{i(t-s)\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(s) ds \right| \\ &\leq |e^{i(t-T)\Delta} \mathbf{u}(T)| + \int_T^{T+\tau} |e^{i(t-s)\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(s)| ds. \end{aligned}$$

Daí, aplicando à inequação integral acima a desigualdade de Minkowski para integrais, em seguida as estimativas (5.3) e (5.7), e em seguida a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} X(\tau) &\lesssim \|\mathbf{u}(T)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} + \int_T^{T+\tau} \|\mathbf{u}^3(s)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\lesssim 1 + \|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty H_x^1(K)} \int_T^{T+\tau} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ &\lesssim 1 + \tau^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{L_t^4 L_x^\infty(K)}^2 \\ &\lesssim 1 + \tau^{\frac{1}{2}} X^2(\tau). \end{aligned}$$

Assim, existe uma constante $C > 0$, tal que,

$$X(\tau) \leq C + C\tau^{\frac{1}{2}} X^2(\tau),$$

e conseqüentemente,

$$\frac{X(\tau)}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{C}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}} + C\tau^{\frac{1}{2}} (1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{X(\tau)}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}} \right)^2.$$

Definamos $Y(\tau) := \frac{X(\tau)}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}}$. Então

$$Y(\tau) \leq \frac{C + C\tau^{\frac{1}{2}} (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}} Y^2(\tau)}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}}. \quad (5.12)$$

Vamos provar que Y é limitado. Seja $A > C$ e $\tau_A > 0$ pequeno o suficiente tal que

$$\frac{A}{C} > \frac{1 + \tau_A^{\frac{1}{2}} A^2 (1 + \tau_A^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \tau_A^2)^{\frac{1}{4}}},$$

e que para todo $\tau \leq \tau_A$ tem-se

$$\frac{1 + \tau^{\frac{1}{2}} A^2 (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{1 + \tau_A^{\frac{1}{2}} A^2 (1 + \tau_A^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \tau_A^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

Suponha que exista $\tau \in (0, \tau_A]$ tal que $Y(\tau) = A$. Então, por (5.12), temos que

$$\frac{A}{C} \leq \frac{1 + \tau^{\frac{1}{2}} A^2 (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{1 + \tau_A^{\frac{1}{2}} A^2 (1 + \tau_A^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \tau_A^2)^{\frac{1}{4}}},$$

o que é um absurdo. Da continuidade de Y , temos que para todo $\tau \in [0, \tau_A]$, $Y(\tau) < A$.

Logo, para todo $\tau \in [0, \tau_A]$ temos

$$X(\tau) < A(1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Em particular, $\|\mathbf{u}\|_{L_t^2 W_x^{1,6}([T, T+\tau] \times \mathbb{R}^3)} < A(1 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}$ para $\tau \in [0, \tau_A]$. Logo, elevando ambos os lados ao quadrado temos que $\|\mathbf{u}\|_{L_t^2 W_x^{1,6}([T, T+\tau] \times \mathbb{R}^3)}^2 < A^2(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}$. Se $\tau > \tau_A$, façamos $\tau = n\tau_A + r$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r < \tau_A$. Temos então que

$$\frac{n(1 + \tau_A^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + (n\tau_A)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1 + \tau_A^2)^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{n^2} + \tau_A^2)^{\frac{1}{2}}} < \frac{(1 + \tau_A^2)^{\frac{1}{2}}}{\tau_A} =: B,$$

e

$$\frac{(1 + (n\tau_A)^2)^{\frac{1}{2}} + (1 + r^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + (n\tau_A + r)^2)^{\frac{1}{2}}} < \frac{(1 + (n\tau_A)^2)^{\frac{1}{2}} + (1 + (n\tau_A)^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + (n\tau_A)^2)^{\frac{1}{2}}} = 2.$$

Temos então

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{L_t^2 W_x^{1,6}([T, T+\tau] \times \mathbb{R}^3)}^2 &< nA^2(1 + \tau_A^2)^{\frac{1}{2}} + A^2(1 + r^2)^{\frac{1}{2}} \\ &< BA^2(1 + (n\tau_A)^2)^{\frac{1}{2}} + BA^2(1 + r^2)^{\frac{1}{2}} \\ &< 2BA^2(1 + (n\tau_A + r)^2)^{\frac{1}{2}} = 2BA^2(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Se $\tau < \tau_A$, então vale $\|\mathbf{u}\|_{L_t^2 W_x^{1,6}([T, T+\tau] \times \mathbb{R}^3)}^2 < A^2(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}} < 2BA^2(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}$, daí temos os resultados. □

Vamos agora mostrar o critério de espalhamento de Tao. Este resultado, juntamente com o Lema 4.10, são cruciais para a demonstração da afirmação (1) do Teorema 1.1.

Lema 5.2 (Critério de Espalhamento de Tao). *Seja $u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{C}$ uma solução radial de (1.1) satisfazendo*

$$\|u\|_{L_t^\infty H_x^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \leq E, \quad (5.13)$$

para alguma constante E . *Existem constantes $\epsilon = \epsilon(E) > 0$ e $R = R(E) > 0$ tais que se*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{|x| < R} |u(t, x)|^2 dx \leq \epsilon^2,$$

então, u se espalha quando $t \rightarrow +\infty$, ou seja, existe $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - e^{it\Delta} u_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Demonstração. Sejam $\epsilon \in (0, 1)$ suficientemente pequeno, e $R > 1$ suficientemente grande dependente de ϵ a ser escolhido depois. De (5.6) temos

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_t^4 L_x^6(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)} \lesssim 1. \quad (5.14)$$

Então, pelo Teorema da Convergência Monótona, podemos achar um tempo $T_0 > \epsilon^{-2} > 0$ (dependente de u) tal que

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_t^4 L_x^6([T_0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \leq \epsilon. \quad (5.15)$$

Pela hipótese, podemos achar $T_1 \geq T_0$ tal que

$$\int_{B(0, R)} |u(T_1, x)|^2 dx < \epsilon, \quad (5.16)$$

uma vez que $\epsilon^2 < \epsilon$. Seja $\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave radial decrescente que vale 1 em $B(0, \frac{1}{2})$ e vale 0 em $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, 1)$ e seja $\eta_R(x) = \eta(\frac{x}{R})$. Logo, vemos que η_R vale 1 em $B(0, \frac{R}{2})$ e vale 0 em $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R)$. Temos então que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |u(T_1, x)|^2 dx < \epsilon,$$

Multiplicando ambos os lados de (4.2) por η_R e integrando no espaço, temos

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |u|^2 dx = -2 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R \nabla \cdot \Im(\bar{u} \nabla u) dx.$$

Usando integração por partes

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |u|^2 dx = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \eta_R \cdot \Im(\bar{u} \nabla u) dx.$$

Como η é radial, $\eta(x) = v(|x|)$ para alguma função v . Logo, $\eta_R(x) = v(\frac{|x|}{R})$. Temos então que $\nabla\eta_R(x) = \frac{1}{R}v'(\frac{|x|}{R})\frac{x}{|x|}$, logo, $|\nabla\eta_R(x)| = \frac{1}{R}|v'(\frac{|x|}{R})|$. Daí, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Young e o fato de que $\|\nabla\eta_R\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{R}$, temos:

$$\begin{aligned} |\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |u(t)|^2 dx| &= 2 \left| \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\eta_R \cdot \mathfrak{I}m(\bar{u}\nabla u) dx \right| \leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\eta_R \cdot \mathfrak{I}m(\bar{u}\nabla u)| dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\eta_R| |\mathfrak{I}m(\bar{u}\nabla u)| dx \lesssim \frac{1}{R} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{u}| |\nabla u| dx \\ &\lesssim \frac{1}{R} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\bar{u}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \right) \lesssim \frac{1}{R}, \end{aligned}$$

para todo tempo $t \in [0, +\infty)$. Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$-\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |u(t)|^2 dx \leq \frac{C}{R}.$$

Integrando de $t \in [T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}, T_1]$ a T_1 , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |u(t)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |u(T_1)|^2 dx \leq \frac{C}{R} (T_1 - t).$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |u(t)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |u(T_1)|^2 dx + \frac{C}{R} (T_1 - t) < \epsilon + \frac{C}{R} \epsilon^{-\frac{1}{4}} \leq 2\epsilon \lesssim \epsilon,$$

para todo $t \in [T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}, T_1]$, com $R > C\epsilon^{-\frac{5}{4}}$. Logo, usando (5.9), a conservação da massa e a desigualdade de Hölder, temos

$$\|u(t)\|_{L^3(B(0, R/2))} \leq \|u(t)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|u(t)\|_{L^2(B(0, R/2))}^{\frac{1}{2}} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}},$$

e, usando (4.3), (5.9), a conservação da massa e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^3(\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R/2))} &\leq \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R/2))}^{\frac{1}{3}} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{3}} \\ &= \left\| \frac{|\cdot|}{|\cdot|} u(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R/2))}^{\frac{1}{3}} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{3}} \\ &\leq \frac{1}{R^{\frac{1}{3}}} \left\| |\cdot| u(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R/2))}^{\frac{1}{3}} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{3}} \\ &\lesssim \frac{1}{R^{\frac{1}{3}}} \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R/2))}^{\frac{1}{3}} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{3}} \lesssim \frac{1}{R^{\frac{1}{3}}}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}, T_1]$. Então,

$$\|u\|_{L_t^\infty L_x^3([T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}, T_1] \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{R^{\frac{1}{3}}} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}}, \quad (5.17)$$

se tomarmos $R > \epsilon^{-\frac{3}{2}}$. Precisamos provar agora a seguinte estimativa:

$$\|e^{i(\cdot - T_1)\Delta} u(T_1)\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{32}}. \quad (5.18)$$

Usando (5.8) com $t_1 = T_1$ e $t_0 = 0$, temos

$$\mathbf{u}(T_1) = e^{iT_1\Delta}\mathbf{u}(0) - i \int_0^{T_1} e^{i(T_1-t')\Delta}(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(t') dt'.$$

Daí,

$$\begin{aligned} e^{i(t-T_1)\Delta}\mathbf{u}(T_1) &= e^{it\Delta}\mathbf{u}(0) - i \int_{T_1-\epsilon^{-1/4}}^{T_1} e^{i(t-t')\Delta}(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(t') dt' \\ &\quad - i \int_0^{T_1-\epsilon^{-1/4}} e^{i(t-t')\Delta}(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(t') dt'. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Sejam

$$\mathbf{A} := \|e^{it\Delta}\mathbf{u}(0)\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)},$$

$$\mathbf{B} := \left\| -i \int_{T_1-\epsilon^{-1/4}}^{T_1} e^{i(t-t')\Delta}(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(t') dt' \right\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)}$$

e

$$\mathbf{C} := \left\| -i \int_0^{T_1-\epsilon^{-1/4}} e^{i(t-t')\Delta}(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(t') dt' \right\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)}.$$

Então,

$$\|e^{i(\cdot-T_1)\Delta}\mathbf{u}(T_1)\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \leq \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}.$$

De (5.15), como $\epsilon < \epsilon^{\frac{1}{32}}$, ganhamos a contribuição do primeiro termo \mathbf{A} , ou seja, $\mathbf{A} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{32}}$.

Agora consideremos os segundo termo \mathbf{B} . Pelas desigualdades de Minkowski para integrais e Hölder e de (5.6), temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\lesssim \int_{T_1-\epsilon^{-\frac{1}{4}}}^{T_1} \|(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(t')\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} dt' \lesssim \int_{T_1-\epsilon^{-\frac{1}{4}}}^{T_1} \|\mathbf{u}^3(t')\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} dt' \\ &\lesssim \int_{T_1-\epsilon^{-\frac{1}{4}}}^{T_1} \|\mathbf{u}(t')\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}^2(t')\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} dt' \end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Hölder, de (5.10), (5.11) e (5.17), temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\lesssim \int_{T_1-\epsilon^{-\frac{1}{4}}}^{T_1} \|\mathbf{u}(t')\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}(t')\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}(t')\|_{W^{1,6}(\mathbb{R}^3)} dt' \\ &\lesssim \|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty L_x^3([T_1-\epsilon^{-\frac{1}{4}}, T_1] \times \mathbb{R}^3)} \int_{T_1-\epsilon^{-\frac{1}{4}}}^{T_1} \|\mathbf{u}(t')\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}(t')\|_{W^{1,6}(\mathbb{R}^3)} dt' \\ &\lesssim \|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty L_x^3([T_1-\epsilon^{-\frac{1}{4}}, T_1] \times \mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}\|_{L_t^2 L_x^\infty([T_1-\epsilon^{-\frac{1}{4}}, T_1] \times \mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}\|_{L_t^2 W_x^{1,6}([T_1-\epsilon^{-\frac{1}{4}}, T_1] \times \mathbb{R}^3)} \\ &\lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} (1 + \epsilon^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} (1 + \epsilon^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} (1 + \epsilon^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \lesssim (\epsilon + \epsilon^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{4}} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{32}}. \end{aligned}$$

Finalmente, tomemos

$$\mathbf{M} = -i \int_0^{T_1-\epsilon^{-1/4}} e^{i(t-t')\Delta}(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(t') dt'.$$

Usando (5.8), obtemos que

$$\mathbf{M} = i e^{it\Delta} (e^{i(-T_1 + \epsilon^{-\frac{1}{4}})\Delta} \mathbf{u}(T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}) - \mathbf{u}_0).$$

Observamos que, pela desigualdade de Hölder,

$$C = \|\mathbf{M}\|_{L_t^4 L_x^6((T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \|\mathbf{M}\|_{L_t^4 L_x^3((T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{M}\|_{L_t^4 L_x^\infty((T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, por (5.2),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}\|_{L_t^4 L_x^3((T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} &\lesssim \left\| e^{i(-T_1 + \epsilon^{-\frac{1}{4}})\Delta} \mathbf{u}(T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}) - \mathbf{u}_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\lesssim \left\| \mathbf{u}(T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim 1. \end{aligned}$$

Temos também da estimativa de dispersão (3.2) e da desigualdade de Minkowski para integrais que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}\|_{L_t^4 L_x^\infty((T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} &= \left\| \int_0^{T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}} e^{i(\cdot - t')\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{L_t^4 L_x^\infty((T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \\ &\lesssim \left\| \int_0^{T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}} \left\| e^{i(\cdot - t')\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} dt' \right\|_{L^4((T_1, +\infty))} \\ &\lesssim \left\| \int_0^{T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}} \frac{1}{(\cdot - t')^{\frac{3}{2}}} \|\mathbf{u}^3(t')\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} dt' \right\|_{L^4((T_1, +\infty))} \\ &\lesssim \left\| \int_0^{T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}} \frac{1}{(\cdot - t')^{\frac{3}{2}}} \|\mathbf{u}(t')\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^3 dt' \right\|_{L^4((T_1, +\infty))}. \end{aligned}$$

Logo, usando (5.9), temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}\|_{L_t^4 L_x^\infty((T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} &\lesssim \left\| \int_0^{T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}} \frac{1}{(\cdot - t')^{\frac{3}{2}}} dt' \right\|_{L^4((T_1, +\infty))} \\ &\lesssim \left(\int_{T_1}^{\infty} \left(\int_0^{T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}} \frac{1}{(t - t')^{\frac{3}{2}}} dt' \right)^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\lesssim \left(\int_{T_1}^{\infty} \left(\frac{2}{(t - (T_1 - \epsilon^{-\frac{1}{4}}))^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{t^{\frac{1}{2}}} \right)^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\lesssim \left(\int_{T_1}^{\infty} \left(\frac{2}{(t - T_1 + \epsilon^{-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}} \right)^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\lesssim \left(\int_{T_1}^{\infty} \frac{2}{(t - T_1 + \epsilon^{-\frac{1}{4}})^2} dt \right)^{\frac{1}{4}} \lesssim \left(\frac{1}{\epsilon^{-\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{4}} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{16}}. \end{aligned}$$

Daí temos a estimativa (5.18), pois vemos que $C = \|M\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{32}}$.

Novamente por (5.8), vemos que

$$\mathbf{u}(t) = e^{i(t-T_1)\Delta} \mathbf{u}(T_1) - i \int_{T_1}^t e^{i(t-t')\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt'. \quad (5.20)$$

Tomando em (5.20) a norma $L_t^4 L_x^6([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)$ para algum $T \geq T_1$ e aplicando (5.18), obtemos:

$$\|\mathbf{u}\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{32}} + \left\| \int_{T_1}^t e^{i(t-t')\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)},$$

que pela imersão de Sobolev $W^{1,3}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ leva à desigualdade

$$\|\mathbf{u}\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{32}} + \left\| \int_{T_1}^t e^{i(t-t')\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{L_t^4 W_x^{1,3}([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)}.$$

Agora, usando o item (ii) do Teorema 3.4, temos que

$$\|\mathbf{u}\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{32}} + \|\mathbf{u}^3\|_{L_t^2 W_x^{1, \frac{6}{5}}([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)}.$$

Além disso, aplicando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^3\|_{L_t^2 W_x^{1, \frac{6}{5}}([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)} &= \left\| \|\mathbf{u}^3\|_{W^{1, \frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)} \right\|_{L^2([T_1, T])} \\ &\lesssim \left\| \|\mathbf{u}^2\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \right\|_{L^2([T_1, T])} \\ &\lesssim \left\| \|\mathbf{u}\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^2 \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \right\|_{L^2([T_1, T])} \\ &\lesssim \left\| \|\mathbf{u}\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^2 \right\|_{L^2([T_1, T])} \|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty H_x^1([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathbf{u}\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{32}} + \|\mathbf{u}\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)}^2. \quad (5.21)$$

Fazendo-se $X(T) := \|\mathbf{u}\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, T] \times \mathbb{R}^3)}$, segue de (5.21) que existe uma constante C positiva tal que

$$X(T) \leq C \epsilon^{\frac{1}{32}} + C X^2(T). \quad (5.22)$$

Vemos que $X(T_1) = 0$ e que X cresce continuamente com T . Seja $A > C$. Escolhemos ϵ suficientemente pequeno para que

$$\frac{A}{C} > 1 + A^2 \epsilon^{\frac{1}{32}}.$$

Suponhamos que exista T_A tal que $X(T_A) = A \epsilon^{\frac{1}{32}}$. De (5.22) temos que

$$\frac{A}{C} \leq \frac{\epsilon^{\frac{1}{32}} + A^2 \epsilon^{\frac{1}{16}}}{\epsilon^{\frac{1}{32}}} = 1 + A^2 \epsilon^{\frac{1}{32}},$$

o que é um absurdo. Logo, $X(T) \leq A\epsilon^{\frac{1}{32}}$ para todo $T \geq T_1$. Fazendo-se $T \rightarrow +\infty$, temos

$$\|\mathbf{u}\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{32}}.$$

Logo,

$$\|\mathbf{u}^3\|_{L_t^2 W_x^{1, \frac{6}{5}}([T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{L_t^4 L_x^6([T_1, +\infty) \times \mathbb{R}^3)}^2 \lesssim \epsilon^{\frac{1}{16}}. \quad (5.23)$$

Sejam $\tau_2 > \tau_1 \geq T_1$. Usando o item (ii) do Teorema 3.4 e (5.23),

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-it'\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} &= \left\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{i(\tau_1 - t')\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \left\| \int_t^{\tau_2} e^{i(t-t')\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{L_t^\infty H_x^1([\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}^3)} \\ &\lesssim \|\mathbf{u}^3\|_{L_t^2 W_x^{1, \frac{6}{5}}([\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{16}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-it'\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\mathbf{u}^3\|_{L_t^2 W_x^{1, \frac{6}{5}}([\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}^3)}.$$

Para todo $\mathfrak{a} > 0$, existe $\tau_{\mathfrak{a}}$ tal que se $\tau_1 > \tau_{\mathfrak{a}}$, $\|\mathbf{u}^3\|_{L_t^2 W_x^{1, \frac{6}{5}}([\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}^3)} \leq \frac{\mathfrak{a}}{C}$. Então, para $\tau_1 > \tau_{\mathfrak{a}}$,

$$\left\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-it'\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leq \mathfrak{a}.$$

Isso mostra que $\left\| \int_{T_1}^{\tau} e^{-it'\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$ é de Cauchy. Logo,

$$\left\| \int_{T_1}^{\infty} e^{-it'\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\| \int_{T_1}^{\tau} e^{-it'\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{16}}.$$

Definamos

$$\mathbf{u}_+ := e^{-iT_1\Delta} \mathbf{u}(T_1) - i \int_{T_1}^{+\infty} e^{-it'\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt'. \quad (5.25)$$

De (5.20), vemos que para todo $t \in [T_1, \infty)$

$$\mathbf{u}(t) - e^{it\Delta} \mathbf{u}_+ = i \int_t^{+\infty} e^{i(t-t')\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt'.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t) - e^{it\Delta} \mathbf{u}_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} &= \left\| \int_t^{+\infty} e^{i(t-t')\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \\ &= \left\| \int_t^{+\infty} e^{-it'\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(t') dt' \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Como $t \in [T_1, \infty)$, $\int_t^{+\infty} e^{-it'\Delta}(|u|^2 u)(t') dt'$ converge. Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona e pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - e^{it\Delta} u_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \int_t^{+\infty} e^{-it'\Delta}(|u|^2 u)(t') dt' \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

□

5.2 Demonstração do Teorema 1.2

Por hipótese, para $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ temos

$$M(u_0)E(u_0) < M(Q)E(Q). \quad (5.26)$$

Então, pelo que vimos na demonstração do Lema 4.4, fazendo

$$\delta_0 = \frac{M(Q)E(Q) - M(u_0)E(u_0)}{2M(Q)E(Q)},$$

temos que $M(u_0)E(u_0) < (1 - \delta_0)M(Q)E(Q)$ e que $\delta_0 \in (0, 1)$.

Primeiro mostremos que se $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, então, $I = \mathbb{R}$, e para todo instante de tempo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Com efeito, esta afirmação segue diretamente do Lema 4.4, uma vez que pelo Lema 4.4, $I = \mathbb{R}$ e existirá $\delta_1 > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < (1 - \delta_1) \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Em particular

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Mostremos agora que se $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} > \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, então, para todo instante de tempo $t \in I$, temos

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} > \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Além disso, se (a) $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ou (b) u_0 é radial, então, I é finito, implicando que a solução explode em tempo finito (ocorre *blow-up* em tempo finito). Com efeito, pelo Corolário 4.5, existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $t \in I$

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} > (1 + \delta_2) \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (5.27)$$

Em particular

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} > \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Definimos o número $\xi_2 > 0$ tal que $(1 + \delta_2)^2 = 1 + \xi_2$. Suponhamos que $|\mathbf{x}|\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Utilizando-se o Lema 4.13, temos

$$\partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{u}(t)|^2 d\mathbf{x} = 24E(\mathbf{u}_0) - 4\|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Multiplicando ambos os lados da identidade acima por $M(\mathbf{u}_0)$, de (3.16), (5.26) e (5.27) tem-se

$$\begin{aligned} M(\mathbf{u}_0) \partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{u}(t)|^2 d\mathbf{x} &= 24E(\mathbf{u}_0)M(\mathbf{u}_0) - 4\|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &< 24(1 - \delta_0)E(Q)M(Q) - 4\|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &< \frac{24}{6}(1 - \delta_0)\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - 4(1 + \xi_2)\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= -4(\delta_0 + \xi_2)\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 < 0. \end{aligned}$$

Temos então que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{u}(t)|^2 d\mathbf{x} < -C_1.$$

Logo, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, existem constantes C_2 e C_3 tais que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{u}(t)|^2 d\mathbf{x} < -C_1 t^2 + C_2 t + C_3.$$

Como esta integral é sempre não negativa e seu gráfico está abaixo do gráfico de uma parábola com concavidade para baixo, concluímos que o tempo de existência da solução é finito.

Agora suponhamos que \mathbf{u}_0 é radial. Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ uma função radial, onde $\chi(\mathbf{x}) = \omega(|\mathbf{x}|)$ com $\omega''(r) \leq 2$ para todo $r \geq 0$, $\omega(r) = r^2$ para $0 \leq r \leq 1$ e $\omega(r) = 0$ para $r \geq 3$. Definamos também $\chi_m(\mathbf{x}) := \omega_m(|\mathbf{x}|)$, onde $\omega_m(|\mathbf{x}|) := m^2 \omega\left(\frac{|\mathbf{x}|}{m}\right)$. Notemos que $\omega'_m(|\mathbf{x}|) = m\omega'\left(\frac{|\mathbf{x}|}{m}\right)$ e $\omega''_m(|\mathbf{x}|) = \omega''\left(\frac{|\mathbf{x}|}{m}\right)$. Logo,

$$\Delta \chi_m(\mathbf{x}) = \omega''_m(|\mathbf{x}|) + \frac{2\omega'_m(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} = \omega''\left(\frac{|\mathbf{x}|}{m}\right) + \frac{2m\omega'\left(\frac{|\mathbf{x}|}{m}\right)}{|\mathbf{x}|}.$$

Para $h_m(|\mathbf{x}|) := \Delta \chi_m(\mathbf{x})$, tem-se

$$\Delta^2 \chi_m(\mathbf{x}) = h''_m(|\mathbf{x}|) + \frac{2h'_m(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}.$$

Por outro lado,

$$h'_m(|x|) = \frac{1}{m} \omega''' \left(\frac{|x|}{m} \right) + \frac{2\omega'' \left(\frac{|x|}{m} \right)}{|x|} - \frac{2m\omega' \left(\frac{|x|}{m} \right)}{|x|^2}.$$

Daí,

$$h''_m(|x|) = \frac{1}{m^2} \omega'''' \left(\frac{|x|}{m} \right) + \frac{2\omega'''' \left(\frac{|x|}{m} \right)}{m|x|} - \frac{2\omega'' \left(\frac{|x|}{m} \right)}{|x|^2} - \frac{2\omega'' \left(\frac{|x|}{m} \right)}{|x|^2} + \frac{4m\omega' \left(\frac{|x|}{m} \right)}{|x|^3}.$$

Assim concluímos que se $0 \leq |x| \leq m$, então $\Delta\chi_m(x) = 6$ e $\Delta^2\chi_m(x) = 0$. Além disso, para $m \leq |x| \leq 3m$, existem constantes $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que $|\Delta\chi_m(x)| < c_1$ e $|\Delta^2\chi_m(x)| < \frac{c_2}{m^2}$. Finalmente, para $|x| \geq 3m$, $\Delta\chi_m(x) = \Delta^2\chi_m(x) = 0$. Pelo Lema 4.14,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi_m(x) |u(t)|^2 dx &= 4 \int_{\mathbb{R}^3} \omega''_m(|x|) |\nabla u(t)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^2 \chi_m(x) |u(t)|^2 dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \chi_m(x) |u(t)|^4 dx. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Usando que $\omega''_m(r) \leq 2$ para todo $r \geq 0$ e usando as limitações de $\Delta^2\chi_m$, limitemos os três termos do segundo membro de (5.28).

$$4 \int_{\mathbb{R}^3} \omega''_m(|x|) |\nabla u(t)|^2 dx = 4 \int_{\mathbb{R}^3} \omega'' \left(\frac{|x|}{m} \right) |\nabla u(t)|^2 dx \leq 8 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(t)|^2 dx; \quad (5.29)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^2 \chi_m(x) |u(t)|^2 dx \leq \frac{c_2}{m^2} \int_{m \leq |x| \leq 3m} |u(t)|^2 dx. \quad (5.30)$$

Finalmente, usando as limitações de $\Delta\chi_m$, temos

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \chi_m(x) |u(t)|^4 dx &\leq -6 \int_{|x| \leq m} |u(t)|^4 dx + c_1 \int_{m \leq |x| \leq 3m} |u(t)|^4 dx \\ &= -6 \int_{|x| \leq m} |u(t)|^4 dx - 6 \int_{|x| > m} |u(t)|^4 dx \\ &\quad + 6 \int_{|x| > m} |u(t)|^4 dx + c_1 \int_{m \leq |x| \leq 3m} |u(t)|^4 dx \\ &\leq -6 \int_{\mathbb{R}^3} |u(t)|^4 dx + c_3 \int_{|x| \geq m} |u(t)|^4 dx, \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde c_3 é uma constante positiva. Juntando (5.29), (5.30) e (5.31), e em seguida aplicando (4.5), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi_m(x) |u(t)|^2 dx &\leq 8 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(t)|^2 dx - 6 \int_{\mathbb{R}^3} |u(t)|^4 dx + c_3 \int_{|x| \geq m} |u(t)|^4 dx \\ &\quad + \frac{c_2}{m^2} \int_{m \leq |x| \leq 3m} |u(t)|^2 dx \\ &\leq 24E(u_0) - 4 \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{c_3}{m^2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3 \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + \frac{c_2}{m^2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi_m(x) |\mathbf{u}(t)|^2 dx &\leq 24E(\mathbf{u}_0) - \left(4 - \frac{c_3}{2m^2}\right) \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{c_3}{2m^2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^6 \\ &\quad + \frac{c_2}{m^2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Tomando-se m grande o suficiente para que $4 - \frac{c_3}{2m^2}$ seja positivo, multiplicando ambos os lados de (5.32) por $M(\mathbf{u}_0)$, das limitações e de (3.16), tem-se

$$\begin{aligned} M(\mathbf{u}_0) \partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi_m(x) |\mathbf{u}(t)|^2 dx &\leq 24E(\mathbf{u}_0)M(\mathbf{u}_0) - \left(4 - \frac{c_3}{2m^2}\right) \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\quad + \frac{c_3}{2m^2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^8 + \frac{c_2}{m^2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4 \\ &\leq \frac{24}{6} (1 - \delta_0) \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\quad - \left(4 - \frac{c_3}{2m^2}\right) (1 + \xi_2) \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\quad + \frac{c_3}{2m^2} M(\mathbf{u}_0)^8 + \frac{c_2}{m^2} M(\mathbf{u}_0)^4 \\ &= -4(\delta_0 + \xi_2) \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\quad + \frac{c_3}{2m^2} (1 + \xi_2) \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{c_3}{2m^2} M(\mathbf{u}_0)^8 \\ &\quad + \frac{c_2}{m^2} M(\mathbf{u}_0)^4 \\ &=: c_4. \end{aligned}$$

Escolhemos então m grande o suficiente para que a constante c_4 seja negativa. Então, existirá uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi_m(x) |\mathbf{u}(t)|^2 dx < -C_1.$$

Logo, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, existem constantes C_2 e C_3 tais que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_m(x) |\mathbf{u}(t)|^2 dx < -C_1 t^2 + C_2 t + C_3.$$

Como esta integral é sempre não negativa, e seu gráfico está abaixo do gráfico de uma parábola com concavidade para baixo, concluímos que o tempo máximo de existência da solução é finito. \square

5.3 Demonstração do Teorema 1.1

Temos que $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma função radial e que \mathbf{u} é solução maximal de (1.1), com intervalo maximal de existência I . Também temos que $M(\mathbf{u}_0)E(\mathbf{u}_0) < M(Q)E(Q)$. Mos-

tremos que se

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \|\mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

\mathbf{u} é global e se espalha. Com efeito, pelo Lema 4.4, \mathbf{u} é global e uniformemente limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Fixados ϵ e \mathbf{R} como no Lema 5.2, tomemos as seqüências $\{\mathbf{t}_n\}$ e $\{\mathbf{R}_n\}$ tais que $\mathbf{t}_n \rightarrow \infty$ e $\mathbf{R}_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, como no Lema 4.10. Para n grande o suficiente de modo que $\mathbf{R}_n \geq \mathbf{R}$, temos pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{x}| \leq \mathbf{R}} |\mathbf{u}(\mathbf{t}_n, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &\leq \left(\int_{|\mathbf{x}| \leq \mathbf{R}} 1^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|\mathbf{x}| \leq \mathbf{R}} |\mathbf{u}(\mathbf{t}_n, \mathbf{x})|^4 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{4}{3} \pi \mathbf{R}^3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|\mathbf{x}| \leq \mathbf{R}_n} |\mathbf{u}(\mathbf{t}_n, \mathbf{x})|^4 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Logo, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (5.33), obtemos pelo Lema 4.10 que

$$\int_{|\mathbf{x}| \leq \mathbf{R}} |\mathbf{u}(\mathbf{t}_n, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \rightarrow 0.$$

Pelo Lema 5.2 isto implica que \mathbf{u} se espalha quando $\mathbf{t} \rightarrow \infty$. Para provar o caso em que $\mathbf{t} \rightarrow -\infty$, basta observar que se $\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ é solução de (1.1) com dado inicial \mathbf{u}_0 , então, $\mathbf{v}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(-\mathbf{t}, \mathbf{x})$ é solução de (1.1) com dado inicial $\bar{\mathbf{u}}_0$, pois

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}\Delta} \mathbf{u}_0 + i \int_0^{\mathbf{t}} e^{i(\mathbf{t}-s)\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(s) ds.$$

Logo,

$$\mathbf{u}(-\mathbf{t}) = e^{-i\mathbf{t}\Delta} \mathbf{u}_0 + i \int_0^{-\mathbf{t}} e^{-i(\mathbf{t}+s)\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(s) ds.$$

Então,

$$\bar{\mathbf{u}}(-\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}\Delta} \bar{\mathbf{u}}_0 - i \int_0^{-\mathbf{t}} e^{i(\mathbf{t}+s)\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \bar{\mathbf{u}})(s) ds.$$

Fazendo a mudança de variável $\zeta = -s$, temos

$$\bar{\mathbf{u}}(-\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}\Delta} \bar{\mathbf{u}}_0 + i \int_0^{\mathbf{t}} e^{i(\mathbf{t}-\zeta)\Delta} (|\mathbf{u}|^2 \bar{\mathbf{u}})(-\zeta) d\zeta.$$

Então temos

$$\mathbf{v}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}\Delta} \bar{\mathbf{u}}_0 + i \int_0^{\mathbf{t}} e^{i(\mathbf{t}-\zeta)\Delta} (|\mathbf{v}|^2 \mathbf{v})(\zeta) d\zeta.$$

Assim, $\bar{\mathbf{u}}_0$ satisfaz todas as condições do Teorema 1.1, e portanto, existe \mathbf{v}_+ tal que

$$\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}(\mathbf{t}) - e^{i\mathbf{t}\Delta} \mathbf{v}_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Logo,

$$0 = \lim_{\mathbf{t} \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{u}}(-\mathbf{t}) - e^{i\mathbf{t}\Delta} \mathbf{v}_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = \lim_{\mathbf{t} \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(-\mathbf{t}) - e^{-i\mathbf{t}\Delta} (\bar{\mathbf{v}}_+)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Logo, fazendo $\mathbf{u}_- = \overline{\mathbf{v}_+}$, temos \mathbf{u} se espalha quando $t \rightarrow -\infty$, pois

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\mathbf{u}(t) - e^{it\Delta} \mathbf{u}_-\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Mostremos agora que se $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} > \|\mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \mathbf{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, então, I é limitado (a solução explode em tempo finito). Com efeito, tal afirmação segue diretamente da afirmação (2) do Teorema 1.2. \square

Apêndice

Neste apêndice construímos as funções η , φ e ω mencionadas no trabalho. Primeiramente, consideremos a função f dada por

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Nota-se que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e que f e todas as suas derivadas são nulas para $x \leq 0$. Seu gráfico é dado pela seguinte curva.

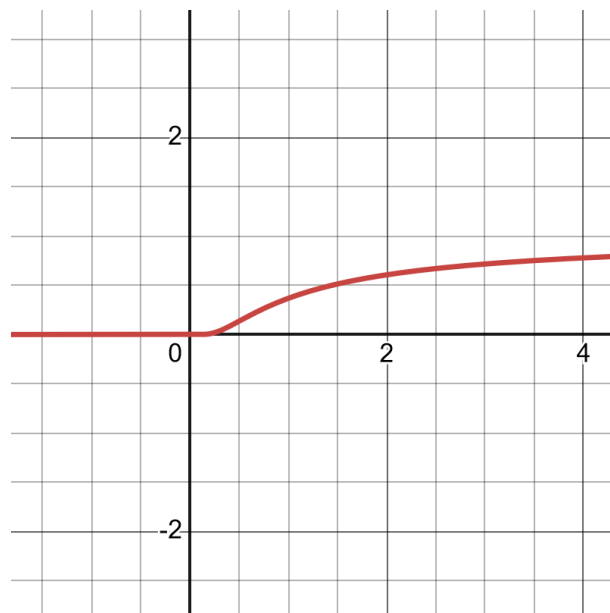
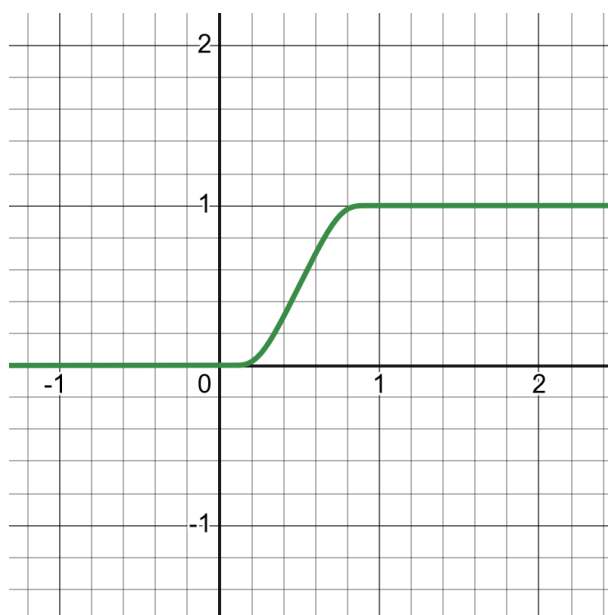


Figura 1: Função $f(x)$.

Consideremos agora a função g dada por

$$g(x) := \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)},$$

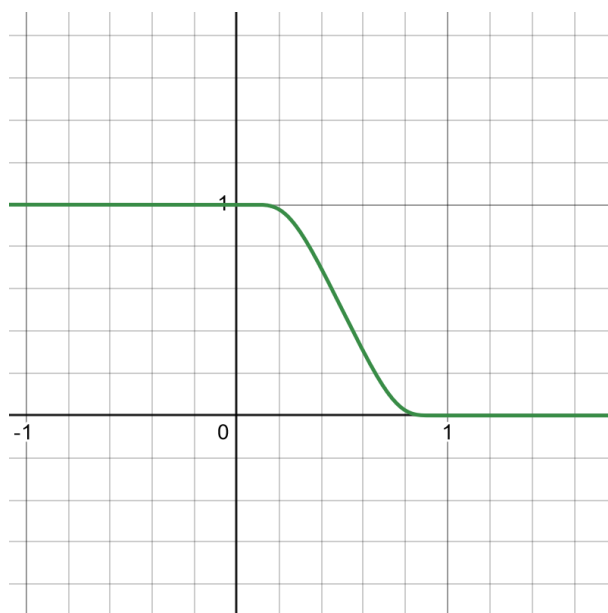
cujos gráfico é dado pela seguinte curva.

Figura 2: Função $g(x)$.

Nota-se que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e que todas as suas derivadas são nulas no conjunto $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$. Além disso, $g(x) = 0$ quando $x \leq 0$ e $g(x) = 1$ quando $x \geq 1$. Seja também a função h dada por

$$h(x) := 1 - g(x),$$

cujo gráfico é dado pela seguinte curva.

Figura 3: Função $h(x)$.

Chamemos g de função ligar e h de função desligar. Notemos que $h'(x) = -g'(x)$ e

que $g'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pode-se mostrar que $\sup_{x \in \mathbb{R}} g'(x) = g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Construção de η

Seja $s(x) := g(2x + 2) - g(2x - 1)$. Seu gráfico é dado pela seguinte curva.

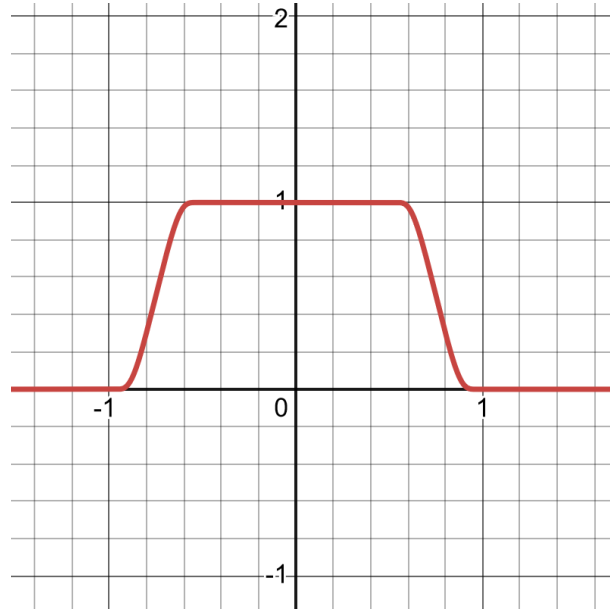


Figura 4: Função $s(x)$.

Podemos então definir $\eta(x) = s(|x|)$ em \mathbb{R}^3 .

Construção de φ

Seja $\frac{3R}{2} \leq b < 2R$. Seja k_b dado por

$$k_b(x) := h\left(\frac{2x}{R} - 2\right)x + g\left(\frac{2x}{R} - 2\right)\frac{3R}{2} - g\left(\frac{x-b}{2R-b}\right)\frac{3R}{2} + g\left(\frac{x-b}{2R-b}\right)2R.$$

Se $0 \leq x \leq b$, temos que

$$k_b(x) = h\left(\frac{2x}{R} - 2\right)x + g\left(\frac{2x}{R} - 2\right)\frac{3R}{2}.$$

Se $b < x$, temos que

$$k_b(x) = h\left(\frac{x-b}{2R-b}\right)\frac{3R}{2} + g\left(\frac{x-b}{2R-b}\right)2R.$$

Logo, em todo caso observamos que $k_b(x) \geq 0$ para $x \geq 0$. Observamos também que se $0 \leq x \leq b$,

$$\begin{aligned} k'_b(x) &= h' \left(\frac{2x}{R} - 2 \right) \frac{2x}{R} + h \left(\frac{2x}{R} - 2 \right) + 3g' \left(\frac{2x}{R} - 2 \right) \\ &\geq 3h' \left(\frac{2x}{R} - 2 \right) + h \left(\frac{2x}{R} - 2 \right) + 3g' \left(\frac{2x}{R} - 2 \right) \\ &= h \left(\frac{2x}{R} - 2 \right) \geq 0, \end{aligned}$$

e que se $b < x$,

$$k'_b(x) = h' \left(\frac{x-b}{2R-b} \right) \frac{3R}{2(2R-b)} + g' \left(\frac{x-b}{2R-b} \right) \frac{2R}{2R-b} \geq 0.$$

Definamos

$$\psi_b(x) := \int_0^x k_b(t) dt.$$

Calculemos $\psi_b(2R)$.

$$\psi_b(2R) = \int_0^{2R} k_b(t) dt = \int_0^b k_b(t) dt + \int_b^{2R} k_b(t) dt.$$

Temos

$$\begin{aligned} \int_0^b k_b(t) dt &= \int_0^b \left(h \left(\frac{2t}{R} - 2 \right) t + g \left(\frac{2t}{R} - 2 \right) \frac{3R}{2} \right) dt \\ &= R^2 \int_0^{\frac{b}{R}} \left(h(2y-2)y + g(2y-2) \frac{3}{2} \right) dy, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_b^{2R} k_b(t) dt &= \int_b^{2R} \left(h \left(\frac{t-b}{2R-b} \right) \frac{3R}{2} + g \left(\frac{t-b}{2R-b} \right) 2R \right) dt \\ &= (2R-b)R \int_0^1 \left(\frac{3}{2} h(y) + 2g(y) \right) dy. \end{aligned}$$

Logo,

$$\psi_b(2R) = (2R-b)R \int_0^1 \left(\frac{3}{2} h(y) + 2g(y) \right) dy + R^2 \int_0^{\frac{b}{R}} \left(h(2y-2)y + g(2y-2) \frac{3}{2} \right) dy.$$

Para $b = 1,7R$, temos que $\psi_b(2R) \approx 1,985R^2$. Para $b = 1,6R$, temos que $\psi_b(2R) \approx 2,01R^2$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, temos que existe $b_0 \in \mathbb{R}$ tal que $1,6R < b_0 < 1,7R$ e que $\psi_{b_0}(2R) = 2R^2$. Definamos então $\varphi(x) := \psi_{b_0}(x)$ para $x \geq 0$.

Construção de ω

Seja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$ tal que $-1,5 \leq \mathbf{b} \leq -1$. Para $x \geq 0$, seja $v_{\mathbf{b}}$ dado por

$$v_{\mathbf{b}}(x) := h(3x-3)2x + g(3x-3)\mathbf{b} - g\left(\frac{3x-4}{5}\right)\mathbf{b}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} v'_{\mathbf{b}}(x) &= h'(3x-3)6x + 2h(3x-3) + g'(3x-3)3\mathbf{b} - g'\left(\frac{3x-4}{5}\right)\frac{3\mathbf{b}}{5} \\ &\leq 6h'(3x-3) + 2h(3x-3) - 3g'(3x-3) + 0,9g'\left(\frac{3x-4}{5}\right) \\ &= 3h'(3x-3) + 2h(3x-3) + 0,9g'\left(\frac{3x-4}{5}\right) \leq 2. \end{aligned}$$

Definamos

$$\sigma_{\mathbf{b}}(x) := \int_0^x v_{\mathbf{b}}(t) dt.$$

Para $\mathbf{b} = -1,4$, temos que $\sigma_{\mathbf{b}}(3) \approx -0,036$. Para $\mathbf{b} = -1,3$, temos que $\sigma_{\mathbf{b}}(3) \approx 0,064$.

Pelo Teorema do Valor Intermediário, temos que existe $\mathbf{b}_0 \in \mathbb{R}$ tal que $-1,4 < \mathbf{b}_0 < -1,3$ e que $\sigma_{\mathbf{b}_0}(3) = 0$. Definamos $\omega := \sigma_{\mathbf{b}_0}$.

Bibliografia

- [1] ADAMS, R.; FOURNIER, J. Sobolev Spaces. 2. ed., Pure and Applied Mathematics, 2003.
- [2] ARORA, A. K. Scattering of radial data in the focusing NLS and generalized hartree equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - A*, v. 39, n. 11, p. 6643–6668, 2019.
- [3] ARORA, A. K.; DODSON, B.; MURPHY, J. Scattering below the ground state for the 2D radial nonlinear Schrödinger equation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, page 1, 2019.
- [4] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. Fundamentos de análise funcional. SBM, 2012.
- [5] BREZIS, H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer, 2011.
- [6] CAMPOS, L. Scattering of radial solutions to the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinear Analysis*, v. 202, p. 112118, 2021.
- [7] CAMPOS, L.; CARDOSO, M. Blowup and scattering criteria above the threshold for the focusing inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, v. 28, p. 1-33, 2021.
- [8] CAZENAVE, T. Semilinear Schrödinger equations, vol. 10 of Courant Lecture Notes in Mathematics. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, 2003.

-
- [9] DINH, V. D. Non-radial scattering theory for nonlinear Schrödinger equations with potential. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, v. 28, p. 1-42, 2021.
- [10] DODSON, B.; MURPHY, J. A new proof of scattering below the ground state for the 3D radial focusing cubic NLS. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 145, p. 4859–4867, 2017.
- [11] DODSON, B.; MURPHY, J. A new proof of scattering below the ground state for the non-radial focusing NLS. *Mathematical Research Letters*, v. 25, n. 6, p. 1805–1825, 2018.
- [12] DUYCKAERTS, T.; ROUDENKO, S. Threshold solutions for the focusing 3D cubic Schrödinger equation. *Revista Matemática Iberoamericana*, v. 26, n. 1, p. 1–56, 2010.
- [13] DUYCKAERTS, T.; ROUDENKO, S. Going beyond the threshold: scattering and blow-up in the focusing NLS equation. *Communications in Mathematical Physics*, v. 334, n. 3, p. 1573–1615, 2015.
- [14] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations: Second Edition*. AMS, Graduate Studies in Mathematics, 2, 2010.
- [15] FIBICH, G. *The nonlinear Schrödinger equation, singular solutions and optical collapse*. Volume 192 de Applied Mathematical Science. Springer, Cham, 2015.
- [16] FOLLAND, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. 2. ed. John Wiley e Sons, 1999.
- [17] FRIEDLANDER, G.; JOSHI, M. *Introduction to the Theory of Distributions*. 2. ed. Cambridge University Press, 1998.
- [18] GINIBRE, J.; VELO, G. On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case. *Journal of Functional Analysis*, v. 32, n. 1, p. 1–32, 1979.
- [19] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier analysis*. Volume 249 de Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 3rd ed., 2014.

-
- [20] HOLMER, J.; ROUDENKO, S. A sharp condition for scattering of the radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation. *Communications in Mathematical Physics*, v. 282, p. 435–467, 2008.
- [21] LINARES, F.; PONCE, G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Publicações Matemáticas, 2. ed, 2006.
- [22] STRAUSS, W. A. Existence of solitary waves in higher dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, v. 55, n. 2, p. 149–162, 1977.
- [23] SULEM, C.; SULEM, P.-L. *The nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collapse*. Volume 139 de Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [24] TAO, T. On the asymptotic behavior of large radial data for a focusing non-linear Schrödinger equation. *Dynamics of Partial Differential Equations*, v. 1, p. 1–47, 2004.
- [25] TAO, T. *Nonlinear Dispersive Equations, Local and Global Analysis*. Volume 106 de Regional Conference Series in Mathematics. New Mexico University, New Mexico; American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [26] WEINSTEIN, M. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates. *Communications in Mathematical Physics*, v. 87, n. 4, p. 567–576, 1982/83.