Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Problemas de Bordo para Superfícies de Willmore na Correção da Presbiopia

José Alencar dos Santos Neto

Teresina - 2025

José Alencar dos Santos Neto

Dissertação de Mestrado:

Problemas de Valor de Bordo para Superfícies de Willmore na Correção da Presbiopia

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2025

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Problemas de Valor de Bordo para Superfícies de Willmore na Correção da Presbiopia

José Alencar dos Santos Neto

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 19 de fevereiro de 2025.

Banca Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
PAULO ALEXANDRE ARAUJO SOUSA
Data: 22/03/2025 17:38:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araujo Sousa – Orientador

gov.br Documento assinado digitalmente
RONDINELLE MARCOLINO BATISTA
Data: 19/03/2025 16:18:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista - UFPI

gov.br Documento assinado digitalmente
ALEXANDRE BEZERRA DO NASCIMENTO LIMA
Data: 22/03/2025 18:53:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima - UESPI

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S237p Santos Neto, José Alencar dos.
Problemas de valor de bordo para superfícies de Willmore na correção da presbiopia / José Alnecar dos Santos Neto. -- 2025.
93 f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2025.
"Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa".

1. Superfícies multifocais. 2. Funcional de Willmore. 3. Equação de Euler-Lagrange. 4. Valor de contorno. I. Sousa, Paulo Alexandre Araújo. II. Titulo.
CDD 510

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Dedico este trabalho à memória do meu inesquecível e saudoso avô, José Alencar dos Santos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela força, sabedoria e paciência que me concedeu ao longo de toda minha jornada acadêmica. Sem Ele, nada disso seria possível.

Aos meus familiares, que sempre estiveram ao meu lado com amor e apoio incondicional. Minha mãe, Antonia Ferreira, por sua dedicação e por ser minha base; meu pai, Manoel Soares, por seus conselhos e exemplo de vida; minha avó, Maria Ferreira, por seu carinho e sabedoria; e minha tia, Francisca Soares, por seu apoio e encorajamento.

Agradeço também aos meus irmãos, Luiz Felipe e Luís Fernando, cuja amizade e companheirismo são inestimáveis, à minha cunhada, Alzira, por sua presença acolhedora e pelo incentivo constante. Não posso de deixar de agradecer também a minha namorada, Kamilly Vitória que me incentivou a seguir em frente, sempre oferecendo apoio emocional e efetivo.

Aos meus amigos que o PPGMAT me concedeu: Alberone, Anderson, Bruno, Danilo, Elliel, Erisvaldo, Estevão, Fauster, Gean, Gustavo, Igor, Júnior, Jonatas, João Vinícius, Jefferson, Lázaro, Lucas, Luzivânia, Maiara, Nilson, Pedro, Rafael, Ricael, Rufino, Sayd, Sillas, Suerlan, Vinícius e Wilkreffy que de diversas formas, contribuíram para meu crescimento acadêmico e principalmente pessoal. A todos que, de alguma maneira, participaram deste processo, minha sincera gratidão.

Em especial, aos "pseudo amigos": Ana Júlia Zanette, Andreina Marcela, Eduardo Viana, Emanuelly Beatriz, Honório Soares, Ismael de Carvalho, Maria Angelica, Natália Brito, Thiago Cavalcante e Vinícius Luz pelas resenhas durante o coffee break diário, pelo entretimento nas horas mais inesperadas, pelo companheirismo e pela lealdade de sempre. Muito obrigado, meus semi-amigos.

Agradeço aos meus amigos fora do ambiente acadêmico, que sempre me ensinaram que a vida não é apenas matemática: Alexandre, Dario, Danilão, Guilherme, Vitinho e Lidiane. Em especial aos meus melhores amigos de infância: Gustavo Souza, Hitawana Silva, Maria Eduarda, Maria Geovana e Vitor Emanoel.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à meu orientador, Prof. Dr. Paulo Alexandre, pela orientação, apoio e valiosas contribuições durante toda a elaboração deste trabalho. Sua paciência, dedicação e conhecimentos foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa.

Não poderia deixar de expressar minha gratidão aos professores que contribuíram diretamente para minha formação durante o mestrado: Dr. Willson, Dr. Sandoel e Dr. Barnabé. Suas aulas, orientações e dedicação foram essenciais para meu desenvolvimento acadêmico e pessoal.

Agradeço também ao Prof. Dr. Halyson, o melhor coordenador da Pós-Graduação, cuja atenção e prestatividade foram fundamentais durante o meu percurso acadêmico.

Agradeço à secretária Larisse, por sempre me ajudar tanto em questões acadêmicas quanto pessoais, sempre puxando as orelhas e dando dicas valiosas sobre a vida.

Agradeço a FAPEPI pelo apoio financeiro.

"O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano".

Isaac Newton.

Resumo

Neste trabalho, estudamos ferramentas matemáticas usadas para a obtenção de superfícies multifocais que são usadas na correção da presbiopia (perda da capacidade de curvar nossa lente cristalina por causa do aumento na rigidez do cristalino). Para uma abordagem matemática do problema, consideramos o funcional de Willmore definido sobre o conjunto das superfícies compactas com bordo em $\mathbb{R}^3$. Para o estudo do funcional de Willmore, primeiramente usamos métodos do cálculo de variações e provamos a existência de superfícies de revolução geradas por grafos simétricos que são soluções da equação de Euler-Lagrange correspondente ao funcional, e que satisfazem condições de contorno adequadas. Posteriormente, tratamos o caso unidimensional, onde em algumas situações, soluções explícitas podem ser encontradas para problemas de valor de contorno adequados.

Palavras chaves: Correção da Presbiopia; Funcional de Willmore; Condições de Bordo.

Abstract

In this work, we study mathematical tools used to obtain multifocal surfaces that are applied in the correction of presbyopia (the loss of the ability to curve our crystalline lens due to increased lens stiffness). For a mathematical approach to the problem, we consider the Willmore functional defined on the set of compact surfaces with boundary in $\mathbb{R}^3$. To study the Willmore functional, we first use methods from the calculus of variations and prove the existence of revolution surfaces generated by symmetric graphs that are solutions of the Euler-Lagrange equation corresponding to the functional, satisfying appropriate boundary conditions. Subsequently, we address the one-dimensional case, where, in some situations, explicit solutions can be found for suitable boundary value problems.

Keywords: Correction of Presbyopia; Willmore Functional; Boundary Conditions.

Sumário

Introdução

Quando envelhecemos perdemos a capacidade de curvar nossa lente cristalina por causa do aumento na rigidez do cristalino. Este fenômeno é chamado de presbiopia. Então nossos olhos não conseguem alcançar o raio de curvatura necessário, o resultado é que, na retina, em vez de termos um ponto de imagem, percebemos uma imagem borrada. O uso de instrumentos monofocais não é eficaz na correção da presbiopia, uma alternativa para esse incômodo é usar instrumentos multifocais. Existem duas formas de aplicação da multifocalidade para correção da presbiopia: lentes intraoculares ou de contato multifocais, e óculos de adição progressiva.

Em geral, para obter projetos para ambas as soluções, deve-se considerar a ação combinada do olho e das lentes artificiais. A multifocalidade geralmente é restrita a uma única superfície, tanto em intraoculares, de contato e óculos de adição progressiva. Neste caso, para o estudo matemático do problema pode-se usar métodos do cálculo das variações e equações diferenciais parciais para obter designs ótimos em ambos os cenários.

O funcional de Willmore tem uma aplicação industrial relevante no design de lentes progressivas. Em uma superfície (lente), pode-se inicialmente prescrever a curvatura média (não constante) a ser projetada, em seguida medir a diferença em relação à curvatura média real e, por fim, minimizar um funcional onde a diferença de curvatura média é considerada.

Para obter a formulação matemática do problema descrito, vamos considerar o funcional de Willmore definido sobre o conjunto das superfícies compactas com bordo em $\mathbb{R}^3$. Como a técnica utilizada envolve prescrever a curvatura média variável em toda a superfície, o que torna o problema bastante difícil, para apresentar uma análise completa restringimo-nos a superfícies de revolução geradas pela rotação de um gráfico simétrico no plano xy em torno do eixo x.

A seguir, apresentaremos um breve histórico sobre o funcional de Willmore, sua definição, algumas propriedades associadas, bem como as condições de bordo que serão trabalhadas nesta dissertação.

No final da década de 1960, o geômetra inglês Thomas James Willmore introduziu um funcional enquanto investigava superfícies imersas no espaço euclidiano tri-dimensional. Seu objetivo era identificar superfícies que minimizassem a energia associada à curvatura média, levando à formulação do funcional que hoje leva seu nome.

Seja $\mathcal{F}_\Sigma$ o espaço de todos os mergulhos de classe C^∞ da superfície Σ sobre o espaço euclidiano tri-dimensional. Então, definimos o funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{W}:\ & \mathcal{F}_\Sigma \to \mathbb{R} \\ & f \ \mapsto \mathcal{W}(f) = \int_\Sigma H^2 dA, \end{aligned} \tag{1}$$

onde H é a curvatura média e dA é o elemento de área.

Esse funcional possui grande relevância geométrica e aplicações significativas em outros campos. Por exemplo, é amplamente utilizado em áreas como processamento de imagens e teoria de cordas (ver, por exemplo, [12, 13, 15, 22, 24]). Para que uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ seja ponto crítico para o funcional de Willmore, veremos que a mesma deve satisfazer a *Equação de Willmore*:

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \tag{2}$$

onde Δ é o operador Laplace-Beltrami e K representa a curvatura de Gauss. Soluções dessa equação diferencial não linear de quarta ordem são chamadas de *superfícies de Willmore*.

Embora o conceito de energia associada à curvatura média remonte ao século XIX (ver [25]), o trabalho de Willmore [30] revitalizou e impulsionou a pesquisa sobre o tema. Desde então, a existência e regularidade de superfícies de Willmore fechadas de gênero prescrito têm sido amplamente investigadas. Entre as contribuições mais relevantes, destacam-se os trabalhos de Bauer-Kuwert e Simon [2, 28] para existência, Kuwert-Schätzle e Leschke-Pedit-Pinkall [16, 17, 19] sobre restrições conformes, e Riviére [27], que apresenta resultados abrangentes de regularidade. Para uma revisão detalhada, consulte [6].

Nesta dissertação, o foco principal está em superfícies e curvas de Willmore com bordo, conforme discutido nos artigos [1, 3, 8]. Essa abordagem é motivada pelo interesse em aplicações práticas, como a correção da presbiopia por meio de lentes de contato ou óculos, onde as mesmas possuem bordo e, portanto, exigem condições de bordo adequadas para a Equação de Willmore (2). Entre as condições de bordo discutidas na literatura, iremos trabalhar com as seguintes:

Condições de bordo de Navier: Seja $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função suave e simétrica em torno de $x = \frac{1}{2}$, então

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \kappa(0) = \kappa(1) = -\alpha,$$

Condições de bordo de Dirichlet: Seja $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função suave e simétrica em torno de $x = \frac{1}{2}$, então

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = u'(1) = \beta,$$

Condições de bordo Naturais: Seja $u : [-1,1] \to (0,\infty)$ uma função suave e simétrica que parametriza superfícies de revolução, então

$$u(\pm 1) = \alpha > 0 \quad \text{e} \quad H(\pm 1) = \frac{\gamma}{\alpha\sqrt{1+u'(\pm 1)^2}} \quad \text{para} \quad \gamma \in [0,1], \tag{3}$$

onde κ é curvatura do gráfico da função u.

Provar a existência de soluções limitadas para problemas de valor de bordo associados à Equação de Willmore, especialmente sob condições topológicas específicas ou sem restrições de pequena magnitude, permanece desafiador. A equação é totalmente não linear e de quarta ordem, dificultando a aplicação de métodos clássicos, como os princípios de máximo ou teorias para problemas de segunda ordem, como De Giorgi-Nash-Moser. Nesse contexto, a exploração de simetrias surge como uma estratégia promissora. Situações simétricas permitem reduzir o problema a uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), simplificando o estudo.

No caso de superfícies de revolução com bordo, NITSCHE - [22,23] abardou o problema utilizando uma formulação generalizada do funcional de Willmore (1)

$$\mathcal{W}_\gamma(\Sigma) := \int_\Sigma H^2 \, dA - \gamma \int_\Sigma K \, dA, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1.$$

Com base nessa formulação os autores BERGNER, DALL'ACQUA E FROHLICH - [3] analisaram soluções da Equação de Willmore (2) sob condições de bordo de (3). Foi demonstrado a existência de superfícies geradas por gráficos simétricos que satisfazem tais condições, incluindo casos explícitos como arcos circulares e catenoides.

No contexto unidimensional, DECKELNICK e GRANAU - [8] exploraram soluções para Equação de Willmore (2), que neste caso assume a forma

$$\frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{k'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right) + \frac{1}{2}\kappa(x)^3 = 0, \quad x \in (0,1),$$

sob as condições de bordo de Navier e Dirichlet. Esses autores mostraram que podem surgir mais de uma solução, dependendo da configuração, fornecendo avanços significativos na conexão entre soluções geométricas e problemas variacionais complexos.

Em resumo, este trabalho está organizado da seguinte maneira:

No capítulo 1 são apresentados definições e resultados preliminares que serão fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 2 introduziremos o funcional de Willmore para superfícies fechadas, acompanhado de algumas propriedades importantes e com a Equação de Willmore.

No capítulo 3, apresentaremos o funcional de Willmore para superficies de revolução com bordo, considerando as condições de bordo dada em (3).

Finalmente, no capitulo 4 iremos provar a Equação de Willmore para curvas sob as condições de bordo de Navier e Dirichlet.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Embora os resultados principais deste trabalho estejam relacionados a superfícies no espaço euclidiano tri-dimensional, nesta seção apresentaremos algumas definições, resultados e fatos importante sobre variedades Riemannianas que generalizam o caso abordado na dissertação. Na seção seguinte relembraremos alguns conceitos e fatos para superfícies que serão utilizados nas demostrações dos principais resultados de trabalho. Ao final do capítulo, introduzimos aspectos funcionais do estudo, focando em propriedades e resultados sobre espaços de Sobolev. Destacamos um caso específico desses espaços, crucial para a análise variacional aplicada aos problemas geométricos abordados.

1.1 Variedades Riemannianas

Iniciaremos esta seção apresentando o conceito de Variedade Diferenciável.

Definição 1. (Variedade Diferenciável) *Uma variedade diferenciável de dimensão* n *é um conjunto* M *e uma família de aplicações biunívocas* $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ *de* U_α *de* $\mathbb{R}^n$ *em* M *tais que:*

(1) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.

(2) Para todo par α, β, *com* $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, *os conjuntos* $x_\alpha^{-1}(W)$ *e* $x_\beta^{-1}(W)$ *são abertos em* $\mathbb{R}^n$ *e as aplicações* $x_\alpha^{-1} \circ x_\alpha$ *são diferenciáveis.*

(3) A familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *é máxima relativa às condições* (1) *e* (2).

O par (U_α, x_α) *(ou aplicação* x_α*) com* $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ *é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas locais) de* M *em* p*;* $x_\alpha(U_\alpha)$ *é então chamada uma vizinhança* *coordenada em* p. *Uma família* $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *satisfazendo* (1) *e* (2) *é chamada uma estrutura diferenciável em M.*

Dado um sistema de coordenadas locais (U, x) em M e um ponto $p \in x(U)$, indicamos por $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\right\}$ a base de T_pM (também chamada de *base coordenada*), que é dada como $\frac{\partial}{\partial x^j}(p) := dx_{x^{-1}(p)}(e_j)$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Por simplicidade, às vezes utilizaremos as notações ∂_i ou $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ para nos referirmos aos vetores da base coordenada.

Campos Vetoriais e Tensoriais e Conexão de Levi-Civita

Definição 2. *Dada uma variedade* M, *um campo vetorial (tangente) definido em* M *é uma aplicação que a cada ponto* $p \in M$ *associa um vetor* $X(p)$ *pertecente ao espaço tangente* T_pM. *Considerando um sistema de coordenadas locais* (U, x) *em* M, *podemos escrever, para cada* $p \in x(U)$,

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p),$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *são funções diferenciáveis em* $x(U)$. *Considerando o conjunto das funções suaves sobre* M, $C^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R}; \text{ f é função de classe } C^\infty\}$, *podemos também pensar em um campo de vetores como uma aplicação* $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ *definida como:*

$$X(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

O conjunto de todos os campos vetoriais em M *será denotado por* $\mathcal{X}(M)$.

Sejam $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Definimos o *colchete de Lie* dos campos X e Y como o campo vetorial $[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dado por:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Vamos agora definir o que são os campos tensoriais do tipo (k, l).

Definição 3. *Um campo tensorial do tipo* (k, l) *é uma aplicação* T *que a cada ponto* $p \in M$ *associa um tensor* $T_p \in T^k_l(T_pM)$. *Seja*

$$\mathcal{T}^k(M) = \{\omega : M \to T^k(T_pM); \ \omega(p) \text{ é multilinear}, \forall p \in M\} \, (k \in \mathbb{N}).$$

Podemos enxergar T *da seguinte forma:*

$$\mathrm{T} : \mathcal{T}^1(M) \times \cdots \times \mathcal{T}^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

do tipo (k, l) *(como visto na definição de tensores), onde* $\mathrm{T}(\omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k) \in C^\infty(M)((\omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k) \in \mathcal{T}^1(M) \times \cdots \times \mathcal{T}^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M))$ *é* C^∞*-multilinear e definida como:*

$$\mathrm{T}(\omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k)(p) = \mathrm{T}_p(\omega^1(p), \ldots, \omega^l(p), X_1(p), \ldots, X_k(p))$$

Com base nos conceitos apresentados anteriormente, podemos proceder à definição de uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M^n.

Definição 4. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável* M^n *é um campo 2-tensorial,* $g \in \mathcal{T}^2(M)$*, tal que* g *é simétrico (isto é,* $g(X, Y) = g(Y, X)$*, para todo* $X, Y \in T_pM$*) e positivo definido (ou seja,* $g(X, X) > 0$ *para todo* $X \neq 0$*). Assim, uma métrica Riemanniana define um produto interno em cada ponto* $p \in M$*, sobre cada espaço tangente* T_pM*, geralmente denotado por* $\langle X(p), Y(p) \rangle := g(X, Y)(p)$ *para* $X(p), Y(p) \in T_pM$*. Uma variedade* M *junto com uma métrica Riemanniana* g *é chamada variedade Riemanniana* (M, g)*. Usaremos, a partir de agora, os termos "métrica"e "variedade"(ou "*n*-variedade") para referir à métrica Riemanniana e à variedade Riemanniana acima descritas, respectivamente.*

Observação 1. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana e* (U, x) *um sistema de coordenadas locais, denotando por* $\{dx^j\}$ *a base dual de* $\{\partial_j\}$ *podemos escrever a métrica* g *da seguinte forma*

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \tag{1.1}$$

onde $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$*. A notação pode ser abreviada introduzindo o produto simétrico de duas 1-formas* ω *e* η*, denotado por*

$$\omega\eta := \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega).$$

Devido à simetria de g_{ij}*, a equação (1.1) é equivalente a*

$$g = g_{ij} dx^i dx^j. \tag{1.2}$$

Para realizar cálculos em uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana, é necessário definir uma maneira consistente de derivar campos vetoriais de modo compatível com a métrica. Isso nos leva ao conceito de conexão, mais especificamente à *conexão de Levi-Civita.* Com isso, apresentaremos a definição de uma conexão de Levi-Civita em uma variedade diferenciável.

Definição 5. *Uma conexão de Levi-Civita em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ &\rightarrow \ \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) \quad &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que possui as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$*; (*$C^\infty(M)$*-linearidade na primeira variável)*
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$*; (aditividade na segunda variável)*
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$*; (Regra de Leibniz)*
4. $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$*; (compatibilidade com a métrica)*
5. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$*; (simetria)*

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$*. O símbolo* $\nabla_X Y$ *é também chamado de derivada covariante de Y na direção de* X*.*

A partir de agora, usaremos a conexão de Levi-Civita em todos os cálculos subsequentes, referindo-nos a ela simplesmente como *"conexão"*. Vale ressaltar que uma conexão é linear em relação à segunda variável, ou seja, se $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z.$$

De fato, a igualdade pode ser demonstrada da seguinte maneira:

$$\nabla_X(aY + bZ) = \nabla_X(aY) + \nabla_X(bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z,$$

onde as duas últimas igualdades resultam das propriedades de linearidade da conexão. Além disso, é possível provar que para qualquer variedade diferenciável existe uma conexão bem definida sobre ela.

Observação 2. *Se* M *é uma variedade de dimensão* n*, dados dois campos vetoriais* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*, podemos escrevê-los em relação à base coordenada (definida em* M*) da seguinte forma:*

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i \quad e \quad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \partial_i,$$

onde x_i *e* y_i *são funções definidas em* M *para* $i = 1, \ldots, n$. *Desse modo, utilizando as propriedades da conexão, obtemos:*

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) \partial_k,$$

onde os coeficientes Γ_{ij}^k, *definidos por*

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k, \tag{1.3}$$

são os chamados símbolos de Christoffel da conexão. Note que, como a conexão é um campo vetorial por definição, ela pode ser escrita como uma combinação linear dos vetores da base coordenada, como mostrado na equação (1.3) *acima.*

A partir da existência de uma métrica sobre uma variedade Riemanniana é possível introduzir importantes conceitos, tais como: gradiente e divergente.

Exemplo 1. *Seja* (M, g) *uma variedade com a métrica Euclidiana* g *e seja* $p \in M$ *qualquer. O produto interno natural induz um isomorfismo entre* T_pM *e seu dual* T_p^*M. *Tal isomorfismo faz corresponder a cada vetor* $v \in T_pM$ *o funcional* $v^* \in T_p^*M$ *com* $v^*(X_p) = \langle v, X_p \rangle$, *onde* $X_p = X(p)$ *e* $X \in \mathcal{X}(M)$. *Seja* $f \in C^\infty(M)$. *O gradiente de* f, *denotado por* grad f, *é o único campo vetorial em* M *(segundo o isomorfismo acima) que satisfaz*

$$\langle \mathit{grad}\, f(p), X_p \rangle = X_p(f). \tag{1.4}$$

Também denotaremos, às vezes, o gradiente de f *por* ∇f.

É oportuno, neste momento, introduzirmos definições de funções que desempenharão um papel fundamental.

Definição 6. *Seja* X *um campo vetorial diferenciável em* M. *A divergência de* X *é a função diferenciável* div $X : M \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$(\mathit{div}\, X)(p) = \mathit{tr}\, A = \sum_{i=1}^n \langle A(e_i), e_i \rangle,$$

onde tr denota o traço do operador linear $A : T_pM \to T_pM$ *definido por* $A(v) = \nabla_v X, \ \forall v \in T_pM$, *e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é uma base ortonormal em* p.

A partir dessa definição, podemos enunciar o *Teorema da Divergência.*

Teorema 1. (Teorema da Divergência) *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana compacta orientada e* $X \in \mathfrak{X}(M)$. *Se o bordo de* M *é munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão* $i : \partial M \to M$ *e* N *denota o normal unitária exterior a* M *ao longo de* ∂M, *então*

$$\int_M (\mathit{div}\, X) dM = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle d(\partial M),$$

onde o segundo membro da igualdade acima deve ser interpretado como o caso $\partial M = \emptyset$.

Demonstração. Ver [21], Teorema A.52, pág. 385. ∎

Além disso, consideraremos um caso particular do Teorema da Divergência, assumindo que o campo vetorial seja $X = f\nabla g$, onde f e g são funções suaves em M. Dessa forma, obtemos as *identidades de Green*.

Corolário 1. (Identidades de Green) *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana compacta orientada, com bordo* ∂M *munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão* $i : \partial M \to M$ *(possivelmente* $\partial M = \emptyset$*). Se* $f, g : M \to \mathbb{R}$ *são funções suaves e* N *denota a normal unitária exterior a* M *ao longo de* ∂M, *então:*

(a) ***1ª identidade de Green***

$$\int_M (\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f\Delta g)\ dM = \int_{\partial M} f \frac{\partial g}{\partial N}\, d(\partial M).$$

(b) ***2ª identidade de Green***

$$\int_M (f\Delta g - g\Delta f)\ dM = \int_{\partial M} \left(f\frac{\partial g}{\partial N} - g\frac{\partial f}{\partial N} \right) d(\partial M).$$

A partir das definições de gradiente e divergente podemos definir o Laplaciano de uma função suave.

Definição 7. *Seja* $f \in C^\infty(M)$. *O laplaciano de* f *é a função* $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \mathit{div}(\mathit{grad}\, f).$$

Dessa forma, estamos aptos a definir a hessiano de f em $p \in M$.

Definição 8. *Seja* $f \in C^\infty(M)$. *Definimos o hessiano de* f *em* $p \in M$ *como sendo o campo tensorial* $\mathit{Hess}\, f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ *dado por*

$$(\mathit{Hess}\, f)(X, Y)(p) = (\mathit{Hess}\, f)_p(X_p, Y_p) = \langle \nabla_{X_p} \mathit{grad}\, f, Y_p \rangle,$$

onde X_p *e* Y_p *pertencem a* T_pM. *Utilizaremos também as seguintes notações para o hessiano de* f, *aplicado aos campos* X *e* Y*:* $\nabla\nabla f(X, Y)$ *e* $\langle \nabla X \nabla f, Y \rangle$.

Agora, demonstraremos uma relação importante entre o laplaciano e o hessiano de uma função de classe C^∞ definida em M.

Proposição 1. *Se* $f \in C^\infty(M)$, *então*

$$\Delta f = \mathrm{tr}(\mathit{Hess}\, f).$$

Demonstração. Seja $p \in M$ um ponto qualquer e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal em p. Como o hessiano é uma transformação bilinear, o traço do tensor hessiano em p é dado pela soma das componentes Hess $f(e_i, e_i)$, i.e.

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\, f)_p = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Hess}\, f)_p(e_i, e_i).$$

Então, usando as definições 8, 6 e 7, ganhamos

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\, f)_p = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Hess} f)_p(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = \mathrm{div}(\nabla f)(p) = \Delta f(p).$$

■

Observação 3. *Pela fórmula* (1.4), *que define o gradiente de* f, *e pela propriedade* 4 *da conexão (Definição* 5*), segue que*

$$X(Y(f)) = X(\langle \nabla f, Y \rangle) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle + \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle + (\nabla_X Y)(f),$$

de modo que

$$\nabla\nabla f(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f).$$

Em particular, para $X = \partial_i$ *e* $Y = \partial_j$, *utilizando a fórmula* (1.3), *temos:*

$$\nabla\nabla f(\partial_i, \partial_j) = \partial_i(\partial_j(f)) - (\nabla_{\partial_i} \partial_j)(f) = f_{ij} - f_k \Gamma_{ij}^k, \tag{1.5}$$

onde $f_k = \frac{\partial f}{\partial x^k}$ *e* $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. *Denotaremos também* $\nabla\nabla f(\partial_i, \partial_j)$ *por* $\nabla_i \nabla_j f$.

1.2 Superfícies no Espaço Euclidiano Tri-dimensional

Começaremos agora o estudo de algumas estruturas geométricas associadas a uma superfície regular $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Definição 9 (Superfície Regular)**.** *Um subconjunto* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *é uma superfície regular se, para cada* $p \in \Sigma$, *existe uma vizinhança* V *de* p *em* $\mathbb{R}^3$ *e uma aplicação* $x : U \to V \cap \Sigma$ *de um aberto* U *de* $\mathbb{R}^2$ *sobre* $V \cap \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *tal que*

1. *x é diferenciável.*

2. *x é homeomorfismo.*

3. *Para todo $q \in U$, a diferencial $dx_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

Exemplo 2. *O gráfico de uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, é uma superfície regular.*

O produto interno natural do $\mathbb{R}^3$ induz em cada plano tangente $T_p\Sigma$ um produto interno, que indicaremos por $\langle , \rangle$ (ou $\langle , \rangle_p$), da seguinte forma: se $w_1, w_2 \in T_p\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle w_1, w_2 \rangle$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 como vetores em $\mathbb{R}^3$. A esse produto interno corresponde uma forma quadrática I (ou I_p), onde $I : T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ é dada por

$$I(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2 \geqslant 0.$$

Definição 10. *A forma quadrática I em $T_p\Sigma$ definida acima é chamada a primeira forma fundamental de Σ em p. Seja (V, x) um sistema de coordenadas em Σ e $N : V \to \mathbb{S}^2$ a aplicação diferenciável que associa a cada $x(u,v) \in x(V)$ o vetor normal unitário dado por*

$$N(u,v) := N(x(u,v)) = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}(u,v). \tag{1.6}$$

Dizemos que N é um campo diferenciável de vetores normais unitários em $x(V)$. A aplicação N, assim definida, é chamada a aplicação de Gauss. A superfície Σ é dita orientável se ela admite um campo N definido em toda a superfície; a escolha de um tal campo é chamada uma orientação de Σ.

A partir de agora, Σ denotará uma superfície regular orientável, com uma orientação N. Como dito anteriormente, a aplicação de Gauss é diferenciável, e a diferencial dN (ou dN_p) de N em $p \in \Sigma$ é uma aplicação linear de $T_p\Sigma$ em $T_p\Sigma$ (omitimos o índice p quando ficar claro a que ponto da superfície estamos nos referindo). Com isso, temos as seguintes definições:

Definição 11. *A forma quadrática II_p, definida em $T_p\Sigma$ por $II_p(v) = -\langle dN(v), (v) \rangle$, é chamada a segunda forma fundamental de Σ em p*

Definição 12. *Seja C uma curva regular em Σ passando por $p \in \Sigma$ e κ a curvatura de C em p, e $\cos(\theta) = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a Σ em p. O número $\kappa_n = \kappa \langle n, N \rangle$ é chamado a curvatura normal de $C \subset \Sigma$ em p.*

É fácil ver que todas as curvas de Σ que têm, em um ponto $p \in \Sigma$, a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal, o que nos permite falar em curvatura normal ao longo de uma dada direção em p.

Para cada $p \in \Sigma$, existe uma base ortonormal e_1, e_2 de $T_p\Sigma$ tal que $dN(e_1) = -\kappa_1 e_1$ e $dN(e_2) = -\kappa_2 e_2$, onde κ_1 e κ_2 ($\kappa_1 \geqslant \kappa_2$) são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental II_p restrita ao círculo unitário de $T_p\Sigma$, denominadas as curvaturas principais em p; as direções correspondentes e_1 e e_2 são denominadas direções principais em p.

Agora, introduziremos alguns conceitos fundamentais no estudo da geometria diferencial de superfícies.

Definição 13. *Seja* $p \in \Sigma$ *e seja* $dN_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ *a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de* dN_p *é chamado de curvatura gaussiana* K *de* Σ *em* p. *O negativo da metade do traço de* dN_p *é chamado a curvatura média de* Σ *em* p.

Em termos das curvaturas principais κ_1 e κ_2, podemos escrever

$$K = \kappa_1\kappa_2, \quad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

O operador $A = -dN : T_pM \to T_pM$ é denominado o *operador de Weingarten* (no ponto p), em termos das curvaturas principais a norma de A é dada por

$$|A|^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2.$$

Com um simples cálculo verifica-se que $|A|^2 = 4H^2 - 2K$.

Definição 14. *Se em* $p \in \Sigma$, $\kappa_1 = \kappa_2$, *então* p *é chamado um ponto umbílico de* Σ*; em particular, os pontos planares* ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0$) *são pontos umbílicos.*

Proposição 2. *Se todos os pontos de uma superfície conexa são umbílicos, então* Σ *está contida em um plano ou em uma esfera.*

Demonstração. Ver [10], Proposição 4, pág. 174. ∎

Seja $x(u, v)$ uma parametrização de uma vizinhança do ponto $p \in \Sigma$ de uma superfície Σ, e seja $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em Σ com $\alpha(0) = p$. Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto p. Temos

$$\alpha' = x_u u' + x_v v' \quad \text{e} \quad dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v',$$

e da relação $\langle N, N\rangle = 1$ obtemos que N_u e N_v pertencem a $Tp\Sigma$. Assim podemos escrever

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}x_u + a_{21}x_v \\ N_v &= a_{12}x_u + a_{22}x_v \end{aligned} \tag{1.7}$$

e, portanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')x_u + (a_{21}u' + a_{22}v')x_v;$$

isto é,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Após alguns cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \qquad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \qquad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

onde os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são respectivamente

$$\begin{aligned} E &= \langle x_u, x_v\rangle, \quad F = \langle x_u, x_v\rangle, \quad G = \langle x_u, x_v\rangle, \\ e &= -\langle N_u, x_u\rangle = \langle N, x_{uu}\rangle, \\ f &= -\langle N_v, x_u\rangle = \langle N, x_{uv}\rangle = \langle N, x_{vu}\rangle = -\langle N_u, x_v\rangle, \\ g &= -\langle N_v, x_v\rangle = \langle N, x_{vv}\rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma, também obtemos as fórmulas para as curvaturas gaussiana e média

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{1.10}$$

e

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2}\left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}\right). \tag{1.11}$$

Exemplo 3. *Vamos determinar a curvatura gaussiana dos pontos do toro, cobertos pela parametrização*

$$x(u, v) = ((a + b\cos(u))\cos(v), (a + b\cos(u))\sin(v), b\sin(u)),$$
$$a > b > 0, \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Para o cálculo dos coeficientes da segunda forma fundamental (e, f, g)*, necessitamos do vetor normal* N*. Para isso calculamos primeiro:*

$$\begin{aligned} x_u &= (-b\sin(u)\cos(v), -b\sin(u)\sin(v), b\cos u), \\ x_v &= (-(a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), 0), \\ x_{uu} &= (b\sinh(u)\sin(v), -b\sin(u)\cos(v), 0), \\ x_{vv} &= (-(a + b\cos(u))\cos(v), -(a + b\cos(u))\sin(v), 0). \end{aligned}$$

Com os valores acima, podemos obter os coeficientes da primeira forma fundamental

$$E = \langle x_u, x_v \rangle = b^2, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle = 0, \quad G = \langle x_u, x_v \rangle = (a + b\cos(u))^2.$$

Introduzindo os valores acima nos coeficientes da segunda forma fundamental , e lembrando que o vetor normal é dado por (1.6) *e que* $|x_u \times x_v| = \sqrt{EG - F^2}$, *temos*

$$e = \left\langle \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}, x_{uu} \right\rangle = \frac{(x_u, x_v, x_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{b^2(a + b\cos(u))}{b(a + b\cos(u))} = b.$$

Dessa forma, ganhamos

$$f = \frac{(x_u, x_v, x_{uv})}{b(a + b\cos(u))} = 0, \quad g = \frac{(x_u, x_v, x_{vv})}{b(a + b\cos(u))} = \cos(u)(a + b\cos(u)).$$

*Finalmente, como a curvatura gaussiana é dada por (*1.10*), temos que*

$$K = \frac{\cos(u)}{b(a + b\cos(u))}.$$

Observação 4. *Da expressão acima, decorre que* $K = 0$ *ao longo dos paralelos* $u = \frac{\pi}{2}$ *e* $\frac{3\pi}{2}$*; os pontos desses paralelos são, portanto, parabólicos. Na região do toro dada por* $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$, K *é negativa (note que* $b > 0$ *e* $a > 0$*); os pontos dessa região são, portanto, hiperbólicos. Na região dada por* $0 < u < \frac{\pi}{2}$ *ou* $\frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$, *a curvatura é positiva e os pontos são elípticos.*

Antes de prosseguirmos, é oportuno fazer uma breve pausa para apresentar o conceito de superfície mínima.

Definição 15. *Uma superfície parametrizada regular é chamada mínima se, a sua curvatura média é identicamente nula, isto é,* $H \equiv 0$.

Retomando os conceitos previamente definidos e utilizando as mesmas notações, podemos expressar as derivadas dos vetores x_u e x_v na base $\{x_u, x_v, N\}$, obtendo

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + eN, \\ x_{uv} &= \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + fN, \\ x_{vu} &= \Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + fN, \\ x_{vv} &= \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + gN, \end{aligned} \tag{1.12}$$

onde os coeficientes Γ_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2$ são chamados *símbolos de Christoffel* de Σ na parametrização x.

Finalizamos a seção com um caso particular do Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas e orientáveis:

Teorema 2. (Gauss-Bonnet) *Seja* Σ *uma* $2-$*variedade orientada, compacta munido com uma métrica de Riemanniana. Então,*

$$\int_{\Sigma} K\, dA = 2\pi\chi(\Sigma),$$

onde $\chi(M)$ *é a característica de Euler (que é igual a 2 se* Σ *for uma esfera,* 0 *se for o toro e* $2-2g$ *se for uma superfície orientável de gênero* g*).*

Demonstração. Ver [18], Teorema 9.7, pág. 167. ∎

1.3 Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Os espaços de Sobolev são uma generalização dos espaços de Lebesgue, introduzindo a noção de derivada fraca para funções. Essa ferramenta é fundamental para o estudo de equações diferenciais parciais (EDPs), análise funcional e diversas outras áreas da matemática.

Nesta seção definiremos Espaços de Sobolev, apresentaremos algumas de suas principais propriedades e um caso particular. Usaremos [5] como referencia principal dessa seção.

Definição 16. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto,* $k \in \mathbb{N}$ *(ordem das derivadas) e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. O* ***espaço de Sobolev*** $W^{k,p}(\Omega)$ *é definido como o conjunto de funções* $u \in L^p(\Omega)$ *cujas derivadas fracas até a ordem* k *também pertencem a* $L^p(\Omega)$*. Matematicamente:*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \textit{ com } |\alpha| \leqslant k\},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *é um multi-índice e* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$*. A derivada fraca* $D^\alpha u$ *é definida via integração por por partes contra funções de teste* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ *:*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \phi\, dx.$$

A norma em $W^{k,p}(\Omega)$ *é dada por:*

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = \infty. \end{cases}$$

Esta norma captura tanto a função quanto suas derivadas generalizadas, garantindo controle sobre a regularidade global.

Observação 5. *No caso* $p = 2$, *o espaço* $W^{k,2}(\Omega)$ *será representado por* $H^k(\Omega)$ *que é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega D^\alpha u \, D^\alpha v \, dx.$$

e a norma induzida

$$|u|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Propriedades Analíticas Fundamentais

Teorema 3 (Completude de $W^{k,p}(\Omega)$)**.** *Para* $1 \leqslant p < \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach. Em particular, toda sequência de Cauchy em* $W^{k,p}(\Omega)$ *converge para uma função no próprio espaço.*

A completude é essencial para garantir a existência de soluções em problemas de minimização, mas a utilidade prática dos espaços de Sobolev depende de como suas funções se relacionam com espaços clássicos, como $C^k(\Omega)$. Isso motiva os teoremas de imersão.

Teorema 4 (Teorema de Imersão de Sobolev)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio Lipschitz.*

1. *Caso Contínuo: Se* $k > \frac{n}{p}$, *então:*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}).$$

2. *Generalização: Se* $k - \frac{n}{p} > m$, *então*

$$W^{k,p} \hookrightarrow C^m(\bar{\Omega}).$$

Exemplo 4. *A função* $u(x) = |x|^{-\alpha}$ *em* $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *pertence a* $W^{1,2}$ *se* $\alpha < 1/2$, *mas não é contínua se* $\alpha > 0$. *O Teorema* (4) *explica essa aparente contradição: para* $p = 2,\ k = 1$, *e* $n = 3,\ k < n/p$ *logo a imersão em* C^0 *não se aplica.*

Teorema 5 (Teorema de Rellich-Kondrachov)**.** *Se* Ω *é limitado com fronteira suave, a imersão* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *é compacta para* $1 \leqslant q < p^*$, *onde* $p^* = \frac{np}{n-p}$.

Sequências limitadas em $W^{1,p}(\Omega)$ possuem subsequências convergentes em $L^p(\Omega)$, ferramenta crucial para demonstrar existência de soluções via métodos variacionais.

Teorema 6 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Para* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *(funções com traço zero na fronteira), existe* $C = C(\Omega, p) > 0$ *tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Observação 6. *Como consequência desse Teorema, temos que em* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, a norma* $\|\nabla u\|_{L^p}$ *é equivalente à norma de Sobolev, simplificando a análise de coercividade em EDPs.*

Nos resultados do capitulo 3 usaremos um caso particular específico do espaço de Sobolev $H^2([-1,1],(0,+\infty))$, associados à geometria de superfícies de revolução. Tais funções descrevem perfis radiais que, ao serem rotacionados em torno de um eixo, geram superfícies suaves, com aplicações em geometria diferencial e otimização de formas.

Capítulo 2

Funcional de Willmore

Neste capítulo, inicia-se a apresentação do funcional de Willmore aplicado a superfícies Σ de classe C^{∞}, fechadas e orientáveis.

2.1 Definição do Funcional de Willmore

Considere Σ uma superfície diferenciável de classe C^{∞}, orientada, fechada e $f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ um mergulho de classe C^{∞} da superfície Σ no espaço euclidiano tri-dimensional $\mathbb{R}^3$.

Definição 17. (Funcional de Wilmore) *Seja $\mathcal{F}_{\Sigma}$ o espaço de todos os mergulhos de classe C^{∞} da superfície Σ sobre o espaço euclidiano tri-dimensional $\mathbb{R}^3$. Então, definimos o funcional*

$$\begin{aligned} \mathcal{W} : \ & \mathcal{F}_{\Sigma} \to \mathbb{R} \\ & f \ \mapsto \mathcal{W}(f) = \int_{\Sigma} H^2 dA, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde H representa a curvatura média e dA denota o elemento de área da superfície Σ.

Observação 7. *Para cada $f \in \Sigma$, chamamos $\mathcal{W}(f)$ a energia de Willmore da superfície $f(\Sigma)$.*

Exemplo 5. *Considere o mergulho padrão do toro $\mathbb{T}^2(a, b)$ em $\mathbb{R}^3$, dado pela aplicação*

$$\begin{aligned} f : \ & \mathbb{T}^2(a, b) \to \mathbb{R}^3 \\ & x \ \mapsto f(x) = x, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{T}^2(a, b)$ representa o toro dado pela seguinte parametrização

$$x(u, v) = ((a + b\cos(u))\cos(v), (a + b\cos(u))\sin(v), b\sin(u)),$$
$$a > b > 0, \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Para calcular a energia $\mathcal{W}(f)$, *é necessário obter os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental do toro* $\mathbb{T}^2(a,b)$, *os quais podem ser encontrados no exemplo (3). Assim,*

$$E = b^2, \quad F = 0, \quad G = (a + b\cos(u))^2$$
$$e = b, \quad f = 0, \quad g = (a + b\cos(u))\cos(u).$$

Consequentemente, ao determinar a curvatura média H, *obtém-se*

$$H = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - f^2)} = \frac{b(a + b\cos(u))^2 + b^2(a + b\cos(u))\cos(u)}{2b^2(a + b\cos(u))^2} = \frac{a + 2b\cos(u)}{2b(a + b\cos(u))},$$

donde

$$H^2 = \left(\frac{a + 2b\cos(u)}{2b(a + b\cos(u))}\right)^2 = \frac{a^2 + 4ab\cos(u) + 4b^2\cos^2(u)}{4b^2(a + b\cos(u))^2}.$$

Assim, $\mathcal{W}(f)$ *do toro* $\mathbb{T}^2(a,b)$ *é o seguinte*

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(f) &= \int_{\mathbb{T}^2(a,b)} H^2 dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2 + 4ab\cos(u) + 4b^2\cos^2(u)}{4b^2(a + b\cos(u))^2}\right)\sqrt{EG - F^2}\, du dv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2 + 4ab\cos(u) + 4b^2\cos^2(u)}{4b^2(a + b\cos(u))^2}\right) b(a + b\cos(u))\, du dv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2 + 4ab\cos(u) + 4b^2\cos^2(u)}{4b(a + b\cos(u))}\right) du dv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{4b(a + b\cos(u))} + \cos(u)\right) du dv \\
&= \frac{a^2}{4b}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{du dv}{a + b\cos(u)} + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(u)\, du dv \\
&= \frac{a^2}{4b}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{du dv}{a + b\cos(u)}.
\end{aligned}$$

Veja que a função a ser integrada só depende da variável u, *e assim permitindo a usar a integral imprópria:*

$$\mathcal{W}(f) = \frac{a^2\pi}{2b}\int_0^{2\pi} \frac{du}{a + b\cos(u)} = \frac{a^2\pi}{b}\int_0^{\pi} \frac{du}{a + b\cos(u)},$$

Onde a última igualdade se justifica pela função que está sendo integrada ser par. Fazendo a substituição $z = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$, *temos que* $u \to \pi \Longrightarrow z \to +\infty$, $\cos(u) = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $du = \frac{2dz}{1+z^2}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(f) &= \frac{a^2\pi}{b}\int_0^\pi \frac{du}{a+b\cos(u)}\\
&= \frac{a^2\pi}{b}\lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_0^\varepsilon \frac{2dz}{a+b+(a-b)z^2}\\
&= \frac{2a^2\pi}{b(a+b)}\lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_0^\varepsilon \frac{dz}{1+\frac{(a-b)}{a+b}z^2}\\
&= \frac{2a^2\pi}{b(a+b)}\lim_{\varepsilon\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\varepsilon\right)-\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot 0\right)\right)\right]\\
&= \frac{2a^2\pi}{b(a+b)}\lim_{\varepsilon\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\varepsilon\right)\right]\\
&= \frac{2a^2\pi}{b(a+b)}\cdot\frac{\pi\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a-b}},
\end{aligned}$$

pois a continuidade da função $g(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot x\right)$ *garante que*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b} = \frac{\pi\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}}{2(a-b)} = \frac{\pi\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a-b}}.$$

Com isso, ganhamos a energia de Willmore

$$\mathcal{W}(f) = \frac{a^2\pi^2\sqrt{a+b}}{b\sqrt{a-b}(a+b)} = \frac{a^2\pi^2}{b\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} = \frac{a^2\pi^2}{b\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{\pi^2}{\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}} = \frac{\pi^2}{c\sqrt{1-c^2}},$$

onde $c = \frac{b}{a}$ *e* $c \in (0,1)$, *pois* $a > b$.

O teorema abaixo fornece uma estimativa inferior para o funcional de Willmore, que é atingida somente no caso da esfera.

Teorema 7. ([29], Willmore (1965)) *Seja* Σ *uma superfície de gênero* 0. *Então, para todo mergulho* $f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ *temos*

$$\mathcal{W}(f) \geqslant 4\pi.$$

Além disso, $\mathcal{W}(f) = 4\pi$ *se, e somente se,* $f(\Sigma)$ *é uma esfera euclidiana.*

Demonstração. Seja $f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ um mergulho e denote por κ_1 e κ_2 as curvaturas principais em $p \in f(\Sigma)$ tal que

$$K = \kappa_1\kappa_2 \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2),$$

onde K e H são, respectivamente, as curvaturas *gaussiana* e *média*. Sabemos que

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)\right)^2 = \frac{1}{4}(\kappa_1^2+2\kappa_1\kappa_2+\kappa_2^2) = K - \frac{1}{2}\kappa_1\kappa_2 + \frac{1}{4}(\kappa_1^2+\kappa_2^2) \\ &= K + \left(\frac{1}{2}(\kappa_1-\kappa_2)\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{W}(f) = \int_\Sigma \left(K + \left(\frac{1}{2}(\kappa_1-\kappa_2)\right)^2\right) dA = \int_\Sigma K dA + \frac{1}{4}\int_\Sigma (\kappa_1-\kappa_2)^2 dA.$$

Veja que ao usarmos o Teorema 2 (Gauss-Bonnet) ganhamos,

$$\mathcal{W}(f) = 2\pi\chi(\Sigma) + \frac{1}{4}\int_\Sigma (\kappa_1-\kappa_2)^2 dA,$$

Como a superfície Σ tem gênero 0, então $\chi(\Sigma) = 2$. Logo,

$$\mathcal{W}(f) = 4\pi + \frac{1}{4}\int_\Sigma (\kappa_1-\kappa_2)^2 dA \geqslant 4\pi, \tag{2.2}$$

Note que, como $(\kappa_1-\kappa_2)^2 \geqslant 0$, a integral acima não pode assumir valores negativos. Além disso, se $\mathcal{W}(f) = 4\pi$, então de (2.2) segue que $\kappa_1 = \kappa_2$ em cada ponto de $f(\Sigma)$. Dessa forma, cada ponto de $f(\Sigma)$ é um ponto umbílico. Como $f(\Sigma)$ é uma superfície compacta e conexa, podemos aplicar a Proposição 2 implica que $f(\Sigma)$ é ou um plano ou uma esfera euclidiana. No entanto, como $f(\Sigma)$ é compacta (e, em particular, limitada), concluímos que $f(\Sigma)$ é uma esfera euclidiana. Reciprocamente, se $f(\Sigma)$ é uma esfera euclidiana, então é parametrizada por

$$\begin{gathered} x(u,v) = (r\sin(u)\cos(v), r\sin(u)\sin(v), r\cos(u)), \\ 0 < u < \pi, \quad 0 < v < 2\pi. \end{gathered}$$

Por um cálculo direto, ganhamos

$$\begin{aligned} E &= r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2\sin^2(u) \\ e &= -r, \quad f = 0, \quad g = -r\sin^2(u). \end{aligned}$$

Assim, pela equação (1.11), temos que $H = -1/r$. Com isso,

$$\mathcal{W}(f) = \int_\Sigma H^2 dA = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r^2 \sin(u)\, dv du = 4\pi.$$

Isso completa a prova do teorema. ■

Além do Teorema 7, Willmore no mesmo trabalho conjecturou para superfícies de gênero 1, a qual o valor da energia de Willmore satisfaz $\mathcal{W}(f) \geqslant 2\pi^2$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, a superfície Σ for um toro $\mathbb{T}^2$. Essa conjectura foi provada por Fernando Codá e André Neves em ([20], 2014). Com base nisso, apresentamos a seguinte observação do exemplo (5).

Observação 8. *Note que a energia de Willmore do toro $\mathbb{T}^2(a, b)$ é dada por*

$$\mathcal{W}(f) = \frac{\pi^2}{c\sqrt{1-c^2}},$$

onde $c = \dfrac{b}{a}$ e $c \in (0,1)$, pois $a > b$. Agora, considere $\mathcal{W}(f) = \mathcal{W}(f)(c)$, ou seja, $\mathcal{W}(f)$ como função de c. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(f)'(c) &= \frac{\pi^2}{c^2(1-c^2)}\left(\sqrt{1-c^2} - \frac{2c^2}{2\sqrt{1-c^2}}\right) \\ &= \frac{-\pi^2}{c^2\sqrt{1-c^2}} + \frac{\pi^2}{\sqrt{1-c^2}}, \quad \forall c \in (0,1). \end{aligned}$$

Veja que quando $c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ obtemos $\mathcal{W}(f)'(c) = 0$. Agora calculando $\mathcal{W}(f)''(c)$, ganhamos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(f)''(c) &= \frac{-\pi^2}{c^4(1-c^2)}\left(2c\sqrt{1-c^2} - \frac{2c^3}{2\sqrt{1-c^2}}\right) + \frac{4\pi^2 c}{3\sqrt{(1-c^2)^5}} \\ &= \frac{-2\pi^2}{c^3\sqrt{1-c^2}} + \frac{\pi^2}{c\sqrt{(1-c^2)^3}} + \frac{4\pi^2 c}{3\sqrt{(1-c^2)^5}}, \quad \forall c \in (0,1). \end{aligned}$$

Portanto, temos que $\mathcal{W}(f)''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{4\pi^2}{3} > 0$. Conclui-se, então, que $\mathcal{W}(f)(c)$ atinge o seu valor mínimo quando $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$, ou seja, $\mathcal{W}(f)(c) = 2\pi^2$. Dessa forma, mostra-se que a igualdade é atingida quando a superfície Σ é um toro $\mathbb{T}^2$.

Para superfícies de gênero $g \geqslant 2$, não são conhecidos resultados análogos, permanecendo um problema em aberto na geometria diferencial.

2.2 Propriedades do Funcional de Willmore

Neste seção, estudaremos algumas propriedades do funcional de Willmore dado por (2.1).

O funcional de Willmore, além de ser limitado inferiormente, também é limitado superiormente. Isso implica que existe um valor máximo para o funcional, o que é importante para a análise da estabilidade e da geometria das superfícies que minimizam o funcional. Para tanto, precisamos da seguinte definição.

Definição 18. *Sejam* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *uma superfície regular e* K *a curvatura gaussiana definida em* Σ. *Dizemos que* Σ *é conexa quando* $\mathsf{K}(p) > 0$, $\forall p \in \Sigma$.

Então a partir dessa definição ganhamos

Teorema 8. (Willmore (1965)) *Seja* Σ *uma superfície tal que* $f(\Sigma)$ *é uma superfície convexa e com área* A *então,*

$$4\pi \leqslant \mathcal{W}(f) \leqslant MA,$$

onde

$$M = \sup_{p \in f(\Sigma)} \left\{ K(p) - \frac{\Delta K(p)}{K(p)} \right\},$$

e ΔK *é o Laplaciano da função curvatura gaussiana em* $f(\Sigma)$.

Além disso, o funcional de Willmore também é invariante sob transformações conformes em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 9. (Blaschke (1929)) *Seja* Σ *uma superfície. O funcional de Willmore*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}: \ & \mathcal{F}_\Sigma \to \mathbb{R}^3 \\ & f \ \mapsto \mathcal{W}(f) = \int_\Sigma H^2 dA. \end{aligned}$$

é invariante sob transformações conformes em $\mathbb{R}^3$. *Isto é, se* $f \in \mathcal{F}_\Sigma$, *então*

$$\mathcal{W}(f) = \mathcal{W}(T \circ f),$$

para toda transformação conforme $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Neste trabalho, nosso objetivo é explorar o funcional de Willmore em superfícies com bordo. Nesse contexto, discutiremos apenas os teoremas acima, (8) e (9), como propriedades fundamentais para superfícies fechadas. Optamos por não apresentar suas demonstrações aqui, entretanto, as demonstrações podem ser encontradas em [4]. Essa abordagem nos permite focar nas propriedades mais relevantes do funcional de Willmore para superfícies com bordo, destacando os resultados essenciais para o desenvolvimento do tema desta dissertação.

2.3 Equação de Willmore

Um dos resultados essenciais deste trabalho é a Equação de Willmore, que caracteriza os pontos críticos do funcional de Willmore, sendo fundamental para a análise variacional das superfícies.

Equação de Euler

Um método para encontrar o ínfimo da energia de Willmore (2.1) sobre o espaço das imersões de Σ em $\mathbb{R}^3$ é aplicar as técnicas do cálculo de variações. As superfícies que satisfazem a Equação de Willmore são conhecidas como *superfícies de Willmore*, e exploraremos essa condição nas provas dos teoremas dos capítulos a frente. As definições e resultados a seguir são baseados nas referências [14, 26].

Seja $f : \Sigma^2 \to \mathbb{R}^3$ uma imersão isométrica de uma superfície conexa,fechada e orientável, cuja orientação é dada pelo campo normal unitário N.

Uma variação de f é uma aplicação suave $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to \mathbb{R}^3$ tal que $\Psi_t : \Sigma^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $\Psi_t(p) := \Psi(t, p)$, é uma imersão para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Além disso, $\Psi_0 = f$. Denotemos por $H(t)$ a curvatura média de $\Psi_t(\Sigma)$ e por $dA(t) = dA_t$ o elemento de área de Σ induzido por Ψ_t.

Seja $V(p) = \frac{\partial \Psi(t,p)}{\partial t}|_{t=0}$ o campo variacional de Ψ, e $\phi(p) = \langle V(p), N(p)\rangle$. Para toda função suave $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ existe uma variação Ψ tal que $\phi(p) = \langle V(p), N(p)\rangle$. De fato, é suficiente considerar a variação normal

$$\Psi(t, p) = f(p) + t \cdot \phi(p) \cdot N(p).$$

Com as notações introduzidas, é conhecido na literatura [14,26] que valem as seguintes relações apresentadas no lema abaixo.

Lema 1. *Vale:*

1. $2H'(0) = \Delta\phi + \phi|A|^2$;
2. $dA'(0) = \left.\dfrac{d(dA_t)}{dt}\right|_{t=0} = -2\phi H\, dA$.

Agora vamos considerar o funcional de Willmore como uma função na variável $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, isto é,

$$\mathcal{W} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$$

definido por $\mathcal{W}(t) = \displaystyle\int_\Sigma H^2(t)\, dA_t$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}'(0) &= \int_\Sigma \left(2H \cdot H'(0) dA + H^2 dA'(0)\right) dA \\ &= \int_\Sigma \left(H\Delta\phi + H\phi|A|^2 - 2H^3\phi\right) dA. \end{aligned}$$

Agora, usando que $-H\Delta\phi + \phi\Delta H = \operatorname{div}(-H\nabla\phi + \phi\nabla H)$ e aplicando o Teorema da Divergência 1, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}'(0) &= \int_\Sigma \left(\phi\Delta H + H\phi|A|^2 - 2H^3\phi\right) dA \\ &= \int_\Sigma \phi\left(\Delta H + H(|A|^2 - 2H^2)\right) dA. \end{aligned}$$

Finalmente, usando que $|A|^2 = 4H^2 - 2K$ obtemos

$$\mathcal{W}'(0) = \int_\Sigma \phi\left(\Delta H + 2H(H^2 - K)\right) dA.$$

Desde que a igualdade obtida vale para toda função $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, concluímos que Σ é ponto crítico para o funcional de Willmore se, e somente se,

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0.$$

Assim, obtemos o seguinte resultado, atribuído a Thomsen e Schadow:

Teorema 10. (Thomsen e Schadow (1923)) *Seja Σ uma superfície compacta e orientável em $\mathbb{R}^3$, que é imagem de uma imersão $f : \Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Então, Σ é uma superfície de Willmore se, e somente se, satisfaz a condição:*

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) \equiv 0. \tag{2.3}$$

Em particular, a Equação de Willmore, que caracteriza os pontos críticos do funcional de Willmore, é fundamental para a análise variacional das superfícies, oferecendo uma ferramenta crucial na nossa investigação sobre superfícies com bordo, abordas nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Superfícies de Willmore Simétricas com Bordo

Na seção anterior, foi apresentado o funcional de Willmore para superfícies fechadas, ou seja, sem bordo. No entanto, no contexto de lentes para Correção da Presbiopia, as superfícies possuem bordos. Portanto, é necessário permitir que Σ seja uma superfície com bordo. Para tal, NITSCHE abordou este problema em seus trabalhos [22, 23], estabelecendo a seguinte definição.

Definição 19. *Seja $\mathcal{I}_\Sigma$ o espaço de todas as imersões diferenciáveis de Σ sobre $\mathbb{R}^3$ e os parâmetros reais γ, μ, H_0. Definimos o funcional*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}:\ \ & \mathcal{I}_\Sigma \to \mathbb{R}^3 \\ & \phi \mapsto \mathcal{F}(\phi) = \int_\Sigma \Phi(H, K)\, dA, \end{aligned} \tag{3.1}$$

com $\Phi(H, K) = \mu + (H - H_0)^2 - \gamma K$. Aqui H representa a curvatura média, K a curvatura de Gauss e dA denota o elemento de área.

Neste trabalho, estudaremos o caso quando $H_0 = \mu = 0$, no qual $\mathcal{F}$ assume a forma:

$$\mathcal{W}_\gamma(\Sigma) := \int_\Sigma H^2\, dA - \gamma \int_\Sigma K\, dA, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1. \tag{3.2}$$

Este funcional é conhecido como funcional de Willmore quando $\gamma = 0$, o qual foi apresentado na seção anterior 2. Observe que, para $\gamma \in [0, 1]$, o funcional $\mathcal{W}_\gamma$ é não-negativo. Para verificar isso, seja $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ as curvaturas principais da superfície Σ. Então, temos

$$4(H^2 - \gamma K) = (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 4\gamma\kappa_1\kappa_2 = (1 - \gamma)(\kappa_1 + \kappa_2)^2 + \gamma(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \geqslant 0 \quad \forall \gamma \in [0, 1],$$

o que prova a não-negatividade de $\mathcal{W}_\gamma$. Além disso, a desigualdade estrita $\mathcal{W}_\gamma(\Sigma) > 0$ é válida para qualquer superfície não plana se $0 < \gamma < 1$.

Exemplo 6. *Considere a superfície Σ, definida como a calota esférica de raio $R > 0$ centrada na origem de $\mathbb{R}^3$, delimitada pelo plano $z = h$, com $0 < h < R$. A superfície Σ é parametrizada por*

$$\begin{gathered} \mathbf{x}(u, v) = (R\sin(u)\cos(v), R\sin(u)\sin(v), R\cos(u)), \\ 0 \leqslant u \leqslant \arccos\left(\tfrac{h}{R}\right) \quad \text{e} \quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi. \end{gathered}$$

O bordo de Σ é o círculo no plano $z = h$, dado por

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 = R^2 - h^2,\ z = h\}.$$

Nosso objetivo é calcular $\mathcal{W}_\gamma(\Sigma)$, definido em (3.2). Como Σ é uma porção de uma esfera, as curvaturas gaussiana K e média H são constantes, dadas respectivamente por

$$K = \frac{1}{R^2} \quad \text{e} \quad H = -\frac{1}{R}.$$

Com isso, substituindo os valores na definição do funcional, ganhamos o valor de $\mathcal{W}_\gamma(\Sigma)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\gamma(\Sigma) &= \frac{1}{R^2}\int_\Sigma dA - \gamma\frac{1}{R^2}\int_\Sigma dA. \\ &= \frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos\left(\frac{h}{R}\right)} R^2\sin(u)\,du dv - \gamma\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos\left(\frac{h}{R}\right)} R^2\sin(u)\,du dv \\ &= 2\pi\int_0^{\arccos\left(\frac{h}{R}\right)} \sin(u)\,du - 2\pi\gamma\int_0^{\arccos\left(\frac{h}{R}\right)} \sin(u)\,du \\ &= 2\pi\left(1 - \frac{h}{R}\right) - 2\pi\gamma\left(1 - \frac{h}{R}\right) \\ &= \frac{2\pi(R - h)}{R}(1 - \gamma). \end{aligned}$$

3.1 Problema de Valor de Bordo de Dirichlet

Nesta seção, será investigado o funcional de Willmore no contexto particular de superfícies de revolução.

3.1.1 Superfície de Revolução

Seja $u \in C^2([a, b], (0, \infty))$, com $a < b$. Ao rotacionar a curva $(x, u(x)) \subset \mathbb{R}^2$ em torno do eixo x, obtemos uma superfície de revolução $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, parametrizada por

$$f(x, \varphi) = (x, u(x)\cos(\varphi), u(x)\sin(\varphi)), \quad x \in [a, b], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Neste contexto, o termo "superfície"refere-se tanto ao conjunto Σ quanto à parametrização f. Vamos assumir a condição $u(x) > 0$, para garantir que f é um mergulho, assegurando que Σ é uma superfície regular imersa em $\mathbb{R}^3$.

Para determinar as propriedades geométricas da superfície, devemos calcular as primeiras e segundas formas fundamentais. Os vetores coordenados dados pela parametrização são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1, u'(x)\cos(\varphi), u'(x)\sin(\varphi)), \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = (0, -u(x)\sin(\varphi), u(x)\cos(\varphi)).$$

A partir desses vetores, podemos determinar o tensor métrico (primeira forma fundamental) g_{ij} que é definido por

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = 1 + u'(x)^2,\ g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\rangle = 0,\ g_{22} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\rangle = u(x)^2.$$

Assim, a matriz da métrica $A = (g_{ij})$ é dada por

$$A = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + u'(x)^2 & 0 \\ 0 & u(x)^2 \end{pmatrix},$$

temos $B^2 = \det(A) = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = u(x)^2(1 + u'(x)^2)$. Então o normal unitária $\mathbf{N}$, que aponta para o interior da superfície, é dada por

$$\mathbf{N}(x, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}(u'(x), -\cos(\varphi), -\sin(\varphi)).$$

Com isto, temos que

$$\begin{aligned} dN\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} = \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}} \frac{\partial f}{\partial x}; \\ dN\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varphi} = -\frac{u(x)}{u(x)(1 + u'(x)^2)^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

As curvaturas principais κ_1 e κ_2 da superfície são os autovalores do operador $A = -dN$, então

$$\kappa_1 = -\frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}}, \qquad \kappa_2 = \frac{1}{u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}}.$$

A partir disso, a curvatura média H e a curvatura gaussiana K podem ser obtidas, respectivamente, como

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{-u''(x)}{2(1 + u'(x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{2u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}},$$

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = -\frac{u''(x)}{u(x)(1 + u'(x)^2)^2}.$$

Para a curvatura gaussiana total, temos

$$\int_\Sigma \mathsf{K}\, d\mathsf{A} = -2\pi \int_a^b \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}\, dx = -2\pi \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\Bigg|_a^b. \tag{3.3}$$

Além disso, ao substituir os valores encontrados de H e K na equação (3.2), obtemos que $\mathcal{W}_\gamma(\Sigma)$ assume a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\gamma(u) := \mathcal{W}_\gamma(\Sigma) &= \frac{\pi}{2}\int_a^b \left(\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} \right)^2 u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}\, dx \\ &\quad + 2\pi\gamma \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\Bigg|_a^b. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Uma propriedade fundamental da energia $\mathcal{W}_\gamma$ é sua *invariância sob redimensionamento*, o que significa que o valor de $\mathcal{W}_\gamma$ permanece inalterado quando a superfície é escalada proporcionalmente em todas as direções.

Lema 2. (Invariância de $\mathcal{W}_\gamma$ sob redimensionamento) *Dada uma função* $u \in H^2([-1,1],(0,+\infty))$ *e* $r > 0$*, seja* $u_r \in H^2([-1/r, 1/r],(0,+\infty))$*, definida como* $u_r(x) := \frac{u(rx)}{r}$*, o redimensionamento de* u *por* $1/r$*. Então, a aplicação* $r \mapsto \mathcal{W}_\gamma(u_r)$ *é constante para* $r \in (0,+\infty)$.

Demonstração. Observamos inicialmente que $u_r'(x) = u'(rx)$ e $u_r''(x) = ru''(rx)$, com $u_r'(\pm 1/r) = u'(\pm 1)$. Substituindo esses valores em (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\gamma(u_r) &= \frac{\pi}{2}\int_{-1/r}^{1/r} \left(\frac{ru''(rx)}{(1+u'(rx)^2)^{3/2}} - \frac{r}{u(rx)\sqrt{1+u'(rx)^2}} \right)^2 \frac{1}{r}u(rx)\sqrt{1+u'(rx)^2}\, dx \\ &\quad + 2\pi\gamma \frac{u'(rx)}{\sqrt{1+u'(rx)^2}}\Bigg|_{-1/r}^{1/r}. \end{aligned}$$

Realizando a mudança de variável $\tilde{x} = rx$, que implica $d\tilde{x} = r dx$, podemos reescrever a integral como

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\gamma(u_r) &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \left(\frac{u''(\tilde{x})}{(1+u'(\tilde{x})^2)^{3/2}} - \frac{1}{u(\tilde{x})\sqrt{1+u'(\tilde{x})^2}} \right)^2 u(\tilde{x})\sqrt{1+u'(\tilde{x})^2}\, d\tilde{x} \\ &\quad + 2\pi\gamma \frac{u'(\tilde{x})}{\sqrt{1+u'(\tilde{x})^2}}\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \mathcal{W}_\gamma(u). \end{aligned}$$

Note que a integral acima retorna à forma original de $\mathcal{W}_\gamma(u)$. Portanto, a invariância do funcional $\mathcal{W}_\gamma$ sob o redimensionamento por r está estabelecida. Concluímos que

$\mathcal{W}_\gamma(u_r) = \mathcal{W}_\gamma(u)$, provando que a aplicação $r \mapsto \mathcal{W}_\gamma(u_r)$ é constante para $r \in (0, +\infty)$.

■

3.1.2 Notação

Nesta seção, apresentamos os conceitos e definições que serão necessários ao longo deste trabalho. Em particular, definimos o número real α^* como

$$\alpha^* := \min_{y>0} \frac{\cosh(y)}{y} = \frac{\cosh(b^*)}{b^*} = \sinh(b^*) \approx 1.5088795\dots \tag{3.5}$$

$$\text{com} \quad b^* \approx 1.1996786\dots \quad \text{resolvendo} \quad b^* \tanh(b^*) = 1. \tag{3.6}$$

Para $\alpha > \alpha^*$, α^* definido em (3.5), introduzimos os números $b_1(\alpha)$ e $b_2(\alpha)$ definidos da seguintes forma

$$b_1(\alpha) := \inf\left\{b > 0 : \frac{\cosh(b)}{b} \leqslant \alpha\right\} \quad \text{e} \quad b_2(\alpha) := \sup\left\{b > 0 : \frac{\cosh(b)}{b} \leqslant \alpha\right\}, \tag{3.7}$$

que são bem definidos. Observe também $b^* \in \left\{b > 0 : \frac{\cosh(b)}{b} \leqslant \alpha\right\}$, pois

$$\alpha > \alpha^* = \sinh(b^*) = \frac{\cosh(b^*)}{b^*}.$$

Donde vale a desigualdade $0 < b_1(\alpha) < b^* < b_2(\alpha) < +\infty$, e deduzimos a seguinte relação

$$\sinh(b_1(\alpha)) < \sinh(b^*) = \alpha^* < \sinh(b_2(\alpha)). \tag{3.8}$$

Definição 20. *Para $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, introduzimos o espaço de funções:*

$$\bar{N}_{\alpha,\beta} := \{u \in H^2([-1,1]) : u(x) > 0, u(x) = u(-x), u(\pm 1) = \alpha \ \textit{e}\ u'(-1) = \beta\},$$

junto com

$$\bar{T}_{\gamma,(\alpha,\beta)} := \inf\{\mathcal{W}_\gamma(u) : u \in \bar{N}_{\alpha,\beta}\}, \quad \textit{para} \quad \gamma \in [0,1].$$

Por razões técnicas, não trabalharemos diretamente em $\bar{N}_{\alpha,\beta}$, mas sim no espaço menor $N_{\alpha,\beta}$ definido como

$$N_{\alpha,\beta} := \{u \in \bar{N}_{\alpha,\beta} : \textit{se}\, \alpha > \alpha^* \ \textit{e} \ -\alpha < \beta,\ \textit{então}\ u'(x) < \alpha \ \textit{em}\ [0,1]\}, \tag{3.9}$$

com

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta)} := \inf\{\mathcal{W}_\gamma(u) : u \in N_{\alpha,\beta}\}, \quad \textit{para}\, \gamma \in [0,1]. \tag{3.10}$$

3.1.3 O Problema do Valor de Bordo de Dirichlet

Neste capitulo, estamos trabalhando com superfícies de revolução $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, geradas pela rotação do gráfico de uma função suave simétrica $u : [-1, 1] \to (0, \infty)$ em torno do eixo x. Dentro dessa classe de superfícies, o nosso principal objetivo é buscar soluções da equação de Willmore, conforme apresentada na equação (2.3), sob as seguintes condições de bordo

$$u(\pm 1) = \alpha > 0 \quad \text{e} \quad H(\pm 1) = \frac{\gamma}{\alpha\sqrt{1 + u'(\pm 1)^2}} \quad \text{para} \quad \gamma \in [0, 1], \tag{3.11}$$

onde o principal teorema deste capitulo é o Teorema 12. Para chegar a esse teorema, no entanto, devemos primeiro revisar o resultado de existência para o problema de valor de bordo de Dirichlet dado em (3.12), conforme apresentado em ([7], Teorema 1.1). Esse resultado é válido tanto para os casos $\gamma = 0$ quanto $\gamma = 1$.

Além disso, observamos que qualquer solução desse problema é um ponto crítico do funcional $\mathcal{W}_\gamma$, independentemente do valor de γ. Isso ocorre porque, conforme mostrado na equação (3.3), a curvatura total de Gauss da superfície é constante, dependendo exclusivamente do parâmetro β.

Por fim, também analisamos as propriedades de monotonicidade da energia mínima $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ em relação ao parâmetro α. Esse estudo fornece uma visão mais detalhada sobre como as características geométricas da superfície variam com os parâmetros envolvidos no problema.

Teorema 11. ([7], Teorema 1.1) *Para cada $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, existe uma função positiva e simétrica $u \in C^\infty([-1, 1], (0, \infty))$ tal que a superfície de revolução correspondente $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ satisfaz:*

$$\begin{cases} \Delta H + 2H(H^2 - K) = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ u(\pm 1) = \alpha, \quad u'(-1) = -u'(1) = \beta. \end{cases} \tag{3.12}$$

Além disso, u possui as seguintes propriedades:

(1) $\mathcal{W}_1(u) = T_{1,(\alpha,\beta)}$,

(2) Se $\beta \geqslant 0$, então $u' > 0$ em $(-1, 0)$,

(3) Se $\beta < 0$, então u possui no máximo três pontos críticos em $[-1, 1]$.

Observação 9. *A propriedade (1), que não é mencionada em ([7], Teorema 1.1), é válida devido à construção de u como minimizador do funcional $\mathcal{W}_1$ na classe $N_{\alpha,\beta}$. O* *comportamento monótono de* $T_{1,(\alpha,\beta)}$ *em relação a* α*, com* β *fixo, também foi estudado em [7]. Os valores de* α *e* β *para os quais um catenoide ou um arco de círculo resolvem* (3.12) *marcam pontos onde a monotonicidade dessa energia ótima em relação a* α *muda qualitativamente. Em particular, para* $\beta > 0$ *e* $\alpha = \beta^{-1}$*, uma solução de* (3.12) *é um arco de círculo com centro na origem e passando por* $(1, \alpha)$*, enquanto para* $\beta < 0$ *e* $\alpha = \alpha_\beta$*, com*

$$\alpha_\beta := \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\operatorname{arsinh}(-\beta)} \geqslant \alpha^* \tag{3.13}$$

o catenoide $u(x) = \frac{\cosh(bx)}{b}$*, com* $b = \operatorname{arsinh}(-\beta)$*, é uma solução de superfície mínima para* (3.12)*. Devido a*

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta)} = T_{1,(\alpha,\beta)} + 4\pi(1-\gamma)\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}},$$

as energias mínimas $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ *e* $T_{1,(\alpha,\beta)}$ *exibem o mesmo comportamento monótono em relação a* α*, desde que* γ *e* β *sejam fixos. Assim, os resultados de monotonicidade de [6, 7] sobre* $T_{1,(\alpha,\beta)}$ *também são válidos para* $\gamma \in [0, 1]$.

Proposição 3. *Seja* $\gamma \in [0, 1]$ *fixo.*

(i) Para $\beta > 0$ *e* $\frac{1}{\beta} \leqslant \alpha' < \alpha$*, tem-se* $T_{\gamma,(\alpha',\beta)} < T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$.

(ii) Para $\beta > 0$ *e* $0 < \alpha' < \alpha \leqslant \frac{1}{\beta}$*, tem-se* $T_{\gamma,(\alpha',\beta)} > T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$.

(iii) Para $\beta = 0$ *e* $0 < \alpha' < \alpha$*, tem-se* $T_{\gamma,(\alpha',\beta)} > T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$.

(iv) Para $\beta < 0$ *e* $0 < \alpha' < \alpha \leqslant \alpha_\beta$*, tem-se* $T_{\gamma,(\alpha',\beta)} > T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$.

(v) Para $\beta < 0$ *e* $\alpha_\beta \leqslant \alpha' < \alpha$*, tem-se* $T_{\gamma,(\alpha',\beta)} < T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$.

Demonstração. Pela definição de $N_{\alpha,\beta}$ em (3.9), uma das expressões de $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ dada em (3.10) e pela fórmula (3.4) (veja também (3.3)), encontramos:

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta)} = T_{1,(\alpha,\beta)} + 4\pi(1-\gamma)\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \tag{3.14}$$

para todo $\gamma \in [0, 1]$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$. Assim, as energias mínimas $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ e $T_{1,(\alpha,\beta)}$ têm o mesmo comportamento monotônico em relação a α, desde que γ e β sejam fixos. Em [6, 7], o comportamento monotônico em α de $T_{1,(\alpha,\beta)}$ foi estudado. Na notação desses artigos, $\widetilde{M}_{\alpha,\beta}$ denota $T_{1,(\alpha,\beta)}$ para $\alpha > \alpha^*$ e $-\sinh(b_1) \geqslant \beta \geqslant -\alpha$, enquanto $M_{\alpha,\beta}$ denota $T_{1,(\alpha,\beta)}$ para todos os outros valores de α e β. Com nossa notação, podemos reescrever os resultados monotônicos de [6, 7] da seguinte forma:

(i) Para $\beta > 0$ e $\frac{1}{\beta} \leqslant \alpha' < \alpha$, temos $T_{1,(\alpha',\beta)} < T_{1,(\alpha,\beta)}$ por ([7], Proposição. 3.12).

(ii) Para $\beta > 0$ e $0 < \alpha' < \alpha \leqslant \frac{1}{\beta}$, temos $T_{1,(\alpha',\beta)} > T_{1,(\alpha,\beta)}$ por ([7], Proposição 3.19).

(iii) Para $\beta = 0$ e $0 < \alpha' < \alpha$, temos $T_{1,(\alpha',\beta)} > T_{1,(\alpha,\beta)}$ por ([6], Teorema 2).

(iv) Para $\beta < 0$ e $0 < \alpha' < \alpha \leqslant \alpha_\beta$, temos $T_{1,(\alpha',\beta)} > T_{1,(\alpha,\beta)}$ por ([7], Proposição 4.40 e 4.49).

(v) Para $\beta < 0$ e $\alpha_\beta \leqslant \alpha' < \alpha$, temos $T_{1,(\alpha',\beta)} < T_{1,(\alpha,\beta)}$ por ([7], Proposições 4.18 e 4.25).

A afirmação segue diretamente das estimativas acima e de (3.14).

■

Para provar o principal resultado deste capítulo necessitamos de várias estimativas a priori, importantes para soluções de (3.12).

Proposição 4. *Seja* $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *e* $u \in C^\infty([-1,1],(0,\infty))$ *a função do Teorema* 11, *tal que a superfície de revolução correspondente* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *resolva o problema* (3.12). *Então,* u *possui as seguintes propriedades qualitativas:*

1. *Se* $\alpha \leqslant \alpha^*$, *então*
$$|u'(x)| \leqslant \max\left\{|\beta|, \alpha^*, \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\alpha}\right\},$$
$$\sqrt{(\alpha + \max\{1,|\beta|\})^2 - x^2} \geqslant u(x) \geqslant \min\left\{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}}, \frac{1}{2}\frac{\max\{|\beta|,\alpha^*\}}{e^{C_2}-1}\right\},$$
com $C_2 = 8(1+\max\{|\beta|,\alpha^*\}^2)$.

2. *Se* $\alpha > \alpha^*$, *então*
$$|u'(x)| \leqslant \max\left\{\sinh(b_2(\alpha)), |\beta|, \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\alpha}\right\}, \quad \sqrt{(\alpha + \max\{1,|\beta|\})^2 - x^2} \geqslant u(x)$$
$$\geqslant \min\left\{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}}, \frac{\sinh(b_2(\alpha))}{e^{C_1}-1}, \frac{1}{2}\frac{\max\{|\beta|,\alpha^*\}}{e^{C_2}-1}, \frac{1}{b_2(\alpha)}\right\},$$
com $C_2 = 8(1+\max\{|\beta|,\alpha^*\}^2)$ *e* $C_1 = 2\cosh(2b_2(\alpha))(1 + \mathit{arsinh}(|\beta|)(\alpha - \alpha^*))$.

   (2.i) Se $-\sinh(b_1(\alpha)) \geqslant \beta > -\alpha$, *temos*
$$0 \leqslant u'(x) \leqslant -\beta < \alpha \quad \text{em } [0,1].$$

(2.ii) Se $\beta > -\sinh(b_1(\alpha))$, *temos*

$$-\frac{1}{\alpha^*} \leqslant u'(x) \leqslant \sinh(b_1(\alpha)) \quad \textit{em } [0,1] \quad \textit{e}$$

$$\sqrt{\alpha^2 + 1 - x^2} \geqslant u(x) \geqslant \frac{1}{b_1(\alpha)} \cosh(b_1(\alpha)x).$$

Demonstração. Aqui reunimos os resultados de [7] necessários para provar as estimativas a priori para a função u do Teorema 11. Utilizamos os seguintes fatos: Primeiramente $\alpha \leqslant \alpha^*$ implica $\alpha \leqslant \alpha_\beta$ para todo $\beta < 0$. Para $\alpha \leqslant \alpha^*$, a igualdade $\alpha = \alpha_\beta$ ocorre apenas quando $\alpha = \alpha^*$ e $\beta = -\alpha^*$. Para $\alpha > \alpha^*$, existem $b_1 = b_1(\alpha)$ e $b_2 = b_2(\alpha)$, definidos em (3.7), tais que $b_1 < b^* < b_2$, com b^* definido em (3.6), e $\alpha = \cosh(b_1)/b_1 = \cosh(b_2)/b_2$. Finalmente, $\alpha > \alpha_\beta$ implica $\sinh(b_1) < -\beta < \sinh(b_2)$, enquanto $\alpha < \alpha_\beta$ implica $-\beta < \sinh(b_1)$ ou $-\beta > \sinh(b_2)$. Note que $\sinh(b_1) < \alpha^* < \alpha < \sinh(b_2)$ para todo $\alpha > \alpha^*$. Essas observações decorrem diretamente da definição de α_β em (3.13) e das propriedades das funções $y \mapsto \cosh(y)/y$ e $y \mapsto \sinh(y)$.

Prova da propriedade 1: Este é o caso em que $\alpha \leqslant \alpha^*$. Começamos estimando u'. Se $\alpha\beta > 1$, u satisfaz $u' \leqslant 0$ em $[0,1]$ e $|u'(x)| \leqslant \beta$ para todo $x \in [-1,1]$ ([7], Teorema. 3.11). Quando $\alpha\beta = 1$, temos a solução explícita $u(x) = \sqrt{1 + \alpha^2 - x^2}$ ([7], Lema. 3.1) e $|u'(x)| \leqslant \alpha^{-1}$. Se $\beta \geqslant 0$ e $\alpha\beta < 1$, u satisfaz $x + u(x)u'(x) \geqslant 0$ e $u'(x) \leqslant 0$ em $[0,1]$ ([7], Teorema. 3.18). Segue-se que $|u'(x)| \leqslant \alpha^{-1}$. No caso em que $\beta < 0$, seguindo ([7], Lema 4.27), u tem no máximo três pontos críticos em $[-1,1]$. Além disso, para $x \in [0,1]$, temos $u'(x) \leqslant \max\{-\beta, \alpha^*\}$ ([7], Teorema 4.48) se $\alpha < \alpha^*$, ([7], Teorema 4.39) se $\alpha = \alpha^*$ e $\beta \neq -\alpha^*$ (usando $\sinh(b_1) < \alpha^*$) e ([7], Lema 4.1) se $\alpha = \alpha^*$ e $\beta = -\alpha^*$). Se u tiver exatamente um ponto crítico em $[-1,1]$, então $u' \geqslant 0$ em $[0,1]$. Caso contrário, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $u'(x_0) = 0$, $u' > 0$ em $(x_0, 1]$ e $u' < 0$ em $(0, x_0)$. Com a mesma construção usada no ([7], Lema 3.16), podemos assumir que $x + u(x)u'(x) \geqslant 0$ em $[0,1]$. Como

$$u(x_0) \geqslant \frac{\alpha}{\operatorname{arsinh}(-\beta)(\alpha_\beta - \alpha)} x_0, \tag{3.15}$$

pelo ([7], Lem. 4.29), obtemos pela definição de α_β (veja (3.13))

$$u'(x) \geqslant -\frac{\operatorname{arsinh}(-\beta)(\alpha_\beta - \alpha)}{\alpha} \geqslant -\frac{\cosh(\operatorname{arsinh}(-\beta))}{\alpha} = -\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\alpha}.$$

Agora estimamos u por cima. Se $\alpha_\beta > 1$, u satisfaz $x + u(x)u'(x) \leqslant 0$ em $[0,1]$ (veja [7], Lema 3.9), e ao integrar essa desigualdade de 0 a $x \in (0,1]$, obtemos

$$u(x) \leqslant \sqrt{u(0)^2 - x^2}, \quad \text{com} \quad u(0) \leqslant \alpha + \beta,$$

onde a última desigualdade decorre de $|u(x)| \leqslant \beta$ para $x \in [-1,1]$ ([7], Teorema 3.11). Quando $\alpha\beta = 1$, então $u(x) = \sqrt{1+\alpha^2-x^2}$. Se $\alpha\beta < 1$, a função u satisfaz $x + u(x)u'(x) \geqslant 0$ em $[0,1]$ (para $\beta \geqslant 0$ ([7], Lema 3.16) e a mesma desigualdade se aplica pelo mesmo raciocínio, para $\beta < 0$). Assim, integrando a desigualdade de x a 1, obtemos

$$u(x) \leqslant \sqrt{1+\alpha^2-x^2} \leqslant \sqrt{(1+\alpha)^2-x^2} \quad \text{em } [-1,1].$$

Resta provar a estimativa inferior de u. Se $\beta \geqslant 0$, então $u' \leqslant 0$ em $[0,1]$ ([7], Teorema 3.11) para $\alpha\beta > 1$, ([7], Lema 3.1) quando $\alpha\beta = 1$ e ([7], Teorema. 3.18) para $\alpha\beta < 1$ e $\beta \geqslant 0$). Segue diretamente que $u(x) \geqslant u(1) = \alpha$. Agora consideramos o caso $\beta < 0$. Se $\alpha = \alpha^* = \alpha_\beta$, então $\beta = -\alpha^*$ e $u(x) = \frac{\cosh(b^*x)}{b^*}$, com b^* definido em (3.6). Nesse caso, $u(x) \geqslant \frac{1}{b^*}$ e, portanto $u(x) \geqslant \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha+\beta^2}}$. Em todos os outros casos, temos $\alpha < \alpha_\beta$. Relembramos o Lema 4.9 de [7]: Seja $\nu := \max_{x\in[0,1]}\{u'(x)\}$ e $x_0 \geqslant 0$ tal que $u'(x_0) = 0$ e $u' > 0$ em $(x_0, 1]$. Então

$$\min_{x\in[0,1]} u(x) = u(x_0) \geqslant \nu\frac{1-x_0}{e^C-1}, \quad \text{com} \quad C = \frac{1}{2}\nu\sqrt{1+\nu^2}\left(\mathcal{W}_1(u) + \frac{4\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\right). \tag{3.16}$$

Distinguimos entre $x_0 \leqslant 1/2$ e $x_0 > 1/2$. No primeiro caso, pela estimativa em u' já provada ($u'(x) \leqslant \max\{-\beta, \alpha^*\}$ em $[0,1]$), e levando em conta a seguinte estimativa de energia ([7], Proposição 6.10)

$$\mathcal{W}_1(u) \leqslant \frac{-8\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} + 8\tanh\left(\operatorname{arcsin}(-\beta)\frac{(\alpha_\beta-\alpha)}{\alpha}\right) \leqslant 16, \tag{3.17}$$

a desigualdade (3.16) fornece:

$$\min_{x\in[0,1]} u(x) \geqslant \frac{1}{2}\frac{\max\{-\beta,\alpha^*\}}{e^{C_2}-1} \quad \text{com} \quad C_2 = 8(1+\max\{-\beta,\alpha^*\}^2).$$

Se $x_0 \geqslant 1/2$, segue-se do Lema 4.29 em [7] (veja (3.15)) que

$$u(x) \geqslant u(x_0) = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\operatorname{arsinh}(-\beta)(\alpha_\beta-\alpha)} \geqslant \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\cosh(\operatorname{arsinh}(-\beta))} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Prova da propriedade 2: Este é o caso em que $\alpha > \alpha^*$. Começamos estimando a derivada. O caso $\beta \geqslant 0$ pode ser tratado como o caso $\alpha \leqslant \alpha^*$. De fato, a distinção entre $\alpha \leqslant \alpha^*$ e $\alpha > \alpha^*$ é relevante apenas para $\beta < 0$. Se $\beta < 0$, $\alpha \geqslant \alpha_\beta$ e $-\beta < \alpha$, então $0 \leqslant u'(x) \leqslant -\beta$ em $[0,1]$ conforme o Teorema 4.24 em [7]. Se $\beta < 0$, $\alpha \geqslant \alpha_\beta$ e $-\beta \geqslant \alpha$, então $0 \leqslant u'(x) \leqslant \sinh(b_2)$, $x \in [0,1]$ como mostrado em ([7], Teorema 4.17). Resta considerar o caso $\alpha^* < \alpha < \alpha_\beta$. Procedemos como no caso $\alpha \leqslant \alpha^*$ e $\beta < 0$. Pelo

([7], Lema 4.27), u tem no máximo três pontos críticos em $[-1,1]$. Além disso, para $x \in [0,1]$ temos $u'(x) \leqslant \max\{-\beta, \sinh(b_1)\} \leqslant \max\{-\beta, \sinh(b_2)\}$ conforme ([7], Teorema 4.39). Se u tem exatamente um ponto crítico em $[-1,1]$, então $u' \geqslant 0$ em $[0,1]$. Caso contrário, seja $x_0 \in (0,1)$ tal que $u'(x_0) = 0$. Por Lema 3.16 de [7], podemos assumir que $x + u(x)u'(x) \geqslant 0$ em $[0,1]$ e pelo Lema 4.29 em [7], $u(x_0)$ satisfaz 3.15. Assim, obtemos pela definição de α_β (veja (3.13))

$$u'(x) \geqslant -\frac{x}{u(x)} \geqslant -\frac{x_0}{u(x_0)} \geqslant \frac{\operatorname{arsinh}(-\beta)(\alpha_\beta - \alpha)}{\alpha} = -\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\alpha}.$$

As estimativas superiores para u podem ser provadas com os mesmos argumentos usados no caso $\alpha \leqslant \alpha^*$. O mesmo vale para as estimativas inferiores para u no caso $\beta \geqslant 0$. No entanto, no caso $\beta < 0$, precisamos de novos argumentos para a estimativa inferior de u. Se $\alpha > \alpha_\beta$, temos $u \geqslant 0$ em $[0,1]$, $u(x) \leqslant \sinh(b_2(\alpha))$ para $x \in [0,1]$, ([7], Teoremas 4.17 e 4.24). Aqui usamos que $-\beta < \sinh(b_2(\alpha))$ se $-\beta < \alpha$. Então por (3.16) e a estimativa de energia ([7], Proposição 6.8)

$$\mathcal{W}_1(u) \leqslant \frac{-8\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\big(1 + \operatorname{arsinh}(-\beta)(\alpha - \alpha_\beta)\big) \leqslant 8(1 + \operatorname{arsinh}(-\beta)(\alpha - \alpha^*)),$$

obtemos

$$\min_{x \in [0,1]} u(x) \geqslant \frac{\sinh(b_2)}{e^{C_1} - 1} \quad \text{com} \quad C_1 = 2\cosh(2b_2)(1 + \operatorname{arsinh}(-\beta)(\alpha - \alpha^*)).$$

Se $\alpha = \alpha_\beta$, a solução é $u(x) = \cosh(b_1 x)/b_1$ ou $u(x) = \cosh(b_2 x)/b_2$ com $b_1 < b_2$. Portanto, $u(x) \geqslant 1/b_2$ para todo $x \in [-1,1]$. Quando $\alpha < \alpha_\beta$, a ideia é usar a estimativa em (3.16). Seja $x_0 \in [0,1)$ tal que $u'(x_0) = 0$ e $u' > 0$ em $(x_0, 1]$. Se $x_0 \leqslant 1/2$, procedemos como para $\alpha > \alpha_\beta$. Pela estimativa de u' acabada de estabelecer ($u' \leqslant \max\{-\beta, \sinh(b_1)\} \leqslant \max\{-\beta, \alpha^*\}$), e pela estimativa de energia em (3.17), a desigualdade (3.16) nos dá

$$\min_{x \in [0,1]} u(x) \geqslant \frac{1}{2}\max\frac{\{-\beta, \alpha^*\}}{e^{C_2} - 1} \quad \text{com} \quad C_2 = 8(1 + \max\{-\beta, \alpha^*\}^2).$$

Se $x_0 \geqslant 1/2$, a estimativa $u(x) \geqslant \frac{\alpha}{2\sqrt{1+\beta^2}}$ segue diretamente de (3.15).

Prova da propriedade (2.i): A estimativa é provada no Teorema 4.24 em [7].

Prova da propriedade (2.ii): No caso especial $\beta > -\sinh(b_1(\alpha))$, o Lema 4.36 em [7] nos dá $u(x) \geqslant \cosh(b_1 x)/b_1$ e $u'(x) \leqslant \sinh(b_1)$ em $[0,1]$. Se $u' \geqslant 0$ em $[0,1]$, então $u(x) \leqslant \alpha$. Caso contrário, pelo Lema 4.27 em [7], existe $x_0 \in (0,1)$ tal que

$u'(x_0) = 0$ e $u' < 0$ em $(0, x_0)$. Vemos que $u(x) \geqslant \cosh(b_1 x)/b_1$ implica que $u(x_0) > \alpha^* x_0$. Como $x + u(x)u'(x) \geqslant 0$ em $[0,1]$ (procedendo como em ([7], Lema 3.16), encontramos $u'(x) \geqslant -1/\alpha^*$ para $x \in [0,1]$, e também $u(x) \leqslant \sqrt{1 + \alpha^2 - x^2}$.

■

Corolário 2. *Dado qualquer* $\gamma \in [0,1]$*,* $\alpha > 0$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$*, existe uma função* $u \in C^\infty([-1,1]) \cap N_{\alpha,\beta}$ *tal que a superfície de revolução correspondente resolve o problema* (3.12) *e, além disso,* $\mathcal{W}_\gamma(u) = T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$.

Demonstração. O Corolário 2 é uma consequência imediata do Teorema 11 e da Proposição 4, em particular das partes (2.i) e (2.ii), as quais garantem que $u \in N_{\alpha,\beta}$, já que, para $\alpha > \alpha^*$, temos $\sinh(b_1(\alpha)) < \alpha$ de acordo com a desigualdade (3.8). ■

3.2 Continuidade e Monotonicidade da Energia em β

Ao longo das seções seguintes, consideramos números reais fixos $\alpha > 0$ e $\gamma \in [0,1]$. Nesta seção, analisamos o comportamento da energia ótima $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ em relação a β. Os resultados que obtemos são os principais ingredientes para a prova do Teorema 12.

3.2.1 Continuidade em β

Lema 3. *Seja* $\gamma \in [0,1]$ *fixo. Se* $\alpha \leqslant \alpha^*$*, então* $\beta \mapsto T_\gamma(\alpha,\beta)$ *é semicontínua superiormente para* $\beta \in \mathbb{R}$*. Se* $\alpha > \alpha^*$*, então* $\beta \mapsto T_\gamma(\alpha,\beta)$ *é semicontínua superiormente para* $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha\}$*.*

Demonstração. Seja $u \in N_{\alpha,\beta}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$. Considere a função com pertubação definida por

$$u_\epsilon(x) := u(x) + \frac{\epsilon}{2}(1 - x^2). \tag{3.18}$$

Primeiramente, verificamos que u_ϵ é simétrica. De fato, temos

$$u_\epsilon(-x) = u(-x) + \frac{\epsilon}{2}(1 - x^2) = u_\epsilon(x)$$

onde utilizamos a simetria de u, ou seja, $u(x) = u(-x)$. Além disso, u_ϵ satisfaz as condições de bordo da Definição (20). De fato,

$$u_\epsilon(\pm 1) = u(\pm 1) = \alpha \quad \text{e} \quad u'_\epsilon(-1) = u'(-1) + \epsilon = \beta + \epsilon.$$

Por fim, notamos que $u_\epsilon(x) > 0$ para todo $x \in [-1, 1]$, uma vez que, por hipótese, $u(x) > 0$ e $|\epsilon| < \epsilon_0$, para ϵ_0 suficientemente pequeno. Portanto, sob essas condições, concluímos $u_\epsilon \in \bar{N}_{\alpha,\beta+\epsilon}$. Agora, consideremos dois casos:

Se $\alpha \leqslant \alpha^*$ ou $-\beta > \alpha$: Neste caso, implica que $u_\epsilon \in N_{\alpha,\beta+\epsilon}$ para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno (ver a Definição (20)).

Se $\alpha > \alpha^*$ e $\beta > -\alpha$: Nesse caso, a condição $u \in N_{\alpha,\beta}$ implica $u'(x) < \alpha$ em $[0, 1]$. Assim, temos que

$$u_\epsilon'(x) = u'(x) + \epsilon < \alpha, \quad \forall x \in [0, 1],$$

desde que $|\epsilon| \leqslant \epsilon_1$, com $0 < \epsilon_1 \leqslant \epsilon_0$ escolhido suficientemente pequeno. Portanto, $u_\epsilon \in N_{\alpha,\beta+\epsilon}$. Finalmente, pela continuidade da função $\epsilon \mapsto \mathcal{W}_\gamma(u_\epsilon)$, segue que

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta)} = \inf_{u \in N_{\alpha,\beta}} \left[\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{W}_\gamma(u_\epsilon)\right] \geqslant \inf_{u \in N_{\alpha,\beta}} \left[\limsup_{\epsilon \to 0} T_{\gamma,(\alpha,\beta+\epsilon)}\right] = \limsup_{\epsilon \to 0} T_{\gamma,(\alpha,\beta+\epsilon)}.$$

Logo, concluímos que a função $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ é semicontínua superiormente. ■

A demonstração da semi-continuidade inferior de $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ é mais complexa, exigindo o uso das estimativas a priori estabelecidas na Proposição 4.

Lema 4. *Seja* $\gamma \in [0, 1]$ *fixo. Se* $\alpha \leqslant \alpha^*$*, então* $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ *é semicontínua inferiormente para* $\beta \in \mathbb{R}$*. Se* $\alpha > \alpha^*$*, então* $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ *é semicontínua inferiormente para* $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha\}$.

Demonstração. Sejam $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ e $T_{\gamma',(\alpha,\beta)}$ as energias correspondentes a valores distintos de γ. A partir do Corolário 2 e da energia de Willmore (3.4), temos

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta)} = \int_\Sigma H^2\, dA - \gamma \int_\Sigma K\, dA \quad \text{e} \quad T_{\gamma',(\alpha,\beta)} = \int_\Sigma H^2\, dA - \gamma' \int_\Sigma K\, dA.$$

Subtraindo essas expressões, usando a equação (3.3) e a Definição 20, obtemos:

$$T_{\gamma',(\alpha,\beta)} = T_{\gamma,(\alpha,\beta)} - 4\pi(\gamma - \gamma')\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta}}.$$

Escolhendo agora $\gamma_0 = 1/2$ para simplificar a demonstração. Sabendo que, se $T_{\gamma_0,(\alpha,\beta)}$ for semicontínua inferiormente, essa propriedade será válida para qualquer γ, devido à relação linear entre $T_{\gamma',(\alpha,\beta)}$ e $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$. Considere uma sequência $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que converge para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Seja u_k a função do Corolário 2 que satisfaz

$$u_k \in N_{\alpha,\beta_k} \quad \text{e} \quad \mathcal{W}_{\gamma_0}(u_k) = T_{\gamma_0,(\alpha,\beta_k)},$$

ou seja, u_k minimiza a energia para cada β_k. Como $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada, pela Proposição 4, existem constantes positivas c_i, para $i = 1, 2, 3$, dependentes apenas de α, tais que

$$0 < c_1 \leqslant u_k(x) \leqslant c_2 \quad \text{e} \quad |u_k'(x)| \leqslant c_3 \text{ em } [-1, 1],\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Além disso, se $\alpha > \alpha^*$ e $\beta > -\alpha$, então, pela Proposição 4 (2.i) e (2.ii), temos

$$u_k'(x) \leqslant \max\{-\beta_k, \sinh(b_1(\alpha))\} \text{ em } [0, 1]. \tag{3.20}$$

Pela semicontinuidade superior garantida pelo Lema 3, segue que existe uma constante $c_4 > 0$ tal que

$$T_{\gamma_0,(\alpha,\beta_k)} = \mathcal{W}_{\gamma_0}(u_k) \leqslant c_4,$$

ou seja, a energia $T_{\gamma_0,(\alpha,\beta_k)}$ não diverge quando $k \to \infty$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
&c_4 \geqslant \mathcal{W}_{\gamma_0}(u_k)\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{u_k''(x)}{(1+u_k'(x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{u_k(x)\sqrt{1+u_k'(x)^2}}\right)^2 u_k(x)\sqrt{1+u_k'(x)^2}\,dx\\
&\quad + \frac{2\pi}{2}\left.\frac{u_k'(x)}{\sqrt{1+u_k'(x)^2}}\right|_{-1}^{1}\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{u_k''(x)^2}{(1+u_k'(x)^2)^3} - \frac{2u_k''(x)}{u_k(x)(1+u_k'(x)^2)^2}\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{u_k(x)^2(1+u_k'(x)^2)}\right)u_k(x)\sqrt{1+u_k'(x)^2}\,dx + \left.\frac{\pi u_k'(x)}{\sqrt{1+u_k'(x)^2}}\right|_{-1}^{1}\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{u_k''(x)^2 u_k(x)}{(1+u_k'(x)^2)^{5/2}} + \frac{1}{u_k(x)\sqrt{1+u_k'(x)^2}}\right)dx - \pi\int_{-1}^{1}\frac{u_k''(x)}{(1+u_k'(x)^2)^{3/2}}\,dx\\
&\quad + \left.\frac{\pi u_k'(x)}{\sqrt{1+u_k'(x)^2}}\right|_{-1}^{1}.
\end{aligned}$$

Agora, pela equação (3.3), simplificamos para

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{\gamma_0}(u_k) &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{u_k''(x)^2 u_k(x)}{(1+u_k'(x)^2)^{5/2}} + \frac{1}{u_k(x)\sqrt{1+u_k'(x)^2}}\right) - \left.\frac{\pi u_k'(x)}{\sqrt{1+u_k'(x)^2}}\right|_{-1}^{1} dx\\
&\quad + \left.\frac{\pi u_k'(x)}{\sqrt{1+u_k'(x)^2}}\right|_{-1}^{1}\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{u_k''(x)^2 u_k(x)}{(1+u_k'(x)^2)^{5/2}} + \frac{1}{u_k(x)\sqrt{1+u_k'(x)^2}}\right)dx.
\end{aligned}$$

Por (3.19) (constantes dadas anteriormente), temos que $c_1 \leqslant u_k(x)$ e $(1 + u_k'(x)^2) \leqslant (1 + c_3^2)$, podemos substituir essas estimativas na integral acima. Assim,

$$\mathcal{W}_{\gamma_0}(u_k) \geqslant \frac{\pi}{2} \frac{c_1}{(1 + c_3^2)^{5/2}} \int_{-1}^{1} u_k''(x)^2 \, dx. \tag{3.21}$$

Note que devido a escolha $\gamma_0 = 1/2$, os termos de bordo se cancelam. A partir da desigualdade (3.21), obtemos a limitação uniforme da sequência em $H^2([-1,1])$ e, após passar para uma subsequência, o Teorema (5) (Imersão de Rellich) garante a existência de uma função $u \in H^2([-1,1])$ tal que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{em } H^2([-1,1]) \quad \text{e} \quad u_k \to u \quad \text{em } C^1([-1,1]).$$

A convergência em $C^1([-1,1])$ garante que u também satisfaz as estimativas em (3.19), em particular, $u(x) > 0$ em $[-1,1]$. Se $\alpha \leqslant \alpha^*$ ou $\beta < -\alpha$, então $u \in \bar{N}_{\alpha,\beta} = N_{\alpha,\beta}$. Por outro lado, se $\alpha > \alpha^*$ e $\beta > -\alpha$, então a estimativa (3.20) e a desigualdade (3.8) nos fornecem que

$$u_k'(x) \leqslant \max\{-\beta_k, \sinh(b_1(\alpha))\} < \alpha.$$

Note que $u_k \to u$ em $C^1([-1,1])$. Assim,

$$u'(x) \leqslant \max\{-\beta, \sinh(b_1(\alpha))\} < \alpha \quad \text{em } [0,1],$$

e, assim, $u \in N_{\alpha,\beta}$ também neste caso. A convergência forte em $C^1([-1,1])$ e a convergência fraca em $H^2([-1,1])$ implicam que

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{\gamma_0}(u_k) &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{u_k''(x)^2 u(x)}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} + \frac{1}{u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) dx + o(1) \\
&\geqslant \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{u''(x)^2 u(x)}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} + \frac{1}{u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) dx + o(1) \\
&\geqslant \mathcal{W}_{\gamma_0}(u) + o(1).
\end{aligned}$$

Juntamente com $u \in N_{\alpha,\beta}$, isso mostra que

$$T_{\gamma_0,(\alpha,\beta)} \leqslant \mathcal{W}_{\gamma_0}(u) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathcal{W}_{\gamma_0}(u_k) = \liminf_{k\to\infty} T_{\gamma_0,(\alpha,\beta_k)},$$

provando a semicontinuidade inferior desejada. ■

Combinando os Lemas 3 e 4, ganhamos.

Corolário 3. *Seja $\gamma \in [0,1]$, $\alpha > 0$ fixo. Então, $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ é contínua em $\mathbb{R}$ se $\alpha \leqslant \alpha^*$, enquanto para $\alpha > \alpha^*$, ela é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-\alpha\}$.*

3.2.2 Monotonicidade para β Grandes e Pequenos

Nesta seção, mostramos que $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ é uma função crescente para valores de β suficientemente grandes e positivos, enquanto é decrescente para valores de β suficientemente pequenos e negativos. Esse comportamento permite restringir nossa análise a valores limitados de β ao procurar o minimizador absoluto.

Lema 5. *Se* $\gamma \in [0,1]$ *e* $\beta > \beta' \geqslant \alpha^{-1}$*, então* $T_{\gamma,(\alpha,\beta)} > T_{\gamma,(\alpha,\beta')}$.

Demonstração. Pelo Corolário 2, existe uma função $u \in N_{\alpha,\beta}$ tal que $\mathcal{W}_\gamma(u) = T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$, isto é, u minimiza a energia de $\mathcal{W}_\gamma$ na classe de funções $N_{\alpha,\beta}$. Seja

$$x^* := \inf\{x \in [-1,0] : u'(x) \leqslant \beta'\},$$

note que x^* está bem definido, pois a continuidade de $u'(x)$ em $x \in [-1,0]$ garante que o conjunto

$$A := \{x \in [-1,0] : u'(x) \leqslant \beta'\},$$

é não vazio ($A \neq \emptyset$). De fato, como por hipótese $u'(0) = 0 < \beta'$ e $u'(-1) = \beta > \beta'$, sabemos que $u'(x)$ atinge o valor β' em algum ponto do intervalo $[-1,0]$. Portanto, conjunto A é não vazio e limitado em $[-1,0]$, e, como x^* é infimum de A, então x^* está bem definido, ou seja, $x^* \in [-1,0]$. Além disso, como $u'(x)$ é continuo em $[-1,0]$ e sabemos que $u'(0) = 0 < \beta'$ e $u'(-1) = \beta > \beta'$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto $x^* \in (-1,0)$ tal que $u'(x^*) = \beta'$. Uma vez que x^* é o menor ponto em que $u'(x^*) = \beta'$, segue diretamente que $u'(x) \geqslant \beta' > 0$ para todo $x \in [-1,x^*]$. Logo, a função u é crescente em $[-1,x^*]$ e deduzimos que $u(x^*) \geqslant u(-1) = \alpha$. No entanto, como $x^* \in (-1,0)$, temos

$$u(x^*) > \alpha|x^*|. \tag{3.22}$$

Agora, seja $w \in C^\infty([-1,1])$ a função obtida ao redimensionar $u|_{[x^*,-x^*]}$ para o intervalo $[-1,1]$, ou seja,

$$w(x) := \frac{u(rx)}{r}, \tag{3.23}$$

onde $r = |x^*|$. Por construção, usando o fato de que $u'(x^*) = \beta'$ e a desigualdade (3.22), ganhamos

$$w'(-1) = \beta' \quad \text{e} \quad w(\pm 1) > \alpha. \tag{3.24}$$

Pela invariância do redimensionamento da energia, ao aplicamos o Lema 2, ganhamos $\mathcal{W}_\gamma(w) = \mathcal{W}_\gamma(u|_{[x^*,-x^*]})$. Por hipótese, temos $\beta' \geqslant \alpha^{-1}$ o que implica $\alpha \geqslant \beta'^{-1}$. Assim, por (3.24), temos $w(\pm 1) > \alpha \geqslant \beta'^{-1}$. Com isso, aplicando a Proposição 3(i), obtemos

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta)} \geqslant T_{\gamma,(\alpha,\beta')}.$$

Portanto,

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta)} = \mathcal{W}_\gamma(u) \geqslant \mathcal{W}_\gamma(u|_{[x^*,-x^*]}) = \mathcal{W}_\gamma(w) \geqslant T_{\gamma,(w(\pm 1),\beta')} > T_{\gamma,(\alpha,\beta')}.$$

Aqui usamos que $\mathcal{W}_\gamma(u) \geqslant \mathcal{W}_\gamma(w)$, o que segue de $\gamma \in [0,1]$. ■

Observação 10. *Na verdade, este resultado pode ser generalizado para o caso $-\infty < \gamma \leqslant 1$. Usando o Corolário 2, equação (3.4) e o Lema 5, encontramos*

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta)} = T_{1,(\alpha,\beta)} + 4\pi(1-\gamma)\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} > T_{1,(\alpha,\beta')} + 4\pi(1-\gamma)\frac{\beta'}{\sqrt{1+\beta'^2}} = T_{\gamma,(\alpha,\beta')},$$

uma vez que $1-\gamma \geqslant 0$ e $\beta > \beta' \geqslant \alpha^{-1} > 0$.

A seguir, definimos

$$\beta_2(\alpha) := \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha < \alpha^* \\ -\sinh(b_2), & \text{se } \alpha \geqslant \alpha^*, \end{cases} \tag{3.25}$$

com $b_2 = b_2(\alpha)$ definido em (3.7).

Observação 11. *Vejamos que $\beta < 0$ e $\alpha > \alpha_\beta$ implica $\beta > \beta_2(\alpha)$, onde α_β é definido por (3.13). De fato, da definição de α_β segue que*

$$\begin{aligned} \alpha > \alpha_\beta = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\operatorname{arcsinh}(-\beta)} &= \frac{\sqrt{1+[\sinh(\operatorname{arcsinh}(-\beta))]^2}}{\operatorname{arcsinh}(-\beta)} \\ &= \frac{\cosh(\operatorname{arcsinh}(-\beta))}{\operatorname{arcsinh}(-\beta)}. \end{aligned}$$

Como consequência da definição de b_2 temos que $\operatorname{arcsinh}(-\beta) < b_2$. Agora, usando que $\alpha > \alpha_\beta$ obtemos $\beta_2(\alpha) = -\sinh(b_2)$, ou ainda, $b_2 = \operatorname{arcsinh}(-\beta_2(\alpha))$. Donde,

$$\operatorname{arcsinh}(-\beta) < \operatorname{arcsinh}(-\beta_2(\alpha)) \;\Rightarrow\; -\beta < -\beta_2(\alpha) \;\Rightarrow\; \beta > \beta_2(\alpha).$$

Lema 6. *Seja $\gamma \in [0,1]$ fixo. Se $\beta' < \beta \leqslant \min\{-\alpha, \beta_2(\alpha)\}$, então $T_{\gamma,(\alpha,\beta)} < T_{\gamma,(\alpha,\beta')}$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2, sabemos que existe uma função $u \in N_{\alpha,\beta'}$ tal que $\mathcal{W}_\gamma(u) = T_{\gamma,(\alpha,\beta')}$. Note que pela hipótese, temos

$$\beta' < \beta \leqslant -\alpha \quad \text{ou} \quad \beta' < \beta \leqslant \beta_2(\alpha).$$

Se $\beta' < -\alpha$, então existe um ponto $\bar{x} \in (-1,0)$, sendo o menor elemento tal que $u(\bar{x}) = -\alpha\bar{x}$. Como $u'(-1) = \beta' < \beta \leqslant -\alpha$, $u'(\bar{x}) \geqslant -\alpha$, segue de (20) e da hipótese do Lema. Além disso, como u' é continuo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto $x^* \in (-1,\bar{x})$ tal que

$$u'(x^*) = \beta \quad \text{e} \quad u(x^*) < \alpha|x^*|. \tag{3.26}$$

Agora, consideramos a função $w \in C^\infty([-1,1])$, obtida ao redimensionar $u|_{[x^*,-x^*]}$ para o intervalo $[-1,1]$, conforme definida em (3.23). Por construção, usando (3.26), obtemos

$$w'(-1) = \beta \quad \text{e} \quad w(\pm 1) < \alpha. \tag{3.27}$$

Veremos a seguir que a hipótese $\beta \leqslant \beta_2(\alpha)$ implica $\alpha \leqslant \alpha_\beta$. Para isto, analisaremos dois casos. Primeiro vamos considerar o caso $\alpha > \alpha^*$. Segue da definição de $\beta_2(\alpha)$ que

$$\beta \leqslant \beta_2(\alpha) = -\sinh(b_2) < 0.$$

Agora, suponha por contradição que $\alpha > \alpha_\beta$. Usando a Observação 11 inferimos que $\beta > \beta_2(\alpha)$. Portanto, devemos ter $\alpha \leqslant \alpha_\beta$. O caso $\alpha \leqslant \alpha^*$, segue diretamente da definição de (3.13). Em ambos os casos, temos $w(\pm 1) < \alpha \leqslant \alpha_\beta$. Aplicando a Proposição 3(iv), ganhamos

$$T_{\gamma,(w(\pm 1),\beta)} > T_{\gamma,(\alpha,\beta)}. \tag{3.28}$$

Além disso, pelo Lema 2, a energia de w não pode exceder a energia de u, pois $\gamma \in [-1,0]$. Assim, temos

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta')} = \mathcal{W}_\gamma(u) \geqslant \mathcal{W}_\gamma(w). \tag{3.29}$$

Portanto, combinando (3.29) e (3.28), obtemos

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta')} = \mathcal{W}_\gamma(u) \geqslant \mathcal{W}_\gamma(w) \geqslant T_{\gamma,(w(\pm 1),\beta)} > T_{\gamma,(\alpha,\beta)}.$$

■

Observação 12. *Este resultado ainda é válido para todo $\gamma \geqslant 0$ porque*

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta')} = T_{0,(\alpha,\beta')} - 4\pi\gamma\frac{\beta'}{\sqrt{1+\beta'^2}} > T_{0,(\alpha,\beta)} - 4\pi\gamma\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = T_{\gamma,(\alpha,\beta)},$$

o que se aplica para $\gamma \geqslant 0$ e $\beta' < \beta \leqslant \min\{-\alpha, \beta_2(\alpha)\}$.

3.2.3 O caso $\gamma = 0$

Para este caso, apresentamos uma descrição completa do comportamento de monotonicidade de $\beta \mapsto T_{0,(\alpha,\beta)}$ para todos os valores de β. Para $\alpha \leqslant \alpha^*$, essa aplicação é decrescente em $(-\infty, -\alpha]$, enquanto é crescente em $[-\alpha, \infty)$. Por outro lado, para $\alpha > \alpha^*$, o comportamento torna-se mais complicado devido à presença das duas soluções de catenoide, cuja energia $\mathcal{W}_0$ é zero.

De forma análoga à definição de $\beta_2(\alpha)$, introduzimos

$$\beta_1(\alpha) := \begin{cases} -\alpha^*, & \text{se } \alpha < \alpha^* \\ -\sinh(b_1), & \text{se } \alpha \geqslant \alpha^*, \end{cases} \tag{3.30}$$

com $b_1 = b_1(\alpha)$ definido em (3.7).

Observação 13. *Vejamos que* $\beta < 0$ *e* $\alpha > \alpha_\beta$ *implica* $\beta < -\sinh(b_1)$*, onde* α_β *é definido por* (3.13)*. De fato, da definição de* α_β *segue que*

$$\begin{aligned} \alpha > \alpha_\beta = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\operatorname{arcsinh}(-\beta)} &= \frac{\sqrt{1+[\sinh(\operatorname{arcsinh}(-\beta))]^2}}{\operatorname{arcsinh}(-\beta)} \\ &= \frac{\cosh(\operatorname{arcsinh}(-\beta))}{\operatorname{arcsinh}(-\beta)}. \end{aligned}$$

Como consequência da definição de b_1 *temos que* $\operatorname{arcsinh}(-\beta) > b_1$*. Donde,*

$$-\beta > \operatorname{arcsinh}(b_1) \;\Rightarrow\; \beta < -\sinh(b_1).$$

Lema 7. *Se* $\alpha^{-1} \geqslant \beta > \beta' \geqslant \max\{-\alpha, \beta_1(\alpha)\}$*, então* $T_{0,(\alpha,\beta)} > T_{0,(\alpha,\beta')}$*.*

Demonstração. Sejam as seguintes expressões definidas

$$b := -\operatorname{arcsenh}(\beta) \quad \text{e} \quad b' := -\operatorname{arcsenh}(\beta') \tag{3.31}$$

Como $\beta > \beta'$, segue que $\operatorname{arcsenh}(\beta) > \operatorname{arcsenh}(\beta')$, e, ao multiplicamos a desigualdade por -1, obtemos $b < b'$. Pelo Corolário 2, existe uma função $u \in N_{\alpha,\beta}$ tal que $\mathcal{W}_0(u) = T_{0,(\alpha,\beta)}$. Considere a função $f(x)$, cujo gráfico é a catenária, dada por

$$f(x) = \frac{\alpha}{\cosh(b)} \cosh\left(\frac{\cosh(b)}{\alpha}(x+1) - b\right), \tag{3.32}$$

onde $f(x)$ satisfaz as condições de bordo. De fato, para $x = -1$, temos

$$f(-1) = \frac{\alpha}{\cosh(b)} \cosh\left(\frac{\cosh(b)}{\alpha}(-1+1) - b\right) = \frac{\alpha}{\cosh(b)} \cosh(b) = \alpha.$$

Além disso, pela definição em (3.31), obtemos

$$f'(-1) \quad = \sinh\left(\frac{\cosh(b)}{\alpha}(-1+1) - b\right) = \sinh(-b) = \beta.$$

Agora, definimos o ponto

$$x^* := -1 + \frac{\alpha}{\cosh(b)}(b - b'), \tag{3.33}$$

onde $x^* < 0$, pois $b' > b$. Além disso, pela definição em (3.31), temos

$$f'(x^*) = \sinh\left(\frac{\cosh(b)}{\alpha}\left(-1 + \frac{\alpha}{\cosh(b)}(b - b') + 1\right) - b\right) = -\sinh(b') = \beta'.$$

Seja $v \in C^{1,1}([x^*, -x^*])$ uma função simétrica definida como:

$$v(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \in [x^*, -1] \\ u(x), & \text{se} \quad x \in (-1, 0]. \end{cases} \tag{3.34}$$

Definimos também $w \in C^{1,1}([-1, 1])$ como o reescalonamento de v para o intervalo $[-1, 1]$, dado por:

$$w(x) = \frac{v(rx)}{r},$$

onde $r = |x^*|$ é um fator de reescalonamento que ajusta o domínio de v para o intervalo desejado. Por construção, temos

$$w'(-1) = v'(-r) = v'(|-x^*|) = v'(x^*).$$

Como $v(x)$ coincide com $f(x)$ em $[x^*, -1]$ e $f'(x^*) = \beta'$, segue que $w'(-1) = \beta'$. Assim, $w(x)$ preserva a suavidade e a simetria da função $v(x)$. Para aplicarmos a propriedade de monotocidade da energia de α, precisamos mostrar que $w(\pm 1) < \alpha$. Usamos, para isso, a relação entre β e β' dada em (3.31). Compondo com a função sinh, ganhamos

$$\sinh(b) = -\beta \quad \text{e} \quad \sinh(b') = -\beta'. \tag{3.35}$$

Como $\beta > \beta'$, segue que $\sinh(b) < \sinh(b')$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x \in (b, b')$, tal que

$$\sinh(b) < \sinh(x) < \sinh(b').$$

Da relação (3.35), obtemos

$$-\beta < \sinh(x) < -\beta'. \tag{3.36}$$

Supondo $\beta' \geqslant -\alpha$, segue que $-\beta' \leqslant \alpha$, logo, $\sinh(x) < \alpha$ para todo $x \in (b, b')$. Aplicando o Teorema do Valor Médio para $x \in (b, b')$, temos

$$\frac{\cosh(b') - \cosh(b)}{b' - b} = \sinh(x),$$

e como $\sinh(x) < \alpha$, resulta que

$$\frac{\cosh(b') - \cosh(b)}{b' - b} < \alpha.$$

De forma equivalente

$$\cosh(b') < \alpha(b' - b) + \cosh(b).$$

Daí, temos

$$\frac{\cosh(b')}{\cosh(b) - \alpha(b - b')} < 1. \tag{3.37}$$

Por construção, isso implica que

$$w(\pm 1) = \frac{\nu(x^*)}{|x^*|} = \frac{\alpha \cosh(b')}{\cosh(b)} \left(\frac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{\cosh(b)}(b - b')} \right) = \frac{\alpha \cosh(b')}{\cosh(b) - \alpha(b - b')} < \alpha. \tag{3.38}$$

Com isso, pelo Lema 2, temos que $\mathcal{W}_0$ é invariante sob reescalonamento, e obtemos

$$T_{0,(\alpha,\beta)} = \mathcal{W}_0(u) = \mathcal{W}_0(w) \geqslant T_{0,(w(\pm 1), w'(-1))} = T_{0,(w(\pm 1),\beta')}.$$

Primeiramente, suponha que $\beta' \geqslant 0$. Da hipótese $\alpha^{-1} \geqslant \beta > \beta'$, concluímos que $\alpha \leqslant \beta^{-1}$. Além disso, utilizando a condição adicional $\beta^{-1} < \beta'^{-1}$, ganhamos $\alpha < \beta'^{-1}$. Combinando essa desigualdade (3.38), resulta a cadeia de desigualdades

$$w(\pm 1) < \alpha < \beta'^{-1}.$$

Aplicando a Proposição 3.(ii), temos

$$T_{0,(w(\pm 1),\beta')} > T_{0,(\alpha,\beta')}.$$

Agora, suponha que $\beta' < 0$. Nesse caso, afirmamos que $\alpha \leqslant \alpha_{\beta'}$. Suponha por contradição que $\alpha > \alpha_{\beta'}$, segue da definição de $\alpha_{\beta'}$ que $\alpha > \alpha^*$ implicando $\beta_1(\alpha) = -\sinh(b_1)$. Portanto, podemos usar a Observação 13 para concluir que $\beta' < -\sinh(b_1)$. Isto contraria a hipótese

$$\beta' \geqslant \max\{-\alpha, \beta_1(\alpha)\} \geqslant \beta_1(\alpha) = -\sinh(b_1).$$

Donde concluímos que $\beta' < 0$ implica $\alpha \leqslant \alpha_{\beta'}$. Além disso, temos $w(\pm 1) < \alpha < \alpha_{\beta'}$. Aplicando novamente a Proposição 3.(iv) obtemos

$$T_{0,(w(\pm 1),\beta')} > T_{0,(\alpha,\beta')}.$$

Em ambos os casos, obtemos

$$T_{0,(\alpha,\beta)} > T_{0,(\alpha,\beta')}.$$

■

Ao combinarmos os Lemas 5, 6 e 7 com o Corolário 3, para o caso $\alpha \leqslant \alpha^*$, ganhamos

Corolário 4. *Se $0 < \alpha \leqslant \alpha^*$, então $T_{0,(\alpha,\beta)}$ é crescente para $\beta \in [-\alpha, \infty)$ e decrescente para $\beta \in (-\infty, -\alpha]$. A aplicação $\beta \mapsto T_{0,(\alpha,\beta)}$ atinge seu mínimo global em $\beta = -\alpha$.*

Resta agora discutir o caso $\alpha > \alpha^*$ e $\beta \in [\beta_2(\alpha), \beta_1(\alpha)]$. Nesse cenário, o comportamento de monotonicidade apresenta maior complexidade devido à presença de duas catenoides correspondentes aos valores $\beta_1(\alpha)$ e $\beta_2(\alpha)$, ambos relacionados à condição de bordo β.

Lema 8. *Se $\alpha > \alpha^*$ e $-\alpha \geqslant \beta > \beta' \geqslant \beta_2(\alpha)$, então $T_{0,(\alpha,\beta)} > T_{0,(\alpha,\beta')}$.*

Demonstração. Dada a hipótese $\beta' \geqslant \beta_2(\alpha)$, temos que $\operatorname{arcsinh}(-\beta') \leqslant \operatorname{arcsinh}(-\beta_2(\alpha))$. Além disso, como $\alpha > \alpha^*$, pela definição de $\beta_2(\alpha)$, segue que

$$\beta_2(\alpha) = -\sinh(b_2(\alpha)) \;\Rightarrow\; b_2 = \operatorname{arcsinh}(-\beta_2(\alpha)).$$

Logo,

$$\operatorname{arcsinh}(-\beta') \leqslant b_2(\alpha).$$

Como consequência da definição de $b_2(\alpha)$ temos que

$$\begin{aligned} \alpha \geqslant \frac{\cosh(\operatorname{arcsinh}(-\beta'))}{\operatorname{arcsinh}(-\beta')} &= \frac{\sqrt{1 + [\sinh(\operatorname{arcsinh}(-\beta'))]^2}}{\operatorname{arcsinh}(-\beta')} \\ &= \frac{\sqrt{1 + (\beta')^2}}{\operatorname{arcsinh}(-\beta')} = \alpha_{\beta'}. \end{aligned}$$

Portanto, pela suposição $\beta' \geqslant \beta_2(\alpha)$, ganhamos que $\alpha \geqslant \alpha_{\beta'}$. Agora, pelo Corolário 2, existe uma função $u \in N_{\alpha,\beta}$ tal que $\mathcal{W}_0(u) = T_{0,(\alpha,\beta)}$. Considere a função $f(x)$ definida em (3.32). No ponto x^* como definido em (3.33), temos $f'(x^*) = \beta'$, como mostrado no Lema 7. Agora, considere a função simétrica $v \in C^{1,1}([x^*, -x^*])$ definida em (3.34).

Além disso, seja $w \in C^{1,1}([-1,1])$ o redimensionamento de v para o intervalo $[-1,1]$. Pela construção, temos $w'(-1) = \beta'$ e $w(\pm 1) > \alpha$. De fato, a partir das equações (3.35) e da hipótese de que $\beta > \beta'$, juntamente com manipulações semelhantes às realizadas no Lema 7, obtemos a desigualdade (3.36). Utilizando a hipótese de que $\beta' < -\alpha$, concluímos que $\sinh(x) > \alpha$ para todos $x \in (b, b')$. Além disso, para $x \in (b, b')$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio, i.e.

$$\frac{\cosh(b') - \cosh(b)}{b' - b} = \sinh(x).$$

Como $\sinh(x) > \alpha$, então

$$\frac{\cosh(b') - \cosh(b)}{b' - b} > \alpha,$$

ou de forma equivalente

$$\frac{\cosh(b')}{\cosh(b) - \alpha(b - b')} > 1.$$

Essa desigualdade implica que $w(\pm 1) > \alpha$, o que é provado de maneira semelhante no Lema 7. Como $\gamma = 0$ e $\mathcal{W}_\gamma$ é invariante sob reescalonamento, pelo Lema 2, obtemos

$$T_{0,(\alpha,\beta)} = \mathcal{W}_0(u) = \mathcal{W}_0(w) \geqslant T_{0,(w(\pm 1),w'(-1))} = T_{0,(w(\pm 1),\beta')}.$$

Agora, suponha que $\beta' < 0$ e, por hipótese, temos que $\alpha > \alpha^*$ e $\beta' \leqslant \beta_2(\alpha)$. Isso implica que $\beta' \leqslant -\sinh(b_2)$, decorrendo da definição de $\beta_2(\alpha)$ em (3.25). Assim, temos que $\alpha \geqslant \alpha_{\beta'}$. Consequentemente, temos

$$w(\pm 1) > \alpha \geqslant \alpha_{\beta'}.$$

Portanto, pela Proposição 3 (v), obtemos

$$T_{0,(\alpha,\beta)} > T_{0,(\alpha,\beta')}.$$

∎

Lema 9. *Se* $\alpha > \alpha^*$ *e* $\beta_1(\alpha) \geqslant \beta > \beta' > -\alpha$, *então* $T_{0,(\alpha,\beta)} < T_{0,(\alpha,\beta')}$.

Demonstração. Observe que a suposição $-\alpha < \beta \leqslant \beta_1(\alpha)$ implica que $\alpha \geqslant \alpha_\beta$ (segue forma semelhante ao Lema 8). Pelo Corolário 2, existe uma função $u \in N_{\alpha,\beta'}$ tal que $\mathcal{W}_0(u) = T_{0,(\alpha,\beta')}$. Além disso, com base na definição de $\beta_1(\alpha)$ dada em (3.30) e na Proposição 4 (2.ii), sob a hipótese considerada, temos

$$\beta' \leqslant u'(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in [-1, 0]. \tag{3.39}$$

A partir dessa estimativa, juntamente com a hipótese $\beta' > -\alpha$, segue que

$$u(x) > \alpha|x|, \quad \forall x \in (-1,1).$$

Note que, pela desigualdade (3.39) e a hipótese, temos $u'(-1) = \beta' < \beta < 0$ e $u'(0) = 0$. Além disso, como u' é contínuo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x^* \in (-1,0)$ tal que

$$u'(x^*) = \beta \quad \text{e} \quad u(x^*) > \alpha|x^*|. \tag{3.40}$$

Agora, considere a função $w \in C^\infty([-1,1])$, obtida ao redimensionar $u|_{[x^*,-x^*]}$ para o intervalo $[-1,1]$, conforme definido em (3.23). Por construção, utilizando (3.40), temos $w'(-1) = \beta'$ e $w(\pm 1) > \alpha$. Com isso, temos

$$w(\pm 1) > \alpha \geqslant \alpha_\beta$$

Portanto, pela Proposição 3 (v), temos

$$T_{0,(\alpha,\beta)} < T_{0,(w(\pm 1),\beta)}.$$

Além disso, pelo Lema 2 a energia de Willmore para uma função w reescalada não pode exceder a energia de u quando $\gamma = 0$. Assim, temos

$$T_{0,(\alpha,\beta')} = \mathcal{W}_0(u) \geqslant \mathcal{W}_0(u|_{[x^*,-x^*]}) = \mathcal{W}_0(w).$$

Portanto,

$$T_{0,(\alpha,\beta')} = \mathcal{W}_0(u) \geqslant \mathcal{W}_0(w) \geqslant T_{0,(w(\pm 1),\beta)} > T_{0,(\alpha,\beta)}.$$

$\blacksquare$

Combinando os resultados anteriores, obtemos uma descrição completa do comportamento da função de energia $T_{0,(\alpha,\beta)}$ em relação ao parâmetro β, quando $\alpha > \alpha^*$.

Observação 14. *Veja que*

1. *Pelo Lema 6, sabemos que para $\beta \leqslant \beta_2(\alpha)$, a função $T_{0,(\alpha,\beta)}$ é decrescente. Ou seja, se $\beta' < \beta$, temos:*

   $$T_{0,(\alpha,\beta')} > T_{0,(\alpha,\beta)}, \quad \textit{para } \beta' < \beta \leqslant \beta_2(\alpha).$$

   Isso demonstra que a função é decrescente no intervalo $(-\infty, \beta_2(\alpha)]$.

2. *A partir do Lema 8, observamos que para* $\beta \geqslant \beta_2(\alpha)$, $T_{0,(\alpha,\beta)}$ *passa a ser crescente. Isso implica que, para* $\beta < \beta'$, *temos:*

$$T_{0,(\alpha,\beta)} < T_{0,(\alpha,\beta')}, \quad \textit{para } \beta_2(\alpha) \leqslant \beta' < \beta \leqslant -\alpha.$$

Portanto, a função é crescente no intervalo $[\beta_2(\alpha), -\alpha]$.

3. *Pelo Lema 9, sabemos que* $T_{0,(\alpha,\beta)}$ *é novamente decrescente no intervalo* $(-\alpha, \beta_1(\alpha)]$. *Isto significa que, se* $\beta' < \beta$, *temos:*

$$T_{0,(\alpha,\beta')} > T_{0,(\alpha,\beta)}, \quad \textit{para } -\alpha < \beta' < \beta \leqslant \beta_1(\alpha).$$

4. *Finalmente, pelo Lema 7, sabemos que* $T_{0,(\alpha,\beta)}$ *é crescente para* $\beta \geqslant \beta_1(\alpha)$. *Ou seja, se* $\beta' < \beta$, *temos:*

$$T_{0,(\alpha,\beta')} < T_{0,(\alpha,\beta)}, \quad \textit{para } \beta_1(\alpha) \leqslant \beta' < \beta.$$

Isso mostra que a função é crescente no intervalo $[\beta_1(\alpha), +\infty)$.

Com base nessas observações, obtemos o seguinte Corolário 5 que sintetiza o comportamento da função $T_{0,(\alpha,\beta)}$ em relação a β.

Corolário 5. *Para um* α *fixo com* $\alpha > \alpha^*$, *a função* $\beta \mapsto T_{0,(\alpha,\beta)}$ *é decrescente nos intervalos* $(-\infty, \beta_2(\alpha)]$ *e* $(-\alpha, \beta_1(\alpha)]$, *e crescente nos intervalos* $[\beta_2(\alpha), -\alpha]$ *e* $[\beta_1(\alpha), +\infty)$.

3.2.4 O caso $\gamma \in [0, 1]$

A combinação dos Lemas 5 e 6 nos leva ao seguinte resultado

Corolário 6. *Para* $\gamma \in [0, 1]$ *e* $\alpha \leqslant \alpha^*$, *a função* $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ *é decrescente para* $-\infty < \beta \leqslant -\alpha$ *e crescente para* $\alpha^{-1} \leqslant \beta < +\infty$.

Observação 15. *Este resultado não fornece informações sobre a monotonicidade em* $-\alpha < \beta < \alpha^{-1}$. *No entanto, podemos supor a existência de um único valor* $\tilde{\beta} = \beta(\alpha, \gamma)$, *pertencente a* $[-\alpha, \alpha^{-1}]$, *tal que a função* $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ *seja decrescente em* $(-\infty, \tilde{\beta}]$ *e crescente em* $[\tilde{\beta}, +\infty)$. *De fato, essa afirmação é verdadeira para* $\gamma = 0$ *com* $\tilde{\beta} = -\alpha$, *devido ao Corolário 4. Ela também é verdadeira para* $\gamma = 1$, *onde podemos tomar* $\tilde{\beta} = \alpha^{-1}$.

Corolário 7. *Para* $\gamma \in [0,1]$ *e* $\alpha > \alpha^*$, *a função* $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ *é decrescente nos intervalos* $(-\infty, \beta_2(\alpha)]$ *e* $(-\alpha, \beta_1(\alpha)]$, *e crescente no intervalo* $[\alpha^{-1}, +\infty)$.

Demonstração. Com base nos Lemas 5 e 6. pode-se estabelecer o comportamento crescente ou decrescente da função $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ em diferentes intervalos de β. Primeiro, no Lema 5 para $\beta \geqslant \alpha^{-1}$ a função é crescente, isto é, para $\beta' < \beta$, temos $T_{\gamma,(\alpha,\beta')} < T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$, o que mostra que a função é crescente no intervalo $[\alpha^{-1}, +\infty)$. De forma análoga, o Lema 6 mostra que $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ é decrescente para $\beta \leqslant \beta_2(\alpha)$, ou seja, para $\beta' < \beta \leqslant \beta_2(\alpha)$, temos $T_{\gamma,(\alpha,\beta)} < T_{\gamma,(\alpha,\beta')}$, evidenciando o comportamento decrescente no intervalo $(-\infty, \beta_2(\alpha)]$. Por fim, para $\beta \in (-\alpha, \beta_1(\alpha)]$, temos que:

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta)} = T_{0,(\alpha,\beta)} - 4\pi\gamma \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Pelo Corolário 5, $T_{0,(\alpha,\beta)}$ é decrescente em $(-\alpha, \beta_1(\alpha)]$ e a função $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ também é, pois $f'(x) < 0$ para $x < 0$. Logo, para $\beta_1(\alpha) \geqslant \beta > \beta' > -\alpha$, obtemos:

$$T_{\gamma,(\alpha,\beta')} = T_{0,(\alpha,\beta')} - 4\pi\gamma \frac{\beta'}{\sqrt{1+\beta'^2}} > T_{0,(\alpha,\beta)} - 4\pi\gamma \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = T_{\gamma,(\alpha,\beta)}.$$

Portanto, a afirmação está provada. ■

De forma semelhante ao Corolário 7, este resultado não fornece informações sobre a monotonicidade se $\beta_1(\alpha) < \beta < \alpha^{-1}$. Pode-se conjecturar que exista algum $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\alpha, \gamma)$, pertencente a $[\beta_1(\alpha), \alpha^{-1}]$, tal que a função $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ seja decrescente em $(-\alpha, \tilde{\beta}]$ e crescente em $[\tilde{\beta}, +\infty)$.

Observação 16. *De forma semelhante ao caso* $\gamma = 0$ *tratado na Seção* (3.2.3), *podemos discutir completamente o comportamento de monotonicidade de* $\beta \mapsto T_{1,(\alpha,\beta)}$ *para* $\gamma = 1$. *Ele é decrescente em* $(-\infty, \alpha^{-1}]$ *e crescente em* $[\alpha^{-1}, +\infty)$. *O mínimo* $\beta = \alpha^{-1}$ *corresponde ao arco circular* $u(x) = \sqrt{\alpha^2 + 1 - x^2}, u \in N_{\alpha,\alpha^{-1}}$ *que tem energia zero* $\mathcal{W}_1(u) = 0$.

A prova é bastante semelhante ao caso $\gamma = 0$. Em vez de adicionar um pedaço de uma catenoide, como foi feito na prova dos Lema 7 e 8, agora adicionamos um arco circular. Enquanto para $\gamma = 0$ adicionar um pedaço de catenoide não altera a energia $\mathcal{W}_0$, no caso de $\gamma = 1$ adicionar um arco circular não altera a energia $\mathcal{W}_1$. Ressaltamos que o procedimento de adicionar “pedaços” com energia zero não pode ser usado para $0 < \gamma < 1$, uma vez que, para essa faixa de γ, a energia $\mathcal{W}_\gamma$ é sempre maior que zero.

3.3 Condições de Bordo Naturais

O Lema seguinte apresenta a primeira variação do funcional $\mathcal{W}_\gamma$.

Lema 10. *Seja* $u \in C^4([-1,1],(0,\infty))$. *Então, para todo* $\varphi \in H^2([-1,1]) \cap H^1_0([-1,1])$, *tem-se:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{W}_\gamma(u+t\varphi)\Big|_{t=0} &= -2\pi\left[\left(H(x) - \frac{\gamma}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)\frac{u(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_{-1}^{1} \\ &\quad -2\pi\int_{-1}^{1} u\varphi\left(\Delta H + 2H^3 - 2HK\right)dx.\end{aligned}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{W}_\gamma(u+t\varphi)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\int_\Sigma H(u+t\varphi)^2\,dA[u+t\varphi]\Big|_{t=0} \\ &\quad +\gamma\frac{d}{dt}\int_\Sigma K[u+t\varphi]\,dA[u+t\varphi]\Big|_{t=0}.\end{aligned}$$

O cálculo do primeiro termo da soma no segundo membro da igualdade foi estabelecido em ([9], Lema 6).

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Sigma H(u+t\varphi)^2\,dA[u+t\varphi]\Big|_{t=0} &= -2\pi\left[H(x)\frac{u(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_{-1}^{1} \\ &\quad -2\pi\int_{-1}^{1} u(x)\varphi(x)\left(\Delta H(x) + 2H(H^2-K)\right)dx.\end{aligned}$$

A segunda identidade decorre diretamente se escrevermos a curvatura de Gauss K em coordenadas.

$$\begin{aligned}\gamma\frac{d}{dt}\int_\Sigma K[u+t\varphi]\,dA[u+t\varphi]\Big|_{t=0} &= -2\pi\gamma\frac{d}{dt}\left[\frac{u'(x)+t\varphi'(x)}{\sqrt{1+(u'(x)+t\varphi'(x))^2}}\Big|_{t=0}\right]_{-1}^{1} \\ &= -2\pi\gamma\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x)+t\varphi'(x)^2}}\right)\Big|_{t=0}\right. \\ &\quad \left.+\frac{d}{dt}\left(\frac{t\varphi'(x)}{\sqrt{1+(u'(x)+t\varphi'(x)^2}}\right)\Big|_{t=0}\right]_{-1}^{1} \\ &= -2\pi\gamma\left[-\frac{u'(x)^2\varphi'(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} + \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right]_{-1}^{1} \\ &= -2\pi\gamma\left[\frac{\varphi'(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}\right]_{-1}^{1},\end{aligned}$$

onde Σ é a superfície de revolução gerada por $u + t\varphi$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{W}_\gamma(u+t\varphi)\Big|_{t=0} &= -2\pi\left[H(x)\frac{u(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_{-1}^{1} - 2\pi\gamma\left[\frac{\varphi'(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}\right]_{-1}^{1} \\
&\quad -2\pi\int_{-1}^{1} u(x)\varphi(x)\big(\Delta H(x) + 2H(H^2-K)\big)\,dx \\
&= -2\pi\left[H(x)\frac{u(x)\varphi'(x)}{(1+u'(x)^2)} - \frac{\gamma\varphi'(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}\right]_{-1}^{1} \\
&\quad -2\pi\int_{-1}^{1} u(x)\varphi(x)\big(\Delta H(x) + 2H(H^2-K)\big)\,dx \\
&= -2\pi\left[\left(H(x) - \frac{\gamma}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)\frac{u(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_{-1}^{1} \\
&\quad -2\pi\int_{-1}^{1} u(x)\varphi(x)\big(\Delta H(x) + 2H(H^2-K)\big)\,dx
\end{aligned}$$

Assim, a primeira variação do funcional composto $\mathcal{W}_\gamma(u)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{W}_\gamma(u+t\varphi)\Big|_{t=0} &= -2\pi\left[\left(H(x) - \frac{\gamma}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)\frac{u(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_{-1}^{1} \\
&\quad -2\pi\int_{-1}^{1} u(x)\varphi(x)\big(\Delta H + 2H^3 - 2HK\big)\,dx,
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^2([-1,1]) \cap H_0^1([-1,1])$. O problema de valor de bordo correspondente é dado por (3.11). ■

3.4 Teorema Principal

Com base nos resultados apresentados, estamos agora em posição de demonstrar o nosso teorema principal. Utilizando as propriedades de monotonicidade e continuidade da função $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$, juntamente com os lemas e corolários discutidos, garantimos a consistência do comportamento da função em relação aos parâmetros α, β e γ.

Esses elementos fornecem as ferramentas necessárias para concluir a prova, consolidando a relação entre as condições de bordo e o comportamento da energia $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$, conforme estabelecido na formulação do teorema.

Teorema 12. [**Existência e regularidade**] *Para cada* $\alpha > 0$ *e* $\gamma \in [0,1]$*, existe uma função positiva e simétrica* $u \in C^\infty([-1,1],(0,\infty))$*, ou seja,* $u(x) > 0$ *e* $u(x) = u(-x)$*,* *tal que a superfície de revolução correspondente* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *resolve*

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{H} + 2\mathsf{H}(\mathsf{H}^2 - \mathsf{K}) = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ u(\pm 1) = \alpha \quad \text{e} \quad \mathsf{H}(\pm 1) = \dfrac{\gamma}{\alpha\sqrt{1 + u'(\pm 1)^2}}. \end{cases} \tag{3.41}$$

Demonstração. Para facilitar a compreensão e organização, a prova será dividida em dois casos.

No primeiro caso, suponha que $\alpha \leqslant \alpha^*$. Então, pelo Corolário 6, a função $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ é monotônico. Esse comportamento permite restringir a busca pelo mínimo de $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ ao intervalo $\beta \in [\beta^-, \beta^+]$, onde

$$\beta^- := \min\{-\alpha, \beta_2(\alpha)\} \quad \text{e} \quad \beta^+ := \alpha^{-1}.$$

Com essa restrição, temos que

$$T_{\gamma,\alpha} := \inf_{\beta \in \mathbb{R}} T_{\gamma,(\alpha,\beta)} = \inf_{\beta^- \leqslant \beta \leqslant \beta^+} T_{\gamma,(\alpha,\beta)}.$$

Além disso, pela continuidade da energia em relação a β (Corolário 3), ganhamos pelo Teorema do Valor Intermediário, a existência de algum $\beta^* \in [\beta^-, \beta^+]$ tal que

$$T_{\gamma,\alpha} = T_{\gamma,(\alpha,\beta^*)}.$$

Assim, pelo Corolário 2, garantimos que existe uma função $u \in \mathsf{N}_{\alpha,\beta^*} \cap C^\infty([-1,1])$ tal que $\mathcal{W}_\gamma(u) = T_{\gamma,(\alpha,\beta^*)}$. Como a energia $T_{\gamma,\alpha}$ é o menor valor global possível de $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ sobre todos os valores de $\beta \in \mathbb{R}$, a função u também minimiza $\mathcal{W}_\gamma$ na classe $\bigcup_{\beta\in\mathbb{R}} \mathsf{N}_{\alpha,\beta}$. Nesse ponto, é essencial observarmos que, como a função u minimiza $\mathcal{W}_\gamma$, ela resolve a equação de Willmore (2.3). Além disso, a minimização impõe condições de bordo naturais (ver Lema 10), que resultam exatamente a hipótese do Teorema 12. Dessa forma, u resolve o problema de valor de bordo (3.41).

Para o segundo caso, suponha que $\alpha > \alpha^*$. Então, pelo Corolário 7, observa-se que a função $\beta \mapsto T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ apresenta um comportamento monotônico também. Esse comportamento, permite buscar o mínimo global de $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ para os valores de $\beta \in [\beta^-, \beta^+]$, onde são definidos

$$\beta^- := \beta_1(\alpha) > -\alpha \quad \text{e} \quad \beta^+ := \alpha^{-1}.$$

Assim, pode-se expressar o mínimo global como

$$T_{\gamma,\alpha} := \inf_{-\alpha < \beta < +\infty} T_{\gamma,(\alpha,\beta)} = \inf_{\beta^- \leqslant \beta \leqslant \beta^+} T_{\gamma,(\alpha,\beta)}.$$

Pelo Corolário 3 vimos que $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ é contínua em β. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, garantimos a existência de $\beta^* \in [\beta^-, \beta^+]$ tal que

$$T_{\gamma,\alpha} = T_{\gamma,(\alpha,\beta^*)}.$$

Note que pelo Corolário 2 garantimos a existência de uma função $u \in N_{\alpha,\beta^*} \cap C^\infty([-1,1])$ tal que $\mathcal{W}_\gamma(u) = T_{\gamma,(\alpha,\beta^*)}$. Como $T_{\gamma,\alpha}$ é o menor valor possível da energia $T_{\gamma,(\alpha,\beta)}$ ao variar $\beta \in (-\alpha, +\infty)$, ganhamos que u também minimiza a energia $\mathcal{W}_\gamma$ sobre a união das classes $\bigcup_{-\alpha<\beta<+\infty} N_{\alpha,\beta}$. Assim, u minimiza a energia $\mathcal{W}_\gamma$ sob as condições de bordo, implicando ser solução de (3.41) como no caso anterior. Por fim, é crucial ressaltar que $\beta^* > -\alpha$. ■

Observação 17. *No caso particular em que* $\alpha \leqslant \alpha^*$ *e* $\gamma = 0$*, a propriedade de monotonicidade da energia em* β *(Corolário* 4*) implica que a solução construída do problema* (3.41) *satisfaz* $u'(-1) = -\alpha$*. É possível verificar isso para os valores de* α *para os quais uma solução explícita de* (3.41) *é conhecida. Para* $\alpha = 1$*, essa solução é um pedaço do toro de Clifford, ou seja, a superfície de revolução correspondente a* $f(x) := 2 - \sqrt{2 - x^2}$*. Observa-se que* $f(-1) = 1$ *e* $f'(-1) = -1$*. Outra solução explícita é a catenoide* $x \mapsto g(x) := \frac{\cosh(b^* x)}{b^*}$*, com* b^* *definido em* (3.6)*. Essa função tem o valor de bordo* $g(-1) = \alpha^*$*, com* α^* *definido em* (3.5)*, e* $g'(-1) = -\sinh(b^*) = -\alpha^*$ *pela definição de* b^* *e* α^**.*

Para fornecer uma interpretação geométrica desse problema de valor de bordo, observamos o seguinte Lema.

Lema 11. *Seja* $x \in (-1,1)$ *fixo e considere a curva* $\varphi \mapsto X(x,\varphi)$ *em* Σ*. Então, tem-se que*

$$\kappa_n(x) = \frac{1}{u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}}$$

para sua curvatura normal, em relação ao vetor normal unitário da superfície

$$N(x,\varphi) = (u'(x), -\cos(\varphi), -\sin(\varphi))\,\frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}$$

Demonstração. Seja Σ uma superfície de revolução gerada pela rotação de uma curva $(x, u(x))$, com $u(x) > 0$ para $x \in (-1,1)$, em torno do eixo x. Fixando x, ao rotacionar um ponto $(x, u(x))$ ao redor do eixo x, obtém-se uma curva circular que descreve um círculo de raio $u(x)$ no plano perpendicular ao eixo de rotação. Para parametrizar essa curva circular em função do comprimento de arco s, considera-se que o ângulo polar θ varia com s segundo a relação $\theta = \frac{s}{u(x)}$. Portanto, ao variar $s \in [0, 2\pi u(x)]$, o ponto completa uma rotação de 2π ao redor do eixo x. Assim, a parametrização da curva circular é dada por

$$X(s) = \left(x, u(x)\cos\left(\frac{s}{u(x)}\right), u(x)\sin\left(\frac{s}{u(x)}\right)\right),$$

onde s é o comprimento de arco ao longo do círculo gerado pela rotação. Para calcular a curvatura normal $\kappa_n(x)$ dessa curva circular, considera-se $X'(s)$, que fornece a direção tangente ao longo do círculo

$$X'(s) = \left(0, -\sin\left(\frac{s}{u(x)}\right), \cos\left(\frac{s}{u(x)}\right)\right).$$

Já $X''(s)$ fornece a aceleração ao longo da curva, apontando na direção radial

$$X''(s) = \left(0, -\frac{1}{u(x)}\cos\left(\frac{s}{u(x)}\right), -\frac{1}{u(x)}\sin\left(\frac{s}{u(x)}\right)\right).$$

A curvatura normal $\kappa_n(x)$ é então calculada como a projeção de $X''(s)$ na direção do vetor normal da superfície $N(x, \varphi)$. Onde essa projeção é obtida pelo produto interno entre $X''(s)$ e $N(x, \frac{s}{u(x)})$, resultando em

$$\kappa_n(x) = \left\langle X''(s), N\left(x, \frac{s}{u(x)}\right)\right\rangle = \frac{1}{u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}}.$$

Esse resultado expressa a curvatura normal em termos de $u(x)$ e $u'(x)$, mostrando como a rotação e a variação da função $u(x)$ influenciam a curvatura da superfície gerada pela revolução. $\blacksquare$

Com base neste lema, os dados de bordo naturais podem ser expressos em termos da quantidade geométrica κ_n no bordo da superfície. Podemos reescrever (3.41) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \Delta H + 2H^3 - 2HK = 0 \text{ em } \Sigma, \\ u(\pm 1) = \alpha, \quad H(\pm 1) = \gamma \kappa_n(\pm 1). \end{cases} \tag{3.42}$$

Capítulo 4

Equação de Willmore Unidimensional

No capítulo anterior 3, exploramos superfícies de revolução. Neste capítulo, focaremos no caso de curvas, conforme abordado em [8], onde o funcional de Willmore é analisado para curvas representadas como gráficos de funções. Para simplificar, assumiremos que essas curvas são representadas como gráficos sobre um domínio fixo, escolhido como o intervalo unitário $[0,1]$. Dessa forma, consideramos que a curva seja o gráfico de uma função $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, isto é,

$$\operatorname{graf}(u) = \{(x, u(x)) : x \in [0,1]\}.$$

Nessa configuração, o funcional de Willmore, que mede a curvatura total da curva, é formulado em termos da função u e de suas derivadas até a segunda ordem. No caso unidimensional, o funcional de Willmore é dado por:

$$\mathcal{W}(u) := \int_{\operatorname{graf}(u)} \kappa(x)^2 \, ds = \int_0^1 \kappa(x)^2 \sqrt{1 + u'(x)^2} \, dx, \tag{4.1}$$

onde $\kappa(x)$ é a curvatura do gráfico de u no ponto $(x, u(x))$ que é dada por

$$\kappa(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}\right) = \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}}. \tag{4.2}$$

Veremos no Lema 12 que no caso unidimensional a equação de Willmore (2.3) assume a forma:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{k'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}\right) + \frac{1}{2}\kappa(x)^3 = 0, \quad x \in (0,1). \tag{4.3}$$

4.0.1 Condições de Bordos de Navier e Dirichlet

Concentraremos nossa análise em dois conjuntos de condições de bordo diferentes. Primeiramente, para valores dados $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$, consideraremos *condições de bordo de Navier*, expressas por

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \kappa(0) = -\alpha_0, \quad \kappa(1) = -\alpha_1, \tag{4.4}$$

onde restringimos o estudo ao caso simétricas, isto é, $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha$. Note que os pontos críticos de (4.1) em $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ satisfazem $\kappa(0) = \kappa(1) = 0$ como condições de bordo naturais. Para estender essa propriedade ao caso $\alpha \neq 0$, substituímos $\mathcal{W}(u)$ pelo funcional

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{W}}_\alpha(u) &= \int_{graf(u)} \left(\kappa(x)^2 + 2\alpha\kappa(x)\right) ds(x) \\ &= \int_0^1 \left(\kappa(x)^2 + 2\alpha\kappa(x)\right) \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Em seguida, consideremos um segundo conjunto de condições de bordo, especificamente, as *condições de bordo de Dirichlet*

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = \beta_0, \quad u'(1) = -\beta_1, \tag{4.6}$$

onde β_0 e β_1 são parâmetros reais. Aqui, também focamos no caso simétrico, com $\beta_0 = -\beta_1 = \beta$. Com base na equação de Willmore (4.3) e nas condições de bordo de Navier (4.4) e Dirichlet (4.6), nosso objetivo agora é provar os resultados demonstrado por [8] em 2007, apresentados nos Teoremas 13 e 14. No entanto, para realizar essas demonstrações, serão necessários alguns resultados auxiliares.

4.0.2 Equação de Euler-Lagrange

O primeiro resultado auxiliar consistirá nas equações de Euler-Lagrange para $\mathcal{W}$ e $\tilde{\mathcal{W}}_\alpha$; em outras palavras, calcularemos a primeira variação do funcional de Willmore.

Lema 12. *Seja* $u \in C^4([0,1])$ *e* κ *denotando a curvatura correspondente. Então, para todo* $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$*, temos*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(u + t\varphi)\big|_{t=0} = \int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) + \kappa^3(x) \right) \varphi(x)\, dx.$$

Demonstração. Seja $u \in C^4(0,1)$ uma função dada, e considere uma perturbação da mesma dada por $u + t\varphi$, onde $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro e $\varphi \in C_0^4(0,1)$ uma função com suporte compacto em $(0,1)$. Com isso, por (4.1) e (4.2), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(u+t\varphi) &= \int_0^1 \left(\frac{(u''(x)+t\varphi''(x))^2}{(1+(u'(x)+t\varphi'(x))^2)^3}\right)\sqrt{1+(u'(x)+t\varphi'(x))^2}\,dx\\ &= \int_0^1 \left(\frac{(u''(x)+t\varphi''(x))^2}{(1+(u'(x)+t\varphi'(x))^2)^{5/2}}\right)dx.\end{aligned}$$

Calculamos a derivada de $\mathcal{W}(u+t\varphi)$ em relação ao parâmetro t e a avaliamos no ponto $t=0$. Em outras palavras, consideramos:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(u+t\varphi)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \frac{(u''(x)+t\varphi''(x))^2}{(1+(u'(x)+t\varphi'(x))^2)^{5/2}}\,dx\right)\Bigg|_{t=0}.$$

Aplicando a *Regra de Leibniz* para derivar sob o sinal de integral, expandindo a derivada e avaliando no ponto $t=0$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{W}(u+t\varphi)\Big|_{t=0} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(u''(x)+t\varphi''(x))^2}{(1+(u'(x)+t\varphi'(x))^2)^{5/2}}\right)\Bigg|_{t=0} dx\\ &= 2\int_0^1 \frac{u''(x)\varphi''(x)}{(1+u'(x)^2)^{5/2}}\,dx - 5\int_0^1 \frac{u''(x)^2u'(x)\varphi'(x)}{(1+u'(x)^2)^{7/2}}\,dx.\end{aligned}$$

Por (4.2), simplificamos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(u+t\varphi)\Big|_{t=0} = 2\int_0^1 \kappa(x)\left(\frac{\varphi''(x)}{1+u'(x)^2}\right)dx - 5\int_0^1 \kappa(x)^2\left(\frac{u'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx.$$

Agora calculemos cada integral separadamente. Na primeira integral, usaremos integração por partes, de modo que

$$\begin{aligned}&2\int_0^1 \kappa(x)\left(\frac{\varphi''(x)}{1+u'(x)^2}\right)dx\\ &= 2\left[\frac{\kappa(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1\left(\frac{\kappa'(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right)dx + 4\int_0^1 \kappa(x)\varphi'(x)\left(\frac{u'(x)u''(x)}{(1+u'(x)^2)^2}\right)dx\\ &= 2\left[\frac{\kappa(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \varphi(x)\left(\frac{\kappa''(x)}{1+u'(x)^2} - 2\left(\frac{u'(x)u''(x)\kappa'(x)}{(1+u'(x)^2)^2}\right)\right)dx\\ &\quad +4\int_0^1 \kappa(x)\varphi'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}\right)\right)dx - 2\left[\varphi(x)\frac{\kappa'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1.\end{aligned}$$

Simplificando as expressões por (4.2) e considerando que os termos de bordo se anulam, isto é, $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. concluímos o seguinte

$$\begin{aligned}&2\int_0^1 \kappa(x)\left(\frac{\varphi''(x)}{1+u'(x)^2}\right)dx\\ &= 2\left[\frac{\kappa(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(\frac{\kappa''(x)\sqrt{1+u'(x)^2}}{1+u'(x)^2}\right)dx\\ &\quad -4\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(\frac{\kappa'(x)u'(x)u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}\right)dx + 4\int_0^1 \kappa(x)^2\varphi'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left[\frac{\kappa(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(\frac{\kappa''(x)\sqrt{1+u'(x)^2}}{1+u'(x)^2}\right)dx \\
&-2\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(\frac{u'(x)u''(x)\kappa'(x)(1+u'(x)^2)}{1+u'(x)^2}\right)dx \\
&-2\int_0^1 \varphi(x)\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(\frac{u'(x)u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}\right)\right)dx + 4\int_0^1 \kappa(x)^2\varphi'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \\
&= 2\left[\frac{\kappa(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \varphi(x)\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(\frac{u'(x)u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}\right)\right)dx \\
&+2\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(\frac{\kappa''(x)\sqrt{1+u'(x)^2}-u'(x)\kappa'(x)u''(x)(1+u'(x)^2)}{1+u'(x)^2}\right)dx \\
&+4\int_0^1 \kappa(x)^2\varphi'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \\
&= 2\left[\frac{\kappa(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \\
&-2\int_0^1 \varphi(x)\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(\frac{u'(x)u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}\right)\right)dx \\
&+4\int_0^1 \kappa(x)^2\varphi'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Portanto, pela equação (4.2) para simplificar, obtemos o valor da primeira integral

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^1 \kappa(x)\left(\frac{\varphi''(x)}{1+u'(x)^2}\right)dx \\
&= 2\left[\frac{\kappa(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \\
&\quad -2\int_0^1 \varphi(x)\kappa(x)\kappa'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx + 4\int_0^1 \kappa(x)^2\varphi'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Na segunda integral, também utilizamos o método de integração por partes. Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
-5\int_0^1 \kappa(x)^2\left(\frac{u'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx &= -5\left[\varphi(x)\frac{\kappa(x)u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right]_0^1 \\
&+5\int_0^1 \varphi(x)\left(\kappa(x)^3 + 2\kappa(x)\kappa'(x)\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Como $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, podemos concluir que:

$$
-5\int_0^1 \kappa(x)^2\left(\frac{u'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx = 5\int_0^1 \varphi(x)\kappa(x)^3\,dx + 10\int_0^1 \kappa(x)\kappa'(x)\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\,dx.
$$

Somando os valores das integrais calculadas separadamente, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{W}(u+t\varphi)\Big|_{t=0} \\
&= 2\left[\frac{\kappa(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \\
&\quad -2\int_0^1 \varphi(x)\kappa(x)\kappa'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \quad +5\int_0^1 \varphi(x)\kappa(x)^3\,dx \\
&\quad +4\int_0^1 \kappa(x)^2\varphi'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx + 10\int_0^1 \left(\frac{\varphi(x)\kappa(x)\kappa'(x)u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx.
\end{aligned}
$$

A fim de simplificar, utilizaremos o método de integração por partes na seguinte integral:

$$
\begin{aligned}
4\int_0^1 \kappa(x)^2\varphi'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \ &= 4\left[\varphi(x)u'(x)\kappa(x)^2\right]_0^1 \\
&\quad -8\int_0^1 \kappa(x)\kappa'(x)\left(\frac{\varphi(x)u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \\
&\quad -4\int_0^1 \left(\frac{\varphi(x)u''(x)\kappa(x)^2}{(1+u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Com isso, temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{W}(u+t\varphi)\Big|_{t=0} \\
&= 2\left[\frac{\kappa(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \\
&\quad -2\int_0^1 \varphi(x)\kappa(x)\kappa'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \quad +5\int_0^1 \varphi(x)\kappa(x)^3\,dx \\
&\quad +4\left[\varphi(x)u'(x)\kappa(x)^2\right]_0^1 - 8\int_0^1 \varphi(x)\kappa(x)\kappa'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \\
&\quad -4\int_0^1 \left(\frac{\varphi(x)u''(x)\kappa(x)^2}{(1+u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dx + 10\int_0^1 \varphi(x)\kappa(x)\kappa'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Finalmente, após simplificações, obtemos o desejado

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{W}(u+t\varphi)\Big|_{t=0} \ &= 2\left[\frac{\kappa(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \\
&\quad + \int_0^1 \kappa(x)^3\varphi(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right) + \kappa(x)^3\right)\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

■

Corolário 8. *Seja* $u \in C^4([0,1]) \cap H_0^1(0,1)$ *e* κ *a curvatura do gráfico de* u. *Suponha que* u *seja um ponto crítico do funcional de Willmore modificado* $\tilde{W}_\alpha$ *para um valor fixo de* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Se para todo* $\varphi \in C^\infty([0,1])$, *com* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, *tem-se que:*

$$\frac{d}{dt}\tilde{W}_\alpha(u + t\varphi)\Big|_{t=0} = 0. \tag{4.7}$$

Então, u *é uma solução da equação de Willmore, sujeita às condições de bordo de Navier:*

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \kappa(0) = \kappa(1) = -\alpha.$$

Demonstração. Com base nas equações (4.2) e (4.5), ganhamos o funcional de Willmore modificado

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_\alpha(u) &= \int_0^1 \left(\left(\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right) + 2\alpha \left(\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right) \right) \sqrt{1+u'(x)^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right) \sqrt{1+u'(x)}\, dx \\
&\quad +2\alpha \int_0^1 \left(\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right) \sqrt{1+u'(x)^2}\, dx.
\end{aligned}$$

Considere uma perturbação de u da forma $u+t\varphi$, onde $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$. Calculamos agora a derivada de $\tilde{W}_\alpha(u + t\varphi)$ em $t = 0$. Pela Regra de Leibniz, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{W}_\alpha(u + t\varphi)|_{t=0} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(u''(x) + t\varphi''(x))^2}{(1 + (u'(x) + t\varphi'(x))^2)^{5/2}} \right) \Bigg|_{t=0} dx \\
&\quad +2\alpha \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(u''(x) + t\varphi''(x))^2}{(1 + (u'(x) + t\varphi'(x))^2)^{5/2}} \right) \Bigg|_{t=0} dx.
\end{aligned}$$

Veja que a primeira integral foi calculada no Lema 12. Calcularemos agora a segunda integral

$$\begin{aligned}
2\alpha \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(u''(x) + t\varphi''(x))^2}{(1 + (u'(x) + t\varphi'(x))^2)^{5/2}} \right) \Bigg|_{t=0} dx &= 2\alpha \int_0^1 \frac{\varphi''(x)}{(1+u'(x)^2)}\, dx \\
&\quad -4\alpha \int_0^1 \frac{u'(x)u''(x)\varphi'(x)}{(1+u'(x)^2)^2}\, dx.
\end{aligned}$$

A primeira integral é resolvida por integração por partes, resultando em

$$2\alpha \int_0^1 \frac{\varphi''(x)}{1+u'(x)^2}\, dx = 2\alpha \left[\frac{\varphi'(x)}{1+u'(x)^2} \right]_0^1 + 4\alpha \int_0^1 \frac{u'(x)u''(x)\varphi'(x)}{(1+u'(x)^2)^2}\, dx.$$

Portanto, obtemos

$$2\alpha \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u''(x) + t\varphi''(x)}{1 + (u'(x) + t\varphi'(x))^2} \right) \Bigg|_{t=0} dx = 2\alpha \left[\frac{\varphi'(x)}{1+u'(x)^2} \right]_0^1.$$

Finalmente, somando os termos, ganhamos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{W}_\alpha(u+t\varphi)|_{t=0} &= 2\left[\frac{\kappa(x)\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \\
&+\int_0^1 \kappa(x)^3\varphi(x)\,dx + 2\alpha\left[\frac{\varphi'(x)}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 \\
&= 2\left[\frac{\varphi'(x)(\alpha+\kappa(x))}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)dx \\
&+\int_0^1 \kappa(x)^3\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (4.7) e tomando uma função arbitrária $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$, vemos que u resolve a equação de Euler–Lagrange (4.3) e que, para toda função $\varphi \in C^\infty[0,1]$ com $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, temos

$$\left[\frac{\varphi'(x)(\alpha+\kappa(x))}{1+u'(x)^2}\right]_0^1 = 0.$$

Note que para satisfazer a igualdade, deve-se assumir

$$k(0) = k(1) = -\alpha.$$

Portanto, as condições de bordo de Navier são satisfeitas. ■

4.0.3 A Equação Diferencial para uma Função Auxiliar v

Assumimos que $u \in C^4([0,1])$ resolve a equação de Willmore (4.3), e introduzimos a função auxiliar fundamental dada por

$$v(x) := \kappa(x)\left(1+u'(x)^2\right)^{1/4}, \tag{4.8}$$

onde $\kappa(x)$ é definido em (4.3). A motivação para esta definição reside na simplificação estrutural da equação original de quarta ordem. Como observado por ([11], pág.: 233-234), $v(x)$ satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem sem termo de ordem zero, isto é, sem dependência direta de $v(x)$. Com isso, provaremos que a função v satisfaz a equação linear homogênea de segunda ordem.

Lema 13. *Para* $x \in [0,1]$*, temos*

$$-\frac{d}{dx}\left((1+u'(x)^2)^{3/4}v'(x)\right) + \frac{\kappa(x)u'(x)}{(1+u'(x)^2)^{1/4}}v'(x) = 0.$$

Demonstração. Com base na equação (4.8), definimos a função auxiliar

$$v(x) = \kappa(x)(1 + u'(x)^2)^{1/4}.$$

Derivando esta expressão, obtemos

$$\begin{aligned} v'(x) &= \kappa'(x)(1 + u'(x)^2)^{1/4} + \frac{1}{2}\kappa(x)u'(x)u''(x)(1 + u'(x))^{-3/4} \\ &= \kappa'(x)(1 + u'(x)^2)^{1/4} + \frac{1}{2}\kappa(x)u'(x)\left(\frac{u''(x)}{1 + u'(x))^{3/4}}\right). \end{aligned}$$

Pela equação (4.2), seque que

$$v'(x) = \kappa'(x)(1 + u'(x)^2)^{1/4} + \frac{1}{2}\kappa(x)^2u'(x)(1 + u'(x)^2)^{3/4}. \tag{4.9}$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $(1 + u'(x)^2)^{-3/4}$, obtemos

$$\begin{aligned} v'(x)(1 + u'(x)^2)^{-3/4} &= \kappa'(x)(1 + u'(x)^2)^{1/4}(1 + u'(x)^2)^{-3/4} \\ &\quad + \frac{1}{2}\kappa(x)^2u'(x)(1 + u'(x)^2)^{3/4}(1 + u'(x)^2)^{-3/4} \\ &= \frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} + \frac{1}{2}\kappa(x)^2u'(x). \end{aligned}$$

Derivando agora a equação em relação x, ganhamos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(v'(x)(1 + u'(x)^2)^{-3/4}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)^2u'(x)\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}\right) + \frac{1}{2}\kappa(x)^2u''(x) + \kappa(x)\kappa'(x)u'(x). \end{aligned}$$

Pelas equações (4.2) e (4.3), podemos reescrevemos a derivada como

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(v'(x)(1 + u'(x)^2)^{-3/4}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\kappa(x)^3\sqrt{1 + u'(x)^2} + \frac{1}{2}\kappa(x)^3(1 + u'(x)^2)^{3/2} + \kappa(x)\kappa'(x)u'(x) \\ &= \frac{1}{2}\kappa(x)^3\sqrt{1 + u'(x)^2}\left((1 + u'(x)^2) - 1\right) + \kappa(x)\kappa'(x)u'(x) \\ &= \frac{1}{2}\kappa(x)^3u'(x)^2\sqrt{1 + u'(x)^2} + \kappa(x)\kappa'(x)u'(x) \\ &= \frac{\kappa(x)u'(x)}{(1 + u'(x)^2)^{1/4}}\left(\frac{1}{2}\kappa(x)^2u'(x)\left(1 + u'(x)^2\right)^{3/4} + \kappa'(x)\left(1 + u'(x)^2\right)^{1/4}\right). \end{aligned}$$

Assim, da equação (4.9), segue o resultado desejado

$$\frac{d}{dx}\left(v'(x)(1 + u'(x)^2)^{-3/4}\right) = \frac{\kappa(x)u'(x)}{(1 + u'(x)^2)^{1/4}}v'(x).$$

■

Observação 18. *Pelo Lema anterior, sabemos que* ν *satisfaz um princípio do máximo. Em particular, podemos concluir para qualquer solução* u *da equação de Willmore* (4.3)*: Se* $\kappa(0), \kappa(1) < 0$*, então* $\kappa < 0$ *em* $[0,1]$*. Se* $\kappa(0) = \kappa(1) = 0$*, então* $\kappa = 0$ *em* $[0,1]$*, e a solução* u *é um segmento de linha reta. Se adicionalmente assumirmos que* $u(0) = u(1) = 0$*, então* $u(x) \equiv 0$ *em* $[0,1]$*. Isso significa que temos unicidade para o problema de bordo homogêneo de Navier* (4.20) *na classe de gráficos suaves, sem assumir a priori qualquer condição de pequenez na solução.*

Com isso, somos capazes de provar o seguinte Lema.

Lema 14. *Seja* $u \in C^4([0,1])$ *uma função simétrica em torno de* $x = 1/2$*, e defina*

$$c_0 := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\tau^2)^{5/4}} \, d\tau = B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \sqrt{\pi}\frac{\Sigma(3/4)}{\Sigma(5/4)} = 2.396280469\ldots$$

Então, u *resolve a equação de Willmore* (4.3) *se, e somente se, existe uma constante* $c \in (-c_0, c_0)$ *tal que*

$$\forall x \in [0,1] : \kappa(x) \left(1 + u'(x)^2\right)^{1/4} = -c. \tag{4.10}$$

Demonstração. Seja a função $\nu(x)$ dada em (4.8). Para provar a necessidade da condição (4.10), observamos primeiro que $\nu(0) = \nu(1)$ pela nossa suposição de simetria em u. Como ν resolve uma equação diferencial de segunda ordem (linearizada) sem o termo de ordem zero, com isso concluímos que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in [0,1] : \nu(x) = -c.$$

A afirmação adicional sobre o intervalo admissível $c \in (-c_0, c_0)$ segue do Lema 15 abaixo. Para provar a suficiência, começamos com (4.10).

$$\kappa(x) = -\frac{c}{(1+u'(x)^2)^{1/4}}.$$

Derivando em relação x, obtemos

$$\begin{aligned} \kappa'(x) &= \frac{\frac{1}{2}(1+u'(x)^2)^{-3/4}u'(x)u''(x)c}{(1+u'(x)^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}u'(x)u''(x)c}{(1+u'(x)^2)^{5/4}} \end{aligned}$$

Pela equação (4.2), simplificamos

$$\kappa'(x) = \frac{c}{2}\kappa(x)u'(x)\left(1+u'(x)^2\right)^{1/4}.$$

Como $\nu(x) = -c$, então substituindo, teremos

$$\kappa'(x) = -\frac{\nu(x)}{2}\kappa(x)u'(x)(1+u'(x))^{1/4}.$$

No entanto, pela equação (4.8), sabemos que

$$\begin{aligned}\kappa'(x) &= -\frac{1}{2}\kappa(x)(1+u'(x)^2)^{1/4}u'(x)\kappa(x)(1+u'(x)^2)^{1/4}\\ &= -\frac{1}{2}\kappa(x)^2u'(x)\sqrt{1+u'(x)^2}.\end{aligned}$$

Como encontramos o valor de $\kappa'(x)$, podemos agora determinar o valor da expressão abaixo.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(-\frac{1}{2}\kappa(x)^2u'(x)\right)'\\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(2\kappa(x)\kappa'(x)u'(x)+u''(x)\kappa(x)^2\right)\\ &= -u'(x)\kappa(x)\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\\ &\quad -\frac{1}{2}\kappa(x)^2\frac{u''(x)}{\sqrt{(1+u'(x)^2)^{3/2}}}\\ &= -u'(x)\kappa(x)\left(-\frac{1}{2}\kappa(x)^2u'(x)\sqrt{1+u'(x)^2}\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\kappa(x)^2\frac{u''(x)(1+u'(x)^2)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Substituindo a equação (4.2), obtemos a seguinte simplicação

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\left(\frac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)' &= \frac{1}{2}u'(x)^2\kappa(x)^3-\frac{1}{2}\kappa(x)^3(1+u'(x)^2)\\ &= -\frac{1}{2}\kappa(x)^3\end{aligned}$$

Dessa forma, a equação de Willmore (4.3) é satisfeita. ■

A partir desses resultados, podemos derivar uma representação para a própria solução u, a qual permite deduzir, de forma direta, diversas propriedades qualitativas.

4.0.4 Soluções Simétricas da Equação de Willmore

No que se segue, a função

$$G : \mathbb{R} \to \left(-\frac{c_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right), \quad G(s) := \int_0^s \frac{1}{(1+\tau^2)^{5/4}}\, d\tau \tag{4.11}$$

desempenha um papel crucial. É fácil ver que G é estritamente crescente, bijetora com $G(s) > 0$. Assim, também a função inversa

$$G^{-1} : \left(-\frac{c_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right) \to \mathbb{R} \tag{4.12}$$

é estritamente crescente, bijetora e suave com $G^{-1}(0) = 0$.

Lema 15. *Seja* $u \in C^4([0,1])$ *uma função simétrica em torno de* $x = 1/2$*. Então,* u *resolve a equação de Willmore* (4.3) *se e somente se existe uma constante* $c \in (-c_0, c_0)$ *tal que*

$$\forall x \in [0,1] : \quad u'(x) = G^{-1}\left(\frac{c}{2} - cx\right). \tag{4.13}$$

Para a curvatura, tem-se que

$$\kappa(x) = -\frac{c}{\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2} - cx\right)^2}}. \tag{4.14}$$

Além disso, assumindo que $u(0) = u(1) = 0$*, tem-se que*

$$u(x) = \frac{2}{c\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2} - cx\right)^2}} - \frac{2}{c\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2}}, \quad (c \neq 0). \tag{4.15}$$

Demonstração. Primeiro mostramos a necessidade da fórmula de representação dada por (4.13). Seja $u \in C^4([0,1])$ uma solução simétrica de (4.3). Pelo Lema 14, sabemos que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall x \in [0,1] : \quad \kappa(x)\left(1 + u'(x)^2\right)^{1/4} = -c.$$

Assim, pela equação (4.2), ganhamos

$$-c = \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{5/4}}. \tag{4.16}$$

Integrando a igualdade (4.16) com os limites de integração de $1/2$ a x, obtemos

$$-c\left(x - \frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^{x} \frac{u''(\xi)}{(1 + u'(\xi)^2)^{5/4}}\, d\xi.$$

Em seguida, substituindo $\tau = u'(\xi)$, temos

$$-c\left(x - \frac{1}{2}\right) = \int_{0}^{u'(x)} \frac{1}{(1 + \tau^2)^{5/4}}\, d\tau.$$

Por meio da função (4.11), concluímos que

$$-c\left(x - \frac{1}{2}\right) = G(u'(x)).$$

Logo, ao compormos a igualdade acima com G^{-1}, obtemos a equação (4.13). Portanto, a necessidade está demonstrada. Além disso, é evidente que $(-\frac{|c|}{2}, \frac{|c|}{2}) \subset G(\mathbb{R})$, o que implica

$$|c| < \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{(1+\tau^2)^{5/4}} = c_0.$$

Por outro lado, a suficiência de (4.13) é deduzida a partir da decomposição de sua inversa, isto é,

$$G(u'(x)) = \frac{c}{2} - cx.$$

Derivando ambos os lados, obtemos

$$G'(u'(x))u''(x) = -c.$$

Note que ao derivamos a função (4.11) e substituir na igualdade acima, ganhamos

$$-c \;\; = \frac{u''(x)}{(1+u''(x)^2)^{5/4}}.$$

Portanto, utilizando a equação (4.2) e o Lema 14, concluímos que u resolve a equação de Willmore (4.3). Agora, para obtemos a igualdade (4.14), basta derivamos (4.13). Para isso, aplicamos a derivada inversa

$$u''(x) = \frac{-c}{G'\left(G^{-1}\left(\frac{c}{2} - cx\right)\right)}.$$

Note que ao derivamos a função (4.11) e utilizamos a equação (4.2) para simplificar a expressão, obtemos

$$\begin{aligned} \kappa(x) \;\; &= \frac{-c\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}-cx\right)^2\right)^{5/4}}{\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}-cx\right)^2\right)^{3/2}} \\ &= \frac{-c}{\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}-cx\right)^2\right)^{1/4}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, chegamos ao resultado desejado. Por fim, para deduzimos (4.15), basta integrarmos a igualdade (4.13) e realizarmos algumas substituições, isto é,

$$u(x) = \int_0^x G^{-1}\left(\frac{c}{2} - cx\right)\, dx$$

Ao substituirmos $\sigma = c/2 - cx$, obtemos

$$u(x) = \frac{1}{c}\int_{c/2}^{c/2-cx} G^{-1}(\sigma) d\sigma.$$

Em seguida, fazendo uma nova substituição, mas de $G^{-1}(\sigma) = t$, temos

$$u(x) = \frac{1}{c} \int_{G^{-1}(c/2-cx)}^{G^{-1}(c/2)} \frac{t}{(1+t^2)^{5/4}} \, dt.$$

Agora, ao definirmos $\delta = 1 + t^2$, ganhamos

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2c} \int_{G^{-1}(c/2-cx)}^{G^{-1}(c/2)} \frac{1}{\delta^{5/4}} \, d\delta \\ &= \frac{2}{c\delta^{1/4}} \Bigg|_{G^{-1}(c/2-cx)}^{G^{-1}(c/2)}. \end{aligned}$$

Finalmente, ao substituirmos $\delta = 1 + t^2$, chegamos ao resultado desejado.

$$u(x) = \frac{2}{c\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2} - cx\right)^2}} - \frac{2}{c\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2}}.$$

■

Corolário 9. *Seja* u *uma solução suave no intervalo* $[0, 1]$ *da equação de Willmore* (4.3)*, sendo simétrica em torno de* $x = 1/2$*. Para qualquer solução não constante, temos que a curvatura* κ *satisfaz*

$$\forall x \in (0, 1) : \quad |\kappa(x)| > |\kappa(0)|.$$

Além disso, a função $x \mapsto u'(x)$ *é estritamente crescente ou estritamente decrescente. A seguinte desigualdade para* u *é independente de* c *e válida para todas as soluções simétricas dos problemas de valor de bordo* (4.20) *e* (4.21)*, independentemente dos dados* α *ou* β*:*

$$\forall x \in [0, 1] : \quad |u(x)| < \frac{2}{c_0} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(3/4)^2} \approx 0.8346268420\ldots$$

Demonstração. Observe que apenas a última afirmação requer uma demonstração. Para prová-la, é suficiente mostrar que a desigualdade se mantém para $c \in (0, c_0)$. Note que, ao substituir $x = 1/2$ em (4.15), obtemos

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{c} - \frac{2}{c\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)}}.$$

Consequentemente, temos a seguinte desigualdade

$$0 \leqslant u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{c} - \frac{2}{c\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2}} < \frac{2}{c_0}.$$

Agora, ao realizamos a mudança de variável $c = 2G(d)$, isso é equivalente a mostrar que, para todo $d \in (0, \infty)$, a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\frac{1}{G(d)} - \frac{1}{G(d)\sqrt[4]{1 + G^{-1}(G(d))^2}} < \frac{2}{c_0}$$
$$\frac{1}{G(d)}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{1+d^2}}\right) < \frac{2}{c_0}$$
$$1 - \frac{1}{\sqrt[4]{1+d^2}} < \frac{2G(d)}{c_0}.$$

Portanto, definimos a função

$$H(d) := \frac{2}{c_0}G(d) + (1 + d^2)^{-1/4} - 1 > 0.$$

Sabemos que $H(0) = 0$, $\lim_{d\to\infty} H(d) = 0$ e que, ao derivarmos $H(d)$ ganhamos

$$\begin{aligned} H'(d) &= \frac{2G'(d)}{c_0} - \frac{\frac{1}{2}d(1+d^2)^{-3/4}}{\sqrt{1+d^2}} \\ &= \frac{2G'(d)}{c_0} - \frac{d}{2(1+d^2)^{5/4}}. \end{aligned}$$

Substituindo a derivada da função (4.11) na equação acima, temos

$$H'(d) = \left(\frac{2}{c_0} - \frac{d}{2}\right)\frac{1}{(1+d^2)^{5/4}}.$$

Isso mostra que $H(d)$ é inicialmente crescente e depois decrescente, de modo que para todo $d \in (0, \infty)$, temos $H(d) > 0$. ■

Além disso, a partir do Lema 15, obtemos que as soluções suaves e simétricas são monótona com respeito a $c \in (-c_0, c_0)$, e, portanto, com respeito a $\beta = u'(0) = G^{-1}(c/2) \in \mathbb{R}$.

Lema 16. *Para as soluções* $u = u_c$ *no Lema* 15*, temos que, para* $c \in (-c_0, c_0)$*,*

$$\forall x \in (0,1): \quad \frac{\partial}{\partial c}u_c(x) > 0.$$

Demonstração. Pela demonstração do Lema 15, obtemos a seguinte igualdade

$$u(x) = \int_0^x G^{-1}\left(\frac{c}{2} - cs\right)\, ds.$$

Derivando parcialmente em relação a c e utilizando a Regra de Leibniz, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c}u(x) &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial c}G^{-1}\left(\frac{c}{2} - cs\right) ds \\ &= \int_0^x \frac{1}{G'\left(G^{-1}\left(\frac{c}{2} - cs\right)\right)}\left(\frac{1}{2} - s\right)\, ds. \end{aligned}$$

Substituindo a derivada da função (4.11) na igualdade acima, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial c}u(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} - s\right)\left(1 + \left(G^{-1}\left(\frac{c}{2} - cs\right)\right)^2\right)^{5/4} ds.$$

Como o integrando é ímpar com respeito a $x = 1/2$, positivo inicialmente e negativo depois, concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial c}u(x) > 0.$$

■

4.0.5 Problemas de Valor de Bordo

O problema de valor de bordo de Navier

Obtemos todas as soluções suaves $u = u_c$ para (4.3) que são simétricas em torno de 1/2 e satisfazendo $u_c(0) = u_c(1) = 0$ por meio das fórmulas (4.13), (4.14) e (4.15). Essa família é parametrizada por $c \in (-c_0, c_0)$. Resta considerar a dependência de

$$\alpha = -\kappa_{c(0)} = \frac{c}{\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2}}$$

em c. Para esse propósito, é suficiente estudar a função

$$h : (-c_0, c_0) \to \mathbb{R}, \quad h(c) = \frac{c}{\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2}}. \tag{4.17}$$

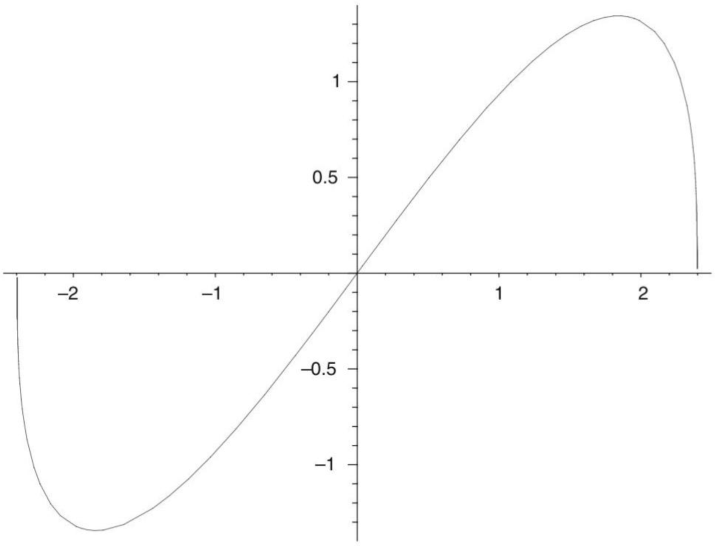
O intervalo de valores de h é precisamente o conjunto de α, para o qual o problema de valor de bordo de Navier (4.20) tem uma solução. O número de soluções c da equação $\alpha = h(c)$ é o número de soluções simétricas do problema de valor de bordo. O gráfico de h está mostrado na Figura (4.1).

Lema 17. *Temos* $h > 0$ *em* $(0, c_0)$, $h < 0$ *em* $(-c_0, 0)$, *e*

$$\lim_{c \nearrow c_0} h(c) = \lim_{c \searrow -c_0} h(c) = 0. \tag{4.18}$$

A função h *é ímpar e possui exatamente um máximo local em* $c_{\max} = 1.840428142\ldots$ *e um mínimo local em* $c_{\min} = -c_{\max}$. *O valor correspondente é* $\alpha_{\max} = h(c_{\max}) = 1.343799725\ldots$

Figura 4.1: Valores admissíveis do dado de bordo α plotados em função do parâmetro c.



Fonte: [8] - Deckelnick e Grunau (2007).

Demonstração. Primeiro analisaremos o limite de (4.17) quando $\lim_{c \nearrow c_0}$ e $\lim_{c \searrow -c_0^-}$, obtendo

$$\begin{aligned}\lim_{c \nearrow c_0} h(c) &= \frac{c_0}{\sqrt[4]{1 + \lim_{c \nearrow c_0} G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)}} \\ &= \frac{c_0}{\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c_0}{2}\right)}} \\ &= 0\end{aligned}$$

isso se deve ao fato de que pela definição, $G(\infty) = c_0/2$. De maneira análoga, temos $-\lim_{c \searrow -c_0^-} h(c) = 0$. Logo,

$$\lim_{c \nearrow c_0} h(c) = -\lim_{c \searrow -c_0} h(c) = 0.$$

Em seguida, ao derivarmos a função $h(c)$, obtemos

$$\begin{aligned}
h'(c) &= \frac{\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{1/4} - \frac{c}{4}\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{-3/4} G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{5/4}}{\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{1/2}} \\
&= \frac{\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{1/4} - \frac{c}{4} G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{1/2}} \\
&= \left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{-1/4} - \frac{c}{4} G^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, $h'(c)$ é dado por:

$$h'(c) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2}} - \frac{c}{4} G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right). \tag{4.19}$$

Agora, para a segunda derivada de $h(c)$, temos

$$\begin{aligned}
h''(c) &= -\frac{1}{4}\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{-5/4} 2G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)\left((G^{-1})'\left(\frac{c}{2}\right)\right) - \frac{1}{4} G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right) \\
&\quad -\frac{c}{4}\left((G^{-1})'\left(\frac{c}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Usando a derivada da função G^{-1} e as propriedades da função G conforme descrito em (4.11), ganhamos

$$\begin{aligned}
h''(c) &= -\frac{1}{4} G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right) - \frac{1}{4} G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right) - \frac{c}{8}\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{5/4} \\
&= -\frac{1}{2} G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right) - \frac{c}{8}\left(1+G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{5/4} < 0 \text{ em } (0, c_0).
\end{aligned}$$

Isso mostra que $h(c)$ é estritamente convexa em $(-c_0, 0)$ e estritamente côncava em $(0, c_0)$. Como consequência, existe exatamente um máximo local $c_{\max}$ em $(0, c_0)$ e exatamente um mínimo local $c_{\min} = -c_{\max}$ em $(-c_0, 0)$. Estes pontos são determinados pelos zeros de (4.19), isto é,

$$h'(c_{\max}) = h'(c_{\min}) = 0.$$

Logo, temos,

$$c_{\max} = -c_{\min} = 1.840428142\ldots, \qquad \alpha_{\max} = h(c_{\max}) = 1.343799725\ldots$$

Pela convexidade e concavidade da função $h(c)$, cada número $\alpha \in (-\alpha_{\max}, \alpha_{\max}) \setminus \{0\}$ possui exatamente duas pré-imagens em $h(c)$. ■

Com as ferramentas e resultados previamente apresentados, podemos agora proceder a demonstração do Teorema 13.

Teorema 13. *Existe um valor máximo* $\alpha_{\max} = 1.343799725\ldots$ *tal que para* $0 < |\alpha| < \alpha_{\max}$*, o problema de valor de bordo de Navier*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)+\dfrac{1}{2}\kappa^3(x)=0, \quad x\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0, \quad \kappa(0)=\kappa(1)=-\alpha \end{cases} \tag{4.20}$$

possui exatamente duas soluções suaves (gráficas) u *na classe de funções suaves que são simétricas em torno de* $x = 1/2$*. Se* $|\alpha| = \alpha_{max}$*, existe exatamente uma solução desse tipo; para* $\alpha = 0$*, existe apenas a solução trivial e não existem soluções para* $|\alpha| > \alpha_{max}$*.*

Demonstração. Pelo Corolário 8, a função u é solução da equação de Willmore (4.3), sujeita às condições de bordo de Navier

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \kappa(0) = \kappa(1) = -\alpha.$$

Além disso, todas as soluções suaves $u = u_c$ de (4.3), que são simétricas em torno de $x = 1/2$ e satisfazem

$$u_c(0) = u_c(1) = 0,$$

podem ser obtidas pelas equações (4.13), (4.14) e (4.15), onde essa família de soluções é parametrizada por $c \in (-c_0, c_0)$. Por fim, pelo Lema 17, ganhamos que se $0 < |\alpha| < \alpha_{\max}$, cada valor de α possui duas pré-imagens sob h (definido em (4.17)), isto é, uma em $(0, c_{\max})$ e outra em $(-c_{\max}, 0)$. Logo, para cada α nesse intervalo, existem exatamente duas soluções suaves u, simétricas em relação a $x = 1/2$ que satisfazem as condições de valor de bordo de Navier. Agora, se $|\alpha| = \alpha_{\max}$ o valor de h é atingido unicamente em $c = c_{\max}$, o que implica que existe exatamente uma solução suave para $h(c) = \alpha_{\max}$ (e também para $\alpha = -\alpha_{\max}$, pela simetria de h). Por outro lado, se $\alpha = 0$, a única solução possível é a solução trivial $u(x) = 0$, que corresponde ao valor $c = 0$. Finalmente, se $|\alpha| > \alpha_{\max}$ não existem valores de c para os quais $h(c) = \alpha$, e, portanto o problema (4.20) não admite soluções suaves simétricas para esses valores de α.

■

Energia da solução pequena e grande

Consideramos α tal que $|\alpha| \leqslant \alpha_{\max}$ e determinamos os valores correspondentes de c que descrevem as soluções u_c para (4.20), de acordo com

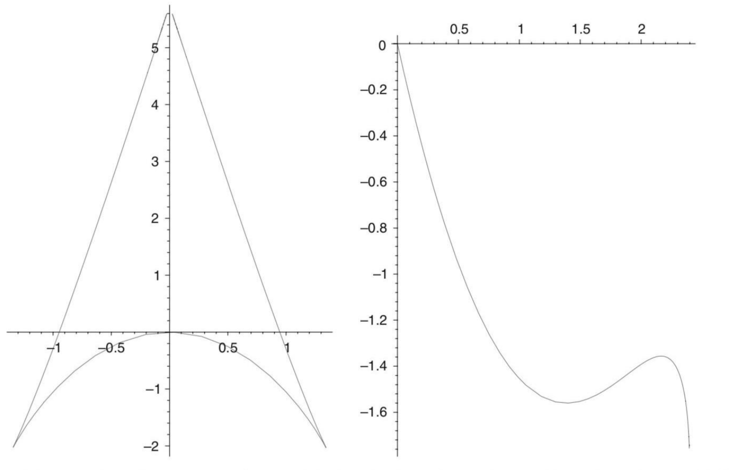
$$\alpha = \frac{c}{\sqrt[4]{1 + G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)^2}}.$$

Então, a energia de Willmore modificada pode ser calculada como:

$$\tilde{\mathcal{W}}_\alpha(u_c) = c^2 - 4\alpha \arctan\left(G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)\right). \tag{23}$$

Na Figura (4.2) (à esquerda), mostramos a energia de Willmore da solução pequena e da solução grande como uma função do dado de bordo α.

Figura 4.2: Energia das soluções do problema de valor de bordo de Navier em função de α (à esquerda) e de u_c para $\alpha = 1.2$ em função de $c \in [0, c_0)$ (à direita).



Fonte: [8] - Deckelnick e Grunau (2007).

Ao observar a energia de Willmore (23) de uma perspectiva diferente, revela-se uma característica um tanto inesperada: consideremos algum $\alpha < \alpha_{\max}$ relativamente próximo de $\alpha_{\max}$ e mantemos esse α fixo. Então, percebe-se que, mesmo na família $\{u_c, c \in [0, c_0)\}$, a energia da solução pequena com dado de bordo α não é um mínimo global. O ínfimo é atingido por $\tilde{\mathcal{W}}_\alpha(u_c)$ quando $c \nearrow c_0$, mas não é alcançado. Veja a Figura (4.2) (à direita) para $\alpha = 1,2$.

O problema de valor de bordo de Dirichlet

Para o problema de Dirichlet com dados simétricos, a situação é de forma surpreendente mais simples que o bordo de Navier.

Teorema 14. *Para todo $\beta \in \mathbb{R}$, o problema de valor de bordo de Dirichlet*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\kappa'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right) + \dfrac{1}{2}\kappa^3(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = -u'(1) = \beta \end{cases} \tag{4.21}$$

tem exatamente uma solução suave (gráfica) u na classe de funções suaves que são simétricas em torno de $x = 1/2$. Essa solução é o único mínimo do funcional de Willmore na classe

$$M_\beta := \{v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \mid v'(0) = -v'(1) = \beta\}.$$

Demonstração. Primeiro, observamos que, a partir da equação (4.13), temos

$$u'(0) = -u'(1) = G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right),$$

onde G^{-1} é estritamente crescente e bijetiva conforme definido em (4.12). Por sua vez, o domínio de G^{-1} cobre todos os valores reais, ou seja, $G^{-1}(-c_0/2, c_0/2) = \mathbb{R}$. Assim, para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$, existe um único valor de $c \in (-c_0, c_0)$ tal que

$$\beta = G^{-1}\left(\frac{c}{2}\right).$$

Isso garante a existência de uma solução suave e simétrica de $u(x)$ que satisfaz as condições de Dirichlet,

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = -u'(1) = \beta$$

A solução $u(x)$ pertence ao espaço funcional

$$M_\beta := \{v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \mid v'(0) = -v'(1) = \beta\},$$

onde a energia associada a $v(x)$ é definida pelo funcional de Willmore

$$\mathcal{W}(v) = \int_0^1 \kappa_v(x)^2 \sqrt{1+v'(x)^2}\, dx.$$

Para a unicidade da solução, comparamos a energia $\mathcal{W}(v)$ de um função $v \in M_\beta$ arbitrária com a energia $\mathcal{W}(u)$ da solução $u(x)$. Subtraindo as energias, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(v) - \mathcal{W}(u) &= \int_0^1 \kappa_v(x)^2 \sqrt{1+v'(x)^2}\, dx - \int_0^1 \kappa_u(x)^2 \sqrt{1+u'(x)^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \left[\kappa_v(x)\sqrt{1+v'(x)^2} - \kappa_u(x)\sqrt{1+u'(x)^2})\right] dx. \end{aligned}$$

De (4.16) e (4.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(v) - \mathcal{W}(u) &= \int_0^1 \left[\kappa_v(x)(1+v'(x)^2)^{1/4} - \kappa_u(x)(1+u'(x)^2)^{1/4}\right]^2 \, dx \\
&\quad -2c \int_0^1 \frac{v'(x)}{(1+v'(x)^2)^{5/4}} \, dx - 2c^2.
\end{aligned}$$

Além disso, pela função $G(s)$ dada em (4.11) e sabemos que $G(v'(1)) - G(v'(0)) = -2G(\beta) = -c$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(v) - \mathcal{W}(u) &= \int_0^1 \left[\kappa_v(x)(1+v'(x)^2)^{1/4} - \kappa_u(x)(1+u'(x)^2)^{1/4}\right]^2 \, dx \\
&\quad -2c\,(G(v'(1))) - G(v'(0)) - 2c^2 \\
&= \int_0^1 \left|\kappa_v(x)(1+v'(x)^2)^{1/4} - \kappa_u(x)(1+u'(x)^2)^{1/4}\right|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

O termo no integrando é estritamente positivo, a menos que $v(x) \equiv u(x)$. Isso implica que a energia de qualquer função $v \neq u$ é maior que a de u, ou seja, $\mathcal{W}(v) > \mathcal{W}(u)$. Portanto, a solução $u(x)$ minimiza a energia de Willmore no espaço M_β. Devido à monotocidade estrita de G^{-1}, qualquer valor β corresponde a exatamente uma solução $u(x)$. Assim, $u(x)$ é a única solução suave e simétrica que satisfaz as condições de bordo de Dirichlet.

■

Referências Bibliográficas

[1] BARBERO, S., AND DEL MAR GONZÁLEZ, M. Presbyopia Correction, Differential Geometry, and Free Boundary PDEs. *Notices 283* (1764), 1763–1771.

[2] BAUER, M., AND KUWERT, E. Existence of minimizing Willmore surfaces of prescribed genus. *International Mathematics Research Notices 2003*, 10 (2003), 553–576.

[3] BERGNER, M., DALL'ACQUA, A., AND FRÖHLICH, S. Symmetric Willmore surfaces of revolution satisfying natural boundary conditions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations 39*, 3 (2010), 361–378.

[4] BESSA, J. D. S. O funcional de Willmore e sua invariância conforme. *repositorio.ufc* (2020).

[5] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, vol. 1. Springer, 2010.

[6] DALL'ACQUA, A., DECKELNICK, K., AND GRUNAU, H.-C. Classical solutions to the Dirichlet problem for Willmore surfaces of revolution. *Advances in Calculus of Variations 1* (2008), 379–397.

[7] DALL'ACQUA, A., FRÖHLICH, S., GRUNAU, H.-C., AND SCHIEWECK, F. Symmetric Willmore surfaces of revolution satisfying arbitrary Dirichlet boundary data. *Advances in Calculus of Variations* (2011).

[8] DECKELNICK, K., AND GRUNAU, H.-C. Boundary value problems for the one-dimensional Willmore equation. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations 30* (2007), 293–314.

[9] DECKELNICK, K., AND GRUNAU, H.-C. A Navier boundary value problem for Willmore surfaces of revolution. *Analysis (Munich),* (2009), 229–258.

[10] Do Carmo, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

[11] Euler, L. Opera omnia. *Ser. 1, 24. Orell Füssli Zürich* (1952).

[12] Helfrich, W. Elastic properties of lipid bilayers: Theory and possible experiments. *Zeitschrift für Naturforschung c 28*, 11-12 (1973), 693–703.

[13] Hildebrandt, K., and Polthier, K. Constraint-based fairing of surface meshes. In *Symposium on Geometry Processing* (2007), pp. 203–212.

[14] Huisken, G., and Alexander, P. Geometric Evolution Equations for Hypersurfaces. *Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Cetraro, Italy, June 15–22, 1996* (1999), 45–84.

[15] Konopelchenko, B., and Landolfi, G. On rigid string instantons in four dimensions. *Physics Letters B 459*, 4 (1999), 522–526.

[16] Kuwert, E., and Schätzle, R. Closed surfaces with bounds on their Willmore energy. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze 11*, 3 (2012), 605–634.

[17] Kuwert, E., and Schätzle, R. Minimizers of the Willmore functional under fixed conformal class, 2013.

[18] Lee, J. M. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, vol. 176. Springer Science & Business Media, 2006.

[19] Leschke, K., Pedit, F., and Pinkall, U. Willmore tori in the 4-sphere with nontrivial normal bundle. *arXiv preprint math/0312421* (2003).

[20] Marques, F. C., and Neves, A. The Willmore conjecture. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 116*, 4 (2014), 201–222.

[21] Neto, A. C. M. Tópicos de geometria diferencial. *Sociedade Brasileira de Matemática* (2014).

[22] Nitsche, J. C. Boundary value problems for variational integrals involving surface curvatures. *Quarterly of applied mathematics 51*, 2 (1993), 363–387.

[23] Nitsche, J. C. Periodic surfaces that are extremal for energy functionals containing curvature functions. In *Statistical thermodynamics and differential geometry of microstructured materials*. Springer, 1993, pp. 69–98.

[24] Ou-Yang, Z. Elasticity theory of biomembranes. *Thin Solid Films 393* (2001), 19–23.

[25] Poisson, S.-D. *Mémoire sur les Surfaces élastiques*. éditeur inconnu, 1814.

[26] Reilly, R. C. Variational Properties of Functions of the Mean Curvatures for Hypersurfaces in Space Forms. *Journal of Differential Geometry 8*, 3 (1973), 465–477.

[27] Riviere, T. Analysis aspects of Willmore surfaces. *Inventiones mathematicae 174*, 1 (2008), 1–45.

[28] Simon, L. Existence of surfaces minimizing the Willmore functional. *Communications in Analysis and Geometry 1*, 2 (1993), 281–326.

[29] Willmore, T. J. Note on embedded surfaces. *An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. I a Mat.(NS) B 11*, 493–496 (1965), 20.

[30] Willmore, T. J. *Riemannian geometry*. Oxford University Press, 1993.