



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Controlabilidade Aproximada Hierárquica para
Equação da Onda com Amortecimento**

Kátia de Sousa Silva

Teresina - 2026

Kátia de Sousa Silva

Dissertação de Mestrado:

**Controlabilidade Aproximada Hierárquica para Equação da
Onda com Amortecimento**

Dissertação submetida à Coordenação
do Programa de Pós-Graduação em Ma-
temática, da Universidade Federal do Piauí,
como requisito parcial para obtenção do
grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus

Teresina - 2026



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Controlabilidade Aproximada Hierárquica para Equação da Onda com um Amortecimento

Kátia de Sousa Silva

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestra em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 24 de fevereiro de 2026.

Banca Examinadora:



Documento assinado digitalmente

ISAÍAS PEREIRA DE JESUS

Data: 26/02/2026 10:30:53-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.Dr. Isaías Pereira de Jesus—Orientador



Documento assinado digitalmente

GILCENIO RODRIGUES DE SOUSA NETO

Data: 05/03/2026 21:00:33-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.Dr.Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto-UFPI



Documento assinado digitalmente

LUCIANO CIPRIANO DA SILVA

Data: 26/02/2026 11:23:20-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.Dr.Luciano Cipriano da Silva-IFRN

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBI/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S586c Silva, Kátia de Sousa.
Controlabilidade aproximada hierárquica para equação a
onda com amortecimento / Kátia de Sousa Silva. -- 2026.
108 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí.
Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós-Graduação
em Matemática, Teresina, 2026.
“Orientador: Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus. ”

1. Controlabilidade Aproximada. 2. Equação da Onda. 3.
Sistema Otimizado. I. Jesus, Isaías Pereira de. II. Título.

CDD 516.36

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Em memória de minha querida avó Maria Francisca.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me permitir concluir este trabalho com êxito. Que toda honra e toda glória sejam dadas ao autor da minha vida.

Agradeço ao meu esposo, João Vinícius, por todo o apoio e por ser meu maior incentivador. Especialmente nos dias mais difíceis, esteve sempre ao meu lado, sendo meu porto seguro e, acima de tudo, um grande exemplo para mim.

Agradeço ao meu professor orientador, Dr. Isaías Pereira de Jesus, por toda a paciência e maestria na condução da minha orientação. Agradeço aos professores Dr. Barnabé Pessoa Lima e Dr. Roger Peres de Moura pela carta de recomendação para o ingresso no mestrado. Em particular, expresso minha gratidão ao Dr. Roger Peres de Moura por ter aceitado me orientar na iniciação científica e por sempre me motivar a seguir a carreira acadêmica, mesmo diante das dificuldades. Agradeço também ao meu amigo, Professor Dr. Pedro Paulo Alves Oliveira, pelas dúvidas sanadas nas reuniões via Meet durante a elaboração desta dissertação.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática da UFPI, em especial aos professores do PPGMAT, que se dedicam à ciência e à formação acadêmica de seus orientandos.

Aos amigos que fiz durante o mestrado, minha sincera gratidão. Em especial a Maiara, Lucas e Victor, que foram fundamentais para que hoje eu recebesse o título de Mestre em Matemática. Juntamente com Ysadora e Stefany, compartilharam comigo lágrimas e risos na mesma intensidade.

Agradeço aos meus familiares, em especial, à minha querida avó, Maria Francisca, que durante o mestrado partiu para morar com Jesus; à minha mãe Luíza, à minha tia, Maria de Lourdes, pelo incentivo aos estudos desde o ensino Fundamental; e à minha sogra, Valda, que, mesmo indiretamente, foi um amparo.

Agradeço à Larisse, por todos os pincéis e pela disponibilidade em ajudar.

Agradeço a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, e que fizeram parte da minha trajetória até aqui, e por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“Para que todos vejam, e saibam, e considerem, e juntamente entendam que a mão do Senhor fez isto.”.

Isaías 41:20.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar a controlabilidade aproximada hierárquica de uma equação da onda com amortecimento por meio da estratégia de Stackelberg. Mais especificamente, considera-se um modelo misto linearizado que descreve um tipo de vibração com extremidades móveis, o qual inclui o modelo de Kirchhoff como caso particular. Ademais, são apresentados resultados relativos à existência, unicidade e regularidade das soluções do problema proposto.

Palavras-chaves: Controlabilidade Aproximada Hierárquica, Equação da Onda, Estratégia de Stackelberg, Sistema Otimizado.

Abstract

This work aims to study the hierarchical approximate controllability of a damped wave equation through the Stackelberg strategy. More specifically, a linearized mixed model describing a type of vibration with movable endpoints is considered, which includes the Kirchhoff model as a particular case. Moreover, results concerning the existence, uniqueness, and regularity of solutions to the proposed problem are presented

Keywords: Hierarchical Approximate Controllability, Wave Equation, Stackelberg Strategy, Optimized System.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	2
1 Preliminares	5
1.1 Tópicos de Análise Funcional	5
1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela	5
1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos	6
1.1.3 Convexidade e Otimização	7
1.2 Teoria das Distribuições Escalares	8
1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$	10
1.4 Espaços de Sobolev	13
1.4.1 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$	13
1.4.2 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$	15
1.5 Os Espaços $L^p(0, T; X)$	16
1.6 Distribuições Vetoriais	18
1.7 Resultados Importantes	19
1.7.1 Funções Próprias e Decomposição Espectral	19
1.7.2 O Teorema de Carathéodory	19
1.7.3 Desigualdade de Gronwall	21
1.7.4 O Teorema da Unicidade de Holmgren	22

2	Controle Aproximado para a Equação da Onda com Amortecimento	23
2.1	Formulação do Problema	23
2.2	Mínimo do Funcional Custo J_2	35
2.3	Controlabilidade Aproximada	46
2.4	Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções	60

Notações e Simbologias

As simbologias abaixo serão utilizadas no decorrer do texto.

- $(.,.)$ denota o produto interno em L^2 ;
- $|\cdot|$ denota a norma em L^2 ;
- $((.,.))$ denota o produto interno em H_0^1 ;
- $\|\cdot\|$ denota a norma em H_0^1 ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quando não especificado, denota diferentes pares de dualidades;
- $\nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} \right)$ denota o gradiente da função $\mathbf{u}$;
- $\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2}$ denota o operador Laplaciano da função $\mathbf{u}$;
- q.s. - quase sempre;
- $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota a imersão compacta;
- C quando não especificada, é uma constante positiva e arbitrária;
- $' = \frac{\partial}{\partial t}$;
- $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y ;
- $D(f)$ denota o domínio de f .

Introdução

Este trabalho tem como base principal o artigo [14] que é dedicado ao estudo da controlabilidade aproximada hierárquica para uma EDP hiperbólica via estratégia de Stackelberg. Mais precisamente, consideraremos um modelo misto linearizado que descreve um tipo de vibração em fronteiras com extremidades móveis, que contém o modelo de Kirchhoff como caso particular. Desse modo, para obtermos soluções $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ definidas para todo $t \geq 0$, procedemos, como usual, considerando um “amortecimento”

$$\delta \left[\left(\frac{\mathbf{x} - \alpha(t)}{\gamma(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t) \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right],$$

onde δ é uma constante positiva, a ser fixada.

Um sistema de controle é uma equação de evolução (EDO OU EDP) que depende de um parâmetro $\mathbf{u}$, descrito pela expressão:

$$\mathbf{y}' = f(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}), \tag{1}$$

onde $t \in [0, T]$ representa a variável temporal, $\mathbf{y} : [0, T] \rightarrow X$ é a função estado e $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow Y$ é um controle. Nesse modelo, X e Y são espaços de funções adequados, $T > 0$ é um valor real fixado e $\mathbf{y}'$ representa a derivada de $\mathbf{y}$ em relação ao tempo t .

Destacamos abaixo algumas das principais definições de controlabilidade presentes na literatura.

Definição 0.1. (*Controlabilidade exata*) *Sejam $T > 0$ e $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \in X$ dois estados do sistema (1). Dizemos que tal sistema é exatamente controlável se existe $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow Y$ tal que*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = f(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \text{ em } [0, T], \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(T) = \mathbf{y}_1 \end{cases}$$

Definição 0.2. (*Controlabilidade aproximada*) *Sejam $T > 0$ um número real e $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1$ dois possíveis estados do sistema (1). Dizemos que tal sistema é aproximadamente*

controlável se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $u_\epsilon : [0, T] \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{cases} y' = f(y, u_\epsilon) & \text{em } [0, T], \\ y(0) = y_0, \quad \|y(T) - y_1\| \leq \epsilon. \end{cases}$$

Definição 0.3. (Controlabilidade nula) Sejam $T > 0$ um número real dado e $y_0 \in X$ um estado arbitrário do sistema (1). Dizemos que tal sistema é nulamente controlável se existe $u : [0, T] \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{cases} y' = f(y, u) & \text{em } [0, T], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = 0. \end{cases}$$

Definição 0.4. (Controlabilidade exata às trajetórias) Sejam $T > 0$ um número real dado, $y_0 \in X$ um estado e $\bar{y}$ uma trajetória (isto é, uma solução arbitrária do sistema (1) sem controle). Dizemos que tal sistema é exatamente controlável às trajetórias se existe $u : [0, T] \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{cases} y' = f(y, u) & \text{em } [0, T], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = \bar{y}(T). \end{cases}$$

Pode-se mostrar, que em sistemas lineares, as definições de controle nulo e exato às trajetórias são equivalentes.

Existem muitas situações em que vários controles são necessários para conduzir um sistema a um ou mais objetivos. Em uma estratégia de colaboração onde a ação de um controle depende da ação do outro controle que atua de forma independente, estamos tratando de controle hierárquico.. Esse conceito no contexto das equações hiperbólicas foi introduzida por J. -L. Lions [8], onde o autor analisou a controlabilidade aproximada para um sistema associado a uma equação da onda. Nesse trabalho, J. -L. Lions considerou um controle principal chamado de *líder* e adicionalmente um controle secundário chamado de *seguidor*, seguindo a estratégia de Stackelberg [23].

Posteriormente, vários trabalhos surgiram em relação ao tema proposto (que consistia em dado um controle líder encontrar o controle seguidor em função do líder, satisfazendo a condição de “de solução ” do funcional custo associado) aplicado a outros sistemas governados por uma EDP, dentre os quais podemos citar:

- Os artigos de Lions [12, 13], onde o autor provou alguns resultados sobre estratégia de Pareto e Stackelberg, dentre os quais podemos destacar, a prova de que o sistema perturbado corresponde a uma sequência de problemas de controle padrão e converge para o controle de pareto, para o qual se obtém um sistema de otimalidade singular e como aplicação, mostrou-se que o método pode ser estendido para o caso evolutivo. Além disso a estratégia de pareto em resumo, pode ser entendida, como uma abordagem utilizada em sistemas de controle multiobjetivo para encontrar o melhor equilíbrio entre objetivos de desempenho conflitantes.
- Os artigos [21, 22], onde Ramos et al. estudaram equilíbrio de Nash dos pontos de vista teórico e numérico para EDP's parabólicas lineares.

As questões de controlabilidade consideradas nos trabalhos acima citados fornecem respostas em nível aproximado. A principal novidade apresentada nesse trabalho é a inclusão de um "amortecimento" acrescida a uma EDP hiperbólica. Este amortecimento trás uma melhor regularidade e suavidade para a solução do sistema, dado pela seguinte expressão

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \left[\left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t) \right) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right] = 0 \quad (2)$$

Finalmente, este trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos os resultados preliminares, essenciais ao desenvolvimento do nosso trabalho.

No capítulo 2 mostraremos formalmente o problema de controle a ser estudado, onde a controlabilidade aproximada é estabelecida. Finalmente, a existência, unicidade e regularidade de soluções também é provada para o sistema proposto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados necessários para que o leitor possa ter uma melhor compreensão dos conteúdos abordados no capítulo seguinte.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 1.1. (*Convergência Fraca*)[Evans [5], p. 723] Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E . Dizemos que uma sequência u_ν converge fracamente para u e escrevemos $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle$, para todo $\varphi \in E'$.

Definição 1.2. (*Convergência Fraca Estrela*)[Brezis [3], p. 63] Sejam E um espaço de Banach, e $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E' . Dizemos que φ_ν converge fraco estrela para φ e escrevemos $\varphi_\nu \xrightarrow{*} \varphi$ se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle$, para todo $u \in E$.

Definição 1.3 (Brezis ([3], p. 74). Definimos por $\sigma(E, E')$ a topologia fraca de E induzida por E' .

Proposição 1.1. Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E . Então:

- (i) Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ então $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E'$;
- (ii) Se $x_n \rightarrow x$ forte então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente na topologia $\sigma(E, E')$;
- (iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \rightarrow f$ fortemente em E' (isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \rightarrow 0$) então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

Demonstração. (Brezis [3], p. 58). □

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos

Definição 1.4 (Evans [5], p. 719). . Dizemos que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso.

Definição 1.5 (Evans ([5], p. 722). . Sejam E um espaço de Banach e J a injeção canônica de E em E'' . Dizemos que E é reflexivo quando $J(E) = E''$.

Quando o espaço E é reflexivo identificamos implicitamente E e E'' (com ajuda do isomorfismo J).

Teorema 1.1. (*Banach-Alaoglu-Bourbaki*). Sejam E um espaço de Banach e E' o seu dual topológico. Então o conjunto

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\},$$

é compacto na topologia fraca estrela.

Demonstração. Brezis ([3], p. 66). □

Teorema 1.2. Sejam E um espaço de Banach separável e E' o seu dual topológico. Então o conjunto

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\},$$

é metrizável na topologia fraca estrela.

Reciprocamente, se $B_{E'}$ é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.

Demonstração. Brezis ([3], p.74). □

Corolário 1.1. Sejam E um espaço Banach separável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E' . Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que converge na topologia fraca estrela.

Demonstração. Brezis ([3], p. 76). □

Teorema 1.3. Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência dada $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $f \in E$ tal que

$$f_{k_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração. Evans ([5], p. 639). □

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.3 Convexidade e Otimização

Teorema 1.4. *Suponha que o funcional $F : D \subseteq H \rightarrow \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:*

- (i) *D é um subconjunto convexo fechado não vazio do espaço de Hilbert H ;*
- (ii) *F é fracamente sequencialmente semi-contínuo inferiormente;*
- (iii) *Se D é ilimitado, então F é fracamente coercivo.*

Então o problema de minimização

$$F(u) = \min_{v \in D} F(v) \quad (1.1)$$

tem uma solução.

Demonstração. Zeidler ([24], p. 53-54). □

Corolário 1.2. *Se adicionarmos a hipótese de F ser estritamente convexo, teremos a unicidade de solução de (1.1).*

Teorema 1.5. (Fenchel - Rockafellar) *Sejam $\varphi, \psi : E \rightarrow (-\infty, +\infty]$ duas funções convexas. Suponha que exista algum $x_0 \in D(\varphi) \cap D(\psi)$ tal que φ seja contínua em x_0 . Então,*

$$\inf_{x \in E} \{\varphi(x) + \psi(x)\} = \sup_{f \in E} \{-\varphi(-f) - \psi(f)\} = -\min_{f \in E} \{\varphi(-f) + \psi(f)\}.$$

Demonstração. Brezis ([3], p. 15). □

Proposição 1.2. (Caracterização de Solução) *Suponhamos que $N = N_1 + N_2$ e que N_1 e N_2 são funcionais convexas e semi-contínuos inferiormente de um subconjunto C convexo não vazio de um espaço de Banach reflexivo em $\mathbb{R}$, com N_1 sendo gâteaux-diferenciável com derivada N'_1 . Então, se $\mu \in C$, as condições são equivalentes:*

- (i) *μ é solução do problema*

$$\inf_{\mu \in C} N(\mu)$$

- (ii) *$\langle N'_1(\mu), \xi - \mu \rangle + N_2(\xi) - N_2(\mu) \geq 0 \quad \forall \xi \in C;$*

- (iii) *$\langle N'_1(\xi), \mu - \xi \rangle + N_2(\mu) - N_2(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in C.$*

Demonstração. Ekeland ([4], p. 38). □

1.2 Teoria das Distribuições Escalares

Teorema 1.6. (*Critério de Densidade*) *Seja D um subconjunto de um espaço de Hilbert H . Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) D gera um subespaço que é denso em H ;
- (ii) *Todo funcional linear contínuo f em H que se anula em D é identicamente nulo em H .*

Demonstração. Aubin ([1], p. 30). □

1.2 Teoria das Distribuições Escalares

Definição 1.6 (Brezis [3], p. 92). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Denomina-se suporte de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x tais que $\varphi(x) \neq 0$. Simbolicamente,*

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^\Omega.$$

Definição 1.7. *Denota-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω com suporte compacto em Ω .*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares contínuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.8 (Evans [5], p. 701). *Chamaremos multi-índice a toda n -upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de números naturais. Dado um multi-índice α , definimos a ordem $|\alpha|$ de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, e representamos por D^α o operador derivação*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.9. *Dizemos que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α .

1.2 Teoria das Distribuições Escalares

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que T satisfaz as seguintes condições:

- i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- ii) T é contínua, isto é, se uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{D}(\Omega)$ para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então,

$$T(\varphi_\nu) \rightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$. Equipa-se o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω . Neste espaço, dizemos que a sequência $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para T , quando a sucessão $\langle T_\nu, \varphi \rangle_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, o qual denota-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, é chamado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω . Com o intuito de estudarmos os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$. A motivação no conceito de derivada fraca e posteriormente o conceito de derivada distribucional dada por Sobolev, se deve a fórmula de integração por partes de Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ defini-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue-se da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Notemos que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.2}$$

é linear e continua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{\nu \rightarrow \infty} D^\alpha T_\nu = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.3}$$

1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, serão dadas algumas definições e propriedades elementares dos espaços $L^p(\Omega)$.

Definição 1.10 (Brezis [3], p. 89). Denotamos por $L^1(\Omega, \mu)$, ou simplesmente $L^1(\Omega)$ (ou apenas L^1), o espaço das funções integráveis de Ω em $\mathbb{R}$. A norma em $L^1(\Omega, \mu)$ é definida por

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_1 = \int_{\Omega} |f| \, d\mu = \int_{\Omega} |f|.$$

Definição 1.11 (Brezis [3], p. 91). Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$. Definimos

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

Definição 1.12 (Brezis [3], p. 91). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } \exists \, C \text{ constante tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

Teorema 1.7. (Desigualdade de Young) Sejam $p > 1$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \quad \forall a \geq 0 \text{ e } \forall b \geq 0.$$

Demonstração. Brezis ([3], p. 92). □

Teorema 1.8. (Desigualdade de Young com ε) Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\varepsilon > 0$. Então,

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q, \quad \forall a, b \geq 0,$$

onde $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$. No caso particular quando $p = q = 2$, a desigualdade reduz-se a

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad \forall a, b \geq 0.$$

1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Demonstração. Evans ([5], p. 622). $\square$

Teorema 1.9. (*Desigualdade de Hölder*) *Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p ; isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Brezis ([3], p. 92). $\square$

Definição 1.13. *Dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω , quando f é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolos temos que*

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |f| dx < \infty, \quad \text{para todo compacto } K \subset \Omega.$$

As distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

A distribuição T_u assim definida é dita “gerada pela função localmente integrável u ” e, usando o Lema de Du Bois Raymond, tem-se que T_u é unicamente determinada por u , no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω . Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$

Lema 1.3.1. (*Du Bois Raymond*) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .*

Demonstração. Medeiros, L. A e Milla Miranda, M. ([16], p. 12). $\square$

Exemplo 1.1. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω .

De fato, não é difícil mostrarmos a linearidade de T_u , pois segue da linearidade da integral. Resta provarmos que T_u é contínua.

1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ . Então, temos

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| &= |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| \\ &= \left| \int_{\Omega} u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)| dx \\ &\leq \sup |\varphi_\nu - \varphi| \int_{\Omega} |u(x)| dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ uniformemente.

Observação 1.1. *Outro resultado interessante é que a derivada de uma função $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, não é em geral uma função de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Outro resultado interessante é que a derivada de uma função $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ não é, em geral, uma função de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Exemplo (Função de Heaviside). Considere $\Omega = \mathbb{R}$ e defina a função

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

(O valor em $x = 0$ é irrelevante.)

Observamos que $H \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, pois em qualquer intervalo limitado (a, b) temos

$$\int_a^b |H(x)| dx < \infty,$$

uma vez que H é limitada.

Entretanto, H não é derivável no ponto $x = 0$. No sentido das distribuições, sua derivada é dada por

$$H' = \delta_0,$$

onde δ_0 é a medida de Dirac concentrada na origem.

Como δ_0 não é representada por uma função localmente integrável, concluímos que

$$H' \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Portanto, este exemplo mostra que a derivada de uma função pertencente a $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ pode não pertencer a $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções conhecidas sob a denominação de *Espaços de Sobolev*.

1.4 Espaços de Sobolev

Como vimos na seção anterior, toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas distribucionais de todas as ordens. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são também funções do espaço $L^p(\Omega)$.

1.4.1 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.14 (Evans, 210 ([5], p. 258). *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O espaço de Sobolev que denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais de ordem α pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente escrevemos:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Também $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H^m(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert, cujo produto interno e a correspondente norma induzida em $H^m(\Omega)$ são dadas, respectivamente, por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Agora apresentaremos algumas desigualdades de Sobolev que nos ajudarão a alcançar os objetivos propostos.

Teorema 1.10 (Rellich–Kondrachov). *Seja Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 com fronteira Γ regular. Então:*

Se $n > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, para todo $q \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right)$.

Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, +\infty)$.

se $pm > n$, então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C(\overline{\Omega})$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/p) \leq k + 1$.

1.4 Espaços de Sobolev

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p (e para todo n).

Demonstração. Brezis ([3], p. 285). □

Teorema 1.11. (Gauss-Green) Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então $\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\Gamma} u v^i d\Gamma$
($i = 1, 2, \dots, n$).

Demonstração. Evans ([5], p.711). □

Teorema 1.12. (Fórmulas de Green)

Para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ e $v \in H^2(\Omega)$, é verdadeira a Fórmula de Green:

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle - \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa sempre dualidades.

Demonstração. Medeiros, L. A. Milaa, M. M([17], p. 122). □

Definição 1.15. Seja $T \in B(X, Y)$ um operador dado. Então um operador D chama-se inverso à direita do operador T se $(T \circ D) = \text{Id}$ e neste caso, diz-se que T é invertível a direita.

Teorema 1.13. (Teorema do Traço) Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ com fronteira $C^{k,1}$. Assuma $\frac{1}{p}$ não inteiro com $s < k + 1$, $s - \frac{1}{p} = l + (\sigma)$ e $0 < \sigma < 1$, $l \in \mathbb{N}$. Então a aplicação linear

$$u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u) = \left(u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}|_{\Gamma} \right)$$

que é definida para $u \in C^{k,1}(\overline{\Omega})$ tem uma única extensão continua a um operador de $W^{s,p}(\Omega)$ em $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, tal operador possui inversa à direita contínua que independe de p .

Demonstração. Grisvard 1985 ([6], p. 37). □

Teorema 1.14. (Regularidade) Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado com fronteira Γ de classe C^2 . Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi + \int_{\Omega} u \phi = \int_{\Omega} f \phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde C é uma constante que só depende de Ω .

Demonstração. Brezis([3], p. 298). □

1.4 Espaços de Sobolev

1.4.2 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$

Observemos que, embora o espaço vetorial das funções testes $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, em geral, ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto acontece porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é “bem maior” que a norma de $L^p(\Omega)$ e é por isso que $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos seqüências convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como segue:

Definição 1.16. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Definimos*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 1.15. (*Desigualdade de Poincaré*) *Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver Brezis ([3], p. 290). □

Observação 1.2. *Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Em $H_0^1(\Omega)$ tem-se o produto interno*

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, equivalente a norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração. Brezis ([3], p. 290). □

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular, os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham um papel fundamental na Teoria dos Espaços de Sobolev e por conseguinte na Teoria das EDP's. Se $1 \leq p < \infty$ e o número q é o expoente conjugado de p , isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$. Em outras palavras, se f pertence a $H^{-m}(\Omega)$ então f é um funcional linear limitado sobre $H_0^m(\Omega)$.

Definição 1.17. *Se $f \in H^{-1}(\Omega)$ a norma é definida como sendo*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle f, u \rangle; \forall u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

1.5 Os Espaços $L^p(0, T; X)$

Observação 1.3. *Em particular, as conclusões do Corolário (??) são válidas para o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ com um subconjunto arbitrário aberto Ω de $\mathbb{R}^n$. Analogamente, a conclusão do Teorema (1.10) é válido para $W_0^{1,p}(\Omega)$ com um subconjunto arbitrário Ω aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Brezis ([3], p. 290). □

1.5 Os Espaços $L^p(0, T; X)$

Nesta seção, estenderemos as noções de mensurabilidade e integrabilidade para funções

$$f : [0, T] \longrightarrow X,$$

onde $T > 0$ e X é um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|$.

Definição 1.18. *Denota-se por $L^p(0, T; X)$, com $1 \leq p \leq \infty$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis com valores em X e tais que se $1 \leq p < \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lebesgue em $(0, T)$ e se $p = \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$.*

O espaço $L^p(0, T; X)$ é um espaço completo com a norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty.$$

Se $p = \infty$ a norma acima é substituída por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{0 < t < T} \text{ess} \|u(t)\|_X = \inf\{C > 0 : \|u(t)\|_X \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

Apenas no caso em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle v, u \rangle_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_X dt.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0, T; X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, temos

$$[L^p(0, T; X)]' \approx L^{p'}(0, T, X').$$

1.5 Os Espaços $L^p(0, T; X)$

A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral por

$$\langle v, u \rangle_{L^{p'}(0, T; X') \times L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{X' \times X} dt.$$

No caso $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$, ou seja,

$$[L^1(0, T; X)]' \approx L^\infty(0, T; X').$$

Definição 1.19. *Seja $v \in L^1(0, T)$. Dizemos que $s \in (0, T)$ é um ponto de Lebesgue de v , se para todo $h > 0$ tal que $]s - h, s + h[\subset (0, T)$ então*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{s-h}^{s+h} v(\xi) d\xi = v(s)$$

Definição 1.20. *Denota-se por $C([0, T]; X)$, com $T > 0$ o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Teorema 1.16. *Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $f \in L^p(0, T; X)$, $f' \in L^p(0, T; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $f \in C^0([0, T]; Y)$.*

Demonstração. Brezis ([2]). □

Lema 1.5.1. *Sejam X um espaço de Banach, $f \in L^p(0, T; X)$ e $f' \in L^p(0, T; X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$f \in C([0, T]; X).$$

(Possivelmente redefinidas sobre um conjunto de medida nula.)

Demonstração. Lions ([11], p. 7). □

Teorema 1.17. (*Representação de Riesz*) *Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^q$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f, \quad \forall f \in L^p.$$

Além disso, vale

$$\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

Demonstração. Brezis ([3], p. 97). □

1.6 Distribuições Vetoriais

Teorema 1.18. *Seja X um espaço de Hilbert e $u \in L^2(0, T; X)$. Então existe um único funcional $f \in H^{-1}(0, T; X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta \psi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \psi)_X \quad \forall \quad \theta \in \mathcal{D}(0, T) \quad e \quad \psi \in X.$$

Baseado nisto, identificamos f com u' . Por esta razão, diremos que se $u \in L^2(0, T; X)$ então $u' \in H^{-1}(0, T; X)$.

Demonstração. Pathak ([20]). □

Teorema 1.19 (Teorema da Compacidade de Aubin-Lions). *Sejam X , B e Y espaços de Banach com $X \subset B \subset Y$, X e Y reflexivos. Suponhamos que X está compactamente imerso em B e B está continuamente imerso em Y . Então*

$$W = \{v : v \in L^{p_0}(0, T; X), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; Y)\},$$

onde $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$, munido da norma

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0, T; X)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; Y)},$$

é um espaço de Banach compactamente imerso em $L^{p_0}(0, T; B)$.

Demonstração. Lions ([11], p. 58). □

1.6 Distribuições Vetoriais

Seja um número real $T > 0$ e X um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|$

Definição 1.21. *Uma distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X , é uma função $f : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ linear e contínua. O conjunto dessas transformações lineares é chamado Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X e é denotado por*

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T); X).$$

Definição 1.22. *Seja $f \in \mathcal{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \quad \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

1.7 Resultados Importantes

Observação 1.4. *Se a função f pertence ao espaço $L^p(0, T; X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então define uma distribuição que denotamos pela mesma função f e é dada por*

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T),$$

com valor integrável em X .

Demonstração. Lions ([11], p. 7). □

1.7 Resultados Importantes

Nesta seção, apresentamos alguns resultados importantes que serão utilizados nesta dissertação.

1.7.1 Funções Próprias e Decomposição Espectral

Teorema 1.20. *Assumimos Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Existe uma sequência de números reais $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ donde*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

e

$$\lambda_m \rightarrow \infty \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

E uma base Hilbertiana $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ tais que $w_j \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta w_j = \lambda_j w_j & \text{em } \Omega \\ w_j = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

para $j = 1, 2, \dots$

Diz-se que os números (λ_m) são os autovalores de $-\Delta$ (com a condição de Dirichlet) e que as $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ são as funções próprias associadas.

Demonstração. Evans ([5], p. 335) ou Medeiros ([17], p. 134). □

1.7.2 O Teorema de Carathéodory

Sejam D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos são denotados por (x, t) onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre D quando:

1.7 Resultados Importantes

- $f(x, t)$ é mensurável em t para cada x fixo;
- $f(x, t)$ é contínua em x para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|f(x, t)| \leq m_K(t)$ para todo $(x, t) \in K$.

Definição 1.23. *Uma solução no sentido estendido do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

é uma função $\phi(t)$ absolutamente contínua tal que para algum β real vale

- i) $(\phi(t), t) \in D \ \forall \ t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$;*
- ii) $\phi'(t) = f(t, \phi(t)) \ \forall \ t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, exceto em um conjunto de medida de Lebesgue zero.*

Consideremos o retângulo

$$R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\},$$

com $a, b > 0$. Então, valem os seguintes resultados:

Teorema 1.21 (Carathéodory). *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R . Então sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ ($\beta > 0$) existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

Demonstração. Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([19], p. 156). □

Corolário 1.3. *Sejam D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e f satisfazendo as condições de Carathéodory sobre D . Então o problema*

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.

Demonstração. Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([19], p. 159). □

1.7 Resultados Importantes

Teorema 1.22. *Sejam D um subconjunto aberto limitado e conexo em $\mathbb{R}^{n+1}$, f uma função que satisfaz as duas primeiras condições de Carathéodory sobre D e suponhamos que exista uma função integrável $m(t)$ tal que $|f(t, x)| \leq m(t)$ para todo $(t, x) \in D$. Seja φ uma solução de*

$$x' = f(t, x) \text{ para quase todo } t \text{ em } I,$$

sobre o intervalo aberto (a, b) . Então

- i) *existe $\varphi(a+0)$ e $\varphi(b-0)$, onde $\varphi(a+0)$ e $\varphi(b-0)$ são os prolongamentos laterais de φ a esquerda de a e à direita b respectivamente;*
- ii) *se $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então φ pode ser prolongada até $(a, b + \delta]$ para algum δ . Resultado análogo para a ;*
- iii) *$\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0))$ pertencem a ∂D (∂D fronteira de D);*
- iv) *se f pode estender-se a $\overline{D}$ sem que ele perca suas propriedades então $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$.*

Demonstração. Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([19], p. 159). □

Corolário 1.4. (*Prolongamento de Solução*) *Sejam $D = B \times [0, T]$, com $0 < T < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e a função f nas condições do Teorema 1.22. Seja $\phi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(0) = x_0 \quad e \quad |x_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\phi(t)$ está definida tem-se $|\phi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então ϕ tem um prolongamento até $[0, T]$.

Demonstração. Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([19], p. 164). □

1.7.3 Desigualdade de Gronwall

Lema 1.7.1. (*Gronwall*) *Sejam $m \in L^1(0, T; \mathbb{R})$, $m \geq 0$ q.s em $(0, T)$, $a \geq 0$ constante real e $g \in L^\infty(0, T)$, $g \geq 0$ em $(0, T)$ tal que*

$$\frac{1}{2}g(t)^2 \leq 2a^2 + 2 \int_0^t m(s)g(s)ds \quad \forall t \in (0, T).$$

1.7 Resultados Importantes

Então,

$$g(t) \leq 2 \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \text{ em } (0, T).$$

Demonstração. Medeiros, L.A ([15], p. 76). □

1.7.4 O Teorema da Unicidade de Holmgren

Teorema 1.23. (*Teorema da Unicidade de Holmgren*) *Sejam $\Omega_1 \subset \Omega_2$ conjuntos abertos e convexos do $\mathbb{R}^n$ e $P(D)$ um operador diferencial com coeficientes constantes tal que todo plano característico Π com respeito a $P(D)$ que satisfaz $\Pi \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ também satisfaz $\Pi \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. Então, para a solução $u \in D'(\Omega_2)$ da equação $P(D)u = 0$ tal que $u = 0$ em Ω_1 também satisfaz $u = 0$ em Ω_2 .*

Demonstração. Hörmander ([7], p. 129). □

Proposição 1.3. *Seja $T > 2d(\Omega, \Gamma_0)$, onde $d(\Omega, \Gamma_0) = \sup_{x \in \Omega} d(x, \Gamma_0)$. Então qualquer solução fraca ψ do problema*

$$\left| \begin{array}{l} \psi'' - \Delta \psi = 0 \text{ em } Q \\ \psi = 0 \text{ sobre } \Sigma \end{array} \right.$$

tal que $\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0$ sobre $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \subset \Sigma$ com $\Gamma_0 \neq \emptyset$ implica que $\psi \equiv 0$.

Demonstração. Lions ([10], p. 92). □

Capítulo 2

Controle Aproximado para a Equação da Onda com Amortecimento

O objetivo deste capítulo é estabelecer a controlabilidade aproximada para a equação da onda com um amortecimento. Antes disso, apresentaremos a formulação do problema proposto bem como estabeleceremos resultados essenciais para atingirmos nosso propósito.

2.1 Formulação do Problema

Medeiros-Límaco-Menezes em [18] estudaram o modelo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{\gamma(0)} + \frac{k}{2m\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

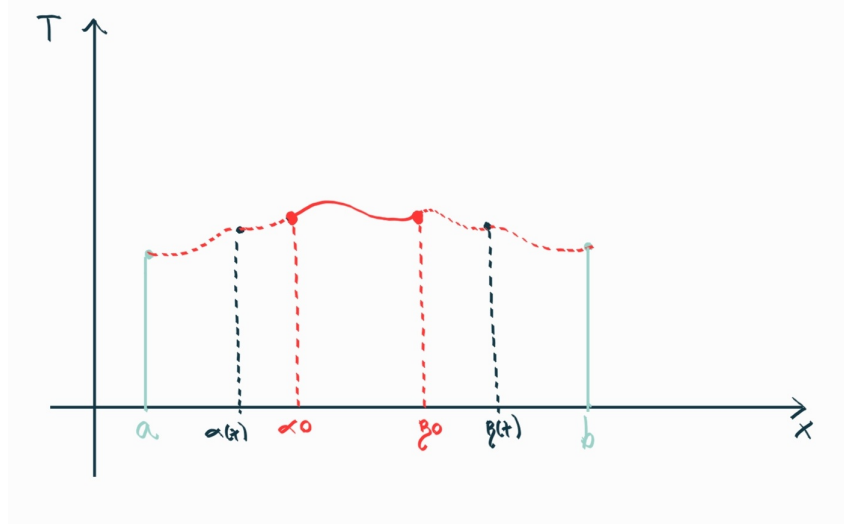
para pequenas vibrações de cordas elásticas com extremidades móveis.

Neste capítulo, consideramos um modelo misto linearizado que descreve esse tipo de vibração com extremidades móveis, que contém o modelo de Kirchhoff como caso particular. Desse modo, para obtermos soluções $u = u(x, t)$ definidas para todo $t \geq 0$, consideraremos um “amortecimento” $\delta \left[\left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t) \right) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]$, onde δ é uma constante positiva a ser fixada.

Mais precisamente, consideremos uma corda elástica esticada com extremidades $\alpha_0 < \beta_0$ sobre o eixo dos x com $a < \alpha_0 < \beta_0 < b$, onde a e b são fixados. Suponha que as extremidades α_0 e β_0 movem-se continuamente para a posição $\alpha(t) < \alpha_0$ e $\beta_0 < \beta(t)$,

2.1 Formulação do Problema

onde $a \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq b$, e consideremos as vibrações transversais da corda na posição $(\alpha(t), \beta(t))$.



Nessas condições, consideremos o problema misto

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \left[\left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t) \right) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right] = 0 & \text{em } \hat{Q} \\ u(x, t) = \begin{cases} \tilde{w} & \text{sobre } \hat{\Sigma}_0 \\ 0 & \text{sobre } \hat{\Sigma} \setminus \hat{\Sigma}_0 \end{cases} \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega_0 = (\alpha_0, \beta_0), \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo

$$a(t) = \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{\gamma(0)},$$

onde τ_0 é a tensão inicial, m é a massa da corda, k é uma constante que depende do material da corda, $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$, $\alpha_0 = \alpha(0)$, $\beta_0 = \beta(0)$ e $\gamma_0 = \gamma(0)$. Formalmente, temos a seguinte definição de controle aproximado para o sistema (2.1).

Em (2.1), $\hat{Q}$ denota o domínio não cilíndrico, do plano $\mathbb{R}^2$, definido como segue

$$\hat{Q} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) < x < \beta(t), \forall t \in (0, T)\}.$$

Sua fronteira lateral é definida por

$$\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}_0 \cup \hat{\Sigma}_0^*,$$

2.1 Formulação do Problema

onde

$$\widehat{\Sigma}_0 = \{(\alpha(t), t); \forall t \in (0, T)\} \quad \text{e} \quad \widehat{\Sigma}_0^* = \widehat{\Sigma} \setminus \widehat{\Sigma}_0 = \{(\beta(t), t); \forall t \in (0, T)\}.$$

Também representamos Ω_t e Ω_0 os intervalos $(\alpha(t), \beta(t))$ e (α_0, β_0) , respectivamente.

Definição 2.1. Dizemos que o sistema (2.1) é aproximadamente controlável no tempo $T > 0$ se, para todo $\varepsilon > 0$ e $\{u^0, u^1\} \in L^2(\Omega_0) \times H^{-1}(\Omega_0)$, existe $\tilde{w} \in L^2(\widehat{\Sigma}_0)$, tal que a solução $u = u(x, t, \tilde{w})$ do sistema (2.1) com dados iniciais $\{u_0, u_1\} = \{0, 0\}$, satisfaz

$$\| \{u(T), u'(T)\} - \{u^0, u^1\} \|_{L^2(\Omega_t) \times H^{-1}(\Omega_t)} < \varepsilon.$$

Agora, consideremos $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ funções reais satisfazendo as seguintes condições:

(H1) $\alpha, \beta \in C^2(0, \infty); \mathbb{R})$ com $\alpha(t) < \beta(t)$ para todo $t \geq 0$, $\alpha'(t) < 0$, e $\beta'(t) > 0$ para todo $t > 0$; $|\alpha'(t) + \gamma'(t)y| < \left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}$ para todo $(y, t) \in [0, 1] \times [0, \infty)$, onde $0 < m_0 = \frac{\tau_0}{m}$;

(H2) $\alpha(t) \in W^{1,\infty}(0, \infty)$;

(H3) $|\alpha''(t) + \gamma''(t)y| < \frac{(\alpha'(t) + \gamma'(t)y)^2}{\gamma(t)}$, $0 \leq y \leq 1$, $t \geq 0$.

Observação 2.1. A hipótese (H1) implica que a função real $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ é crescente sobre $[0, \infty)$. Isso significa, também, que $\widehat{Q}$ é crescente, no sentido que se $t_1 > t_2$, então a projeção $[\alpha(t_1), \beta(t_1)]$ sobre o subespaço $t = 0$ está contido na projeção de $[\alpha(t_2), \beta(t_2)]$ sobre o mesmo subespaço.

• Exemplos de Domínios $\widehat{Q}$.

1. Pela hipótese (H1) temos

$$-\alpha'(t) \leq \left(\frac{m_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta'(t) \leq \left(\frac{m_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

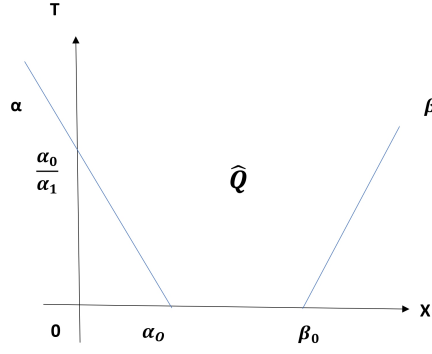
Integrando, obtemos domínios $\widehat{Q}$

$$\alpha(t) = \alpha_0 - \alpha_1 t, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq \left(\frac{m_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta(t) = \beta_0 + \beta_1 t, \quad 0 \leq \beta_1 \leq \left(\frac{m_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Note que, nesse caso, temos fronteiras lineares.

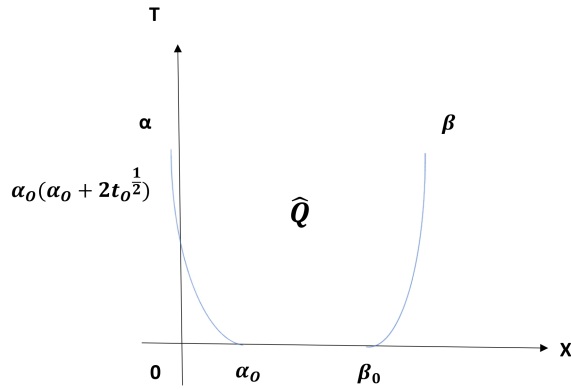
2.1 Formulação do Problema



2. A fronteira

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 + (t_0)^{\frac{1}{2}} - (t + t_0)^{\frac{1}{2}} \\ \beta(t) = \beta_0 - (t_0)^{\frac{1}{2}} + (t + t_0)^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

com $t_0 = 4(\frac{m_0}{2})$ é não linear.



Nosso estudo foi motivado no trabalho de J.-L. Lions [8], onde investigamos questão similar do controle hierárquico para a equação (2.1), utilizando a estratégia de Stackelberg no caso de domínios dependendo do tempo.

Como em [8], dividiremos $\widehat{\Sigma}_0$ em duas partes

$$\widehat{\Sigma}_0 = \widehat{\Sigma}_1 \cup \widehat{\Sigma}_2, \quad (2.2)$$

e consideremos

$$\widetilde{w} = \{\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2\}, \quad \widetilde{w}_i = \text{função controle em } L^2(\widehat{\Sigma}_i), \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

2.1 Formulação do Problema

Portanto, o sistema (2.1) pode ser escrito como sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{a}(t) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \delta \left[\left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t) \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) \right] = 0 \quad \text{em } \hat{Q} \\ \mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_1 & \text{sobre } \hat{\Sigma}_1 \\ \tilde{\mathbf{w}}_2 & \text{sobre } \hat{\Sigma}_2 \\ 0 & \text{sobre } \hat{\Sigma} \setminus \hat{\Sigma}_0 \end{cases} \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, 0) = \mathbf{u}_1(x) \quad \text{em } \Omega_0. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Na decomposição de (2.2) e (2.3), estabelecemos uma hierarquia. Pensamos $\tilde{\mathbf{w}}_1$ como sendo o controle líder e $\tilde{\mathbf{w}}_2$ como sendo o seguidor, sempre na terminologia de Stackelberg.

• **Funcionais custos no cilindro $\hat{Q}$.** Associado a solução $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ de (2.4), consideremos o funcional (secundário)

$$\tilde{J}_2(\tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2) = \frac{1}{2} \iint_{\hat{Q}} (\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2) - \tilde{\mathbf{u}}_2)^2 dx dt + \frac{\tilde{\sigma}}{2} \int_{\hat{\Sigma}_2} \tilde{\mathbf{w}}_2^2 d\hat{\Sigma}, \quad (2.5)$$

e o funcional (principal)

$$\tilde{J}(\tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2) = \int_{\hat{\Sigma}_1} \tilde{\mathbf{w}}_1^2 d\hat{\Sigma}, \quad (2.6)$$

onde $\tilde{\sigma} > 0$ é constante e $\tilde{\mathbf{u}}_2$ é uma função dada em $L^2(\hat{Q})$

Observação 2.2. *Da regularidade e unicidade de solução do sistema (2.1) (vide observação 2.4) e, portanto do sistema (2.4), os funcionais custos $\tilde{J}_2$ e $\tilde{J}$ estão bem definidos.*

O problema de controle que consideraremos é o seguinte: o seguidor $\tilde{\mathbf{w}}_2$ assume que o líder $\tilde{\mathbf{w}}_1$ tem feito uma escolha de sua estratégia (política). Em seguida, tenta encontrar um mínimo para seu custo $\tilde{J}_2(\tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2)$, isto é, ele procura um controle $\tilde{\mathbf{w}}_2 = \mathfrak{F}(\tilde{\mathbf{w}}_1)$ (dependendo de $\tilde{\mathbf{w}}_1$) tal que

$$\tilde{J}_2(\tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2) = \inf_{\tilde{\mathbf{w}}_2 \in L^2(\hat{\Sigma}_2)} \tilde{J}_2(\tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2). \quad (2.7)$$

Após isso, consideramos o estado $\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{w}}_1, \mathfrak{F}(\tilde{\mathbf{w}}_1))$ dado pela solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{a}(t) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \delta \left[\left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t) \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) \right] = 0 \quad \text{em } \hat{Q} \\ \mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_1 & \text{sobre } \hat{\Sigma}_1 \\ \mathfrak{F}(\tilde{\mathbf{w}}_1) & \text{sobre } \hat{\Sigma}_2 \\ 0 & \text{on } \hat{\Sigma} \setminus \hat{\Sigma}_0 \end{cases} \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, 0) = \mathbf{u}_1(x) \quad \text{em } \Omega_0. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

2.1 Formulação do Problema

Encontraremos um controle ótimo $\widetilde{w}_1$ tal que

$$\widetilde{J}(\widetilde{w}_1, \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1)) = \inf_{\overline{w}_1 \in L^2(\widehat{\Sigma}_1)} \widetilde{J}(\overline{w}_1, \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1)), \quad (2.9)$$

sujeito a restrição de controlabilidade aproximada do tipo

$$(u(x, T; \widetilde{w}_1, \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1)), u'(x, T; \widetilde{w}_1, \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1))) \in B_{L^2(\Omega_t)}(u^0, \alpha_0) \times B_{H^{-1}(\Omega_t)}(u^1, \alpha_1), \quad (2.10)$$

onde, de agora em diante, $B_X(C, r)$ denota a bola em um espaço X com centro C e raio r .

Para explicitar esse problema ótimo, iremos considerar os seguintes sub-problemas:

• **Problema 1** Fixado qualquer controle $\widetilde{w}_1$, encontrar o controle seguidor $\widetilde{w}_2 = \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1)$ (dependendo de $\widetilde{w}_1$), associado a solução u de (2.4) satisfazendo a condição (2.7).

• **Problema 2** Assumindo a existência e unicidade da solução do problema 2.29 $\widetilde{w}_2$, mostrar que quando $\widetilde{w}_1$ varia em $L^2(\Omega_t)$, as soluções $(u(x, t; \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2), u'(x, t; \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2))$ da equação (2.4), avaliadas em $t = T$, ou seja, $(u(x, T; \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2), u'(x, T; \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2))$, geram um subconjunto denso de $L^2(\Omega_t) \times H^{-1}(\Omega_t)$.

Observe que quando (x, t) varia em $\widehat{Q}$ o ponto (y, t) , com $y = \frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)}$, varia em $Q = \Omega \times (0, T)$, onde $\Omega = (0, 1)$. Então a aplicação

$$\tau: \widehat{Q} \rightarrow Q, \quad \tau(x, t) = (y, t)$$

é de classe C^2 com inversa τ^{-1} também de classe C^2 . Portanto, a mudança de variáveis com $u(x, t) = v(y, t)$, transforma o problema de valor inicial de fronteira (2.1) no sistema equivalente

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Lv = 0 \quad \text{em } Q, \\ \left\{ \begin{array}{l} v(0, t) = w \quad \text{sobre } \Sigma_0, \\ v(1, t) = 0 \quad \text{sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{array} \right. \\ v(y, 0) = v_0(y), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = v_1(y), \quad 0 < y < 1, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

2.1 Formulação do Problema

onde

$$\begin{aligned}
 Lv &= -\frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}, \\
 &+ \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t}, \\
 \check{a}(y, t) &= \frac{m_0}{2\gamma^2(t)} - \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)} \right)^2, \\
 \check{b}(y, t) &= -2 \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)} \right), \\
 \check{c}(y, t) &= - \left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t)y}{\gamma(t)} \right), \\
 \Sigma &= \Sigma_0 \cup \Sigma_0^*, \\
 \Sigma_0 &= \{(0, t) : 0 < t < T\}, \\
 \Sigma_0^* &= \Sigma \setminus \Sigma_0 = \{(1, t) : 0 < t < T\}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Com efeito, usando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}(y, t) = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{2.13}$$

De (2.13), usando novamente a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{2.14}$$

De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
 &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

e assim segue (2.14).

2.1 Formulação do Problema

Também,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = - \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t) y}{\gamma(t)} \right), \quad (2.15)$$

visto que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{-\alpha'(t) \gamma(t) - (x - \alpha(t)) \gamma'(t)}{\gamma^2(t)} \\ &= \frac{-\alpha'(t) \gamma(t) - y \gamma(t) \gamma'(t)}{\gamma^2(t)} \\ &= - \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t) y}{\gamma(t)} \right). \end{aligned}$$

Derivando (2.15) em relação a t , obtemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t) y}{\gamma(t)} \right) - \frac{2\gamma'(t) y'}{\gamma(t)}, \quad (2.16)$$

pois,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t) y}{\gamma(t)} \right] \\ &= - \left[\frac{(\alpha'(t) + \gamma'(t) y)' \gamma(t) - (\alpha'(t) + \gamma'(t) y) \gamma'(t)}{\gamma^2(t)} \right] \\ &= - \left[\frac{(\alpha''(t) + \gamma''(t) y + \gamma'(t) y') \gamma(t) - (\alpha'(t) + \gamma'(t) y) \gamma'(t)}{\gamma^2(t)} \right] \\ &= - \left[\left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t) y}{\gamma(t)} \right) + \frac{\gamma'(t) y'}{\gamma(t)} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t) y}{\gamma(t)} \right) \right] \\ &= - \left[\left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t) y}{\gamma(t)} \right) + \frac{\gamma'(t) y'}{\gamma(t)} + \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} y' \right] \\ &= - \left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t) y + 2\gamma'(t) y'}{\gamma(t)} \right). \end{aligned}$$

Substituindo (2.15) e (2.16) em (2.14), deduzimos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned} a(y, t) &= \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t) y}{\gamma(t)} \right)^2, \\ \check{b}(y, t) &= -2 \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t) y}{\gamma(t)} \right), \\ \check{c}(y, t) &= - \left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t) y}{\gamma(t)} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{(\gamma(t))^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (2.18)$$

2.1 Formulação do Problema

De fato,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(y, t) = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial v}{\partial y},$$

isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.19)$$

De (2.19), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\gamma(t)} \frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma(t)} \frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{(\gamma(t))^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

e assim se segue (2.18).

Agora, como

$$x = \alpha(t) + y\gamma(t)$$

então

$$\frac{\partial x}{\partial t} = y\gamma'(t) + \alpha'(t) = \frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t).$$

Logo,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(y, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t) \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Portanto, o problema (2.1) é transformado pela aplicação $\tau : \widehat{Q} \rightarrow Q$ no seguinte problema cilíndrico

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} a(t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} \\ + \delta \frac{\partial v}{\partial t}(y, t) = 0 \text{ em } Q, \\ \left\{ \begin{array}{l} v(0, t) = w \text{ sobre } \Sigma_0, \\ v(1, t) = 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{array} \right. \\ v(y, 0) = v_0(y), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = v_1(y), \quad 0 < y < 1. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

2.1 Formulação do Problema

Notemos que de (2.20)₁, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} a(t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} \\
& + \delta \frac{\partial v}{\partial t} \\
& = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} a(t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{m_0}{2\gamma^2(t)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{m_0}{2\gamma^2(t)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \\
& + \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t} \\
& = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{m_0}{2\gamma^2(t)} - a(y, t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \\
& + \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t} \\
& = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \check{a}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \\
& - 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

onde

$$\begin{aligned}
\check{a}(y, t) &= \frac{m_0}{2\gamma^2(t)} - a(y, t), \\
\check{b}(y, t) &= -2 \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)} \right), \\
\check{c}(y, t) &= - \left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t)y}{\gamma(t)} \right).
\end{aligned}$$

Agora, como

$$\check{a}(y, t) = \frac{m_0}{2\gamma^2(t)} - a(y, t),$$

então

$$\frac{\partial \check{a}}{\partial y}(y, t) = -\frac{\partial a}{\partial y}(y, t) = -2 \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)} \right) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t},$$

isto é,

$$\frac{\partial \check{a}}{\partial y}(y, t) = 2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{\partial y}{\partial t}. \tag{2.22}$$

Substituindo (2.22) na última igualdade de (2.21), segue que

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \check{a}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial \check{a}}{\partial y}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \\
& + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

2.1 Formulação do Problema

Portanto, o sistema (2.20) pode ser reescrito como sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \\ + \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \text{ em } Q, \\ \left\{ \begin{array}{l} v(0, t) = w \text{ sobre } \Sigma_0, \\ v(1, t) = 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{array} \right. \\ v(y, 0) = v_0(y), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = v_1(y), \quad 0 < y < 1, \end{array} \right. \quad (2.23)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{a}(y, t) = \frac{m_0}{2\gamma^2(t)} - \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)} \right)^2, \\ \check{b}(y, t) = -2 \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)} \right), \\ \check{c}(y, t) = - \left(\frac{\alpha''(t) + \gamma''(t)y}{\gamma(t)} \right). \end{array} \right.$$

Considerando o operador

$$Lv = -\frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t},$$

segue (2.11) e (2.12).

Desse modo, investigaremos o problema de controle para o problema equivalente (2.11).

Para isso, dividiremos Σ_0 em duas partes

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad (2.24)$$

e consideramos

$$w = \{w_1, w_2\}, \quad w_i \in L^2(\Sigma_i), \quad i = 1, 2. \quad (2.25)$$

Também podemos escrever

$$w = w_1 + w_2,$$

com

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_0. \quad (2.26)$$

Então, reescrevemos (2.11) como sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} v'' + Lv = 0 \text{ em } Q, \\ v = \left\{ \begin{array}{l} w_1 \text{ sobre } \Sigma_1, \\ w_2 \text{ sobre } \Sigma_2, \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{array} \right. \\ v(y, 0) = v_0(y), \quad v'(y, 0) = v_1(y), \quad 0 < y < 1, \end{array} \right. \quad (2.27)$$

2.1 Formulação do Problema

onde usamos a notação $\mathbf{v}'$ em vez de $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ e $\mathbf{v}''$ em vez de $\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}$ para uma melhor compreensão.

Observação 2.3. *Para efeitos de controle aproximado, pela linearidade do sistema (2.27), podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 = 0$.*

Na decomposição de (2.24) e (2.25) estabelecemos uma hierarquia. Pensamos $\mathbf{w}_1$ como controle líder e $\mathbf{w}_2$ é o controle seguidor, sempre na terminologia de Stackelberg.

• **Funcionais Custos no cilindro $\mathbf{Q}$.** Do difeomorfismo τ que transforma $\widehat{\mathbf{Q}}$ em $\mathbf{Q}$, transformamos os funcionais custos $\widetilde{J}_2, \widetilde{J}$ nos funcionais custos J_2, J definidos, respectivamente, por

$$J_2(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) [\mathbf{v}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) - \mathbf{v}_2(\mathbf{y}, t)]^2 d\mathbf{y} dt + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} \mathbf{w}_2^2 d\Sigma \quad (2.28)$$

e

$$J(\mathbf{w}_1) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \mathbf{w}_1^2 d\Sigma, \quad (2.29)$$

onde $\sigma > 0$ é uma constante positiva e $\mathbf{v}_2(\mathbf{y}, t)$ é uma função dada em $L^2(\Omega \times (0, T))$.

Observação 2.4. *Das hipóteses **(H1) – (H3)**, para cada $\mathbf{v}_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{v}_1 \in L^2(\Omega)$ e $\mathbf{w}_i \in L^2(\widehat{\Sigma}_i)$, $i = 1, 2$, existe exatamente uma solução $\mathbf{v}$ do sistema (2.11) (vide Seção 2.4, Teorema 2.4) e, portanto do sistema (2.27), com $\mathbf{v} \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, e $\mathbf{v}' \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$. Em particular, os funcionais J_2 e J estão bem definidos.*

Usando o difeomorfismo $\tau^{-1}(\mathbf{y}, t) = (\mathbf{x}, t)$, de $\mathbf{Q}$ em $\widehat{\mathbf{Q}}$, obtemos uma única solução global fraca $\mathbf{u}$ para o sistema (2.1) (vide Seção 2.4, Teorema 2.5) e portanto para o sistema (2.4), com regularidade $\mathbf{u} \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega_t))$, $\mathbf{u}' \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega_t))$.

Associado aos funcionais J_2 e J definidos acima, consideremos os seguintes sub-problemas:

• **Problem 3** Fixado um controle líder $\mathbf{w}_1$, encontrar um controle seguidor $\mathbf{w}_2$ (dependendo de $\mathbf{w}_1$) associado a solução $\mathbf{v}$ de (2.27) satisfazendo

$$J_2(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \inf_{\widehat{\mathbf{w}}_2 \in L^2(\Sigma_2)} J_2(\mathbf{w}_1, \widehat{\mathbf{w}}_2), \quad (2.30)$$

relacionado a J_2 definido em (2.28).

• **Problem 4** Assumindo a existência e unicidade de $\mathbf{w}_2$, mostrar que quando $\mathbf{w}_1$ varia em $L^2(\Omega)$, as soluções $(\mathbf{v}(\mathbf{y}, t; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2), \mathbf{v}'(\mathbf{x}, t; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2))$ da equação (2.27), avaliadas em $t = T$, ou seja, $(\mathbf{v}(\mathbf{y}, T; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2), \mathbf{v}'(\mathbf{y}, T; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2))$, geram um subconjunto denso de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

2.2 Mínimo do Funcional Custo J_2

Notemos que se w_2 é a única solução do problema (2.28), dependendo de w_1 , então sua transformação, por τ^{-1} , é a única solução $\tilde{w}_2$ para (2.5), que depende de $\tilde{w}_1$.

Lembremos que nosso problema inicial eram os controles $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ atuarem tal que a função u , única solução de (2.4), atinja no tempo T um estado ideal denotado (u^0, u^1) pertencente $L^2(\Omega_t) \times H^{-1}(\Omega_t)$ com funcional custo definido por (2.5).

Do difeomorfismo τ , esse problema em $\hat{Q}$ foi transformado num problema equivalente no cilindro Q . Assim, fixado $(v^0, v^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, os controles w_1, w_2 deverão atuar tal que a única solução v de (2.27), avaliada em $t = T$, atinja o estado ideal (v^0, v^1) . Isso será feito no sentido da controlabilidade aproximada. De fato, é suficiente provar que se w_2 , dependendo de w_1 , é o único mínimo para o funcional custo dado em (2.28), então temos controlabilidade aproximada. Isso significa que se existe o único w_2 , que minimiza o funcional custo J_2 e v é a única solução de (2.27), então o conjunto gerado por $(v(y, T; w_1, w_2), v'(y, T; w_1, w_2))$ é denso em $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, isto é, aproxima (v^0, v^1) . Este problema será estudado na seção 2.3, isto é, após acharmos w_2 (Seção 2.2) para cada controle w_1 , encontraremos um controle ótimo $\bar{w}_1$ tal que

$$J(\bar{w}_1) = \inf_{w_1} J(w_1) \quad (2.31)$$

sujeito a restrição de controlabilidade aproximada do tipo

$$(v(y, T; w_1, w_2), v'(y, T; w_1, w_2)) \in B_{L^2(0,1)}(v^0, \alpha_0) \times B_{H^{-1}(\Omega)}(v^1, \alpha_1). \quad (2.32)$$

2.2 Mínimo do Funcional Custo J_2

Nesta seção, fixado qualquer controle $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$, queremos determinar a existência e unicidade da solução para o problema

$$\inf_{w_2 \in L^2(\Sigma_2)} J_2(w_1, w_2), \quad (2.33)$$

e depois obtermos a caracterização desta solução em termos de um sistema adjunto, para em seguida, obtermos o sistema otimizado para o controle seguidor w_2 .

O problema (2.33) admite uma única solução

$$w_2 = \mathfrak{F}(w_1). \quad (2.34)$$

Com efeito, para a solução do problema (2.33), minimizaremos o funcional J_2 fazendo uso do Teorema 1.4. De fato, seja

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(v, w_2) \in L^2(Q) \times L^2(\Sigma_2) : v \text{ solução de (2.27)}\} \subset (L^2(Q))^2$$

2.2 Mínimo do Funcional Custo J_2

e

$$J_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2) : \mathcal{U}_{\text{ad}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por (2.28). Escrevemos $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$.

Então,

- (a) $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ é não vazio e sendo $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ um subespaço de um espaço de Hilbert, então $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ é convexo. É claro, também, que $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ é fechado, pois dado $(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2) \in \overline{\mathcal{U}_{\text{ad}}}$ então $(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$.

- (b) J_2 é fracamente coercivo.

De fato, usando a desigualdade triangular, temos

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_2\|_{L^2(Q)} \geq \left| \|\mathbf{v}\|_{L^2(Q)} - \|\mathbf{v}_2\|_{L^2(Q)} \right|$$

e como $\mathbf{v}_2$ é fixo, segue que

$$\lim_{\|\mathbf{w}_2\|_{L^2(\Sigma_2)} \rightarrow \infty} J_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2) = \frac{1}{2} \left\| (\gamma(\mathbf{t}))^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_2) \right\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\sigma}{2} \|\mathbf{w}_2\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \rightarrow \infty.$$

Logo, segue a coercividade fraca de J_2 .

- (c) J_2 é fracamente sequencialmente semi-contínuo inferiormente.

Com efeito, sejam duas sequências $(\mathbf{v}^n)$, $(\mathbf{w}_2^n) \subset \mathcal{U}_{\text{ad}}$ onde $(\mathbf{v}^n)$ depende de $(\mathbf{w}_2^n)$ tal que

$$\mathbf{w}_2^n \rightharpoonup \mathbf{w}_2 \text{ em } L^2(\Sigma_2), \text{ logo } \mathbf{v}^n \rightharpoonup \mathbf{v} \text{ em } L^2(Q).$$

Portanto, conforme Brezis ([3], página 58), temos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\| (\gamma(\mathbf{t}))^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v}^n - \mathbf{v}_2) \right\|_{L^2(Q)}^2 \geq \frac{1}{2} \left\| (\gamma(\mathbf{t}))^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_2) \right\|_{L^2(Q)}^2$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}_2^n\|_{L^2(\Sigma_2)} \geq \|\mathbf{w}_2\|_{L^2(\Sigma_2)}$$

2.2 Mínimo do Funcional Custo J_2

Agora,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \inf J_2(\mathbf{v}^n, \mathbf{w}_2^n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \frac{1}{2} \|(\gamma(\mathbf{t}))^{\frac{1}{2}}(\mathbf{v}^n - \mathbf{v}_2)\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\sigma}{2} \|\mathbf{w}_2^n\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \right\} \\
&\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \frac{1}{2} \|(\gamma(\mathbf{t}))^{\frac{1}{2}}(\mathbf{v}^n - \mathbf{v}_2)\|_{L^2(Q)}^2 \right\} \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \frac{\sigma}{2} \|\mathbf{w}_2^n\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \right\} \\
&\geq \frac{1}{2} \|(\gamma(\mathbf{t}))^{\frac{1}{2}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_2)\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\sigma}{2} \|\mathbf{w}_2\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \\
&= J_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf J_2(\mathbf{v}^n, \mathbf{w}_2^n) \geq J_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2),$$

o que caracteriza a semi-continuidade fraca inferior.

(d) J_2 é estritamente convexo.

De fato, sejam $\lambda \in (0, 1)$ e $(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}_2) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ com $(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2) \neq (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}_2)$. Escrevendo $\mathbf{v}_2$ como

$$\mathbf{v}_2 = \lambda \mathbf{v}_2 + (1 - \lambda)\mathbf{v}_2,$$

temos

$$\begin{aligned}
J_2[\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2) + (1 - \lambda)(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}_2)] &= J_2[\lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda)\tilde{\mathbf{v}}, \lambda \mathbf{w}_2 + (1 - \lambda)\tilde{\mathbf{w}}_2] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(\mathbf{t}) [\lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda)\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_2]^2 d\mathbf{y} d\mathbf{t} + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} [\lambda \mathbf{w}_2 + (1 - \lambda)\tilde{\mathbf{w}}_2]^2 d\Sigma \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(\mathbf{t}) [\lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda)\tilde{\mathbf{v}} - \lambda \mathbf{v}_2 - (1 - \lambda)\mathbf{v}_2]^2 d\mathbf{y} d\mathbf{t} \\
&\quad + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} [\lambda \mathbf{w}_2 + (1 - \lambda)\tilde{\mathbf{w}}_2]^2 d\Sigma \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(\mathbf{t}) [\lambda(\mathbf{v} - \mathbf{v}_2) + (1 - \lambda)(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_2)]^2 d\mathbf{y} d\mathbf{t} \\
&\quad + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} [\lambda \mathbf{w}_2 + (1 - \lambda)\tilde{\mathbf{w}}_2]^2 d\Sigma.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

2.2 Mínimo do Funcional Custo J_2

Analisando a última igualdade do lado direito de (2.35), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) [\lambda(v - v_2) + (1 - \lambda)(\tilde{v} - v_2)]^2 dy dt \\
& + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} [\lambda w_2 + (1 - \lambda)\tilde{w}_2]^2 d\Sigma \\
& = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (v - v_2)^2 dy dt \\
& + \underbrace{\lambda(1 - \lambda) \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (v - v_2)(\tilde{v} - v_2) dy dt}_{(*)} \\
& + \frac{(1 - \lambda)^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (\tilde{v} - v_2)^2 dy dt + \frac{\sigma \lambda^2}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma \\
& + \underbrace{\sigma \lambda(1 - \lambda) \int_{\Sigma_2} w_2 \tilde{w}_2 d\Sigma}_{(**)} + \frac{\sigma(1 - \lambda)^2}{2} \int_{\Sigma_2} \tilde{w}_2^2 d\Sigma.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Vamos majorar $(*)$ e $(**)$ aplicando a desigualdade de Young, inicialmente na expressão $(*)$ e depois multiplicando o resultado por $\lambda(1 - \lambda) > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \lambda(1 - \lambda) \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (v - v_2)(\tilde{v} - v_2) dy dt \\
& < \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (v - v_2)^2 dy dt + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (\tilde{v} - v_2)^2 dy dt
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Novamente aplicando a desigualdade de Young na expressão $(**)$ e depois multiplicando o resultado por $\sigma\lambda(1 - \lambda) > 0$, obtemos

$$\sigma \lambda(1 - \lambda) \int_{\Sigma_2} w_2 \tilde{w}_2 d\Sigma < \frac{\sigma \lambda(1 - \lambda)}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma + \frac{\sigma \lambda(1 - \lambda)}{2} \int_{\Sigma_2} \tilde{w}_2^2 d\Sigma. \tag{2.38}$$

Substituindo (2.37) e (2.38) no lado direito de (2.35), obtemos a desigualdade estrita

$$\begin{aligned}
J_2[\lambda(v, w_2) + (1 - \lambda)(\tilde{v}, \tilde{w}_2)] & < \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (v - v_2)^2 dy dt \\
& + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (v - v_2)^2 dy dt + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (\tilde{v} - v_2)^2 dy dt \\
& + \frac{(1 - \lambda)^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (\tilde{v} - v_2)^2 dy dt + \frac{\sigma \lambda^2}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma + \frac{\sigma \lambda(1 - \lambda)}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma \\
& + \frac{\sigma \lambda(1 - \lambda)}{2} \int_{\Sigma_2} \tilde{w}_2^2 d\Sigma + \frac{\sigma(1 - \lambda)^2}{2} \int_{\Sigma_2} \tilde{w}_2^2 d\Sigma = \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (v - v_2)^2 dy dt \\
& + \frac{\sigma \lambda}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma + \frac{(1 - \lambda)}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) (\tilde{v} - v_2)^2 dy dt + \frac{\sigma(1 - \lambda)}{2} \int_{\Sigma_2} \tilde{w}_2^2 d\Sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \left[\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t)(v - v_2)^2 dy dt + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma \right] \\
&+ (1 - \lambda) \left[\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t)(\tilde{v} - v_2)^2 dy dt + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} \tilde{w}_2^2 d\Sigma \right] \\
&= \lambda J_2(v, w_2) + (1 - \lambda) J_2(\tilde{v}, \tilde{w}_2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$J_2[\lambda(v, w_2) + (1 - \lambda)(\tilde{v}, \tilde{w}_2)] < \lambda J_2(v, w_2) + (1 - \lambda) J_2(\tilde{v}, \tilde{w}_2).$$

Portanto, existe uma única solução w_2 para o problema (2.33). Como para cada w_1 dado encontramos uma única solução w_2 , podemos relacionar uma dependência entre w_1 e w_2 de forma que $w_2 = \mathfrak{F}(w_1)$.

Agora, dado w_1 , calcularemos a derivada de Gateaux do funcional $J_2(v; w_1, w_2)$ e igualaremos a zero, encontrando assim a equação de Euler-Lagrange associada ao problema (2.33).

Com efeito, sejam $\theta_1 \in L^2(\Omega \times (0, T))$ e $\theta_2 \in L^2(\Sigma_2)$. Para $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned}
J_2'(v; w_2) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ J_2(v + \varepsilon \theta_1; w_2 + \varepsilon \theta_2) - J_2(v; w_2) \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t)(v + \varepsilon \theta_1 - v_2)^2 dy dt + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} (w_2 + \varepsilon \theta_2)^2 d\Sigma \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t)(v - v_2)^2 dy dt - \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) \left[(v - v_2)^2 + 2\varepsilon \theta_1(v - v_2) + \varepsilon^2 \theta_1^2 \right] dy dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} (w_2 + \varepsilon \theta_2)^2 d\Sigma - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t)(v - v_2)^2 dy dt - \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t)(v - v_2)^2 dy dt + \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t)(v - v_2) \theta_1 dy dt \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) \theta_1^2 dy dt + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma + \varepsilon \sigma \int_{\Sigma_2} w_2 \theta_2 d\Sigma \\
&\quad \left. + \frac{\sigma}{2} \varepsilon^2 \int_{\Sigma_2} \theta_2^2 d\Sigma - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t)(v - v_2)^2 dy dt - \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma \right\} \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t)(v - v_2) \theta_1 dy dt + \sigma \int_{\Sigma_2} w_2 \theta_2 d\Sigma.
\end{aligned}$$

Assim, a equação de Euler-Lagrange para (2.28)   dada por

$$\int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t)(v - v_2) \hat{v} dy dt + \sigma \int_{\Sigma_2} w_2 \hat{w}_2 d\Sigma = 0, \quad \forall \quad \hat{w}_2 \in L^2(\Sigma_2), \quad (2.39)$$

2.2 Mínimo do Funcional Custo J_2

onde $\widehat{v}$ é solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{v}'' + L\widehat{v} = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ \widehat{v} = \begin{cases} 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \widehat{w}_2 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ 0 & \text{sobre } \Sigma \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2), \end{cases} \\ \widehat{v}(y, 0) = 0, \quad \widehat{v}'(y, 0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Para obtermos o sistema otimizado, precisamos do sistema adjunto relacionado a (2.40).

Para isso, multipliquemos $(2.40)_1$ por uma função $p = p(y, t)$, e integremos o resultado obtido em $\Omega \times (0, T) = (0, 1) \times (0, T)$. Temos

$$\int_0^T p \widehat{v}'' dt + \int_0^T p(L\widehat{v}) dt = 0.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$p(T)\widehat{v}'(T) - p(0)\widehat{v}'(0) - p'(T)\widehat{v}(T) + p'(0)\widehat{v}(0) + \int_0^T \widehat{v} p'' dt + \int_0^T p(L\widehat{v}) dt = 0.$$

Da definição do operador L

$$L\widehat{v} = -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} \right) + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial y \partial t} + \check{c}(y, t) \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} + \delta \frac{\partial \widehat{v}}{\partial t},$$

e integrando a expressão acima em $\Omega = (0, 1)$, resulta que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} p(T)\widehat{v}'(T) dy - \int_{\Omega} p(0)\widehat{v}'(0) dy - \int_{\Omega} p'(T)\widehat{v}(T) dy + \int_{\Omega} p'(0)\widehat{v}(0) dy \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \widehat{v} p'' dy dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta \widehat{v} p dy dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} \right) p dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial y \partial t} p dy dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} p dy dt + \delta \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial t} p dy dt = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Pela primeira fórmula de Green, temos

$$- \int_{\Omega} \Delta \widehat{v} p dy = \int_{\Omega} \nabla \widehat{v} \nabla p dy - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} p d\Gamma. \quad (2.42)$$

Usando novamente a primeira fórmula de Green, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \widehat{v} \nabla p dy = - \int_{\Omega} \widehat{v} \Delta p dy + \int_{\partial \Omega} \widehat{v} \frac{\partial p}{\partial y} d\Gamma. \quad (2.43)$$

2.2 Mínimo do Funcional Custo J_2

Substituindo (2.43) em (2.42), segue que

$$-\int_{\Omega} \Delta \hat{v} p \, dy = -\int_{\Omega} \hat{v} \Delta p \, dy + \int_{\partial\Omega} \hat{v} \frac{\partial p}{\partial y} \, d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} p \, d\Gamma.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta \hat{v} p \, dy &= -\int_{\Omega} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \hat{v} \Delta p \, dy + \int_{\partial\Omega} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \hat{v} \frac{\partial p}{\partial y} \, d\Gamma \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} p \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_{\Omega} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta \hat{v} p \, dy \, dt &= -\int_0^T \int_{\Omega} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \hat{v} \Delta p \, dy \, dt + \int_{\Sigma} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \hat{v} \frac{\partial p}{\partial y} \, d\Sigma \\ &\quad - \int_{\Sigma} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} p \, d\Sigma. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Suponhamos que

$$p(1, t) = p(0, t) = 0 \text{ sobre } \Sigma.$$

Agora,

•

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) p \, dy &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) p \, dy \\ &= \check{a}(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}(y, t) p(y, t) \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \check{a}(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \, dy \\ &= - \int_0^1 \check{a}(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \, dy \\ &= -\check{a}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} \hat{v}(y, t) \Big|_{y=0}^{y=1} + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} \right) \hat{v} \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} \right) \hat{v} \, dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} \right) \hat{v} \, dy, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) p \, dy \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} \right) \hat{v} \, dy \, dt. \tag{2.45}$$

•

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} p \, dy &= \int_0^1 \check{b}(y, t) p \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right) dy \\
 &= \check{b}(y, t) p(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(y, t) \Big|_{y=0}^{y=1} \\
 &\quad - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{b}(y, t) p(y, t) \right) \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} dy \\
 &= - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \check{b}}{\partial y}(y, t) p(y, t) + \check{b}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y}(y, t) \right] \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} dy \\
 &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y}(y, t) p(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} dy \\
 &\quad - \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y}(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} dy \\
 &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y}(y, t) p(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} dy \\
 &\quad - \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y}(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} dy.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} p \, dy \, dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \check{b}}{\partial y}(y, t) p(y, t) \right) \hat{v} \, dy \, dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y}(y, t) \right) \hat{v} \, dy \, dt \\
 &= \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \check{b}}{\partial t \partial y} p(y, t) \hat{v}(y, t) \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y}(y, t) \frac{\partial p}{\partial t}(y, t) \hat{v}(y, t) \, dy \, dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial y}(y, t) \hat{v}(y, t) \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial y} \hat{v}(y, t) \, dy \, dt
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

•

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} p \, dy &= \int_{\Omega} \check{c}(y, t) p(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} dy \\
 &= \check{c}(y, t) p(y, t) \hat{v}(y, t) \Big|_{y=0}^{y=1} \\
 &\quad - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{c}(y, t) p(y, t) \right) \hat{v}(y, t) dy \\
 &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{c}(y, t) p(y, t) \right) \hat{v}(y, t) dy \\
 &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \check{c}}{\partial y}(y, t) p(y, t) \hat{v}(y, t) dy \\
 &\quad - \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y}(y, t) \hat{v}(y, t) dy,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} p \, dy \, dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \check{c}}{\partial y}(y, t) p(y, t) \hat{v}(y, t) \, dy \, dt \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y}(y, t) \hat{v}(y, t) \, dy \, dt. \end{aligned} \quad (2.47)$$

•

$$\begin{aligned} \int_0^T p(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \, dt &= p(y, t) \hat{v}(y, t) \Big|_{y=0}^{y=T} - \int_0^T \frac{\partial p}{\partial t}(y, t) \hat{v}(y, t) \, dt \\ &= p(T) \hat{v}(T) - p(0) \hat{v}(0) - \int_0^T \frac{\partial \hat{p}}{\partial t}(y, t) \hat{v}(y, t) \, dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \delta \int_0^T \int_{\Omega} p(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \, dy \, dt &= \delta \int_{\Omega} p(T) \hat{v}(T) \, dy - \delta \int_{\Omega} \underbrace{p(0) \hat{v}(0)}_{=0} \, dy - \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t}(y, t) \hat{v}(y, t) \, dy \, dt \\ &= \delta \int_{\Omega} p(T) \hat{v}(T) \, dy - \delta \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t}(y, t) \hat{v}(y, t) \, dy \, dt \end{aligned} \quad (2.48)$$

Substituindo (2.40)₃, (2.44), (2.45), (2.46), (2.47), (2.48) em (2.41), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} p(T) \hat{v}'(T) \, dy - \int_{\Omega} p'(T) \hat{v}(T) \, dy + \int_0^T \int_{\Omega} p'' \hat{v} \, dy \, dt \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta p \hat{v} \, dy \, dt + \int_{\Sigma} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial p}{\partial y} \hat{v} \, d\Sigma \\ &- \int_{\Sigma} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} p \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \, d\Sigma \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} \right) \hat{v} \, dy \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \check{b}}{\partial y \partial t} p \hat{v} \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial t} \hat{v} \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial y} \hat{v} \, dy \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial t} \hat{v} \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \check{c}}{\partial y} p \hat{v} \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} \hat{v} \, dy \, dt \\ &+ \delta \int_{\Omega} p(T) \hat{v}(T) \, dy - \delta \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} \hat{v} \, dy \, dt = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.2 Mínimo do Funcional Custo J_2

Agrupando os membros de (2.49), resulta que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} p(T) \hat{v}'(T) dy - \int_{\Omega} p'(T) \hat{v}(T) dy + \int_0^T \int_{\Omega} p'' \hat{v} dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta p \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial t} + \left[\frac{\partial \check{b}}{\partial t} - \check{c}(y, t) \right] \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \check{b}}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial t} \\ & + \left[\frac{\partial^2 \check{b}}{\partial y \partial t} - \frac{\partial \check{c}}{\partial y} \right] p - \delta \frac{\partial p}{\partial t} \Big\} \hat{v} dy dt \\ & + \int_{\Sigma} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial p}{\partial y} \hat{v} d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} p \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} d\Sigma + \delta \int_{\Omega} p(T) \hat{v}(T) dy = 0. \end{aligned}$$

Portanto, da expressão acima, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} p(T) \hat{v}'(T) dy - \int_{\Omega} p'(T) \hat{v}(T) dy + \int_0^T \int_{\Omega} p'' \hat{v} dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} (L^* p) \hat{v} dy dt \\ & + \int_{\Sigma} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial p}{\partial y} \hat{v} d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} p \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} d\Sigma + \delta \int_{\Omega} p(T) \hat{v}(T) dy = 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde L^* é a adjunta de L dada formalmente por

$$\begin{aligned} L^* p = & -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta p - \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial t} + \left[\frac{\partial \check{b}}{\partial t} - \check{c}(y, t) \right] \frac{\partial p}{\partial y} \\ & + \frac{\partial \check{b}}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{\partial^2 \check{b}}{\partial y \partial t} - \frac{\partial \check{c}}{\partial y} \right] p - \delta \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned}$$

Como não temos informação sobre $\hat{v}(y, T)$ e $\hat{v}'(y, T)$, então assumiremos que $p(y, T) = p'(y, T) = 0$ em Ω e $p(y, T) = 0$ sobre Σ , o que juntamente com a separação da fronteira em (2.50), nos dá

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \underbrace{p(T) \hat{v}'(T)}_{=0} dy - \int_{\Omega} \underbrace{p'(T) \hat{v}(T)}_{=0} dy + \int_0^T \int_{\Omega} p'' \hat{v} dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} (L^* p) \hat{v} dy dt \\ & + \int_{\Sigma_1} \underbrace{\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial p}{\partial y} \hat{v}}_{=0} d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial p}{\partial y} \hat{v} d\Sigma - \int_{\Sigma} \underbrace{\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} p \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}}_{=0} d\Sigma + \\ & + \delta \int_{\Omega} \underbrace{p(T) \hat{v}(T)}_{=0} dy = 0. \end{aligned}$$

Assumindo que

$$p'' + L^* p = \gamma(t)(v - v_2),$$

obtemos da expressão acima que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t)(v - v_2) \hat{v} dy dt + \int_{\Sigma_2} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial p}{\partial y} \hat{v} d\Sigma = 0. \quad (2.51)$$

2.2 Mínimo do Funcional Custo J_2

Considerando $\mathbf{p}$ como solução do sistema adjunto associado

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}'' + \mathbf{L}^* \mathbf{p} = \gamma(\mathbf{t})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_2), \text{ em } Q, \\ \mathbf{p} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \mathbf{p}(\mathbf{T}) = \mathbf{p}'(\mathbf{T}) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

e observando que $\hat{\mathbf{v}}$ é solução de (2.40), temos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{p}'' + \mathbf{L}^* \mathbf{p}) \hat{\mathbf{v}} \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{t} + \int_{\Sigma_2} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{t}) - \frac{\mathbf{m}_0}{2}}{\gamma^2(\mathbf{t})} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}} \hat{\mathbf{w}}_2 \, d\Sigma = 0. \quad (2.52)$$

De (2.39) e (2.52), obtemos

$$\int_{\Sigma_2} \left(\sigma \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{a}(\mathbf{t}) - \frac{\mathbf{m}_0}{2}}{\gamma^2(\mathbf{t})} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}} \right) \hat{\mathbf{w}}_2 \, d\Sigma = 0 \quad \forall, \hat{\mathbf{w}}_2 \in L^2(\Sigma_2),$$

donde

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{t}) - \frac{\mathbf{m}_0}{2}}{\sigma \gamma^2(\mathbf{t})} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}} \text{ sobre } \Sigma_2. \quad (2.53)$$

Em resumo, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Para cada $\mathbf{w}_1 \in L^2(\Sigma_1)$ existe um único $\mathbf{w}_2$ no sentido de (2.30). Além disso, o seguidor $\mathbf{w}_2$ é dado por*

$$\mathbf{w}_2 = \mathfrak{F}(\mathbf{w}_1) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{t}) - \frac{\mathbf{m}_0}{2}}{\sigma \gamma^2(\mathbf{t})} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}} \text{ sobre } \Sigma_2, \quad (2.54)$$

onde $\{\mathbf{v}, \mathbf{p}\}$ é a única solução do sistema otimizado

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}'' + \mathbf{L}\mathbf{v} = 0 \text{ em } Q, \\ \mathbf{p}'' + \mathbf{L}^* \mathbf{p} = \gamma(\mathbf{t})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_2) \text{ em } Q, \\ \mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{w}_1 \text{ sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\mathbf{a}(\mathbf{t}) - \frac{\mathbf{m}_0}{2}}{\sigma \gamma^2(\mathbf{t})} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}} \text{ sobre } \Sigma_2, \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{cases} \\ \mathbf{p} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}'(0) = 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{p}(\mathbf{T}) = \mathbf{p}'(\mathbf{T}) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Naturalmente $\{\mathbf{v}, \mathbf{p}\}$ depende de $\mathbf{w}_1$:

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{p}\} = \{\mathbf{v}(\mathbf{w}_1), \mathbf{p}(\mathbf{w}_1)\}. \quad (2.56)$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

Como temos provado a existência, unicidade e a caracterização do controle seguidor denotado w_2 , o líder w_1 deseja agora que a solução v e v' , avaliada no tempo $t = T$, esteja o mais próximo possível de (v^0, v^1) . Isto será possível se o sistema (2.55) for aproximadamente controlável. Estamos procurando

$$\inf \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} w_1^2 d\Sigma \quad (2.57)$$

onde w_1 está sujeito

$$(v(T; w_1), v'(T; w_1)) \in B_{L^2(\Omega)}(v^0, \alpha_0) \times B_{H^{-1}(\Omega)}(v^1, \alpha_1), \quad (2.58)$$

assumindo que tal w_1 existe, α_0, α_1 números reais positivos arbitrariamente pequenos e $\{v^0, v^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Podemos reescrever (2.58) como sendo

$$\begin{cases} v(T; w_1) \in v^0 + \alpha_0 B_{L^2(\Omega)}, \\ v'(T; w_1) \in v^1 + \alpha_1 B_{H^{-1}(\Omega)}. \end{cases} \quad (2.59)$$

Para obtermos a solução de (2.57), suponhamos que

$$T > \frac{2}{\sqrt{k_0}}, \quad \text{com } k_0 = \frac{\tau_0 \gamma_0^2}{32m(b-a)^4}. \quad (2.60)$$

Agora, mostraremos que no caso (2.26), o seguinte teorema é verdadeiro:

Teorema 2.2. *Assumamos que vale (2.60). Sejam $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$ e w_2 uma solução do funcional custo (2.30). Então as funções $(v(T), v'(T)) = (v(., T, w_1, w_2), v'(., T, w_1, w_2))$, onde v é solução do sistema (2.27), geram um subconjunto denso de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.*

Demonstração. Decompomos a solução (v, p) de (2.55) por

$$\begin{cases} v = v_0 + g, \\ p = p_0 + q, \end{cases} \quad (2.61)$$

onde v_0 é solução de

$$\begin{cases} v_0'' + L v_0 = 0 \text{ em } Q, \\ v_0 = \begin{cases} 0 \text{ sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\sigma \gamma^2(t)} \frac{\partial p_0}{\partial y} \text{ sobre } \Sigma_2, \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{cases} \\ v_0(0) = v_0'(0) = 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (2.62)$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

p_0 satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0'' + L^* p_0 = \gamma(t)(v_0 - v_2) \text{ em } Q, \\ p_0 = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ p_0(T) = p_0'(T) = 0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.63)$$

e $\{g, q\}$ em (2.61) satisfazem

$$\left\{ \begin{array}{l} g'' + L g = 0 \text{ em } Q, \\ g = \begin{cases} w_1 \text{ sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\sigma \gamma^2(t)} \frac{\partial q}{\partial y} \text{ sobre } \Sigma_2, \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{cases} \\ g(0) = g'(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.64)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} q'' + L^* q = \gamma(t)g \text{ em } Q, \\ q = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ q(T) = q'(T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.65)$$

Definamos o operador

$$\begin{aligned} A : L^2(\Sigma_1) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ w_1 &\longmapsto A w_1 = \{g'(T; w_1) + \delta g(T), -g(T; w_1)\}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Observemos que $A \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma_1), H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega))$, devido a boa colocação do sistema (2.64)

Usando (2.61) e (2.66), temos que (2.59) pode ser escrita como sendo

$$A w_1 \in \{v^1 - v_0(T, w_1) + \delta g(T) + \alpha_1 B_{H^{-1}(\Omega)}, -v^0 + v_0(T, w_1) - \alpha_0 B_{L^2(\Omega)}\} \quad (2.67)$$

Seja $f = \{f^0, f^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e introduzamos estados adjuntos φ e ψ definidos como solução única de

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'' + L^* \varphi = \gamma(t)\psi \text{ em } Q, \\ \varphi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = f^0, \varphi'(T) = f^1 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.68)$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

com ψ satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'' + L\psi = 0 \text{ em } Q, \\ \psi = \begin{cases} 0 \text{ sobre } \Sigma_1, \\ \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\sigma \gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ sobre } \Sigma_2, \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{cases} \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.69)$$

Multiplicamos (2.69)₁ por q , solução de (2.65), e integramos o resultado de 0 até T , para obtermos

$$\int_0^T \psi'' q \, dt + \int_0^T (L\psi) q \, dt = 0.$$

Usando integração por partes:

$$q(T)\psi'(T) - q(0)\psi'(0) - q'(T)\psi(T) + q'(0)\psi(0) + \int_0^T \psi q'' \, dt + \int_0^T (L\psi) q \, dt = 0.$$

Integrando a expressão acima em $\Omega = (0, 1)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} q(T)\psi'(T) \, dy - \int_{\Omega} q(0)\psi'(0) \, dy - \int_{\Omega} q'(T)\psi(T) \, dy + \int_{\Omega} q'(0)\psi(0) \, dy \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \psi q'' \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} (L\psi) q \, dy \, dt = 0. \end{aligned}$$

De (2.65)₃ e (2.69)₃, a última expressão torna-se

$$\int_0^T \int_{\Omega} \psi q'' \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} (L\psi) q \, dy \, dt = 0. \quad (2.70)$$

Substituindo

$$L\psi = -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta\psi - \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \check{c}(y, t) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \delta \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

em (2.70):

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \psi q'' \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta\psi q \, dy \, dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) q \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} q \, dy \, dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial \psi}{\partial y} q \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \frac{\partial \psi}{\partial t} q \, dy \, dt = 0. \end{aligned}$$

Usando (2.69)₂, um cálculo análogo como em (2.42)–(2.48), a última igualdade acima resulta em

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \psi q'' \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} (L^* q) \psi \, dy \, dt + \int_{\Sigma} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2} \frac{\partial q}{\partial y} \psi \, d\Sigma \\ & - \int_{\Sigma} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2} q \frac{\partial \psi}{\partial y} \, d\Sigma = 0, \end{aligned}$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

que juntamente com (2.65)₂, tem-se

$$\int_0^T \int_{\Omega} \psi q'' dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} (L^* q) \psi dy dt + \int_{\Sigma} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2} \frac{\partial q}{\partial y} \psi d\Sigma = 0.$$

Separando a integral sobre a fronteira na última igualdade acima:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \psi (q'' + L^* q) dy dt + \int_{\Sigma_1} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2} \frac{\partial q}{\partial y} \psi d\Sigma \\ & + \int_{\Sigma_2} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial q}{\partial y} \psi d\Sigma = 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

De (2.65)₁, (2.69)₂ e (2.71), obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) g \psi dy dt = -\frac{1}{\sigma} \int_{\Sigma_2} \frac{(a(t) - \frac{m_0}{2})^2}{\gamma^4} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Sigma. \quad (2.72)$$

Por outro lado, multiplicamos (2.68)₁ por g , solução de (2.64), integramos o resultado obtido em ambos os membros em $\Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, 1)$, e, finalmente, usamos integração por partes para obtermos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} g(T) \varphi'(T) dy - \int_{\Omega} g(0) \varphi'(0) dy - \int_{\Omega} g'(T) \varphi(T) dy + \int_{\Omega} g'(0) \varphi(0) dy \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} g'' \varphi dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} (L^* \varphi) g dy dt = \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) \psi g dy dt. \end{aligned}$$

De (2.64)₃ e (2.68)₃, a última igualdade acima torna-se

$$\begin{aligned} & (g(T), f^1) - \langle g'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \int_{\Omega} g'' \varphi dy dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (L^* \varphi) g dy dt = \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) \psi g dy dt. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Substituindo

$$\begin{aligned} L^* \varphi = & -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + \left[\frac{\partial \check{b}}{\partial t} - \check{c}(y, t) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ & + \frac{\partial \check{b}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left[\frac{\partial^2 \check{b}}{\partial y \partial t} - \frac{\partial \check{c}}{\partial y} \right] \varphi - \delta \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \end{aligned}$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

em (2.73), temos

$$\begin{aligned}
& (g(T), f^1) - \langle g'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \int_{\Omega} g'' \varphi \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \Delta \varphi \, g \, dy \, dt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{\alpha}(y, t) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) g \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \check{b}}{\partial y \partial t} \varphi \, g \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial t} g \, dy \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial y} g \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} g \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \check{c}}{\partial y} \varphi \, g \, dy \, dt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial \varphi}{\partial y} g \, dy \, dt - \delta \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} g \, dy \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) g \psi \, dy \, dt.
\end{aligned}$$

Um cálculo análogo como em (2.42)–(2.48), a última igualdade acima resulta em

$$\begin{aligned}
& (g(T), f^1) - \langle g'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \delta \int_{\Sigma} g(T) \varphi(T) \, dy + \int_0^T \int_{\Omega} g'' \varphi \, dy \, dt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \varphi \Delta g \, dy \, dt + \int_{\Sigma} \frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \varphi \frac{\partial g}{\partial y} \, d\Sigma \\
& - \int_{\Sigma} \frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} g \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{\alpha}(y, t) \frac{\partial g}{\partial y} \right) \varphi \, dy \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial t} \varphi \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial g}{\partial y} \varphi \, dy \, dt \\
& + \delta \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial t} \varphi \, dy \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) g \psi \, dy \, dt,
\end{aligned}$$

ou seja, pela dedinição de Lg temos

$$\begin{aligned}
& (g(T), f^1) - \langle g'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \delta \langle g(T), f^0 \rangle_{L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \int_{\Omega} g'' \varphi \, dy \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} Lg \varphi \, dy \, dt + \int_{\Sigma} \frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \varphi \frac{\partial g}{\partial y} \, d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} g \, dy \, dt \\
& = \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) g \psi \, dy \, dt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
& (g(T), f^1) - \langle g'(T) + \delta g(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \int_{\Omega} (g'' + Lg) \varphi \, dy \, dt \\
& + \int_{\Sigma} \frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \varphi \Delta g \, d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} g \, dy \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) g \psi \, dy \, dt,
\end{aligned}$$

que juntamente com (2.64)₁ e (2.68)₂, vem

$$\begin{aligned}
& (g(T), f^1) - \langle g'(T) + \delta g(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma} \frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} g \, dy \, dt \\
& = \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(t) g \psi \, dy \, dt.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

Agora, separando a integral com termos de fronteira em (2.74) e combinando com (2.72), obtemos

$$\begin{aligned} & (g(T), f^1) - \langle g'(T) + \delta g(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_1} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} g \, d\Sigma \\ & - \int_{\Sigma_2} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} g \, d\Sigma = -\frac{1}{\sigma} \int_{\Sigma_2} \frac{(a(t) - \frac{m_0}{2})^2}{\gamma^4(t)} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Sigma, \end{aligned}$$

que novamente combinando agora com (2.64)₂, obtemos

$$\begin{aligned} & (g(T), f^1) - \langle g'(T) + \delta g(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_1} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} w_1 \, d\Sigma \\ & - \frac{1}{\sigma} \int_{\Sigma_2} \frac{(a(t) - \frac{m_0}{2})^2}{\gamma^4(t)} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Sigma = -\frac{1}{\sigma} \int_{\Sigma_2} \frac{(a(t) - \frac{m_0}{2})^2}{\gamma^4(t)} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Sigma, \end{aligned}$$

ou seja,

$$- \int_{\Sigma_1} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} w_1 \, d\Sigma = \langle g'(T) + \delta g(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - (g(T), f^1). \quad (2.75)$$

Definamos a dualidade entre $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ por

$$\langle \{g'(T) + \delta g(T), -g(T)\}, \{f^0, f^1\} \rangle = \langle g'(T) + \delta g(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - (g(T), f^1).$$

Assim, podemos escrever (2.75) por

$$\langle \langle A w_1, f \rangle \rangle = - \int_{\Sigma_1} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} w_1 \, d\Sigma,$$

onde $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ denota a dualidade entre os espaços $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Agora recorrendo ao resultado do Teorema 1.6, se

$$\langle \langle A w_1, f \rangle \rangle = \langle g'(T) + \delta g(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - (g(T), f^1) = 0$$

para todo $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$, então

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_1. \quad (2.76)$$

Portanto, no caso da hipótese (2.26), segue de (2.69)₂ e (2.76) que

$$\psi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma. \quad (2.77)$$

Combinando (2.77) e (2.69), temos

$$\left| \begin{array}{l} \psi'' + L\psi = 0 \quad \text{em } Q, \\ \psi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0 \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.78)$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

que pela unicidade de solução, vem que

$$\psi \equiv 0. \quad (2.79)$$

Substituindo (2.79) em (2.68)₁, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'' + L^* \varphi = 0 \quad \text{em } Q, \\ \varphi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = f^0, \quad \varphi'(T) = f^1 \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.80)$$

Onde $\Omega = (0, 1)$. Pelo Teorema da Unicidade de Holmgren (cf. Proposição 1.3), temos

$$\varphi = 0 \quad \text{em } Q,$$

e portanto de (2.80)₃, implica que

$$f^0 = f^1 = 0,$$

e assim, pelo Critério de Densidade (Teorema 1.6), segue o Teorema 2.2. $\square$

Para finalizarmos esta seção, temos como propósito a procura do controle líder w_1 , isto é, queremos encontrar w_1 , solução de (2.57) restrito a (2.59). Mais precisamente, o seguinte resultado é verdadeiro:

Teorema 2.3. *Assumamos que as hipóteses (H1) – (H3), (2.26) e (2.60) são satisfeitas. Então o controle líder ótimo w_1 é dado por*

$$w_1 = -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{sobre } \Sigma_1$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

em que φ é dado pela solução única $\{\varphi, \psi, v, p\}$ do sistema otimizado

$$\begin{cases}
 \varphi'' + L^* \varphi = \gamma(t) \psi & \text{em } Q, \\
 \psi'' + L \psi = 0 & \text{em } Q, \\
 v'' + L v = 0 & \text{em } Q, \\
 p'' + L^* p = \gamma(t)(v - v_2) & \text{em } Q, \\
 \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\
 \psi = \begin{cases} 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\sigma \gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \text{sobre } \Sigma_2, \\ 0 & \text{sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{cases} \\
 v = \begin{cases} -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial p}{\partial y} & \text{sobre } \Sigma_2, \\ 0 & \text{sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{cases} \\
 p = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\
 \varphi(., T) = f^0, \varphi'(., T) = f^1 & \text{em } \Omega, \\
 v(0) = v'(0) = 0 & \text{em } \Omega, \\
 p(T) = p'(T) = 0 & \text{em } \Omega,
 \end{cases} \tag{2.81}$$

e $\{f^0, f^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é definido como solução única da desigualdade variacional

$$\begin{aligned}
 & \langle v'(T, f) - v^1, \hat{f}^0 - f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - (v(T, f) - v^0, \hat{f}^1 - f^1) \\
 & + \alpha_1 (\|\hat{f}^0\| - \|f^0\|) + \alpha_0 (|\hat{f}^1| - |f^1|) \geq 0, \forall \hat{f} = \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

onde em (2.82) escrevemos $v(T, f)$ para explicitar o fato que a solução $\{\varphi, \psi, v, p\}$ de (2.81) depende de f .

Demonstração. Introduzamos dois funcionais próprios convexos

$$F_1 : L^2(\Sigma_1) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

e

$$F_2 : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

como sendo

$$F_1(w_1) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} w_1^2 d\Sigma \quad \forall w_1 \in L^2(\Sigma_1) \tag{2.83}$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

e

$$\begin{aligned}
 F_2(Aw_1) &= F_2(\{g'(T, w_1) + \delta g(T, w_1), -g(T, w_1)\}) \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{se } \begin{cases} g'(T) + \delta g(T) \in v^1 - v'_0(T) + \delta g(T) + \alpha_1 B_{H^{-1}(\Omega)} \\ -g(T) \in -v^0 + v_0(T, w_1) - \alpha_0 B_{L^2(\Omega)} \end{cases} \\ \infty, & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (2.84)
 \end{aligned}$$

Observemos também que por (2.66) e (2.75) podemos definir explicitamente o operador A^* .

De fato, para todo, $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$, temos

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Sigma_1} \frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} w_1 \, d\Sigma &= \langle g'(T) + \delta g(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1(\Omega)} - (g(T), f^1) \\
 &= \langle \underbrace{\{g'(T) + \delta g(T), -g(T)\}}_{= Aw_1}, \underbrace{\{f^0, f^1\}}_{= f} \rangle \\
 &= \langle Aw_1, f \rangle \\
 &= (w_1, A^* f)_{L^2(\Sigma_1)} \\
 &= \int_{\Sigma_1} A^* f w_1 \, d\Sigma.
 \end{aligned}$$

Então, A^* é dado por

$$\begin{aligned}
 A^* : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Sigma_1) \\
 (f^0, f^1) &\longmapsto A^* f = -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (2.85)
 \end{aligned}$$

em que φ é dada em (2.68).

Com essas notações, juntamente com o fato da imagem do operador A ser densa em $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, encontrar (2.57) é equivalente encontrar

$$\inf_{w_1 \in L^2(\Sigma_1)} [F_1(w_1) + F_2(Aw_1)]. \quad (2.86)$$

Aplicando o Teorema de Fenchel - Rochafellar (Teorema 1.5) ao problema (2.86) com $X = L^2(\Sigma_1)$, $Y = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\varphi = F_1 : L^2(\Sigma_1) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $\psi = F_2 : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, obtemos

- Sendo $\left\{ g'(T, w_1, \mathcal{F}(w_1)) + \delta g(T, w_1, \mathcal{F}(w_1)), -g'(T, w_1, \mathcal{F}(w_1)) \right\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$ de modo que $Aw_1 = \{g'(T, w_1) + \delta g(T, w_1), -g(T, w_1)\}$ satisfaz

$$\begin{aligned}
 Aw_1 &\in \left\{ v^1 - v'_0(T, w_1) + \delta g(T) + \alpha_1 B_{H^{-1}(\Omega)}, -v^0 + v_0(T, w_1) - \alpha_0 B_{L^2(\Omega)} \right\} \Rightarrow \\
 F_2(Aw_1) &= 0.
 \end{aligned}$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

Logo,

$$\mathbf{w}_1 \in \text{Dom}(F_1) \cap \text{Dom}(F_2 \circ A). \quad (2.87)$$

- Temos também que F_1 é contínuo em $\mathbf{w}_1$.

De fato, seja $\|\mathbf{w}_1^n - \mathbf{w}_1\|_{L^2(\Sigma_1)} \rightarrow 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} |F_1(\mathbf{w}_1^n) - F_1(\mathbf{w}_1)| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Sigma_1} (\mathbf{w}_1^n)^2 d\Sigma - \int_{\Sigma_1} \mathbf{w}_1^2 d\Sigma \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Sigma_1} \mathbf{w}_1^n (\mathbf{w}_1^n - \mathbf{w}_1) d\Sigma + \int_{\Sigma_1} \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_1^n - \mathbf{w}_1) d\Sigma \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \left(\int_{\Sigma_1} (\mathbf{w}_1^n)^2 d\Sigma \right)^{1/2} \left(\underbrace{\int_{\Sigma_1} (\mathbf{w}_1^n - \mathbf{w}_1)^2 d\Sigma}_{\rightarrow 0} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\underbrace{\int_{\Sigma_1} (\mathbf{w}_1^n - \mathbf{w}_1)^2 d\Sigma}_{\rightarrow 0} \right)^{1/2} \left(\int_{\Sigma_1} \mathbf{w}_1^2 d\Sigma \right)^{1/2} \right|, \end{aligned}$$

o que implica em

$$|F_1(\mathbf{w}_1^n) - F_1(\mathbf{w}_1)| \rightarrow 0,$$

o que caracteriza a continuidade de F_1 em $\mathbf{w}_1$.

Então, temos

$$\begin{aligned} &\inf_{\mathbf{w}_1 \in L^2(\Sigma_1)} [F_1(\mathbf{w}_1) + F_2(A\mathbf{w}_1)] = \\ &- \min_{(\hat{\mathbf{f}}^0, \hat{\mathbf{f}}^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} [F_1^*(A^*(\{\hat{\mathbf{f}}^0, \hat{\mathbf{f}}^1\})) + F_2^*(-\{\hat{\mathbf{f}}^0, \hat{\mathbf{f}}^1\})]. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Observemos que

$$F_1^*(\mathbf{w}_1) = F_1(\mathbf{w}_1), \quad (2.89)$$

visto que,

$$\begin{aligned} F_1^*(\mathbf{w}_1) &= \sup_{\mathbf{w}_1 \in L^2(\Sigma_1)} \{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1)_{L^2(\Sigma_1)} - F_1(\mathbf{w}_1) : \mathbf{w}_1 \in L^2(\Sigma_1)\} \\ &= \sup_{\mathbf{w}_1 \in L^2(\Sigma_1)} \left\{ \int_{\Sigma_1} \mathbf{w}_1^2 d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \mathbf{w}_1^2 d\Sigma \right\} \\ &= \sup_{\mathbf{w}_1 \in L^2(\Sigma_1)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \mathbf{w}_1^2 d\Sigma \right\}. \\ &= F_1(\mathbf{w}_1), \quad \forall \mathbf{w}_1 \in L^2(\Sigma_1) \end{aligned}$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

Temos também que, para todo $\widehat{f} = \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
& F_2^*(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}) \\
&= \sup_{Aw_1 \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \langle \langle g'(T) + \delta g(T), -g(T) \rangle, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \rangle - F_2(Aw_1) \right\} \\
&= \sup_{Aw_1 \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \langle g'(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - (g(T), \widehat{f}^1) - F_2(Aw_1) \right\} \\
&= \sup_{(\gamma_1, \gamma_0) \in B_{H^{-1}(\Omega)} \times B_{L^2(\Omega)}} \left\{ \langle v^1 - v'_0(T) + \delta g(T) + \alpha_1 \gamma_1, \widehat{f}_0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \right. \\
&\quad \left. - (v^0 - v_0(T) - \alpha_0 \gamma_0, \widehat{f}^1) \right\} \\
&= -(v^0 - v_0(T), \widehat{f}^1) + \langle v^1 - v'_0(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \\
&\quad + \alpha_1 \sup_{\gamma_1 \in B_{H^{-1}(\Omega)}} \langle \gamma_1, \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 \sup_{\gamma_0 \in B_{L^2(\Omega)}} (\gamma_0, \widehat{f}^1) \\
&= (v_0(T) - v^0, \widehat{f}^1) + \langle v^1 - v'_0(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 \|\widehat{f}^0\| + \alpha_0 |\widehat{f}^1|.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Por (2.85), temos

$$A^*(\widehat{f}) = -\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y}, \tag{2.91}$$

e usando (2.89), obtemos

$$\begin{aligned}
F_1^*(A^*\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}) &= F_1^* \left(-\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} \right) \\
&= F_1 \left(-\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \right)^2 \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} \right)^2 d\Sigma,
\end{aligned}$$

com $\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} \in L^2(\Sigma_1)$. Portanto, (2.88) é equivalente a

$$\begin{aligned}
& \inf_{w_1 \in L^2(\Sigma_1)} [F_1(w_1) + F_2(Aw_1)] \\
&= - \min_{\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \right)^2 \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} \right)^2 d\Sigma + (v^0 - v_0(T), \widehat{f}^1) \right. \\
&\quad \left. - \langle v^1 - v'_0(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 \|\widehat{f}^0\| + \alpha_0 |\widehat{f}^1| \right\}
\end{aligned} \tag{2.92}$$

em que φ é dada em (2.68). Sendo assim, (2.92) é o problema dual de (2.57).

Fazendo

$$\begin{aligned}
\eta^0 &= v^0 - v_0(T) \\
\eta^1 &= v^1 - v'_0(T) + \delta g(T),
\end{aligned}$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

e considerando a dualidade entre $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, temos

$$\langle \langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} \rangle \rangle = (\eta^0, \hat{f}^1) - \langle \eta^1, \hat{f}^0 \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}. \quad (2.93)$$

Então, associamos a solução do problema dual do lado direito de (2.92) à minimização do funcional

$$\Theta : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$\begin{aligned} \Theta(\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\}) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \right)^2 \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)^2 d\Sigma + \langle \langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} \rangle \rangle \\ &+ \alpha_1 \|\hat{f}^0\| + \alpha_0 |\hat{f}^1|. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Assim, temos

$$\inf [F_1(w_1) + F_2(Aw_1)] = - \min_{\hat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \Theta(\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\}). \quad (2.95)$$

Agora, tomando $\varepsilon = \min\{\alpha_0, \alpha_1\} > 0$ e usando a norma do gráfico, reescrevemos o funcional (2.94) como sendo

$$\begin{aligned} \Theta(\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\}) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \right)^2 \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right)^2 d\Sigma + \langle \langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} \rangle \rangle \\ &+ \varepsilon \|\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Pelo teorema (1.4), temos que o funcional definido em (2.96) atinge um mínimo em $\hat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, solução do problema dual (2.94), e este é único, pois o funcional Θ_ε é estritamente convexo.

De fato, sejam $\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\}, \{g^0, g^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Pelos mesmos argumentos utilizados na prova da convexidade estrita do funcional (2.28), temos

$$\begin{aligned} \Theta_\varepsilon[\lambda\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} + (1-\lambda)\{g^0, g^1\}] &= \lambda\Theta_\varepsilon(\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\}) + (1-\lambda)\Theta_\varepsilon(\{g^0, g^1\}) \\ &- \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \right)^2 \left| \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Portanto, para $\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} \neq \{g^0, g^1\}$ e $\lambda \in (0, 1)$, obtemos

$$\Theta_\varepsilon[\lambda\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} + (1-\lambda)\{g^0, g^1\}] < \lambda\Theta_\varepsilon(\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\}) + (1-\lambda)\Theta_\varepsilon(\{g^0, g^1\}).$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

Assim, provamos que o funcional Θ_ε tem um único mínimo $\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ que é solução do problema dual (2.94). Portanto, de (2.57) e (2.92), segue que

$$\begin{aligned} & \inf_{w_1 \in L^2(\Sigma_1)} \int_{\Sigma_1} w_1^2 d\Sigma = \\ & = - \min_{\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \right)^2 \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} \right)^2 d\Sigma + (v^0 - v_0(T), \widehat{f}^1) \right. \\ & \quad \left. - \langle v^1 - v_0'(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 \|\widehat{f}^0\| + \alpha_0 |\widehat{f}^1| \right\}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

restrito a (2.59).

Seja então $\widehat{f} = \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}$ a única solução do seguinte problema dual:

$$- \min_{\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} (A^* \widehat{f})^2 d\Sigma + \langle \langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \rangle \rangle + \alpha_1 \|\widehat{f}^0\| + \alpha_0 |\widehat{f}^1| \right\}, \quad (2.98)$$

onde $A^* \widehat{f}$ é dada em (2.91).

Façamos $\mu = \widehat{f}$, $\xi = f$ e $H = \Theta$ com

$$\begin{cases} H_1 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} (A^* \widehat{f})^2 d\Sigma \\ H_2 = \langle \langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \rangle \rangle + \alpha_1 \|\widehat{f}^0\| + \alpha_0 |\widehat{f}^1|, \end{cases}$$

agora, temos

$$\begin{aligned} \langle H'_1(\xi), \mu - \xi \rangle &= \langle H'_1(f), \widehat{f} - f \rangle \\ &= \frac{d}{d\lambda} H_1 \left(f + \lambda(\widehat{f} - f) \right) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(A^*(f + \lambda(\widehat{f} - f)) \right)^2 d\Sigma \right] \Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma_1} 2 \left(A^*(f + \lambda(\widehat{f} - f)) \right) A^*(\widehat{f} - f) d\Sigma \right] \Big|_{\lambda=0} \\ &= \left[\int_{\Sigma_1} (A^* f + \lambda A^* \widehat{f} - \lambda A^* f) (A^* \widehat{f} - A^* f) d\Sigma \right] \Big|_{\lambda=0} \\ &= \int_{\Sigma_1} A^* f (A^* \widehat{f} - A^* f) d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma_1} \left(\frac{a(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\Sigma. \end{aligned}$$

2.3 Controlabilidade Aproximada

Pela proposição 1.2, obtemos a desigualdade variacional

$$\int_{\Sigma_1} \underbrace{\left(\frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}_{**} d\Sigma + \langle \langle \widehat{f}^0, \widehat{f}^1 \rangle, \{-\eta^1, \eta^0\} \rangle + \alpha_1 \|\widehat{f}^0\| + \alpha_0 |\widehat{f}^1| - \langle \langle f^0, f^1 \rangle, \{-\eta^1, \eta^0\} \rangle - \alpha_1 \|f^0\| - \alpha_0 |f^1| \geq 0, \quad (2.99)$$

analisemos o termo (**) em (2.99). Notemos que, por (2.75) com

$$w_1 = -\frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

obtemos

$$\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 d\Sigma = \langle g'(T) + \delta g(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - (g(T), f^1), \quad (2.100)$$

também,

$$\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} d\Sigma = \langle g'(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - (g(T), \widehat{f}^1), \quad (2.101)$$

portanto, de (2.100) e (2.101), segue que

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\alpha(t) - \frac{m_0}{2}}{\gamma^2(t)} \right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\Sigma \\ &= -(g(T), \widehat{f}^1 - f^1) + \langle g'(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 - f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (2.102)$$

substituindo (2.102) em (2.99), obtemos

$$\begin{aligned} & -(g(T), \widehat{f}^1 - f^1) + \langle g'(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 - f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \langle \widehat{f}^0, \eta^1 \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \\ & + (\widehat{f}^1, \eta^0) + \langle f^0, \eta^1 \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} - (f^1, \eta^0) + \alpha_1 (\|\widehat{f}^0\| - \|f^0\|) + \alpha_0 (|\widehat{f}^1| - |f^1|) \geq 0. \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} & -(g(T), \widehat{f}^1 - f^1) + \langle g'(T) + \delta g(T), \widehat{f}^0 - f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \langle \widehat{f}^0 - f^0, \eta^1 \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \\ & + (\widehat{f}^1 - f^1, \eta^0) + \alpha_1 (\|\widehat{f}^0\| - \|f^0\|) + \alpha_0 (|\widehat{f}^1| - |f^1|) \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \langle g'(T) + \delta g(T) - \eta^1, \widehat{f}^0 - f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - (g(T) - \eta^0, \widehat{f}^1 - f^1) + \alpha_1 (\|\widehat{f}^0\| - \|f^0\|) \\ & + \alpha_0 (|\widehat{f}^1| - |f^1|) \geq 0. \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} & \langle g'(T) + \delta g(T) - v^1 + v_0'(T) - \delta g(T), \widehat{f}^0 - f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - (g(T) + v_0(T) - v^0, \widehat{f}^1 - f^1) \\ & + \alpha_1 (\|\widehat{f}^0\| - \|f^0\|) + \alpha_0 (|\widehat{f}^1| - |f^1|) \geq 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \langle v'_0(T) + g'(T) - v^1, \widehat{f}^0 - f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - (v_0(T) + g(T) - v^0, \widehat{f}^1 - f^1) \\ & + \alpha_1(\|\widehat{f}^0\| - \|f^0\|) + \alpha_0(|\widehat{f}^1| - |f^1|) \geq 0, \quad \forall \widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Agora, tomando $v = v_0 + g$ como em (2.61)₁, a prova está concluída.

□

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Nesta seção, objetivando a completude de nossa exposição, investigaremos a existência, unicidade e regularidade de solução para os sistemas (2.1) e (2.11). Iniciamos com algumas observações:

Observação 2.5. *A hipótese (H1) implica que $\check{a}(y, t) > 0$.*

Observação 2.6. *Temos*

$$|\alpha' + \gamma'y| \leq |\gamma'| \Leftrightarrow -\gamma' \leq \alpha' + \gamma'y \leq \gamma'.$$

Com efeito, temos que $\alpha' + \gamma'y \leq \gamma'$, pois $\alpha' < 0$ e $0 \leq y \leq 1$.

Também, temos que $-\gamma' \leq \alpha' + \gamma'y$ equivale a $0 \leq \alpha' + \gamma'y + \gamma'$ ou $0 \leq \beta' + \gamma'y$ que é verdade devido a propriedade de modulo $|\gamma'| = \gamma'$.

Observação 2.7. *Da hipótese (H3) e da observação 2.6, temos que*

$$|\alpha''(t) + \gamma''(t)y| \leq \frac{(\gamma')^2}{\gamma}$$

o que implica em

$$\max\{|\alpha''|, |\beta''|\} \leq \frac{(\gamma')^2}{\gamma}$$

e

$$|\gamma''| < 2\frac{(\gamma')^2}{\gamma}.$$

Denotaremos por $a(t, v, z)$ a forma bilinear definida em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ por

$$a(t, v, z) = \int_{\Omega} \check{a}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Note que $a(t, v, z)$ é contínua, simétrica, positiva.

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Definição 2.2. Consideremos o problema (2.11) com dados $\mathbf{v}_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\mathbf{v}_1 \in L^2(\Omega)$. Dizemos que uma função $\mathbf{v} : (0, 1) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é solução global fraca do problema (2.11) quando

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0, \infty, H_0^1(\Omega)) \quad (2.103)$$

$$\mathbf{v}' \in L^\infty(0, \infty, L^2(\Omega)) \quad (2.104)$$

e satisfaz, para todo $T > 0$, a equação integral

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \mathbf{v}' \xi' dy dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \mathbf{v} \Delta \xi dy dt \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \mathbf{v} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{y}} dy dt + \int_0^T \int_\Omega \check{a}(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{y}} dy dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega \check{b}(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{y}} \xi dy dt + \int_0^T \int_\Omega \check{c}(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \xi dy dt + \int_0^T \int_\Omega \delta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \xi dy dt = 0, \end{aligned}$$

para todo $\xi \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, $\xi' \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, $\xi(0) = \xi(T) = 0$ e satisfazendo as condições iniciais

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}'(0) = \mathbf{v}_1.$$

Agora enunciaremos o resultado que nos garante a existência e unicidade da solução global fraca para o problema (2.11), no sentido da definição (2.2).

Teorema 2.4. Sejam $\mathbf{v}_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $\mathbf{v}_1 \in H_0^1(\Omega)$. Suponhamos que as hipóteses **(H1)** – **(H3)** são satisfeitas com

$$0 < \gamma' < \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\pi + 1} \right) \left(\frac{m_0}{10} \right)^{1/2} \quad (2.105)$$

e

$$\frac{\delta}{2} > \left[\frac{1}{2\gamma_0} + \frac{2}{\gamma_0} \left(\frac{\pi^2 + 1}{\pi} \right) + \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{\pi^2 + 4}{2\pi^2} \right) \right] \left(\frac{m_0}{2} \right)^{1/2}. \quad (2.106)$$

Então o sistema (2.11) possui uma única solução global fraca $\mathbf{v}(\mathbf{y}, t)$ (isto é, definida para todo $t \geq 0$ e $0 < y < 1$).

Demonstração. Existência: Para a existência da solução global de (2.1), utilizaremos o método de Faedo-Galerkin que consiste em três etapas:

1. Construção de soluções aproximadas em um espaço de dimensão finita;
2. Obtenção de estimativas a priori para as soluções aproximadas;
3. Passagem ao limite das soluções aproximadas.

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Dividiremos a prova em dois casos:

Caso 1: $w = 0$ sobre Σ_0 .

Soluções Aproximadas

Inicialmente, usando o Teorema (1.20) existe uma sequência de números reais

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots,$$

onde

$$\lambda_v \rightarrow +\infty \quad \text{quando } v \rightarrow \infty,$$

e uma base hilbertiana $(z_v)_{v \in \mathbb{N}}$ de $H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\begin{cases} -\Delta z_v = \lambda_v z_v & \text{em } \Omega, \\ z_v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad \forall v \in \mathbb{N}. \quad (2.107)$$

Dizemos que os números (λ_v) são os autovalores de $-\Delta$ (com a condição de Dirichlet) e os $(z_v)_{v \in \mathbb{N}}$ são as funções próprias associadas. Veja que vale a seguinte igualdade

$$\int_{\Omega} \Delta z_v v \, dy = \int_{\Omega} \lambda_v z_v v \, dy.$$

De fato, integrando (2.107) sobre Ω , multiplicando por uma função teste $v \in H_0^1(\Omega)$ e usando a primeira formula de Green

$$\int_{\Omega} u \nabla z_v \nabla u \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta \gamma \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial z}{\partial \nu} u \, ds,$$

e isolando o primeiro termo após a igualdade da expressão acima, temos

$$- \int_{\Omega} u \Delta \gamma \, dx = \int_{\Omega} u \nabla z_v \nabla u \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial z}{\partial \nu} u \, ds,$$

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$, tomando $u = v$ e $\gamma = z_v$

$$- \int_{\Omega} v \Delta z_v \, dy = \int_{\Omega} v \nabla z_v \nabla v \, dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial z}{\partial \nu} v \, ds,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, como v se anula na fronteira de Ω temos

$$- \int_{\Omega} v \Delta z_v \, dy = \int_{\Omega} \nabla z_v \nabla v \, dy,$$

e portanto,

$$\int_{\Omega} \nabla z_v \nabla v \, dy = \int_{\Omega} \lambda_v z_v v \, dy.$$

Assim,

$$((z_v, v))_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_v(z_v, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall, v \in H_0^1(\Omega)$$

é o problema espectral, onde $\{z_v, \lambda_v\}$, $v = 1, 2, \dots$, são soluções. Veja que (2.107) equivale a uma EDO espectral clássica

$$\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0.$$

Procuramos solução do tipo

$$\varphi(x) = e^{rx}.$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} (e^{rx})'' + \lambda e^{rx} &= 0 \Rightarrow r^2 e^{rx} + \lambda e^{rx} = 0 \\ &\Rightarrow e^{rx}(r^2 + \lambda) = 0, \end{aligned}$$

como $e^{rx} \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned} r^2 + \lambda &= 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda \\ &\Rightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Então a solução geral é

$$\varphi(x) = e^{i\sqrt{\lambda}x} = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Donde a condição de contorno é

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0,$$

então

$$0 = \varphi(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A \Rightarrow A = 0$$

e

$$0 = \varphi(1) = B \sin(\sqrt{\lambda}).$$

Logo, se $B = 0$ temos a solução trivial, e se $B \neq 0$

$$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = v\pi, \quad v \in \mathbb{N}.$$

Então $\varphi = \sin(v\pi x)$ e $\lambda = (v\pi)^2$. Tomando $\varphi = v$ temos $z_v = \sin(v\pi x)$, $\lambda_v = (v\pi)^2$ para todo $v \in \mathbb{N}$. Representaremos por $V_m = [z_1, z_2, \dots, z_m]$ o subespaço gerado pelos vetores $z_1, z_2, \dots, z_m$. Se $v_m(t) \in V_m$, temos a representação

$$v_m(t) = \sum_{v=1}^m g_{vm}(t) z_v(x).$$

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Seja $\mathbf{v}_m(t) \in V_m$ solução do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{v}_m''(t), \mathbf{v}) + \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{\mathbf{m}_0}{2} + \mathbf{a}(t) \right) (\nabla \mathbf{v}_m, \nabla \mathbf{v}) + \mathbf{a}(t, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}) + (\check{\mathbf{b}}(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \mathbf{v}_m'}{\partial \mathbf{y}}, \mathbf{v}) \\ + (\check{\mathbf{c}}(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial \mathbf{y}}, \mathbf{v}) + \delta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t}, \mathbf{v} \right) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_m, \\ \mathbf{v}_m(0) = \mathbf{v}_{0m} \rightarrow \mathbf{v}_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \mathbf{v}_m'(0) = \mathbf{v}_{1m} \rightarrow \mathbf{v}_1 \text{ em } H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.108)$$

O sistema (2.108) tem uma solução real em algum intervalo $(0, t_m)$, pelo Teorema de Catheodory. As estimativas a priori a seguir permitirão estender as soluções ao intervalo $(0, \infty)$ e tomar os limites nas soluções aproximadas de (2.108).

Estimativa 2.1 Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{v}_m'(t)$ em (2.108), obtemos

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v}_m''(t), \mathbf{v}_m'(t)) + \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{\mathbf{m}_0}{2} + \mathbf{a}(t) \right) (\nabla \mathbf{v}_m, \nabla \mathbf{v}_m') + \mathbf{a}(t, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_m') \\ & + \left(\check{\mathbf{b}}(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \mathbf{v}_m'}{\partial \mathbf{y}}, \mathbf{v}_m' \right) + \left(\check{\mathbf{c}}(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial \mathbf{y}}, \mathbf{v}_m' \right) + \delta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t}, \mathbf{v}_m' \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Agora,

$$(\mathbf{v}_m''(t), \mathbf{v}_m'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_m'(\mathbf{y}, t)|^2 d\mathbf{y} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{v}_m'(t)|^2 \quad (2.110)$$

$$(\nabla \mathbf{v}_m(t), \nabla \mathbf{v}_m'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_m(\mathbf{y}, t)|^2 d\mathbf{y} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_m(t)\|^2 \quad (2.111)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t}, \mathbf{v}_m' \right) = (\mathbf{v}_m'(t), \mathbf{v}_m'(t)) = |\mathbf{v}_m'(t)|^2. \quad (2.112)$$

De fato, veja que

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_m'(t), \mathbf{v}_m'(t)) = \frac{d}{dt} |\mathbf{v}_m'(t)|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\mathbf{v}_m'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_m'(t)|^2 d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |\mathbf{v}_m'(t)|^2 d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega} 2 \mathbf{v}_m''(t) \mathbf{v}_m'(t) d\mathbf{y} \\ &= 2 (\mathbf{v}_m''(t), \mathbf{v}_m'(t)). \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_m'(t)|^2 d\mathbf{y} = (\mathbf{v}_m''(t), \mathbf{v}_m'(t)).$$

Portanto,

•

$$(v_m''(t), v_m'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v_m'(t)|^2 dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Analogamente,

$$\frac{d}{dt} (v_{m(t)}, v_{m(t)}) = \frac{d}{dt} \|v_{m(t)}\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v_{m(t)}\|_{H_0(\Omega)}^2 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v_{m(t)}|^2 dy \\ &= \int_{\Omega} 2v_{m(t)} \cdot v_{m(t)}' dy \\ &= 2 \int_{\Omega} v_{m(t)} \cdot v_{m(t)}' dy \\ &= 2 (v_{m(t)}, v_{m(t)}')_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

logo,

$$(v_{m(t)}, v_{m(t)}')_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{m(t)}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v_{m(t)}|^2 dy.$$

Portanto,

•

$$(\nabla v_m(t), \nabla v_m'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v_m(y, t)|^2 dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Além disso,

•

$$\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, v_m'(t) \right) = (v_m'(t), v_m'(t)) = \|v_m'(t)\|^2.$$

Substituindo (2.110), (2.111) e (2.112) em (2.109), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m'(t)|^2 + \frac{1}{2\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{d}{dt} \|v_m(t)\|^2 + a(t, v_m, v_m') \\ &+ \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial v_m'}{\partial y}, v_m' \right) + \left(\check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y}, v_m' \right) + \delta |v_m'|^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Notemos que

$$a(t, v_m, v_m') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t, v_m, v_m) - \frac{1}{2} a'(t, v_m, v_m) \quad (2.114)$$

$$a'(t, v_m, v_m) = \int_{\Omega} \check{a}'(y, t) \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 dy \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial v_m'}{\partial y}, v_m' \right) &= \frac{1}{2} \check{b}(y, t) (v_m'(y, t))^2 \Big|_{y=0}^{y=1} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} (v_m'(t))^2 dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} (v_m'(t))^2 dy. \end{aligned} \quad (2.116)$$

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

De fato, por definição temos que

$$\alpha(t, v_m, v'_m) = \int_{\Omega} \check{\alpha}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy. \quad (2.117)$$

Observe

$$\frac{\partial v'_m}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right). \text{ Logo, } \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2, \text{ donde}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 = 2 \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right) = 2 \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right).$$

Então

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \text{ logo,}$$

$$\alpha(t, v_m, v_m) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \check{\alpha}(y, t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 dy.$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt} \left[\check{\alpha}(y, t) \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 \right] = \check{\alpha}'(y, t) \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 + \check{\alpha}(y, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2.$$

logo

$$\check{\alpha}(y, t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial t} \left[\check{\alpha}(y, t) \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 \right] - \check{\alpha}'(y, t) \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2.$$

Então

$$\begin{aligned} \alpha(t, v_m, v'_m) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left[\check{\alpha}(y, t) \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 \right] dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \check{\alpha}'(y, t) \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \check{\alpha}(y, t) \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \check{\alpha}'(y, t) \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha(t, v_m, v'_m) - \frac{1}{2} \alpha'(t, v_m, v_m). \end{aligned}$$

Portanto

•

$$\alpha(t, v_m, v'_m) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha(t, v_m, v'_m) - \frac{1}{2} \alpha'(t, v_m, v_m).$$

Analogamente

$$\left(\check{b}(y, t), \frac{\partial v'_m}{\partial y}, v'_m \right) = \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial t} \cdot \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy$$

Por outro lado

$$\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2$$

onde,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 = 2 \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \frac{\partial v'_m}{\partial y} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \frac{\partial v'_m}{\partial y}.$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \check{b}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial t} \cdot \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \check{b}(y, t) \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial}{\partial y} \check{b}(y, t) dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial}{\partial y} b(y, t) dy. \end{aligned}$$

Veamos que $V_m \in H_0^1(\Omega)$ então

$$V_m(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad v'_m(0) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

$$V_m(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad v'_m(1) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

Portanto

•

$$\int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 dy = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 dy.$$

Além disso, como definido anteriormente

$$\alpha(t, v, z) = \int_{\Omega} \alpha(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad v, z \in H_0^1(\Omega).$$

É claro que $\alpha(y, t)$ está bem definida $\forall t \in [0, T]$. Então, pela regra de Leibniz, é possível derivar sob o sinal da integral, obtendo

$$\alpha(t, v, z) = \int_{\Omega} \check{\alpha}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Portanto

•

$$\alpha'(t, v_m, v_m) = \int_{\Omega} \check{\alpha}'(y, t) \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 dy.$$

Também,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{1}{2\gamma^2(t)} \|v_m\|^2 \right] &= \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \left(-\frac{\gamma'}{\gamma^3} \right) \|v_m\|^2 \\ &\quad + a'(t) \frac{1}{2\gamma^2(t)} \|v_m\|^2 \\ &\quad + \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{1}{2\gamma^2(t)} \frac{d}{dt} \|v_m\|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{d}{dt} \|v_m\|^2 &= \frac{d}{dt} \left[\left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{1}{2\gamma^2(t)} \|v_m\|^2 \right] \\ &\quad - a'(t) \frac{1}{2\gamma^2(t)} \|v_m\|^2 \\ &\quad + \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \left(\frac{\gamma'}{\gamma^3} \right) \|v_m\|^2. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Substituindo (2.114), (2.115), (2.116) e (2.118) em (2.113), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt} \left[\left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{1}{2\gamma^2(t)} \|v_m\|^2 \right] \\ &+ \left[-a'(t) \frac{1}{2\gamma^2(t)} + \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\gamma'}{\gamma^3} \right] \|v_m\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t, v_m, v_m) \\ &- \frac{1}{2} a'(t, v_m, v_m) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial y} (v'_m(t))^2 dy + \int_{\Omega} \tilde{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial t} dy \\ &+ \delta |v'_m(t)|^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Obtemos, tomando $m_0 = \frac{\tau_0}{m}$, que

$$\begin{aligned} &\left[-a'(t) \frac{1}{2\gamma^2(t)} + \left(a(t) - \frac{m_0}{2} \right) \frac{\gamma'}{\gamma^3} \right] \|v_m\|^2 \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{a(t) - m_0/2}{2\gamma^2(t)} \right) \|v_m\|^2 \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\tau_0}{4m\gamma^2} + \frac{k}{m} \frac{\gamma - \gamma(0)}{2\gamma^2\gamma(0)} \right) \|v_m\|^2 \\ &= -\left[\frac{-\tau_0\gamma'}{2m\gamma^3} + \frac{k}{m\gamma(0)} \left(-\frac{\gamma'}{2\gamma^2} + \frac{\gamma'}{\gamma^3} \gamma(0) \right) \right] \|v_m\|^2 \\ &= -\left[\frac{\gamma'\gamma}{2m\gamma^3} \left(\frac{2k - \tau_0}{\gamma} - \frac{k}{\gamma(0)} \right) \right] \|v_m\|^2 \end{aligned}$$

Queremos que $\frac{2k - \tau_0}{\gamma} - \frac{k}{\gamma_0} < 0$ ou $\gamma(t) > \left(\frac{2k - \tau_0}{k} \right) \gamma_0$. Como $\gamma(t) \geq \gamma_0$, então $1 \geq \frac{2k - \tau_0}{k}$ ou $\tau_0 \geq k$, onde $k = E\sigma$, onde E é o módulo de Young do material e σ é a seção transversal da corda.

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Portanto, se $\tau_0 \geq k$, então

$$\left[-\frac{a'(t)}{2\gamma^2} + \left(a(t) - \frac{m_0}{2} \right) \frac{\gamma'}{\gamma^3} \right] \|v_m\|^2 \geq 0,$$

o que substituindo a expressão acima em (2.119), concluimos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v'_m|^2 + \frac{d}{dt} \left[\left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{1}{2\gamma^2(t)} \|v_m\|^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t, v_m, v_m) \\ & - \frac{1}{2} a'(t, v_m, v_m) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} (v'_m(t))^2 dy + \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} v'_m dy \\ & + \delta |v'_m(t)|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{b}(y, t)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[-2 \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t), y}{\gamma(t)} \right) \right] \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t), y}{\gamma(t)} \right) \\ &= -2 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \leq 0, \end{aligned}$$

logo

$$\bullet - \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} (v'_m(t))^2 dy \geq 0.$$

Agora,

$$-\frac{1}{2} \check{a}'(y, t) = \frac{m_0}{2} \frac{\gamma'}{\gamma^3} - (\alpha' + \gamma'y)^2 \frac{\gamma'}{\gamma^3} + \frac{(\alpha' + \gamma'y)(\alpha'' + \gamma''y)\gamma}{\gamma^3}.$$

Sabemos que $(\alpha' + \gamma'y)^2 \leq (\gamma')^2 < \frac{m_0}{8}$ o que implica em

$$-(\alpha' + \gamma'y)^2 \frac{\gamma'}{\gamma^3} \geq -\frac{m_0}{8} \frac{\gamma'}{\gamma^3}.$$

Pela observação (2.6) e da hipótese **(H3)**, temos

$$\left| \frac{(\alpha' + \gamma'y)(\alpha'' + \gamma''y)\gamma}{\gamma^3} \right| \leq \gamma' \frac{|\alpha'' + \gamma''y|\gamma}{\gamma^3} \leq \gamma' \frac{(\alpha' + \gamma'y)^2}{\gamma} \frac{\gamma}{\gamma^3} \leq \frac{\gamma'}{\gamma^3} \frac{m_0}{8}, \text{ assim,}$$

$$\frac{(\alpha' + \gamma'y)(\alpha'' + \gamma''y)\gamma}{\gamma^3} \geq -\frac{m_0}{8} \frac{\gamma'}{\gamma^3}.$$

Portanto,

$$-\frac{1}{2} \check{a}'(y, t) \geq \frac{m_0}{4} \frac{\gamma'}{\gamma^3}.$$

e

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

- $-\frac{1}{2}a'(t, v_m, v_m) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \check{a}'(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} dy \geq \frac{m_0}{4} \frac{\gamma'}{\gamma^3} \|v_m\|^2.$

Temos que

$$\check{c}(y, t) = -\frac{\alpha'' + \gamma'' y}{\gamma}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} v'_m dy \right| &\leq \int_{\Omega} \frac{|\alpha' + \gamma' y|^2}{\gamma^2} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right| |v'_m| dy \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{|\gamma'|^2}{\gamma^2} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right| |v'_m| dy \\ &\leq \int_{\Omega} \lambda \frac{(\gamma')^4}{\gamma^4} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right|^2 dy + \frac{1}{4\lambda} \int_{\Omega} |v'_m|^2 dy, \end{aligned}$$

onde $\lambda > 0$. Tomando λ tal que

$$\lambda \frac{(\gamma')^4}{\gamma^4} = \frac{m_0}{4} \frac{\gamma'}{\gamma^3},$$

então

$$\frac{1}{4\lambda} = \frac{(\gamma')^3}{m_0 \gamma}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} v'_m dy \right| &\leq \frac{m_0}{4} \frac{\gamma'}{\gamma^3} \|v_m\|^2 + \frac{(\gamma')^3}{m_0 \gamma} |v'_m|^2 \\ &\leq \frac{m_0}{4} \frac{\gamma'}{\gamma^3} \|v_m\|^2 + \frac{1}{m_0 \gamma_0} \frac{m_0}{8} \frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} |v'_m|^2 \\ &= \frac{m_0}{4} \frac{\gamma'}{\gamma^3} \|v_m\|^2 + \frac{1}{16\gamma_0} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} |v'_m|^2, \end{aligned}$$

e assim obtemos

$$-\frac{1}{2}a'(t, v_m, v_m) + \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} v'_m dy \geq -\frac{1}{16\gamma(0)} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} |v'_m(t)|^2. \quad (2.121)$$

Substituindo (2.121) em (2.120), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt} \left[\left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{1}{2\gamma^2(t)} \|v_m(t)\|^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t, v_m, v_m) + \left[\delta - \frac{1}{16\gamma(0)} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] |v'_m(t)|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Escolhamos $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\delta}{2} > \frac{1}{16\gamma_0} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.123)$$

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

e assim, obtemos de (2.122) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt} \left[\left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{1}{2\gamma^2(t)} \|v_m(t)\|^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t, v_m, v_m) \\ + \frac{\delta}{2} |v'_m(t)|^2 \leq 0, \quad \text{para todo } t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Integrando a expressão de 0 até t , $t > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} |v'_m(s)|^2 ds + \int_0^t \frac{d}{ds} \left[\left(-\frac{m_0}{2} + a(s) \right) \frac{1}{2\gamma^2(s)} \|v_m(s)\|^2 \right] ds \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} [a(s, v_m, v_m)] ds + \frac{\delta}{2} \int_0^t |v'_m(s)|^2 ds \leq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |v'_m(t)|^2 - \frac{1}{2} |v'_m(0)|^2 + \frac{1}{2\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \|v_m(t)\|^2 \\ - \frac{1}{2\gamma^2(0)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(0) \right) \|v_m(0)\|^2 + \frac{1}{2} a(t, v_m, v_m) \\ - \frac{1}{2} a(0, v_m, v_m) + \frac{\delta}{2} \int_0^t |v'_m(s)|^2 ds \leq 0. \end{aligned}$$

Como $\gamma(t)$ é limitada para $t \geq 0$ e $a(t) \in W^{1,\infty}(0, \infty)$, então existe uma constante $c_1 > 0$ tal que $\frac{1}{2\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \geq c_1$. Sendo assim, tomemos

$$c_2 = \min \left\{ \frac{1}{2}, c_1 \right\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c_2 (|v'_m(t)|^2 + \|v_m(t)\|^2) \leq \frac{1}{2} |v'_m(0)|^2 + \frac{1}{2\gamma^2(0)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(0) \right) \|v_m(0)\|^2 \\ - \frac{1}{2} a(t, v_m, v_m) + \frac{1}{2} a(0, v_m, v_m) - \frac{\delta}{2} \int_0^t |v'_m(s)|^2 ds \end{aligned}$$

Assim, obtemos a Estimativa 2.1, a saber,

$$|v'_m(t)|^2 + \|v_m(t)\|^2 \leq C, \quad (2.125)$$

onde

$$C = \frac{1}{c_2} \left[\frac{1}{2} |v_1|^2 + \left(-\frac{m_0}{2} + a(0) \right) \frac{1}{2\gamma(0)} \|v_0\|^2 + \frac{1}{2} a(0, v_0, v_0) \right].$$

Estimativa 2.2 Tomemos $v = -\frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2} = -\Delta v'_m$ em (2.108). Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{d}{dt} |\Delta v_m|^2 + a \left(t, v_m, -\frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2} \right) \\ + \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial v'_m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2} \right) + \left(\check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2} \right) + \delta \|v'_m\|^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.126)$$

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Analizaremos os termos da equação acima.

•

$$\begin{aligned} \alpha \left(t, v_m, -\frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2} \right) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \check{\alpha}(y, t) (\Delta v_m)^2 dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \check{\alpha}'(y, t) (\Delta v_m)^2 dy \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \check{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \right] \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy + \frac{\partial \check{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=1}. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial v'_m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2} \right) &= - \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial v'_m}{\partial y} \frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2} dy \\ &= - \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 dy \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 dy \\ &= - \frac{1}{2} \left[\check{b}(y, t) \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 dy - \frac{1}{2} \check{b}(y, t) \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 \Big|_{y=0}^{y=1}. \end{aligned}$$

Observação 2.8. Sabemos que $\check{b}(y, t) = -2 \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right)$ com $\alpha'(t) < 0$, $\beta'(t) > 0$ e $\gamma(t) > 0$. Então

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \check{b}(y, t) \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 \Big|_{y=0}^{y=1} &= -\frac{1}{2} \check{b}(1, t) \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \check{b}(0, t) \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right)^2 \\ &= \frac{(\alpha' + \gamma')}{\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right)^2 - \frac{\alpha'}{\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

Também temos,

•

$$\begin{aligned} \left(\check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2} \right) &= - \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2} dy \\ &= - \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left[\check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \right] \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy - \check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=1}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é uma consequência da integração por partes.

Substituindo as expressões acima em (2.126), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{d}{dt} |\Delta v_m|^2 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \check{a}(y, t) (\Delta v_m)^2 dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \check{a}'(y, t) (\Delta v_m)^2 dy \\
 & - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \check{a}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \right] \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy + \frac{\partial \check{a}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=1} \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 dy - \frac{1}{2} \check{b}(y, t) \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 \Big|_{y=0}^{y=1} \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left[\check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \right] \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy - \check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=1} + \delta \|v'_m\|^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.127}$$

Temos visto que

•

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \check{a}'(y, t) (\Delta v_m)^2 dy \geq \frac{m_0}{2} \frac{\gamma'}{\gamma^3} |\Delta v_m|^2.$$

Também temos,

$$\begin{aligned}
 \check{a}(y, t) &= \frac{m_0}{2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right)^2 \\
 \frac{\partial \check{a}}{\partial y} &= -2 \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right) \frac{\gamma'}{\gamma} \\
 \frac{\partial^2 \check{a}}{\partial y^2} &= -2 \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \check{a}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \right] \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy &= \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \check{a}}{\partial y^2} \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy + \int_{\Omega} \frac{\partial \check{a}}{\partial y} \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \\
 &= -2 \int_{\Omega} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \\
 &\quad - 2 \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right) \frac{\gamma'}{\gamma} \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy.
 \end{aligned}$$

Obtemos

$$\left| -2 \int_{\Omega} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \right| \leq 4\lambda \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^4 \|v_m\|^2 + \frac{1}{4\lambda} \|v'_m\|^2.$$

Tomando

$$4\lambda \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^4 = \frac{m_0}{32} \frac{\gamma'}{\gamma^3} \pi^2$$

resulta que

$$\frac{1}{4\lambda} = \frac{32(\gamma')^3}{\pi^2 m_0 \gamma}.$$

Como $\pi^2 \|v_m\|^2 < |\Delta v_m|^2$, $(\gamma')^3 \leq \frac{m_0}{16} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$ e $\frac{1}{\gamma} < \frac{1}{\gamma_0}$, temos que

- $$\left| -2 \int_{\Omega} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \right| \leq \frac{m_0 \gamma'}{32 \gamma^3} |\Delta v_m|^2 + \frac{2}{\pi^2 \gamma_0} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|v'_m\|^2.$$

Também temos,

$$\begin{aligned} \left| -2 \int_{\Omega} (\alpha' + \gamma' y) \frac{\gamma'}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \right| &\leq 2 \int_{\Omega} |\alpha' + \gamma' y| \frac{\gamma'}{\gamma^2} \left| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right| \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y} \right| dy \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right| \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y} \right| dy \\ &\leq 4\lambda \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^4 |\Delta v_m|^2 + \frac{1}{4\lambda} \|v'_m\|^2. \end{aligned}$$

Tomando

$$4\lambda \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^4 = \frac{m_0 \gamma'}{32 \gamma^3},$$

obtemos

$$\frac{1}{4\lambda} = \frac{32(\gamma')^3}{m_0 \gamma} \leq \frac{2}{\gamma(0)} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$\left| -2 \int_{\Omega} (\alpha' + \gamma' y) \frac{\gamma'}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \right| \leq \frac{m_0 \gamma'}{32 \gamma^3} |\Delta v_m|^2 + \frac{2}{\gamma(0)} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|v'_m\|^2$$

e

- $$\left| \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \check{a}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \right] \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \right| \leq \frac{m_0 \gamma'}{16 \gamma^3} |\Delta v_m|^2 + \frac{2}{\gamma_0} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi^2 + 1}{\pi^2} \right) \|v'_m\|^2.$$

Temos que $\frac{\partial \check{b}}{\partial y} = -2 \frac{\gamma'}{\gamma}$ e

- $$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \check{b}(y, t) \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 dy \right| \leq \frac{1}{2 \gamma_0} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|v'_m\|^2.$$

De

$$\begin{aligned} \check{c}(y, t) &= -\frac{(\alpha'' + \gamma'' y)}{\gamma} \\ \frac{\partial \check{c}}{\partial y}(y, t) &= -\frac{\gamma''}{\gamma}, \end{aligned}$$

segue que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left[\check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \right] \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy = \int_{\Omega} \frac{\partial \check{c}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy + \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy.$$

Temos

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} \frac{\partial \check{c}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \right| &\leq \int_{\Omega} \frac{|\gamma''|}{\gamma} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y} \right| dy \\
 &\leq \int_{\Omega} 2 \frac{(\gamma')^2}{\gamma} \frac{1}{\gamma} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y} \right| dy \\
 &\leq 4\lambda \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^4 |\Delta v_m|^2 + \frac{1}{4\lambda} \|v'_m\|^2 \\
 &\leq \frac{m_0 \gamma'}{32\gamma^3} |\Delta v_m|^2 + \frac{2}{\pi^2 \gamma(0)} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|v'_m\|^2.
 \end{aligned}$$

Também, temos

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 \check{c}(y, t) \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \right| &\leq \int_0^1 \frac{|\alpha'' + \gamma'' y|}{\gamma} \left| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right| \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y} \right| dy \\
 &\leq \int_0^1 \frac{(\alpha' + \gamma' y)^2}{\gamma} \frac{1}{\gamma} \left| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right| \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y} \right| dy \\
 &\leq \int_0^1 \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right| \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y} \right| dy \\
 &\leq \lambda \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^4 |\Delta v_m|^2 + \frac{1}{4\lambda} \|v'_m\|^2.
 \end{aligned}$$

Tomando $\lambda \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^4 = \frac{m_0 \gamma'}{32\gamma^3}$ e $\frac{1}{4\lambda} = \frac{8(\gamma')^3}{m_0 \gamma} \leq \frac{1}{2\gamma(0)} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\left| \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \right| \leq \frac{m_0 \gamma'}{32\gamma} |\Delta v_m|^2 + \frac{1}{2\gamma(0)} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|v'_m\|^2.$$

Portanto, obtemos a estimativa

•

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left[\check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \right] \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \right| \leq \frac{m_0 \gamma'}{16\gamma^3} |\Delta v_m|^2 + \frac{1}{\gamma(0)} \left(\frac{4 + \pi^2}{2\pi^2} \right) \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|v'_m\|^2.$$

De $\check{b}(y, t) = - \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right)$, obtemos

•

$$-\check{b}(y, t) \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{2\beta'}{\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right)^2 + \frac{2(-\alpha)}{\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right)^2.$$

Temos

$$\frac{\partial \check{a}}{\partial y} = -2 \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right) \frac{\gamma'}{\gamma}$$

e

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial \tilde{a}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} \right|_{y=0}^{y=1} &\leq 2 \frac{\beta' \gamma'}{\beta \gamma} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(1, t) \right| \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right| + 2 \frac{|\alpha'| \gamma'}{\gamma \gamma} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(0, t) \right| \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right| \\
 &= \frac{2}{4} \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right| \frac{4\beta' \gamma'}{\gamma^2} \left(\frac{\gamma}{\beta'} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(1, t) \right| \\
 &\quad + \frac{2}{4} \left(\frac{|\alpha'|}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right| \frac{4|\alpha'| \gamma' \gamma^{\frac{1}{2}}}{\gamma^2 |\alpha'|^{\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(0, t) \right| \\
 &\leq \frac{\beta'}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right|^2 + \frac{8(\beta' \gamma')^2 \gamma}{\gamma^4 \beta'} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(1, t) \right|^2 \\
 &\quad + \frac{|\alpha'|}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right|^2 + \frac{8(|\alpha'| \gamma')^2 \gamma}{\gamma^4 |\alpha'|} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(0, t) \right|^2 \\
 &\leq \frac{\beta'}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right|^2 + \left(\frac{2\gamma'}{\gamma} \right)^3 \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(1, t) \right|^2 \\
 &\quad + \frac{|\alpha'|}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right|^2 + \left(\frac{2\gamma'}{\gamma} \right)^3 \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(0, t) \right|^2.
 \end{aligned}$$

Notemos que $\beta' = \gamma' + \alpha' < \gamma'$ e $|\alpha' + \gamma'y| < \gamma'$ implica $|\alpha'| < \gamma'$.

Temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_m}{\partial y}(1, t) &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) dy = \int_{\Omega} \frac{\partial v_m}{\partial y} dy + \int_{\Omega} y \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} dy \\
 &\leq \int_{\Omega} \frac{\partial v_m}{\partial y} dy + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} dy \leq \|v_m\| + |\Delta v_m| \leq \left(\frac{\pi+1}{\pi} \right) |\Delta v_m|.
 \end{aligned}$$

Portanto,

•

$$\left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(1, t) \right|^2 \leq \left(\frac{\pi+1}{\pi} \right)^2 |\Delta v_m|^2.$$

Pelo mesmo argumento, temos

•

$$\left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(0, t) \right|^2 \leq \left(\frac{\pi+1}{\pi} \right)^2 |\Delta v_m|^2.$$

Portanto, obtemos

•

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial \tilde{a}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} \right|_{y=0}^{y=1} &\leq \frac{\beta'}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right|^2 + \left(\frac{2\gamma'}{\gamma} \right)^3 \left(\frac{\pi+1}{\pi} \right)^2 |\Delta v_m|^2 \\
 &\quad + \frac{|\alpha'|}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right|^2 + \left(\frac{2\gamma'}{\gamma} \right)^3 \left(\frac{\pi+1}{\pi} \right)^2 |\Delta v_m|^2.
 \end{aligned}$$

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Da hipótese **(H3)** obtemos que $|\alpha''| \leq \frac{(\alpha')^2}{\gamma}$ e $|\beta''| \leq \frac{(\beta')^2}{\gamma}$, e como $\check{c}(y, t) = -\frac{(\alpha'' + \gamma''y)}{\gamma}$, temos

•

$$\begin{aligned}
 \left| \check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v'_m}{\partial y} \right|_{y=0}^{y=1} &\leq \frac{|\beta''|}{\gamma} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(1, t) \right| \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right| \\
 &+ \frac{|\alpha''|}{\gamma} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(0, t) \right| \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right| \\
 &\leq \left(\frac{\beta'}{\gamma} \right)^2 \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right| \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(1, t) \right| \\
 &+ \left(\frac{\alpha'}{\gamma} \right)^2 \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right| \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(0, t) \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\beta'}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right| \frac{2(\beta')^2 \gamma^{\frac{1}{2}}}{\gamma^2 (\beta')^{\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(1, t) \right| \\
 &+ \frac{|\alpha'|^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^{\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right| \frac{2(\alpha')^2 \gamma^{\frac{1}{2}}}{\gamma^2 |\alpha'|^{\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(0, t) \right| \\
 &\leq \frac{\beta'}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right|^2 + \frac{2(\beta')^3}{\gamma^3 \beta'} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(1, t) \right|^2 \\
 &+ \frac{|\alpha'|}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right|^2 + \frac{2(\alpha')^4 \gamma}{\gamma^4 |\alpha'|} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(0, t) \right|^2 \\
 &\leq \frac{\beta'}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right|^2 + \frac{2(\alpha')^4}{\gamma^3 |\alpha'|} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(1, t) \right|^2 \\
 &+ \frac{|\alpha'|}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right|^2 + \frac{2(\alpha')^4}{\gamma^3 |\alpha'|} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(0, t) \right|^2 \\
 &\leq \frac{\beta'}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right|^2 + \frac{2(\gamma')^3}{\gamma^3} \left(\frac{\pi+1}{\pi} \right)^2 |\Delta v_m|^2 \\
 &+ \frac{|\alpha'|}{8\gamma} \left| \frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right|^2 + \frac{2(\gamma')^3}{\gamma^3} \left(\frac{\pi+1}{\pi} \right)^2 |\Delta v_m|^2.
 \end{aligned}$$

Notemos que consideramos $\frac{(\alpha')^4}{|\alpha'|} = |\alpha'|^3 < (\gamma')^3$.

Também obtemos

•

$$\begin{aligned}
 & \frac{2\beta'}{\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right)^2 + \frac{2(-\alpha')}{\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right)^2 \\
 & - \frac{\beta'}{4\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right)^2 - \frac{|\alpha'|}{4\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right)^2 \\
 & = \frac{7\beta'}{4\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right)^2 + \frac{-8\alpha' - |\alpha'|}{4\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right)^2 \\
 & = \frac{7\beta'}{4\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1, t) \right)^2 + \frac{-7\alpha'}{4\gamma} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(0, t) \right)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima em (2.127), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{d}{dt} |\Delta v_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \check{a}(y, t) (\Delta v_m(t))^2 dy \\
 & + \left[\frac{m_0}{4} \frac{\gamma'}{\gamma^3} - \frac{m_0 \gamma'}{16\gamma^3} - 16 \left(\frac{\pi+1}{\pi} \right)^2 \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^3 - 4 \left(\frac{\pi+1}{\pi} \right)^2 \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^3 \right] |\Delta v_m(t)|^2 \\
 & + \left[\delta - \frac{1}{2\gamma(0)} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{1/2} - \frac{2}{\gamma(0)} \left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2} \right) \left(\frac{m_0}{2} \right)^{1/2} - \frac{1}{\gamma(0)} \left(\frac{\pi^2+4}{2\pi^2} \right) \left(\frac{m_0}{2} \right)^{1/2} \right] \\
 & \|v'_m(t)\|^2 \\
 & \leq 0, \quad \forall t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

Portanto, de (2.128), da observação 2.7 e das hipóteses sobre γ' e δ , obtemos a Estimativa 2.2, a saber

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{d}{dt} |\Delta v_m(t)|^2 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \check{a}(y, t) (\Delta v_m(t))^2 dy \\
 & + \frac{\delta}{2} \|v'_m(t)\|^2 \leq 0, \quad \text{para todo } t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.129}$$

Estimativa 2.3 Tomemos $v = -\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} = -\Delta v_m$ em (2.108). Logo,

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} (\nabla v'_m, \nabla v_m) - \|v'_m\|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) |\Delta v_m(t)|^2 + a(t, v_m, -\Delta v_m) \\
 & + \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \|v_m\|^2 + \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial v'_m}{\partial y}, -\Delta v_m \right) + \left(\check{c}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y}, -\Delta v_m \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.130}$$

Como

$$\begin{aligned}
 \check{a}(y, t) &= \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right)^2 \\
 \frac{\partial \check{a}}{\partial y} &= -2 \frac{(\alpha' + \gamma' y) \gamma'}{\gamma^2},
 \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \alpha(t, v_m, -\Delta v_m) &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{\alpha}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \check{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} dy + \int_{\Omega} \check{\alpha}(y, t) \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right)^2 dy. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{\partial \check{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} dy \right| &\leq \int_{\Omega} 2 \frac{|(\alpha' + \gamma' y) \gamma'|}{\gamma^2} \left| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right| dy \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \left| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right| dy \\ &\leq 2 \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \|v_m\| |\Delta v_m| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 |\Delta v_m|^2 \\ &\leq \frac{m_0}{4\pi\gamma^2} |\Delta v_m|^2. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \check{\alpha}(y, t) \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right)^2 dy &= \frac{m_0}{2\gamma^2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right)^2 dy - \int_{\Omega} \frac{(\alpha' + \gamma' y)^2}{\gamma^2} \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right)^2 dy \\ &= \frac{m_0}{2\gamma^2} |\Delta v_m|^2 - \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right)^2 dy. \end{aligned}$$

No entanto,

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right)^2 dy \geq - \frac{m_0}{8\gamma^2} |\Delta v_m|^2$$

e

$$\alpha(t, v_m, -\Delta v_m) \geq \left(-\frac{m_0}{4\pi\gamma^2} + \frac{m_0}{2\gamma^2} - \frac{m_0}{8\gamma^2} \right) |\Delta v_m|^2.$$

Também, temos que

•

$$\begin{aligned} \left| \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial v'_m}{\partial y}, -\Delta v_m \right) \right| &= \left| \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \Delta v_m \frac{\partial v'_m}{\partial y} dy \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right)^2 (\Delta v_m)^2 dy + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v'_m}{\partial y} \right)^2 dy \\ &\leq \frac{m_0}{8\gamma^2} |\Delta v_m|^2 + \|v'_m\|^2. \end{aligned}$$

e

•

$$\begin{aligned} \left| \left(\check{c}(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial \mathbf{y}}, -\Delta \mathbf{v}_m \right) \right| &\leq \int_{\Omega} \frac{|(\alpha' + \gamma' \mathbf{y}) \gamma'|}{\gamma} \left| \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial \mathbf{y}} \right| |\Delta \mathbf{v}_m| d\mathbf{y} \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \left| \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial \mathbf{y}} \right| |\Delta \mathbf{v}_m| d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{m_0}{8\pi\gamma^2} |\Delta \mathbf{v}_m|^2. \end{aligned}$$

Substituindo as estimativas acima em (2.130), obtemos

$$\frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{v}'_m, \nabla \mathbf{v}_m) + \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_m\|^2 + \frac{3m_0}{8\gamma^2} |\Delta \mathbf{v}_m|^2 - 2\|\mathbf{v}'_m\|^2 \leq 0, \quad (2.131)$$

pois $-\frac{m_0}{2} + \alpha(t) \geq \frac{m_0}{2}$.

Multiplicando (2.131) por $\frac{\delta}{4}$ e somando a (2.129) da Estimativa 2.2, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{4} \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{v}'_m, \nabla \mathbf{v}_m) + \frac{\delta^2}{8} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_m\|^2 + \frac{3\delta}{32} \frac{m_0}{\gamma^2} |\Delta \mathbf{v}_m|^2 - \frac{\delta}{2} \|\mathbf{v}'_m\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}'_m\|^2 \\ + \frac{1}{2\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + \alpha(t) \right) \frac{d}{dt} |\Delta \mathbf{v}_m|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \check{a}(\mathbf{y}, t) (\Delta \mathbf{v}_m)^2 d\mathbf{y} + \frac{\delta}{2} \|\mathbf{v}'_m\|^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (2.132)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\mathbf{v}'_m\|^2 + \frac{\delta}{2} (\nabla \mathbf{v}'_m, \nabla \mathbf{v}_m) + \frac{\delta^2}{4} \|\mathbf{v}_m\|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + \alpha(t) \right) |\Delta \mathbf{v}_m|^2 \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \check{a}(\mathbf{y}, t) (\Delta \mathbf{v}_m)^2 d\mathbf{y} \right] + \frac{3m_0\delta}{32\gamma^2} |\Delta \mathbf{v}_m|^2 \leq \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + \alpha(t) \right) \right] |\Delta \mathbf{v}_m|^2 \\ \leq 0. \end{aligned} \quad (2.133)$$

A última desigualdade decorre dos cálculos vistos na desigualdade (2.120).

Consideremos a função numérica definida por

$$\begin{aligned} H(t) = \|\mathbf{v}'_m(t)\|^2 + \frac{\delta}{2} (\nabla \mathbf{v}'_m(t), \nabla \mathbf{v}_m(t)) + \frac{\delta^2}{4} \|\mathbf{v}_m(t)\|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + \alpha(t) \right) |\Delta \mathbf{v}_m(t)|^2 \\ + \int_{\Omega} \check{a}(\mathbf{y}, t) (\Delta \mathbf{v}_m)^2 d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever (2.133) como sendo

$$\frac{1}{2} H'(t) \leq -\frac{3m_0\delta}{32} \frac{|\Delta \mathbf{v}_m|^2}{\gamma^2} \quad (2.134)$$

Lema 2.4.1. *Para todo $t \geq 0$, temos que $0 \leq H(t) \leq H(0)$.*

Demonstração. De fato, temos que

$$\left| \frac{\delta}{2} (\nabla \mathbf{v}'_m, \nabla \mathbf{v}_m) \right| \leq \frac{\delta^2}{2} \|\mathbf{v}_m\|^2 + \frac{1}{8} \|\mathbf{v}'_m\|^2$$

e

$$\left(-\frac{m_0}{2} + a(t)\right) \geq \frac{m_0}{2} \geq 0 ; \quad \check{a}(y, t) > 0.$$

Portanto,

$$H(t) \geq \frac{\delta^2}{2} \|v_m(t)\|^2 + \frac{1}{8} \|v'_m(t)\|^2 \geq 0.$$

Agora, como

$$-\frac{3m_0\delta}{32} \frac{|\Delta v_m|^2}{\gamma^2} < 0,$$

então de (2.134), temos que

$$H'(t) \leq 0$$

para todo $t \geq 0$. Logo, $H(t)$ é decrescente para todo $t \geq 0$, isto é,

$$H(t) \leq H(0)$$

□

Como $H(t) \leq H(0)$ para todo $t \geq 0$, obtemos estimativas para $\|v'_m(t)\|$ e $|\Delta v_m(t)|$ independente de t .

Passagem ao Limite : Das estimativas obtidas acima, extraímos uma subsequência

$(v_v)_{v \in \mathbb{N}}$ de $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$v_v \xrightarrow{*} v \text{ em } L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \quad (2.135)$$

$$v'_v \xrightarrow{*} v' \text{ em } L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)). \quad (2.136)$$

Pelo teorema de compacidade de Aubin-Lions [9], extraímos uma subsequência

$(v_v)_{v \in \mathbb{N}}$, que representamos ainda por $(v_v)_{v \in \mathbb{N}}$, tal que

$$v_v \rightarrow v \text{ fortemente em } L^2(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Para $\theta \in D(0, T)$, temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \int_\Omega v_v'' z \theta \, dy \, dt &= \int_0^\infty (v_v'', z) \theta(t) \, dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} (v_v', z) \theta(t) \, dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{d}{dt} (v_v', z) \theta(t) \, dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (v_v', z) \theta'(t) \, dt \\
 &= - \int_0^\infty (v_v', z) \theta'(t) \, dt \rightarrow - \int_0^\infty (v', z) \theta'(t) \, dt \\
 &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (v', z) \theta'(t) \, dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{d}{dt} (v', z) \theta(t) \, dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (v', z) \theta(t) \, dt = \int_0^\infty (v'', z) \theta(t) \, dt \\
 &= \int_0^\infty \int_\Omega v'' z \theta(t) \, dy \, dt.
 \end{aligned}$$

isto é,

$$(v_v'', z) \rightharpoonup (v'', z) \quad \text{em} \quad L^2(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Da hipótese **(H1)** e das Estimativas 2.1 e 2.2, temos

$$\left| \frac{1}{\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v_v}{\partial y^2} \right| < C \quad \text{em} \quad [0, \infty).$$

Então,

$$\frac{1}{\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v_v}{\partial y^2} \xrightarrow{*} \frac{1}{\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{em} \quad L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Integração por partes nos dá que

$$a(t, v_v, z) \rightharpoonup a(t, v, z) \quad \text{em} \quad L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)),$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial v_v}{\partial y} \right) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \text{em} \quad L^2(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

De fato, para $z \in D(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty a(t, v_v, z) \, dt &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 \check{a}(y, t) \frac{\partial v_v}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \, dy \right) \, dt \\
 &= - \int_0^\infty \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial v_v}{\partial y} \right) z \, dy \right) \, dt \\
 &\rightarrow - \int_0^\infty \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) z \, dy \right) \, dt \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 \check{a}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \, dy \right) \, dt \\
 &= \int_0^\infty a(t, v, z) \, dt,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathbf{a}(\mathbf{t}, \mathbf{v}_\nu, \mathbf{z}) \rightharpoonup \mathbf{a}(\mathbf{t}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) \quad \text{em } L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\check{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \mathbf{y}} \right) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\check{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \right) \quad \text{em } L^2(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Pelo mesmo argumento, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\check{\mathbf{b}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}'_\nu}{\partial \mathbf{y}} \right) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\check{\mathbf{b}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{y}} \right) \quad \text{em } L^2(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\check{\mathbf{c}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \mathbf{y}} \right) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\check{\mathbf{c}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \right) \quad \text{em } L^2(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Também,

$$\delta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \mathbf{t}}, \mathbf{z} \right) \rightharpoonup \delta \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{t}}, \mathbf{z} \right) \quad \text{em } L^2(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Das convergências acima, tomando $\mathbf{m} = \mathbf{v}$ na equação aproximada, temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_\nu'', \mathbf{z}) + \frac{1}{\gamma^2(\mathbf{t})} \left(-\frac{\mathbf{m}_0}{2} + \mathbf{a}(\mathbf{t}) \right) (\nabla \mathbf{v}_\nu, \nabla \mathbf{z}) + \mathbf{a}(\mathbf{t}, \mathbf{v}_\nu, \mathbf{z}) + \left(\check{\mathbf{b}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}'_\nu}{\partial \mathbf{y}}, \mathbf{z} \right) \\ + \left(\check{\mathbf{c}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \mathbf{y}}, \mathbf{z} \right) + \delta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \mathbf{t}}, \mathbf{z} \right) = 0 \end{aligned}$$

Ao limite com $\nu \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}'', \mathbf{z}) + \frac{1}{\gamma^2(\mathbf{t})} \left(-\frac{\mathbf{m}_0}{2} + \mathbf{a}(\mathbf{t}) \right) (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{z}) + \mathbf{a}(\mathbf{t}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) + \left(\check{\mathbf{b}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{y}}, \mathbf{z} \right) \\ + \left(\check{\mathbf{c}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}}, \mathbf{z} \right) + \delta \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{t}}, \mathbf{z} \right) = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{v}'' - \frac{1}{\gamma^2(\mathbf{t})} \left(-\frac{\mathbf{m}_0}{2} + \mathbf{a}(\mathbf{t}) \right) \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}^2} + \mathbf{a}(\mathbf{t}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) + \check{\mathbf{b}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{y}} + \check{\mathbf{c}}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} + \delta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{t}} = 0$$

em $L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$.

Das convergências obtidas, concluímos que

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'(0) = \mathbf{v}_1 \quad \text{em } (\Omega)$$

De fato,

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Por 2.103, 2.104 e pelo Teorema (1.16), temos que $v \in C^0(0, \infty; L^2(\Omega))$ e $v' \in C^0(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$. Logo, faz sentido o cálculo de $v(., 0)$. De (2.134),

$$\int_0^\infty (v'_v, z) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^\infty (v', z) \theta(t) dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

onde $\theta \in C^1([0, T])$ tal que $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$.

Logo,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{d}{dt} (v_v, z) \theta(t) dt \longrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{d}{dt} (v, z) \theta(t) dt.$$

Integrando por partes,

$$\theta(t)(v_v, z) \Big|_0^T - \int_0^T \theta'(t)(v_v, z) dt \longrightarrow \theta(t)(v, z) \Big|_0^T - \int_0^T \theta'(t)(v, z) dt.$$

Logo,

$$(v_v(0), z) - \int_0^T (v_v, z) \theta'(t) dt \longrightarrow (v(0), z) - \int_0^T (v, z) \theta'(t) dt.$$

Como

$$\int_0^T (v_v, z) \theta'(t) dt \longrightarrow \int_0^T (v, z) \theta'(t) dt,$$

concluimos que

$$(v_v(0), z) \longrightarrow (v(0), z), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado de (2.108), segue que

$$(v_v(0), z) \longrightarrow (v_0, z), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Pela unicidade do limite, temos

•

$$v(0) = v_0 \text{ em } L^2(\Omega)$$

Analogamente, como

$$v' \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad v'' \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

então, pelo Teorema (1.16), temos que

$$v' \in C^0([0, \infty); H^{-1}(\Omega)),$$

e assim faz sentido calcular $v'(. , 0)$.

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Considere $\theta \in C_c^\infty([0, \infty))$ tal que

$$\theta(0) = 1 \quad \text{e} \quad \theta(t) = 0 \text{ para } t \text{ grande,}$$

e $z \in L^2(\Omega)$. Logo,

$$\int_0^\infty (v_v''(t), z) \theta(t) dt = -(v'(0), z) \theta(0) - \int_0^\infty (v_v'(t), z) \theta'(t) dt.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ e considerando que

$$(v_v'', z) \longrightarrow (v'', z) \quad \text{em } L^2(\Omega),$$

$$(v_v', z) \longrightarrow (v', z) \quad \text{em } L^2(\Omega),$$

e do Teorema 2.106, temos

$$\int_0^\infty (v''(t), z) \theta(t) dt = -(v_1, z) \theta(0) - \int_0^\infty (v'(t), z) \theta'(t) dt.$$

Considerando as convergências sobre v , temos

$$\int_0^\infty (v''(t), z) \theta(t) dt = -(v'(0), z) \theta(0) - \int_0^\infty (v'(t), z) \theta'(t) dt.$$

Segue-se que

$$(v'(0), z) = (v_1, z), \quad \forall z \in L^2(\Omega).$$

Portanto,

•

$$v'(0) = v_1 \text{ em } L^2(\Omega).$$

provando que v é a solução fraca do sistema (2.11) para o caso $w = 0$.

Unicidade : Sejam v e $\hat{v}$ duas soluções do teorema (2.4). Logo,

$$\begin{aligned} (v'', \varphi) + \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) (\nabla v, \nabla \varphi) + a(t, v, \varphi) + \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial v'}{\partial y}, \varphi \right) \\ + \left(\check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y}, \varphi \right) + \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \varphi \right) = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\hat{v}'', \varphi) + \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) (\nabla \hat{v}, \nabla \varphi) + a(t, \hat{v}, \varphi) + \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y}, \varphi \right) \\ + \left(\check{c}(y, t) \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \varphi \right) + \delta \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}, \varphi \right) = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & (v'' - \hat{v}'', \varphi) + \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) (\nabla(v - \hat{v}), \nabla\varphi) + a(t, v - \hat{v}, \varphi) \\ & + \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial(v' - \hat{v}')}{\partial y}, \varphi \right) + \left(\check{c}(y, t) \frac{\partial(v - \hat{v})}{\partial y}, \varphi \right) + \delta \left(\frac{\partial(v - \hat{v})}{\partial t}, \varphi \right) = 0. \end{aligned}$$

Tomando $z = v - \hat{v}$ na equação acima, resulta que

$$\begin{aligned} & (z'', \varphi) + \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) (\nabla z, \nabla\varphi) + a(t, z, \varphi) \\ & + \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial z'}{\partial y}, \varphi \right) + \left(\check{c}(y, t) \frac{\partial z}{\partial y}, \varphi \right) + \delta \left(\frac{\partial z}{\partial t}, \varphi \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.137)$$

em $L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$

e

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = 0. \quad (2.138)$$

Tomando $\varphi = z'$ na equação (2.137), obtemos

$$\begin{aligned} & (z(t)'', z(t)') + \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) (\nabla z(t), \nabla z(t)') \\ & + a(t, z, z') + \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial z(t)'}{\partial y}, z(t)' \right) + \left(\check{c}(y, t) \frac{\partial z(t)}{\partial y}, z(t)' \right) \\ & + \delta \left(\frac{\partial z(t)}{\partial t}, z(t)' \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Agora,

$$(z(t)'', z(t)') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |z(t)'|^2 dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z(t)'|^2 \quad (2.140)$$

$$(\nabla z(t), \nabla z(t)') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla z(t)|^2 dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla z(t)\|^2 \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned} a(t, z, z') &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t, z, z) - \frac{1}{2} a'(t, z, z) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \check{a}(y, t) \left(\frac{\partial z(t)}{\partial y} \right)^2 dy \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\Omega} \check{a}'(y, t) \left(\frac{\partial z(t)}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned} \left(\check{b}(y, t) \frac{\partial z(t)'}{\partial y}, z(t)' \right) &= \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial z'}{\partial y} z(t)' dy \\ &= \frac{1}{2} \check{b}(y, t) (z(t)')^2 \Big|_{y=0}^{y=1} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} (z(t)')^2 dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} (z(t)')^2 dy. \end{aligned} \quad (2.144)$$

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Substituindo (2.140) – (2.144) em (2.139), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z(t)'|^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \frac{d}{dt} \|z(t)\|^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t, z(t), z(t)) - \frac{1}{2} a'(t, z(t), z(t)) \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \check{b}}{\partial y} (z(t)')^2 dy + \left(\check{c}(y, t) \frac{\partial z(t)}{\partial y}, z(t)' \right) + \delta |z(t)'|^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Um cálculo análogo conforme visto na Estimativa 2.1, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |z'(t)|^2 - \frac{1}{2} |z'(0)|^2 + \frac{1}{2\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \|z(t)\|^2 \\ & - \frac{1}{2\gamma^2(0)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(0) \right) \|z(0)\|^2 + \frac{1}{2} a(t, z, z) - \frac{1}{2} a(0, z(t), z(t)) \\ & + \frac{\delta}{2} \int_0^t |z'(s)|^2 ds \leq 0. \end{aligned}$$

Como $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$, $a(t, z(t), z(t)) \geq 0$ e $a(0, z(t), z(t)) \leq 0$, então da expressão acima, temos

$$\frac{1}{2} |z'(t)|^2 + \frac{1}{2\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \|z(t)\|^2 = 0$$

e como

$$\frac{1}{2\gamma^2(t)} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \|z(t)\|^2 \geq \frac{1}{2\gamma^2(t)} \frac{m_0}{2} > 0,$$

então, da expressão acima, temos

$$|z'(t)| = \|z(t)\| = 0 \quad \text{em} \quad [0, \infty),$$

isto é,

$$z(t) = 0.$$

Logo,

$$v = \hat{v},$$

o que mostra a unicidade no caso $w = 0$.

Caso 2: $w \neq 0$ sobre Σ_0

Inicialmente, tomemos $w \in H_0^2(0, \infty; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))$. Veja que w está definida apenas na fronteira e no tempo. A sobrejetividade do Teorema do Traço garante a existência de uma função $q \in H_0^2(0, \infty; H^2(\Omega))$ tal que $Tq = w$, onde $T : H^2(\Omega) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, assim ,

$$\left\{ \begin{array}{l} q(0, t) = w \text{ sobre } \Sigma_0 \\ q(1, t) = 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{array} \right.$$

Como Ω é um domínio com fronteira Lipschitz e $s > \frac{1}{2}$, existe um operador linear e contínuo de extensão

$$L : H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega),$$

tal que

$$(T \circ L)(w) = w, \quad \forall w \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega),$$

onde T denota o operador traço.

Consequentemente, para todo $t \in (0, \infty)$, se $w(\cdot, t) \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, então existe

$$q(\cdot, t) = L(w(\cdot, t)) \in H^2(\Omega).$$

Em particular, se

$$w \in H^2(0, \infty; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)),$$

segue-se que

$$q \in H^2(0, \infty; H^2(\Omega)).$$

Além disso, como

$$w \in H_0^2(0, \infty; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)),$$

pela linearidade do operador L obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} q(0) = L(w(0)) = L(0) = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t}(0) = L\left(\frac{\partial w}{\partial t}(0)\right) = L(0) = 0, \end{array} \right. \quad 0 < y < 1.$$

Portanto,

$$q \in H_0^2(0, \infty; H^2(\Omega)).$$

Em particular, como

$$H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq 2\},$$

conclui-se que q'' e Lq pertencem a $L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$.

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Consideremos agora o seguinte problema misto:

$$\begin{cases} p'' + Lp = -q'' - Lq & \text{em } Q, \\ p(0, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma_0, \\ p(1, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0, \\ p(y, 0) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t}(y, 0) = 0, \quad 0 < y < 1. \end{cases}$$

Desde que $-q'' - Lq \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$, segue do caso 1 visto anteriormente, que o sistema acima possui uma única solução fraca p .

Por definição de solução fraca, $\forall T > 0$, p satisfaz

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} p''(t) \xi dy dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \Delta p \xi dy dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} \right) \xi dy dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial p'}{\partial y} \xi dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} \xi dy dt + \delta \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} \xi dy dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} (-q'' - Lq) \xi dy dt, \end{aligned}$$

em $D'(0, T)$, $\forall \xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Então

$$v = p + q$$

satisfaz

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} v'' \xi dy dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \Delta v \xi dy dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \xi dy dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \check{b}(y, t) \frac{\partial v'}{\partial y} \xi dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \xi dy dt + \delta \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \xi dy dt = 0, \end{aligned}$$

em $D'(0, T)$, $\forall \xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \left[v'' - \frac{1}{\gamma^2} \left(-\frac{m_0}{2} + a(t) \right) \Delta v - \frac{\partial}{\partial y} \left(\check{a}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \check{b}(y, t) \frac{\partial v'}{\partial y} \right. \\ & \left. + \check{c}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial t} \right] \xi dy dt = 0, \end{aligned}$$

em $D'(0, T)$, $\forall \xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Como foi definido o operador L anteriormente temos,

$$\int_0^T \int_{\Omega} (v'' + Lv) \xi dy dt = 0, \quad \forall \xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Logo, por Dubois Reymond

$$v'' + Lv = 0 \quad \text{em } Q.$$

Também, notemos que

$$\begin{cases} v(0, t) = w & \text{sobre } \Sigma_0 \\ v(1, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{cases}$$

Com efeito, sobre Σ_0 , vale

$$v(0, t) = (p + q)(0, t) = p(0, t) + q(0, t) = 0 + w = w.$$

Agora, sobre $\Sigma \setminus \Sigma_0$, temos

$$v(1, t) = (p + q)(1, t) = p(1, t) + q(1, t) = 0 + 0 = 0.$$

Finalmente, em Ω , vale

$$v(y, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = 0,$$

visto que,

$$v(y, 0) = (p + q)(y, 0) = p(y, 0) + q(y, 0) = p(y, 0) = 0$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = \frac{\partial (p + q)}{\partial t}(y, 0) = \frac{\partial p}{\partial t}(y, 0) + \frac{\partial q}{\partial t}(y, 0) = \frac{\partial p}{\partial t}(y, 0) = 0.$$

Portanto, v é a única solução fraca do problema (2.11) para todo $t \geq 0$. $\square$

Para finalizarmos esta seção, como consequência do teorema (2.4), obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.5. *Sejam $u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega_0)$. Assumamos que são satisfeitas as hipóteses **(H1)** – **(H3)** com*

$$0 < \gamma' < \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\pi + 1} \right) \left(\frac{m_0}{10} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\frac{\delta}{2} > \left[\frac{1}{2\gamma(0)} + \frac{2}{\gamma(0)} \left(\frac{\pi^2 + 1}{\pi} \right) + \frac{1}{\gamma(0)} \left(\frac{\pi^2 + 4}{2\pi^2} \right) \right] \left(\frac{m_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então o sistema (2.1) possui uma única solução global fraca $u(x, t)$ definida $\forall$ todo $t \geq 0$ e $x \in \Omega_t$.

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Demonstração. Sabemos por cálculos anteriores que $u(x, t) = v(y, t)$, $x = \alpha(t) + \gamma(t)y$, e $v(y, 0) = v_0(y)$ logo,

•

$$v_0(y) = u(\alpha(0) + \gamma(0)y, 0) = u_0(\alpha(0) + \gamma(0)).$$

Também temos que $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha' + \gamma'y) + \frac{\partial u}{\partial t}$. Portanto,

$$v_1(y) = \frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = (\alpha'(0) + \gamma'(0)y) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha(0) + \gamma(0)y, 0) + u'(\alpha(0) + \gamma(0)y, 0)$$

e então

•

$$v_1(y) = u_1(\alpha(0) + \gamma(0)y, 0) + (\alpha'(0) + \gamma'(0)y) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha(0) + \gamma(0)y, 0).$$

Temos que $\frac{\partial v}{\partial y} = \gamma \frac{\partial u}{\partial x}$ e

•

$$\begin{aligned} \|v_0\|^2 &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 dy \\ &= \int_{\Omega} \left(\gamma(0) \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 \frac{1}{\gamma(0)} dx \\ &= \gamma(0) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 dx = \gamma(0) \|u_0\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2 \end{aligned}$$

com $\Omega_0 = (\alpha_0, \beta_0)$.

Obtemos,

$$\begin{aligned} a(0, v_0, v_0) &= \int_{\Omega} \check{a}(y, 0) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 dy \\ &\leq \frac{m_0}{2\gamma(0)^2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 dy \\ &= \frac{m_0}{2\gamma(0)^2} \|v_0\|^2 = \frac{m_0}{2\gamma(0)} \|u_0\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2, \end{aligned}$$

pois

$$\check{a}(y, t) = \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2 \leq \frac{m_0}{2\gamma^2}.$$

Portanto,

•

$$a(0, v_0, v_0) \leq \frac{m_0}{2\gamma_0} \|u_0\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2.$$

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Como $\alpha'(0) + \gamma'(0)y < \gamma'(0)$, e observando $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ segue-se que

$$\begin{aligned}
 |v_1|^2 &= \int_{\Omega} (v_1(y))^2 dy \leq \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(u_1 + \gamma'(0) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{1}{\gamma(0)} dx \\
 &\leq \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(2(u_1)^2 + 2 \left(\gamma'(0) \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{1}{\gamma(0)} dx \\
 &\leq \frac{2}{\gamma(0)} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (u_1)^2 dx + \frac{2\gamma'(0)^2}{\gamma(0)} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &= \frac{2}{\gamma(0)} \|u_1\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \frac{2\gamma'(0)}{\gamma(0)} \|u_0\|_{L^2(\Omega(0))}^2.
 \end{aligned}$$

logo

•

$$|v_1|^2 \leq \frac{2}{\gamma(0)} \|u_1\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \frac{2(\gamma'(0))^2}{\gamma(0)} \|u_0\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2.$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} (\alpha(0) + \gamma(0)y) \gamma(0) + \gamma'(0) \frac{\partial u}{\partial x} (\alpha(0) \\
 &\quad + \gamma(0)y) + (\alpha'(0) + \gamma'(0)y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\alpha(0) + \gamma(0)y) \gamma(0) \\
 &\leq \gamma(0) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \gamma'(0) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \gamma'(0) \gamma(0) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \|v_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 dy \\
 &\leq 2 \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u_1 \gamma(0)}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{\gamma(0)} dx + \frac{2\gamma'(0)^2}{\gamma(0)} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 u \gamma(0)}{\partial x^2} \right)^2 dx \\
 &\leq 2 \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u_1 \gamma(0)}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{\gamma(0)} dx + \frac{2\gamma'(0)^2}{\gamma(0)} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} 2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &\quad + \gamma(0)^2 \int_{\alpha_0}^{\beta_0} 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \\
 &\leq 2\gamma(0) \|u_1\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2 + \frac{4\gamma'(0)^2}{\gamma(0)} \|u_0\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2 + 4\gamma'(0)^2 \gamma(0) \|\Delta u\|_{L^2(\Omega_0)}^2.
 \end{aligned}$$

Então

•

$$\|v_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2\gamma(0) \|u_1\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2 + \frac{4\gamma'(0)^2}{\gamma(0)} \|u_0\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2 + 4\gamma'(0)^2 \gamma(0) \|\Delta u\|_{L^2(\Omega_0)}^2.$$

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Como $\Delta v_0 = \gamma(0)\Delta u_0$ e $\check{a}(y, 0) \leq \frac{m_0}{2\gamma(0)^2}$, então

•

$$\begin{aligned} a(0, \Delta v_0, \Delta v_0) &= \int_{\Omega} \check{a}(y, 0)(\Delta v_0)^2 dy = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \check{a}(y, 0)(\Delta u_0)^2 \frac{1}{\gamma(0)} dx \\ &\leq \frac{m_0 \gamma(0)}{2} |\Delta u_0|_{L^2(\Omega_0)}^2. \end{aligned}$$

analogamente temos ,

$$|\Delta v_0|^2 = \int_{\Omega} (\Delta v_0)^2 dy = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (\gamma(0)\Delta u_0)^2 \frac{1}{\gamma_0} dx = \gamma(0) |\Delta u_0|_{L^2(\Omega_0)}^2.$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] AUBIN, J.P., *Applied Functional Analysis, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, Second Edition, 2000.
- [2] BREZIS, H., *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Dunod, Paris, 1990.
- [3] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2011.
- [4] EKELAND, I.; TEMAN, R., *Convex Analysis and Variational Problems*, Classics in Applied Mathematics 28, SIAM, 1999.
- [5] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, AMS, 1997.
- [6] P. GRISVARD. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 9781611972030.
- [7] HÖRMANDER, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer - Verlag, 1976.
- [8] LIONS, J.-L., Hierarchic Control, *Proc. Indian Academic Science Mathematical Science*, v. 104, n^o 1, p.295–304, 1994.
- [9] LIONS, J.-L., *Hidden Regularity in some Nonlinear Hyperbolic Equations*, Mat. Apl. Comput., v. 6, p. 7–15, 1987.
- [10] LIONS, J.-L., *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilization des Systèmes Distribués*, Tome I, RMA 8, Masson, Paris, 1988.
- [11] LIONS, J.-L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [12] LIONS, J. -L.; *Contrôle de Pareto de systèmes distribués. Le cas d'évolution*. C.R. Acad.Sci. Paris, Sér. I 302 p. 413-417, 1986.
- [13] LIONS, J. -L.; *Some remarks on Stackelberg's optimization*. Math. Models Methods Appl. Sci. 4 p. 477-487, 1994.
- [14] JESUS, I. P., . Remarks on hierarchic control for the wave equation in moving domains. *Archiv der Mathematik* (Printed ed.), v. 102, p. 171-179, 2014.
- [15] MEDEIROS, L. A., Exact Controllability for Wave Equation - HUM, Atas do 37^o SBA, p. 61-173, 1993.
- [16] MEDEIROS, L. A. & Milla Miranda, M., Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos), Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1999.
- [17] MEDEIROS, L. A. & Milla Miranda, M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.
- [18] MEDEIROS, L.A. & LIMACO, J & MENEZES, S.B. *Vibrations of Elastic Strings (Mathematical Aspects)*. Journal of Computational Analysis and Applications, Part 1, v.4, n^o 2, p.91-127; Part 2, v.4, n^o 3, p.212-263, 2002.
- [19] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P. H., *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, Instituto de Matemática-UFRJ, n. 9, 1975.
- [20] PATHAK, R.S., A Course in Distribution Theory and Applications. New Delhi, Narosa, 2009.
- [21] RAMOS, A.M.; GLOWINSKI, R. PERIAUX, J., *Pointwise control of the Burgers equation and related Nash equilibria problems: A computational approach*. J. Optim. Theory Appl. 112 p.499-516, 2001.
- [22] RAMOS, A.M.; GLOWINSKI, R.; PERIAUX, J., *Nash equilibria for the multiobjective control of linear partial differential equations*. J. Optim. Theory Appl. 112, 457-498, 2002.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [23] STACKELBERG, H. Von., *Marktform un Gleichgewicht*, Springer, Berlin, Germany, 1934.
- [24] ZEIDLER, E., *Applied Functional Analysis, Applied Mathematical Sciences* 109, Springer Verlag, 1995.