



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Massa de Hawking Carregada e Rigidez Local de Variedades Tridimensionais

Lucas Aurélio Bandeira Silva

Teresina - 2026

Lucas Aurélio Bandeira Silva

Dissertação de Mestrado:

**Massa de Hawking Carregada e Rigidez Local de Variedades
Tridimensionais**

Dissertação submetida à Coordenação
do Programa de Pós-Graduação em Ma-
temática, da Universidade Federal do Piauí,
como requisito parcial para obtenção do
grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2026



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Massa de Hawking carregada e rigidez local com variedades tridimensionais

Lucas Aurélio Bandeira Silva

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 23 de fevereiro de 2026.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 PAULO ALEXANDRE ARAUJO SOUSA
Data: 27/02/2026 16:18:28-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araujo Sousa – Orientador

Documento assinado digitalmente
 BARNABE PESSOA LIMA
Data: 06/03/2026 20:31:08-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima - UFPI

Documento assinado digitalmente
 ALEXANDRE BEZERRA DO NASCIMENTO LIMA
Data: 06/03/2026 17:42:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento - UESPI

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBI/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S586h Silva, Lucas Aurélio Bandeira.
 Massa de Hawking carregada e rigidez local de variedades
 tridimensionais / Lucas Aurélio Bandeira Silva. -- 2026.
 56 f. : il.

 Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí.
 Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós-Graduação
 em Matemática, Teresina, 2026.
 “Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa. ”

 1. Geometria Diferencial. 2. Massa de Hawking. 3.
 Superfícies Mínimas. I. Sousa, Paulo Alexandre Araújo. II.
 Título.

CDD 516.36

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

*Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu irmão e
à minha namorada.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus primeiramente, pela saúde, sabedoria e força para chegar até este momento que me permitiu crescer profissionalmente e conhecer pessoas incríveis.

Agradeço ao apoio da minha família dos quais fazem parte: minha mãe Cleonice Bandeira, meu pai Aureliano Ribeiro, meu irmão Aureliano Júnior e minha namorada Camylle Victhória. Eles tornaram esta caminhada mais leve e me deram todo o suporte necessário para que eu concluísse mais esta etapa da minha trajetória acadêmica. Sou grato aos demais familiares que direta ou indiretamente tiveram sua contribuição, obrigado pelo incentivo e confiança na busca de mais esse objetivo.

Agradeço ao meu orientador Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa por aceitar o convite de orientação, por todo o suporte durante a produção deste trabalho, pela paciência, confiança e direcionamento adequado.

Agradeço aos componentes da banca: Dr. Barnabé Pessoa Lima, o qual fez parte da minha trajetória acadêmica ao longo do mestrado como professor, um grande exemplo para além da pesquisa e ao Dr. Alexandre Bezerra Lima por aceitar o convite e pela grande contribuição neste trabalho com importantes sugestões e melhorias.

Agradeço aos meus amigos e companheiros de sala Antônio Victor, Kátia e Maiara que compartilharam comigo momentos bons e desafiadores de disciplina, resiliência, persistência e aprendizado. Aos demais amigos e amigas que conheci ao longo desta trajetória: João Vinícius, Thiago, José, Eduardo, Eliel, Pedro, Vinícius juntamente com tantos outros que compartilharam e ainda compartilham o dia a dia acadêmico comigo.

Agradeço aos professores do IFMA Caxias, Me. Fernando Costa, Me. Fabiano Macedo e Dr. Diego Ferreira aos quais tenho como inspiração, obrigado pelo incentivo, apoio e recomendação para alcançar esta oportunidade, guardo-os como referências de professores

e profissionais. Em seguida, aos meus amigos e colegas do IFMA Caxias aos quais não caberia aqui citá-los nominalmente, obrigado.

Agradeço a todos os demais professores, que tanto na graduação, quanto no mestrado, transmitiram o ensino com disposição e qualidade. Agradeço a Universidade Federal do Piauí (UFPI) por abrir as portas a mim, e a CAPES pelo apoio financeiro.

*“Para que a luz brilhe tão intensamente,
a escuridão tem de estar presente.”*

Francis Bacon.

Resumo

Neste trabalho, estabelecemos alguns resultados de rigidez local sob restrições adequadas a um conjunto de dados iniciais M^3 para as equações de Einstein-Maxwell com campo magnético nulo e considerando $\Sigma \subset M$ uma superfície mergulhada mínima, compacta, dois lados, estritamente estável, que maximiza localmente a massa de Hawking carregada. A partir disso, concluiu-se a existência de uma vizinhança de M isométrica ao espaço Anti-de Sitter Reissner-Nordström. Além disso, deduzimos uma estimativa para a área de $\Sigma \subset M$ uma superfície mergulhada, compacta, dois lados de gênero $g(\Sigma)$, que minimiza área localmente. No caso em que satisfaz a igualdade, provamos que a métrica induzida em Σ possui curvatura Gaussiana constante e decompõe localmente M ao longo de Σ . Estes resultados, obtidos no artigo “Charged Hawking Mass and Local Rigidity of Three-Manifolds”, generalizam trabalhos anteriores no contexto não carregado contribuindo para a compreensão da relação entre geometria diferencial e relatividade geral.

Palavras-Chave: Massa de Hawking Carregada, estabilidade, superfícies mínimas.

Abstract

In this work, we establish several local rigidity results under suitable assumptions on a set of initial data M^3 for the Einstein-Maxwell equations with vanishing magnetic field, considering $\Sigma \subset M$ as an embedded, compact, two-sided, strictly stable minimal surface that locally maximizes the charged Hawking mass. From this, we conclude the existence of a neighborhood of M that is isometric to the Anti-de Sitter Reissner-Nordström space. In addition, we derive an estimate for the area of $\Sigma \subset M$ an embedded, compact, two-sided surface of genus $g(\Sigma)$, which locally minimizes area. In the case where equality holds, we prove that the induced metric on Σ has constant Gaussian curvature and that M locally splits along Σ . These results, obtained in the article "Charged Hawking Mass and Local Rigidity of Three-Manifolds", generalize previous work in the uncharged context, contributing to the understanding of the relationship between differential geometry and general relativity.

Keywords: Charged Hawking Mass, stability, minimal surfaces.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
1 Noções Preliminares	5
1.1 Imersões Isométricas	5
1.2 Conjunto de dados iniciais	9
1.3 Teorema da Divergência	14
2 Resultados Auxiliares	18
2.1 Variações da Massa de Hawking Carregada	19
2.2 Resultados de Estabilidade	25
3 Principais Resultados	34
Referências Bibliográficas	44

Introdução

Os estudos relacionados a relatividade geral motivaram a produção de pesquisas em geometria diferencial, sobretudo, no que diz respeito a trabalhos envolvendo variedades Riemannianas com curvatura escalar limitada inferiormente. A partir disso, muitos geometras buscaram descrever a geometria e topologia de tais variedades com a justificativa de encontrar uma superfície compacta, mergulhada em uma variedade ambiente, com determinada propriedade geométrica.

Inicialmente, Schoen e Yau [18] estabeleceram uma relação interessante entre a curvatura escalar de uma variedade (M^3, g) e a curvatura total de uma superfície mínima estável $\Sigma \subset M$, que por sua vez está relacionada à topologia de Σ . Motivados por isso, Cai e Galloway [4] provaram um teorema de rigidez para toros mínimos em variedades tridimensionais de curvatura escalar não negativa. Mais especificamente, eles mostraram que se M possui curvatura escalar não negativa e $\Sigma \subset M$ é um toro mínimo mergulhado, dois lados, minimizante local de área, então M é plana em uma vizinhança de Σ .

Mais tarde, Bray, Brendle e Neves em [3] deduziram o caso onde M tem curvatura escalar maior ou igual a 2 e $\Sigma \subset M$ é uma esfera mergulhada que minimiza área localmente. Com isso, provaram que Σ tem área menor ou igual a 4π , e no caso da igualdade, Σ com a métrica induzida possui curvatura Gaussiana igual a 1 e M se decompõe localmente ao longo de Σ .

Nunes ([16]) provou que se M é uma variedade tridimensional com curvatura escalar maior ou igual a -2 e $\Sigma \subset M$ é uma superfície mergulhada, compacta, dois lados com gênero maior que 1 e que minimiza área localmente, então a área de Σ é maior ou igual a $4\pi(g(\Sigma) - 1)$, onde $g(\Sigma)$ denota o gênero de Σ . Além disso, no caso da igualdade, segue que Σ possui uma vizinhança isométrica a $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g)$ com curvatura Gaussiana constante igual a -1 , onde $\epsilon > 0$ e g é a métrica induzida em Σ .

Em trabalhos posteriores, alguns autores consideram a massa de Hawking carregada,

denotada por $m_{CH}(\Sigma)$ e definida a seguir, e substituíram a hipótese de minimizante de área por estabilidade estrita e maximizante da massa de Hawking.

Definição 1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar R e seja $\Sigma \subset M$ uma superfície fechada de dimensão 2. A massa de Hawking carregada de Σ é definida por*

$$m_{CH}(\Sigma) = \left(\frac{\|\Sigma\|}{16\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\chi(\Sigma)}{2} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} (H^2 + \frac{2}{3}\xi) d\sigma + \frac{4\pi Q(\Sigma)^2}{\|\Sigma\|} \right),$$

onde $E \in \mathfrak{X}(M)$, $Q(\Sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \langle E, \nu \rangle$ é a carga elétrica total contida em Σ , ν é um campo de vetores normal unitário em Σ , $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler de Σ , H é a curvatura média de Σ e $\xi = \inf(R - 2\|E\|^2)$.

A Massa de Hawking Carregada constitui uma variante da Massa de Hawking, sendo que esta surge em 1968 em um artigo intitulado “Gravitational Radiation in an Expanding Universe” publicado na revista Journal of Mathematical Physics, de autoria do físico Stephen W. Hawking. Neste trabalho, Hawking propôs uma fórmula para medir a massa contida dentro de uma superfície usando apenas as propriedades geométricas da superfície (sua área e curvatura média).

Na década de 70, Robert Geroch sugeriu que a Massa de Hawking poderia ser utilizada para provar que a energia total de um sistema é sempre positiva (conceito central na Física). Ele demonstra a Monotonicidade de Geroch: sob certas condições (variedades com curvatura escalar não negativa) a Massa de Hawking é uma aplicação monótona (não decrescente) ao longo de um fluxo específico de superfícies, o que a transformou em uma ferramenta poderosa para a prova de teoremas envolvendo estabilidade.

Na década de 80, devido a algumas limitações técnicas da massa original, a exemplo para espaços com Constante Cosmológica (Λ), surgiram suas variantes, a Massa de Hawking Carregada, a Massa de Hawking Modificada, dentre outras. Além disso, a Massa de Hawking foi fundamental para a prova da Desigualdade de Penrose para o caso Riemanniano, publicada em 2001 por Gerhard Huisken e Tom Ilmanen, a demonstração é baseada em um processo chamado Fluxo de Curvatura Média Inversa (Fluxo de Geroch), para mais detalhes consulte [11].

Dentre os trabalhos que utilizaram a massa de Hawking, destacamos o trabalho devido a Máximo e Nunes [14], que estudaram o caso $\chi(\Sigma) = 2$ e $E \equiv 0$ e obtiveram um resultado de rigidez semelhante ao provado por Bray, Brendle e Neves para uma superfície

$\Sigma \subset (M^3, g)$, substituindo a hipótese de minimização de área por estabilidade estrita e maximização da massa de Hawking. Precisamente, eles estabeleceram um resultado de rigidez assumindo a existência de uma esfera bidimensional Σ , maximizante local para a massa de Hawking, e estritamente estável em uma variedade tridimensional M com curvatura escalar $R \geq 2$. Além disso, eles provaram que existe uma vizinhança de Σ em M isométrica a $(-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$ munida com a métrica de Sitter-Schwarzschild, para algum $\epsilon > 0$. Em outro trabalho, Barros, Batista e Cruz em [2] consideraram uma superfície dois lados ao invés de uma 2-esfera e obtiveram um resultado semelhante para o espaço Anti-de Sitter-Schwarzschild assumindo que a curvatura escalar satisfaz $R \geq -6$ e $E \equiv 0$.

Posteriormente, Baltazar, Barros e Batista [1] provaram resultados similares para espaços de Sitter Reissner-Nordström no contexto carregado. De forma mais técnica, eles consideraram (M^3, g, E) um conjunto de dados iniciais tempo-simétrico para as equações de Einstein-Maxwell - que será redefinido posteriormente, satisfazendo a condição de energia dominante $R \geq 2|E|^2 + 2\Lambda$ com densidade de carga igual a zero ($\operatorname{div} E = 0$) e sendo $\Sigma \subset M$ uma 2-esfera, mínima, estritamente estável, que maximiza localmente a massa de Hawking carregada em M , assumindo $\Lambda = 1$ provaram um resultado de rigidez local para o espaço de Sitter Reissner-Nordström.

Aqui, cabe observar que os resultados provados por Máximo e Nunes ([14]), Nunes ([16]), e por Barros, Batista e Baltazar ([1]), podem ser considerados no contexto de um conjunto de dados iniciais tempo-simétrico para as equações de Einstein-Maxwell, quando $\Lambda = 1$, $\Lambda = -1$ e $\Lambda = -3$, respectivamente.

Nesta dissertação, consideraremos (M^3, g, E) um conjunto de dados iniciais tempo-simétrico para as equações de Einstein-Maxwell, satisfazendo a condição de energia dominante $R \geq 2|E|^2 + 2\Lambda$ e densidade de carga igual a zero ($\operatorname{div} E = 0$), e sendo $\Sigma \subset M$ uma superfície dois lados, mínima, fechada, estritamente estável e que maximiza localmente a massa de Hawking carregada provaremos os seguintes resultados:

Teorema 1. *Seja (M^3, g, E) um conjunto de dados iniciais maximal satisfazendo a condição de energia dominante, ou seja, $R \geq 2|E|^2 + 2\Lambda$, aqui $E \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\operatorname{div} E = 0$. Seja $\Sigma \hookrightarrow M$ uma superfície mergulhada em M fechada, dois lados, estritamente estável, mínima e que maximiza localmente a massa de Hawking carregada. Então*

$$(\lambda_1 + \Lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 2\pi\chi(\Sigma),$$

aqui λ_1 é o primeiro autovalor do operador de Jacobi. Além disso se $\Lambda = -3$ então uma das condições são satisfeitas:

1. Se Σ é uma 2-esfera, então Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a $\frac{1}{a^2}$ e uma vizinhança de Σ em M é isométrica ao espaço Anti-de Sitter Reissner-Nordström $((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{S}^2, (g_{m,q,\Lambda}))$ para algum $\epsilon > 0$.
2. Se Σ tem gênero $g(\Sigma) \geq 2$, então Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a $-\frac{1}{a^2}$ e existe uma vizinhança de Σ em M que é isométrica a $((-\epsilon, \epsilon) \times \widehat{\Sigma}, \overline{g_a})$ para algum $\epsilon > 0$, aqui $\overline{g_a}$ é uma métrica de curvatura Gaussiana constante igual a -1 .
3. Se Σ tem gênero um, então Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a zero e existe uma vizinhança de Σ em M que é isométrica a $((-\epsilon, \epsilon) \times \widehat{\Sigma}, g'_a)$ para algum $\epsilon > 0$, aqui g'_a é uma métrica flat em M .

Teorema 2. Seja (M^3, g, E) um conjunto de dados iniciais maximal que satisfaz a condição de energia dominante, ou seja, $R \geq 2|E|^2 - 6$, aqui $E \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\operatorname{div} E = 0$. Seja Σ uma superfície mergulhada em M , fechada, dois lados que localmente é minimizante de área, então Σ satisfaz

$$3|\Sigma| - \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \geq 4\pi(g(\Sigma) - 1).$$

Além disso, se vale a igualdade uma das condições são satisfeitas:

1. Se Σ têm gênero $g(\Sigma) \geq 2$, então tem curvatura de Gauss constante $K_\Sigma = |E|^2 - 3$ e existe uma vizinhança de Σ em M isométrica a $((-\delta, \delta) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$.
2. Se Σ têm gênero igual a um, então Σ tem curvatura de Gauss constante $K_\Sigma = 0$ e existe uma vizinhança de Σ em M isométrica a $((-\delta, \delta) \times T^2, dt^2 + g_\Sigma)$, aqui g_Σ é uma métrica plana em T^2 .
3. Se Σ tem gênero zero, então Σ tem curvatura de Gauss constante $K_\Sigma = |E|^2 - 3$ e existe uma vizinhança de Σ em M isométrica a $((-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^2, dt^2 + g_\Sigma)$.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as definições, propriedades e resultados que serão utilizados para provarmos os principais resultados deste trabalho. Será feita a demonstração da maioria dos resultados apresentados, contudo, se a demonstração for muito técnica e fugir ao escopo do trabalho, será indicado apenas as referências utilizadas. Para a leitura e compreensão do texto, o leitor deve estar familiarizado com alguns conceitos de geometria, tais como variedades diferenciáveis, variedades Riemannianas, conexão Riemanniana, hipersuperfície, Curvatura Média, Teorema de Gauss-Bonnet, entre outros.

1.1 Imersões Isométricas

Nesta seção vamos trazer alguns conceitos que darão suporte ao objetivo deste trabalho. Inicialmente, vamos definir o que vem a ser uma imersão.

Definição 2. *Sejam M^m uma variedade diferenciável de dimensão m e N^k uma variedade Riemanniana de dimensão igual a $k = m + n$. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. O número n é denominado a codimensão da imersão.*

Definição 3. *Se a codimensão da imersão isométrica é 1, ou seja, $\varphi : M^n \rightarrow N^{n+1}$, dizemos que $\varphi(M) \subset N$ é uma hipersuperfície.*

A métrica Riemanniana de N , denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M do seguinte modo: se $p \in M$ e $v_1, v_2 \in T_p M$, definemos

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p := \langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Nesta situação, φ passa a ser uma imersão isométrica de M em N .

As relações entre as métricas Riemannianas de M e N se exprimem por meio da segunda forma fundamental, que definiremos a seguir. Sendo φ uma imersão, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\varphi(U) \subset N$ é uma subvariedade de N . Além disso, o produto interno em $T_p N$ decompõe $T_p N$ na soma direta

$$T_p N = T_p M \oplus (T_p M)^\perp, \quad (1.1)$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p N$. Desse modo, se $v \in T_p N$, $p \in M$, escrevemos

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_p M, \quad v^N \in (T_p M)^\perp,$$

tal que v^T e v^N são denominadas a componente tangencial e a componente normal de v , respectivamente.

Indicaremos a conexão Riemanniana de N por $\bar{\nabla}$. Sendo X e Y campos vetoriais locais em M , e $\bar{X}, \bar{Y}$ extensões locais de X e Y a uma vizinhança de N , definimos

$$\nabla_X Y := (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp,$$

de modo que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M . Para definirmos a segunda forma fundamental de $\varphi : M \rightarrow N$ temos a seguinte definição: se X, Y são campos locais em M ,

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\bar{M}$ normal a M .

Assim, vale o seguinte resultado.

Observação 1. *Indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $\varphi(U) \approx U$.*

Proposição 1. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Veja [9].

Exprimindo B em um sistema de coordenadas e sabendo que ela é linear, concluímos que o valor de $B(x, y) = B(X, Y)(p)$ depende apenas de $x = X(p)$ e $y = Y(p)$. Assim, podemos definir a segunda forma fundamental. Dado $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, a aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

é, pela Proposição 1 uma forma bilinear simétrica.

Definição 4. A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x),$$

é denominada a segunda forma fundamental de φ em p segundo o vetor normal η .

O termo *segunda forma fundamental* também pode ser usado para se referir a aplicação B . Associa-se uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$, por vezes também denominada *segunda forma fundamental*, à aplicação bilinear H_η , onde S_η é dada por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Assim, a partir de

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle(p) = -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle(p) \\ &= \langle -\bar{\nabla}_X N, y \rangle, \end{aligned}$$

obtemos

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

A decomposição do espaço tangente $T_p N$ conforme visto na equação (1.1) varia diferenciavelmente com p , o que significa que localmente a parte do fibrado tangente $\overline{TM}$ que se projeta sobre M se decompõe em um fibrado tangente TM e em um fibrado normal $TM^\perp$. É como se a geometria da imersão decompusesse a geometria da variedade ambiente em “duas geometrias”: a geometria do fibrado tangente e a geometria do fibrado normal, sendo possível relacionar essas “duas geometrias” através da *segunda forma fundamental*, por meio da seguinte equação clássica abaixo.

Proposição 2. (*Equação de Gauss*) Se $\varphi : M \rightarrow N$ é uma imersão isométrica e $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle.$$

Demonstração. Observe que $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)$. Como

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + B(X, Z)) - \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + B(Y, Z)) \\ &\quad + \nabla_{[X, Y]} Z + B([X, Y], Z), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + B(Y, \nabla_X Z) + \nabla_Y^\perp B(X, Z) - S_{B(X, Z)} Y \\ &\quad - B(X, \nabla_Y Z) - \nabla_X^\perp B(Y, Z) + S_{B(Y, Z)} X + B([X, Y], Z). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Tomando o produto interno de (1.2) com T , os termos normais se anulam, e obteremos finalmente

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, T \rangle &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle S_{B(X, Z)} Y, T \rangle + \langle S_{B(Y, Z)} X, T \rangle \\ &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle, \end{aligned}$$

que é a equação de Gauss. □

Corolário 1. Seja $M^n \subset N^{n+1}$ uma hipersuperfície mergulhada em uma variedade Riemanniana N . Sendo R a curvatura escalar de M , H a curvatura Média de M , II_ν a segunda forma fundamental de M , $\bar{R}$ a curvatura escalar de N e $\bar{\text{Ric}}$ o tensor de Ricci de N , então

$$\bar{R} = R + 2 \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) - n^2 H^2 + |II_\nu|^2,$$

onde ν é um campo normal unitário a M .

Demonstração. Seja $\{E_1, E_2, \dots, E_{n+1} = \nu\}$ base ortonormal do $T_p N$ com ν normal a M , tal que $S_\nu(E_i) = \lambda_i \cdot E_i$. Por definição, temos

$$\bar{\text{Ric}}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{R}(E_i, X, Y, E_i).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \bar{R} &= \sum_{i=1}^{n+1} \bar{\text{Ric}}(E_j, E_j) = \sum_{i=1}^n \bar{\text{Ric}}(E_j, E_j) + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} \bar{R}(E_i, E_j, E_j, E_i) + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{R}(E_i, E_j, E_j, E_i) + \sum_{j=1}^n \bar{R}(\nu, E_j, E_j, \nu) + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \bar{R}(E_i, E_j, E_j, E_i) + 2 \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n R(E_i, E_j, E_j, E_i) - \sum_{i,j=1}^n \langle \text{II}(E_i, E_i), \text{II}(E_j, E_j) \rangle + \sum_{i,j=1}^n |\text{II}(E_i, E_j)|^2 + 2 \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu),
 \end{aligned}$$

como $\text{II}(E_i, E_j) = 0$ para $i \neq j$, obtemos portanto

$$\begin{aligned}
 \bar{R} &= R + 2 \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) - \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \\
 &= R + 2 \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) - \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \right]^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \\
 &= R + 2 \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) - H^2 + |\text{II}_\nu|^2.
 \end{aligned}$$

□

Em particular, para o caso de uma hipersuperfície $M^2 \hookrightarrow N^3$, existe uma relação direta entre a curvatura escalar e a curvatura Gaussiana de M dada por $R = 2K$. Desse modo, a equação pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\bar{R} = 2K + 2 \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) - H^2 + |\text{II}_\nu|^2.$$

A equação de Gauss tem sua importância ao considerar espaços ambientes que possuem curvatura seccional constante, pois neles ela desempenha um papel semelhante aos das equações de compatibilidade na teoria local das superfícies.

1.2 Conjunto de dados iniciais

Iniciaremos esta seção apresentando algumas definições que servirão de base para o conceito de variedade Lorentziana.

Definição 5. *Um tensor métrico g em uma variedade diferenciável M é um $(0, 2)$ -campo tensorial simétrico não degenerado em M de índice constante.*

Em outras palavras, $g \in \Gamma_2^0(M)$ atribui de forma diferenciável a cada ponto p de M um produto escalar g_p no espaço tangente $T_p M$, e o índice de g é o mesmo para todo p .

Definição 6. *Uma variedade semi-Riemanniana é uma variedade diferenciável M munida com um tensor métrico g .*

Mais precisamente, uma variedade semi-Riemanniana é um par ordenado (M, g) . Aqui, vale ressaltar que dois tensores métricos diferentes na mesma variedade constituem variedades semi-Riemannianas diferentes. No entanto, geralmente denotamos uma variedade semi-Riemanniana pelo nome de sua variedade diferenciável M .

O valor comum i do índice g_p em uma variedade semi-Riemanniana M , é chamado de índice de M : $0 \leq i \leq n = \dim M$. Se $i = 0$, M é uma variedade Riemanniana; cada g é então um produto interno (definido positivo) em $T_p M$. Se $i = 1$ e $n \geq 2$, M é uma variedade Lorentziana (veja [17]). As variedades semi-riemannianas são frequentemente chamadas de variedades pseudo-riemannianas. Em nosso contexto, vale destacarmos a seguinte definição:

Definição 7. *Um vetor tangente v em M é chamado*

$$\begin{aligned} \text{tipo-espaco} & \quad \text{se } \langle v, v \rangle > 0 \quad \text{ou } v = 0, \\ \text{nulo} & \quad \text{se } \langle v, v \rangle = 0 \quad \text{e } v \neq 0, \\ \text{tipo-tempo} & \quad \text{se } \langle v, v \rangle < 0. \end{aligned}$$

Essa terminologia deriva da teoria da relatividade e, particularmente no caso de Lorentz, vetores nulos também são chamados de tipo-luz. No contexto de hipersuperfícies, uma imersão $\varphi : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ de uma variedade diferenciável, conexa e n -dimensional Σ é dita uma hipersuperfície tipo-espaco se a métrica induzida em Σ pela imersão φ for Riemanniana.

Seja (L^4, γ) uma variedade Lorentziana de dimensão 4, uma 2-forma F em L e R_γ a curvatura escalar de L . As equações de Einstein-Maxwell, com constante cosmológica $\Lambda \in \mathbb{R}$ para a tripla (L^4, γ, F) é expressa pelo seguinte sistema

$$\text{Ric}_\gamma - \frac{R_\gamma}{2} \gamma + \Lambda \cdot \gamma = 8\pi T_F \quad (1.3)$$

$$dF = 0; \quad \text{div}_\gamma F = 0, \quad (1.4)$$

onde T_F denota o tensor energia-momento do campo eletromagnético

$$T_F = \frac{1}{4} \left(F \circ F - \frac{1}{4} |F|_\gamma^2 \cdot \gamma, \right)$$

com $(F \circ F)_{\alpha\beta} = \gamma^{\mu\nu} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu}$. As soluções de (1.3) e (1.4) são chamadas de espaço-tempo eletrovácuo. O tensor eletromagnético F admite uma decomposição única em termos do campo elétrico E e do campo magnético B , para mais detalhes, veja [10].

Um conjunto de dados iniciais (M^3, g, K, E, μ, J) para as equações de Einstein-Maxwell com campo magnético nulo é uma hipersuperfície tipo-espaço de (L^4, γ) com a métrica Riemanniana induzida g , curvatura escalar R , um campo vetorial $E \in \mathfrak{X}(M)$ e segunda forma fundamental K satisfazendo as equações de restrição de Einstein-Maxwell

$$16\pi\mu = R + (\text{tr}K)^2 - 2\Lambda - |K|^2 - 2|E|^2;$$

$$8\pi J = \text{div}(K - (\text{tr}K)g),$$

onde μ e J são as densidade de energia e momento dos campos não-eletromagnéticos. Dizemos que um conjunto de dados iniciais é tempo-simétrico se $K = 0$ e maximal se $\text{tr} K = 0$.

Definição 8. *O conjunto de dados iniciais tempo-simétrico (M, g, K, E, μ, J) satisfaz:*

1. *A condição de energia dominante (DEC) carregada para os campos não-eletromagnéticos se*

$$T(v, v) \geq 0,$$

para todo vetor tipo-tempo v na direção futuro;

2. *As equações de vínculo de Einstein-Maxwell sem matéria carregada, se $\text{div} E = 0$ em M .*

Definição 9. *Se $\Sigma^2 \subset M^3$ é uma superfície mergulhada orientada, fechada, definimos a carga $Q(\Sigma)$ relativa a E como*

$$Q(\Sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \langle E, v \rangle d\sigma, \tag{1.5}$$

onde v é um campo vetorial normal unitário em Σ .

No que segue, apresentaremos dois exemplos de conjuntos de dados iniciais para as equações de Einstein-Maxwell: Reissner-Nordström-de Sitter (RNdS) e Reissner-Nordström-Anti-de Sitter (RNAdS).

Considere $m, Q, \Lambda \in \mathbb{R}$ constantes tais que a equação

$$p_{m,Q,\Lambda}(r) := 1 - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0$$

tem soluções positivas, e seja s_0 a maior delas. Definimos a variedade 3-dimensional Λ -Reissner-Nordström por $(s_0, \infty) \times \mathbb{S}^2$ com a métrica

$$g_{m,Q,\Lambda} = \frac{dr^2}{p_{m,Q,\Lambda}(r)} + r^2 g_{\mathbb{S}^2},$$

onde $g_{\mathbb{S}^2}$ denota a métrica da esfera $\mathbb{S}^2$, e a denotamos por $(M_{m,Q,\Lambda}, g_{m,Q,\Lambda})$. O campo elétrico é o campo vetorial suave $E \in \Gamma(TM_{m,Q,\Lambda})$ dado por

$$E = \frac{Q\sqrt{p_{m,Q,\Lambda}(r)}}{r^2} \partial_r,$$

de modo que os parâmetros m, Q, Λ são a massa, a carga (elétrica) e a constante cosmológica, respectivamente. As propriedades abaixo são bem conhecidas e serão verificadas por meio de cálculos diretos:

- E é livre de divergente, isto é, $\operatorname{div} E = 0$ em $(M_{m,Q,\Lambda}, g_{m,Q,\Lambda})$;

Na próxima seção, definiremos o divergente de um campo vetorial diferenciável em M e em seguida provaremos esta propriedade.

- A curvatura escalar de $(M_{m,Q,\Lambda}, g_{m,Q,\Lambda})$ é dada por

$$R = 2|E|_{g_{m,Q,\Lambda}}^2 + 2\Lambda.$$

Com efeito, sendo a métrica $g_{m,Q,\Lambda}$ da forma

$$g_{m,Q,\Lambda} = \frac{dr^2}{p_{m,Q,\Lambda}(r)} + r^2 g_{\mathbb{S}^2},$$

a curvatura escalar é dada por

$$R = -\frac{2}{r^2}(r^2 p'_{m,Q,\Lambda})' + \frac{2}{r^2}(1 - p_{m,Q,\Lambda}).$$

Assim, decorre que

$$\begin{aligned} p_{m,Q,\Lambda}(r) &= 1 - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \\ p_{m,Q,\Lambda}(r)' &= -\frac{2\Lambda}{3}r + \frac{2m}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Multiplicando por r^2 , obtemos

$$r^2 p_{m,Q,\Lambda}'(r) = -\frac{2\Lambda}{3}r^3 + 2m - \frac{2Q^2}{r},$$

derivando novamente segue que,

$$(r^2 p_{m,Q,\Lambda}')' = -2\Lambda r^2 + \frac{2Q^2}{r^2}.$$

substituindo na fórmula da curvatura escalar, a primeira parcela pode ser reescrita como

$$-\frac{2}{r^2}(r^2 p_{m,Q,\Lambda}')' = -\frac{2}{r^2} \left(-2\Lambda r^2 + \frac{2Q^2}{r^2} \right) = 4\Lambda - \frac{4Q^2}{r^4},$$

e a segunda parcela como,

$$\frac{2}{r^2}(1 - p_{m,Q,\Lambda}) = \frac{2}{r^2} \left(\frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2} \right) = \frac{2\Lambda}{3} + \frac{4m}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4}.$$

Somando as parcelas, considerando que a variedade é solução das equações de restrição de Einstein-Maxwell e simplificando os termos obtemos,

$$R = 2\Lambda + \frac{2Q^2}{r^4}.$$

Como E é definido por

$$E = \frac{Q\sqrt{p_{m,Q,\Lambda}(r)}}{r^2}\partial_r,$$

então

$$|E|_{g_{m,Q,\Lambda}}^2 = \frac{Q^2}{r^4},$$

portanto,

$$R = 2|E|_{g_{m,Q,\Lambda}}^2 + 2\Lambda.$$

Definição 10. Se $\Lambda > 0$, então $(M_{m,Q,\Lambda}, g_{m,Q,\Lambda})$ é chamada *Reissner-Nordström-de Sitter (RNdS)*. Se $\Lambda < 0$, então $(M_{m,Q,\Lambda}, g_{m,Q,\Lambda})$ é chamada *Reissner-Nordström-Anti-de Sitter (RNAdS)*.

Neste trabalho, estamos interessados particularmente na variedade RNAdS. Por uma mudança de variável (veja [6] e [20]) a métrica da variedade RNAdS pode ser reescrita como

$$g_{m,Q,\Lambda} = ds^2 + u(s)^2 g_{\mathbb{S}^2}.$$

Por uma reflexão da métrica $g_{m,Q,\Lambda}$, definimos uma métrica periódica, completa e rotacionalmente simétrica em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ com constante cosmológica Λ , curvatura escalar $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$ e carga $Q(r \times \mathbb{S}^2) = Q$ para cada $r \in \mathbb{R}$ (veja [1]). Além disso, a função u satisfaz a seguinte equação diferencial não-linear de segunda ordem

$$u''(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - u'(s)^2}{u(s)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda u(s)^4 + Q^2}{u(s)^3} \right).$$

1.3 Teorema da Divergência

Nesta seção, nosso propósito é apresentarmos um teorema de grande importância para a prova dos resultados deste estudo. Para isso, convém introduzirmos a seguinte definição:

Definição 11. *Seja X um campo vetorial diferenciável em M . A divergência de X é a função diferenciável $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \langle A(e_i), e_i \rangle,$$

onde tr denota o traço do operador linear $A : T_p M \rightarrow T_p M$ definido por $A(v) = \nabla_v X$, para todo $v \in T_p M$, e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de p .

Considere M orientada, dM o elemento de volume e seja $\mathcal{L}^1(M)$ o espaço das funções integráveis a Lebesgue sobre M . Sendo ω uma $(n-1)$ -forma suave definida sobre M por $\omega = i_X(dM)$, onde $i_X(dM)$ denota a contração da n -forma dM na direção do campo vetorial X . Afirmamos que $d\omega = (\operatorname{div} X)dM$.

Com efeito, seja $p \in M$ um ponto fixo e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal e geodésico em p . Neste referencial, podemos escrever $X = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, onde $f_i = \langle X, e_i \rangle$. Sejam $\omega_i, i = 1, \dots, n$, formas diferenciais de grau 1 definidas em uma vizinhança de p por $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$. Um cálculo simples e direto nos permite verificar que o elemento de volume de M é escrito como segue

$$d\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Fazendo $\theta_i = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n$ podemos escrever

$$i_X(dM) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \theta_i, \quad (1.6)$$

tomando a derivada em (1.6), segue que

$$d\omega = d(i_X(dM)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i. \quad (1.7)$$

Sendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de $T_p M$, decorre que $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ é uma base para o espaço das 1-formas, então

$$df_i = \sum_{j=1}^n df_i(e_j) \omega_j.$$

Por outro lado, como $\omega_i \wedge \omega_i = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} (-1)^{i+1} df_i \wedge \hat{\theta}_i &= (-1)^{i+1} \left(\sum_{j=1}^n df_i(e_j) \omega_j \right) \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \\ &= (-1)^{i+1} df_i(e_i) \omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \\ &= df_i(e_i) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Desde que $df_i(e_i) = e_i(f_i)$, de (1.8) vem

$$(-1)^{i+1} df_i \wedge \hat{\theta}_i = e_i(f_i) dM. \quad (1.9)$$

Logo das igualdades (1.7) e (1.9), temos

$$d\omega = d(i_X(dM)) = \left(\sum_{i=1}^n e_i(f_i) \right) dM + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i.$$

Sendo o referencial geodésico, quando avaliamos em p , temos que $d\theta_i = 0$, pois

$$\begin{aligned} d\omega_k(e_i, e_j) &= e_i \omega_k(e_j) - e_j \omega_k(e_i) - \omega_k([e_i, e_j]) \\ &= \omega_k(\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i), \end{aligned}$$

e além disso, $e_i(f_i) = e_i \langle X, e_i \rangle = \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle$.

Logo,

$$d\omega(p) = d(i_X(dM))(p) = \left(\sum_j \nabla_{e_j} X, e_j \right) (p) dM = \operatorname{div} X(p) dM.$$

Como o ponto p foi escolhido arbitrariamente, concluímos nossa afirmação.

A partir disso, estabelecemos a seguir uma versão alternativa do teorema da divergência para as variedades em estudo.

Teorema 3. (*Divergência*) *Se M é uma variedade Riemanniana de dimensão n , compacta sem bordo, orientada, e $X \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\int_M \operatorname{div} X \, dM = 0.$$

Demonstração. Esse teorema é consequência imediata da afirmação anterior detalhada a partir da proposição 1 em [5] e do Teorema 2.1 encontrado em [13].

Provemos conforme apresentado na seção anterior, que o campo elétrico E é livre de divergente. Com efeito, o campo vetorial E é da forma

$$E = \frac{Q \sqrt{p_{m,Q,\Lambda}(r)}}{r^2} \partial_r.$$

O divergente de um campo vetorial X em coordenadas locais é dado por

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} X^i \right).$$

Como a métrica é bloco diagonal,

$$g = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & r^2 g_{\mathbb{S}^2} \end{pmatrix},$$

onde $c = \frac{1}{p_{m,Q,\Lambda}(r)}$, temos

$$\det g = c r^4 \det(g_{\mathbb{S}^2}),$$

logo,

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{c} r^2 \sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^2})}.$$

O campo E possui apenas componente radial:

$$E^r = \frac{Q}{\sqrt{c} r^2}, \quad E^\theta = 0, \quad E^\varphi = 0,$$

portanto,

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_r \left(\sqrt{|g|} E^r \right).$$

Substituindo $\sqrt{|g|}$ e E^r ,

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|} E^r &= \left(\sqrt{c} r^2 \sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^2})} \right) \left(\frac{Q}{\sqrt{c} r^2} \right) \\ &= Q \sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^2})}. \end{aligned}$$

Como essa expressão independe de r , segue que

$$\partial_r(\sqrt{|g|}E^r) = 0,$$

logo,

$$\operatorname{div} E = 0.$$

Capítulo 2

Resultados Auxiliares

Ao longo deste capítulo, introduzimos alguns resultados necessários para a prova dos teoremas principais. Tendo isso em vista, faz-se necessário definir conceitos prévios existentes na demonstração dos teoremas. Seja $\Sigma^2 \subset (M^3, g)$ uma superfície orientável com um campo normal unitário ν , o operador de Jacobi $L : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$ da superfície Σ é definido por

$$L(\phi) = \Delta_\Sigma(\phi) + (\text{Ric}(\nu, \nu) + |A|^2)\phi,$$

onde Δ_Σ é o Laplaciano de Σ com a métrica induzida, $A = S_\nu$ é a segunda forma fundamental de Σ e Ric é a curvatura de Ricci de M . Considere a forma quadrática J , associada ao operador de Jacobi, definida por $J(\phi) = -\int_\Sigma \phi L\phi d\sigma$.

Uma superfície mergulhada é dita estável se, e somente se, $J(\phi) \geq 0$, para todo $\phi \in C^\infty(\Sigma)$, neste caso o primeiro autovalor de L satisfaz $\lambda_1(L) \geq 0$. Se $\lambda_1(L) > 0$ dizemos que a superfície é estritamente estável. Desde que $\lambda_1(L)$ é o primeiro autovalor de L , vale $J(\phi) \geq \lambda_1(L) \int_\Sigma \phi^2 d\sigma$, donde obtemos

$$\lambda_1(L) \int_\Sigma \phi^2 d\sigma + \int_\Sigma (\text{Ric}(\nu, \nu) + |A|^2)\phi^2 d\sigma \leq \int_\Sigma |\nabla \phi|^2 d\sigma, \quad \forall \phi \in C^\infty(\Sigma).$$

Observação 2. *A desigualdade acima é chamada desigualdade de estabilidade.*

Para finalizar esta seção, apresentaremos o conceito de variação normal de uma superfície, que será fundamental para obtermos a primeira e segunda variação da massa de Hawking carregada.

Seja $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow M$ é uma aplicação suave, onde $\varepsilon > 0$ pode ser escolhido de modo que:

- $f_t = f(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow M$ é uma imersão para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$;
- $f(0, x) = x$ para cada $x \in \Sigma$;
- $\frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = \phi(x)\nu(x)$ para cada $x \in \Sigma$, aqui $\phi \in C^\infty(\Sigma)$,

onde ν é um campo vetorial normal unitário ao longo de Σ . Se $\Sigma_t = \{f(t, x); x \in \Sigma\}$, então $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ é denominada uma variação normal suave de Σ .

2.1 Variações da Massa de Hawking Carregada

Nesta seção faremos o cálculo das variações da massa de Hawking carregada, que servirão como base para a prova de alguns resultados importantes. A massa de Hawking carregada foi definida na introdução deste trabalho, mas por questão de completude apresentamos a definição abaixo novamente.

Definição 12. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana tridimensional com curvatura escalar R e uma superfície bidimensional fechada $\Sigma \subset M$, a massa de Hawking carregada é definida como*

$$m_{CH}(\Sigma) = \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\chi(\Sigma)}{2} + \frac{4\pi Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) d\sigma \right),$$

onde $E \in \mathfrak{X}(M)$, $Q(\Sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \langle E, \nu \rangle d\sigma$ é a carga elétrica total contida em Σ , ν é um campo vetorial normal unitário em Σ , $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler de Σ , H é a curvatura média de Σ e $\zeta = \inf(R - 2|E|^2)$.

Seja $\{\Sigma_t\}$ uma variação normal suave de Σ e ν_t o vetor normal unitário ao longo de Σ_t , vamos considerar ao longo deste trabalho a densidade da carga nula, ou seja, $\operatorname{div} E = 0$. Sendo Ω_t a região compreendida entre Σ_t e $\Sigma_0 = \Sigma$, pelo Teorema da Divergência, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_t} \operatorname{div} E dM \\ &= \int_{\Sigma_t} \langle E, \nu_t \rangle d\sigma_t - \int_{\Sigma_0} \langle E, \nu_0 \rangle d\sigma \\ &= 4\pi(Q(\Sigma_t) - Q(\Sigma_0)), \end{aligned}$$

donde obtemos que $Q(\Sigma_t) = Q(\Sigma)$ para toda variação normal Σ_t de Σ .

Dentre as fórmulas gerais relacionadas as variações normais de hipersuperfícies, destacamos a primeira e a segunda variação de área.

Lema 1. *Seja $\{\Sigma_t\}$ uma variação normal suave de Σ , e $X(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, x)$, então a primeira e a segunda variação de área são dadas, respectivamente, por*

$$\begin{aligned} a) \quad \left. \frac{d}{dt} |\Sigma_t| \right|_{t=0} &= - \int_{\Sigma} H \phi d\sigma. \\ b) \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} |\Sigma_t| \right|_{t=0} &= \int_{\Sigma} (-\phi L \phi + H^2 \phi^2 + \operatorname{div}_{\Sigma} \nabla_X X) d\sigma. \end{aligned}$$

Demonstração: Veja [12].

Desse modo, podemos calcular as variações da Massa de Hawking carregada.

Lema 2. (Primeira variação da massa de Hawking carregada) *Para cada função $\phi \in C^\infty(\Sigma)$, temos:*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) \right|_{t=0} &= - \frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} \phi \Delta_{\Sigma} H d\sigma + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (2\Lambda - R) H \phi d\sigma \\ &\quad + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} \left(2K_{\Sigma} + \frac{8\pi(g(\Sigma) - 1)}{|\Sigma|} \right) H \phi d\sigma \\ &\quad + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} \left(\frac{32\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} - |A|^2 + \frac{1}{2|\Sigma|} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma \right) H \phi d\sigma. \end{aligned}$$

Demonstração. Considere

$$m_{CH}(\Sigma_t) = \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\chi(\Sigma_t)}{2} + \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) d\sigma_t \right)$$

e sabendo que $\frac{d}{dt}(d\sigma_t) = -H_t \phi_t d\sigma_t$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) &= - \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{dt} |\Sigma_t| \left(\frac{\chi(\Sigma_t)}{2} + \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) d\sigma_t \right) \\ &\quad + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 |\Sigma_t|^{-1} - 4\pi Q(\Sigma_t)^2 |\Sigma_t|^{-2} \frac{d}{dt} |\Sigma_t| \right) \\ &\quad - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) d\sigma_t \right) \\ &= - \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t \phi_t d\sigma_t \left(\frac{\chi(\Sigma_t)}{2} + \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) d\sigma_t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 |\Sigma_t|^{-1} + 4\pi Q(\Sigma_t)^2 |\Sigma_t|^{-2} \int_{\Sigma_t} H_t \phi_t d\sigma_t \right) \\
& - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\Sigma_t} 2H_t H'_t d\sigma_t - \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) H_t \phi_t d\sigma_t \right) \\
& = \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{-4\pi \chi(\Sigma_t)}{|\Sigma_t|} H_t \phi_t d\sigma_t + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{-32\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|^2} H_t \phi_t d\sigma_t \\
& + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2|\Sigma_t|} \left[\int_{\Sigma_t} H_t^2 d\sigma_t + \frac{2}{3} \zeta \int_{\Sigma_t} d\sigma_t \right] \int_{\Sigma_t} H_t \phi_t d\sigma_t \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{|\Sigma_t|}{16\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{64\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|^2} H_t \phi_t d\sigma_t \\
& - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} 2\phi_t \Delta_{\Sigma_t} H_t d\sigma_t \\
& - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t (2\text{Ric}(\nu_t, \nu_t) + 2|\mathcal{A}_t|^2) \phi_t d\sigma_t \\
& + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) H_t \phi_t d\sigma_t,
\end{aligned}$$

para obtenção das igualdades acima foram usados as equações abaixo

$$\begin{aligned}
H'_t &= \Delta_{\Sigma_t} \phi_t + \text{Ric}(\nu_t, \nu_t) \phi_t + |\mathcal{A}_t|^2 \phi_t \\
\frac{d}{dt}(d\sigma_t) &= -\phi_t H_t d\sigma_t \\
\int_{\Sigma_t} \phi_t \Delta_{\Sigma_t} H_t d\sigma_t &= \int_{\Sigma_t} H_t \Delta_{\Sigma_t} \phi_t d\sigma_t.
\end{aligned}$$

Da equação de Gauss obtemos que

$$2\text{Ric}(\nu_t, \nu_t) + 2|\mathcal{A}|^2 = R - 2K_{\Sigma_t} + H_t^2 + |\mathcal{A}_t|^2,$$

substituindo na expressão anterior e organizando os termos temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) &= + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{-4\pi \chi(\Sigma_t)}{|\Sigma_t|} H_t \phi_t d\sigma_t + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{-32\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|^2} H_t \phi_t d\sigma_t \\
&+ \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\Sigma_t} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{1}{2|\Sigma_t|} H_t^2 d\sigma_t \right) H_t \phi_t d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} \frac{\zeta}{3} H_t \phi_t d\sigma_t \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left(\frac{|\Sigma_t|}{16\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{64\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|^2} H_t \phi_t d\sigma_t \\
&- \frac{2|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \phi_t \Delta_{\Sigma_t} H_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t (R_t - 2K_t + H_t^2 + |\mathcal{A}_t|^2) \phi_t d\sigma_t \\
&+ \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) H_t \phi_t d\sigma_t.
\end{aligned}$$

Sabendo que $\chi(\Sigma_t) = 2(1 - g(\Sigma_t))$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) = & -\frac{2|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \phi_t \Delta_{\Sigma_t} H_t d\sigma_t + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{32\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|^2} H_t \phi_t d\sigma_t \\ & + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \left(2K_{\Sigma_t} - |A|^2 + \frac{1}{2|\Sigma_t|} \int_{\Sigma_t} H_t^2 d\sigma_t \right) H_t \phi_t d\sigma_t \\ & + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} (\zeta - R_t) H_t \phi_t d\sigma_t + \frac{1}{4} \left(\frac{|\Sigma_t|}{16\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 \\ & + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{8\pi(g(\Sigma_t) - 1)}{|\Sigma_t|} H_t \phi_t d\sigma_t. \end{aligned}$$

Avaliando em $t = 0$ obtemos o resultado desejado. $\square$

Para o cálculo da segunda variação, consideramos Σ ponto crítico da massa de Hawking carregada e prosseguiremos conforme a Proposição 4 de [2] e a Proposição 2 de [1]. Para isso, considere o operador de Jacobi de Σ_t dado por $L_{\Sigma_t} = \Delta_{\Sigma_t} + \text{Ric}(\nu_t, \nu_t) + |A_{\Sigma_t}|^2$, onde Δ_{Σ_t} é o laplaciano de Σ_t na métrica induzida e $A_{\Sigma_t} = S_{\nu_t}$ a segunda forma fundamental de Σ_t com respeito a ν_t .

Lema 3. (*Segunda variação da massa de Hawking carregada*) *Se $\Sigma \subset M$ é ponto crítico da massa de Hawking carregada, então*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} m_{CH}(\Sigma_t) \right|_{t=0} = & -\frac{3}{4} \frac{m_{CH}(\Sigma)}{\|\Sigma\|^2} \left(\int_{\Sigma} H \phi d\sigma \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{m_{CH}(\Sigma)}{\|\Sigma\|} \int_{\Sigma} (\phi L \phi - H^2 \phi^2) d\sigma \\ & - \frac{2\|\Sigma\|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (L\phi)^2 d\sigma + \frac{\|\Sigma\|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{4}{3} \Lambda \right) (\phi L \phi - H^2 \phi^2) d\sigma \\ & + \frac{4\|\Sigma\|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} H^2 \phi L \phi d\sigma + \frac{\|\Sigma\|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{128\pi^2 Q(\Sigma)^2}{\|\Sigma\|^3} \left(\int_{\Sigma} H \phi d\sigma \right)^2 \\ & + \frac{\|\Sigma\|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{64\pi^2 Q(\Sigma)^2}{\|\Sigma\|} \int_{\Sigma} (\phi L \phi - H^2 \phi^2) d\sigma \\ & - \frac{\|\Sigma\|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{4}{3} \Lambda \right) (2HL'(0) + \text{div}(\nabla_X X)) \phi d\sigma. \end{aligned}$$

onde $X(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, x)$.

Demonstração. Pelo Lema [2], a primeira variação da massa de Hawking carregada é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) = & + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \left(\frac{\chi(\Sigma_t)}{2} + \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) d\sigma_t \right) \\
& + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 |\Sigma_t|^{-1} - 4\pi Q(\Sigma_t)^2 |\Sigma_t|^{-2} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right) \\
& - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\Sigma_t} 2H_t H'_t d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right).
\end{aligned}$$

Derivando essa expressão, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} m_{CH}(\Sigma_t) = & - \frac{1}{4} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right)^2 \left(\frac{\chi(\Sigma_t)}{2} + \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) d\sigma_t \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{d^2}{dt^2} (d\sigma_t) \right) \left(\frac{\chi(\Sigma_t)}{2} + \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) d\sigma_t \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \left[4\pi \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 |\Sigma_t|^{-1} - 4\pi Q(\Sigma_t)^2 |\Sigma_t|^{-2} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right. \\
& \left. - \frac{1}{16\pi} \left(\int_{\Sigma_t} 2H_t H'_t d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right) \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 \right) \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) - \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \frac{d^2}{dt^2} Q(\Sigma_t)^2 \right) \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \\
& + \frac{3}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{5}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right)^2 \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} - 2 \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 \right) \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \\
& - \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} 4\pi Q(\Sigma_t)^2 \int_{\Sigma_t} \frac{d^2}{dt^2} (d\sigma_t) d\sigma \\
& - \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \left(\int_{\Sigma_t} 2HH' d\sigma + \int_{\Sigma_t} \left(H^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right) \\
& - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(2 \int_{\Sigma_t} (H')^2 d\sigma + 2 \int_{\Sigma_t} HH'' d\sigma - 4 \int_{\Sigma_t} HH' H \phi d\sigma \right) \\
& + \int_{\Sigma_t} \left(H^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) \frac{d^2}{dt^2} (d\sigma_t).
\end{aligned}$$

Usando as seguintes equações

$$\begin{aligned} H'_t &= \Delta_{\Sigma_t} \phi_t + \text{Ric}(\nu_t, \nu_t) \phi_t + |A_t|^2 \phi_t \\ \left. \frac{d^2}{dt^2} (d\sigma_t) \right|_{t=0} &= [-\phi L\phi + H^2 \phi^2 + \text{div}_{\Sigma}(\nabla_X X)] d\sigma, \\ \left. \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right|_{t=0} &= -\phi H d\sigma, \end{aligned}$$

e avaliando em $t = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^2}{dt^2} m_{CH}(\Sigma_t) \right|_{t=0} = \\ & - \frac{1}{4} \frac{|\Sigma|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\Sigma} \phi H d\sigma \right)^2 \left(\frac{\chi(\Sigma)}{2} + \frac{4\pi Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) d\sigma \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\Sigma} (-\phi L\phi + H^2 \phi^2 + \text{div}_{\Sigma}(\nabla_X X)) d\sigma \right) \left(\frac{\chi(\Sigma)}{2} + \frac{4\pi Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) d\sigma \right) \\ & - \frac{1}{2} \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma} \phi H d\sigma \left[4\pi \left. \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 \right|_{t=0} |\Sigma|^{-1} + 4\pi Q(\Sigma)^2 |\Sigma|^{-2} \int_{\Sigma} \phi H d\sigma \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{16\pi} \left(\int_{\Sigma} 2HL\phi d\sigma - \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) H\phi d\sigma \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} \frac{|\Sigma|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \left. \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 \right|_{t=0} \right) \int_{\Sigma} \phi H d\sigma + \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \left. \frac{d^2}{dt^2} Q(\Sigma_t)^2 \right|_{t=0} \right) \int_{\Sigma} \phi H d\sigma \\ & + \frac{3}{2} \frac{|\Sigma|^{-\frac{5}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\Sigma} \phi H d\sigma \right)^2 \frac{4\pi Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + 2 \frac{|\Sigma|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \left. \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 \right|_{t=0} \right) \int_{\Sigma} \phi H d\sigma \\ & - \frac{|\Sigma|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} 4\pi Q(\Sigma)^2 \int_{\Sigma} (-\phi L\phi + H^2 \phi^2 + \text{div}_{\Sigma}(\nabla_X X)) d\sigma \\ & + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma} \phi H d\sigma \left(\int_{\Sigma} 2HL\phi d\sigma - \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) \phi H d\sigma \right) \\ & - \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(2 \int_{\Sigma} (L\phi)^2 d\sigma + 2 \int_{\Sigma} HL'(0)\phi d\sigma - 4 \int_{\Sigma} \phi H^2 L\phi d\sigma \right) \\ & + \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) (-\phi L\phi + H^2 \phi^2 + \text{div}_{\Sigma}(\nabla_X X)) d\sigma. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sendo Σ ponto crítico da massa de Hawking carregada, temos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{1}{|\Sigma|} \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\chi(\Sigma)}{2} + \frac{4\pi Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) d\sigma \right) \int_{\Sigma} H\phi d\sigma \\ & + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t) \Big|_{t=0} |\Sigma|^{-1} + 4\pi Q(\Sigma)^2 |\Sigma|^{-2} \int_{\Sigma} H\phi d\sigma \right) \\ & - \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\Sigma} 2HL\phi d\sigma - \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) H\phi d\sigma \right) = 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} & -\frac{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}{|\Sigma|^{\frac{3}{2}}} \frac{m_{CH}(\Sigma)}{2} \int_{\Sigma} H\phi d\sigma + 16\pi \left[4\pi \frac{d^2}{dt^2} q(\Sigma_t) \Big|_{t=0} |\Sigma|^{-1} + 4\pi q(\Sigma)^2 |\Sigma|^{-2} \right] \int_{\Sigma} \phi H d\sigma \\ & = \int_{\Sigma} 2HL\phi d\sigma - \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3} \zeta \right) H\phi d\sigma. \end{aligned}$$

Assim, substituindo esta igualdade na equação (2.1), segue que

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} m_{CH}(\Sigma_t) \Big|_{t=0} = \\ & = -\frac{1}{4} \frac{m_{CH}(\Sigma)}{|\Sigma|^2} \left(\int_{\Sigma} \phi H d\sigma \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_{CH}(\Sigma)}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} (-\phi L\phi + H^2 \phi^2 + \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_X X)) d\sigma \\ & - \frac{1}{2} \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\Sigma} \phi H d\sigma \right) \frac{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}{|\Sigma|^{\frac{3}{2}}} m_{CH}(\Sigma) \int_{\Sigma} H\phi d\sigma \\ & - \frac{1}{2} \frac{|\Sigma|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t) \Big|_{t=0} \right) \int_{\Sigma} \phi H d\sigma + \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(4\pi \frac{d^2}{dt^2} Q(\Sigma_t) \Big|_{t=0} \right) \int_{\Sigma} \phi H d\sigma \\ & + \frac{3}{2} \frac{|\Sigma|^{-\frac{5}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\Sigma} \phi H d\sigma \right)^2 4\pi Q(\Sigma)^2 + \frac{|\Sigma|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(8\pi \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t) \Big|_{t=0} \right) \int_{\Sigma} \phi H d\sigma \\ & - \frac{|\Sigma|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} 4\pi Q(\Sigma)^2 \int_{\Sigma} (-\phi L\phi + H^2 \phi^2 + \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_X X)) d\sigma. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Divergência obtemos que $\int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_X X) d\sigma = 0$, e sendo $Q(\Sigma_t) = Q(\Sigma)$ concluímos o resultado desejado. $\square$

2.2 Resultados de Estabilidade

Inicialmente, provaremos um resultado que classifica os pontos críticos da massa de Hawking carregada.

Teorema 4. *Se (M^3, g) é uma variedade Riemanniana com curvatura escalar satisfazendo $R \geq 2|E|^2 + 2\Lambda$, aqui $E \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\operatorname{div} E = 0$. Suponha que $\Sigma \hookrightarrow M$ é uma superfície fechada, dois lados, com curvatura média não negativa que é ponto crítico para a massa de Hawking carregada, então*

1. *ou Σ é mínima;*

2. *ou Σ é umbílica, sua curvatura Gaussiana satisfaz $K_\Sigma = \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}$, e ao longo de Σ , $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$ é constante. Além disso, se ν é um campo normal unitário em Σ , então E e ν são linearmente dependentes.*

Demonstração. Considere a primeira variação da massa de Hawking carregada dada no Lema 2, assim podemos reescrevê-la da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) \right|_{t=0} &= -\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma} H \phi \, d\sigma - \frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} \left[\frac{R - \zeta}{2} - K_{\Sigma} - \frac{4\pi(g(\Sigma) - 1)}{|\Sigma|} \right. \\ &\quad \left. - \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} + \frac{|A|^2}{2} + \frac{1}{4|\Sigma|} \int_{\Sigma} H^2 d\phi \right] H \phi \, d\sigma + \frac{1}{4} \left(\frac{|\Sigma|}{16\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \left. \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 \right|_{t=0} \\ &= -\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (\Delta_{\Sigma} H + \mathcal{Z}(\Sigma) H) \phi \, d\sigma + \frac{1}{4} \left(\frac{|\Sigma|}{16\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \left. \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t)^2 \right|_{t=0}, \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{Z}(\Sigma) = \frac{-4\pi(g(\Sigma) - 1)}{|\Sigma|} - K_{\Sigma} - \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} + \frac{1}{2}(R - \zeta) + \frac{1}{4} \left(2|A|^2 - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma \right). \quad (2.2)$$

Desde que $R \geq 2|E|^2 + 2\Lambda$ e $|A|^2 \geq \frac{1}{2}H^2$, segue que

$$\frac{1}{2}(R - \zeta) \geq |E|^2 \quad \text{e} \quad \int_{\Sigma} \left(2|A|^2 - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma \right) d\sigma \geq 0.$$

Assim, com essas condições e usando o Teorema de Gauss-Bonnet, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathcal{Z}(\Sigma) \, d\sigma &= \int_{\Sigma} \frac{-4\pi(g(\Sigma) - 1)}{|\Sigma|} \, d\sigma - \int_{\Sigma} K_{\Sigma} \, d\sigma - \int_{\Sigma} \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} \, d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R - \zeta) \, d\sigma + \frac{1}{4} \int_{\Sigma} \left(2|A|^2 - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma \right) d\sigma \\ &\geq -4\pi(g(\Sigma) - 1) - 2\pi\chi(\Sigma) - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + \int_{\Sigma} |E|^2 \, d\sigma \\ &= -\frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + \int_{\Sigma} |E|^2 \, d\sigma. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Holder segue que

$$\left| \int_{\Sigma} \langle E, \nu \rangle d\sigma \right|^2 \leq \left(\int_{\Sigma} |E \cdot \nu| d\sigma \right)^2 \leq |\Sigma| \int_{\Sigma} |E|^2 d\sigma,$$

e considerando a carga Q definida em (1.5) temos

$$\int_{\Sigma} |E|^2 d\sigma \geq \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|},$$

logo

$$\int_{\Sigma} \mathcal{Z}(\Sigma) d\sigma \geq 0,$$

e a igualdade ocorre se, somente se, E e ν são linearmente dependentes. Além disso, como por hipótese Σ é ponto crítico da massa de Hawking carregada, segue que

$$-\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (\Delta_{\Sigma} H + \mathcal{Z}(\Sigma)H) \phi d\sigma = 0,$$

isto é,

$$\int_{\Sigma} (\Delta_{\Sigma} H + \mathcal{Z}(\Sigma)H) \phi d\sigma = 0.$$

Como a curvatura média é não negativa, pelo Princípio do Máximo segue que $H = 0$ ou $H > 0$. Se $H = 0$, concluímos o item 1, agora suponha que Σ não é mínima, assim

$$\frac{1}{H} \Delta_{\Sigma} H + \mathcal{Z}(\Sigma) = 0. \quad (2.3)$$

Pela Regra de Leibniz dada por $\operatorname{div}_{\Sigma}(fX) = \langle \nabla_{\Sigma} f, X \rangle + f \operatorname{div}_{\Sigma}(X)$ em [7], onde $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e f função real, fazendo $f = \frac{1}{H}$ e $X = \nabla_{\Sigma} H$, segue que

$$\operatorname{div}_{\Sigma} \left(\frac{1}{H} \nabla_{\Sigma} H \right) = \left\langle \nabla_{\Sigma} \frac{1}{H}, \nabla_{\Sigma} H \right\rangle + \frac{1}{H} \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_{\Sigma} H),$$

mas como $\Delta_{\Sigma} H = \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_{\Sigma} H)$, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\Sigma} \left(\frac{1}{H} \nabla_{\Sigma} H \right) &= \left\langle \nabla_{\Sigma} \frac{1}{H}, \nabla_{\Sigma} H \right\rangle + \frac{1}{H} \Delta_{\Sigma} H \\ &= \left\langle -\frac{1}{H^2} \nabla_{\Sigma} H, \nabla_{\Sigma} H \right\rangle + \frac{1}{H} \Delta_{\Sigma} H. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Divergência concluímos que

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{H} \Delta_{\Sigma} H d\sigma - \int_{\Sigma} \frac{1}{H^2} \langle \nabla_{\Sigma} H, \nabla_{\Sigma} H \rangle d\sigma = 0,$$

isto é,

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{H} \Delta H d\sigma = \int_{\Sigma} \frac{|\nabla H|^2}{H^2} d\sigma \geq 0. \quad (2.4)$$

Assim, integrando (2.3) e usando (2.4), obtemos

$$\int_{\Sigma} \frac{|\nabla H|^2}{H^2} d\sigma + \int_{\Sigma} \mathcal{Z}(\Sigma) d\sigma = 0,$$

donde

$$\int_{\Sigma} \mathcal{Z}(\Sigma) d\sigma = - \int_{\Sigma} \frac{|\nabla H|^2}{H^2} d\sigma \leq 0.$$

Desse modo, $\int_{\Sigma} \mathcal{Z}(\Sigma) d\sigma = 0$, o que implica em $\int_{\Sigma} \frac{|\nabla H|^2}{H^2} d\sigma = 0$, ou seja, H é constante e $\mathcal{Z}(\Sigma) = 0$. Portanto, $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$ ao longo de Σ e Σ umbílica. Além disso, se ν é um campo normal unitário em Σ , então E e ν são linearmente dependentes e $|E|^2$ constante. Nesse caso,

$$\int_{\Sigma} |E|^2 d\sigma = \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|},$$

donde concluímos que

$$|E|^2 = \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2}.$$

Pela equação (2.2) a curvatura Gaussiana de Σ é obtida por

$$K_{\Sigma} = -\frac{4\pi(g(\Sigma) - 1)}{|\Sigma|},$$

daí,

$$K_{\Sigma} = \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}.$$

□

O resultado a seguir foi motivado pela Proposição 4 em [1] e descreve uma igualdade envolvendo $\lambda_1(L)$ e a área de uma superfície mínima, compacta, estritamente estável de dois lados, que maximiza localmente a massa de Hawking carregada em uma variedade tridimensional munida de um campo vetorial E .

Proposição 3. *Seja (M^3, g) é uma variedade Riemanniana com curvatura escalar satisfazendo $R \geq 2|E|^2 + 2\Lambda$, aqui $E \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\operatorname{div} E = 0$. Se $\Sigma \hookrightarrow M^3$ é uma superfície*

dois lados, mínima, compacta, estritamente estável que maximiza localmente a massa de Hawking carregada, então

$$(\lambda_1(L) + \lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Além disso, ao longo de Σ , temos que $A = 0$, $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$, $\text{Ric}(\nu, \nu) = -\lambda_1(L)$ e sua curvatura Gaussiana satisfaz $K_\Sigma = \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}$.

Demonstração. Considere $\Sigma_t \hookrightarrow M$ uma variação normal suave de Σ dada pelo campo vetorial $\frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = \phi(x)\nu(x)$, onde $\phi \in C^\infty(\Sigma)$. Pelo Lema 3, e sabendo que a superfície é mínima, temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} m_{CH}(\Sigma_t) \right|_{t=0} &= -\frac{1}{2} \frac{m_{CH}(\Sigma)}{\|\Sigma\|} \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\sigma - \frac{2\|\Sigma\|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (L\phi)^2 \, d\sigma \\ &\quad + \frac{\|\Sigma\|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} \frac{4}{3} \Lambda (\phi L \phi) \, d\sigma + \frac{\|\Sigma\|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{64\pi^2 Q(\Sigma)^2}{\|\Sigma\|} \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\sigma \\ &= -\frac{2\|\Sigma\|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (L\phi)^2 \, d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{2|\Sigma|} \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\chi(\Sigma)}{2} + \frac{(4\pi Q(\Sigma))^2}{|\Sigma|} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \frac{4}{3} \Lambda \, d\sigma \right) \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\sigma \\ &\quad + \frac{4\Lambda}{3} \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\sigma + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{4\pi Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\sigma \\ &= -\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (L\phi)^2 \, d\sigma - \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{4\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\sigma \\ &\quad + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{32\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\sigma + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} 2\Lambda \, d\sigma \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\sigma \\ &= -\frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \int_{\Sigma} (L\phi)^2 \, d\sigma - \left(2\Lambda + \frac{32\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} - \frac{4\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|} \right) \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\sigma \right]. \end{aligned}$$

Sabendo que Σ maximiza localmente a massa de Hawking carregada, tem-se

$$-\frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \int_{\Sigma} (L\phi)^2 \, d\sigma - \left(2\Lambda + \frac{32\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} - \frac{4\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|} \right) \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\sigma \right] \leq 0,$$

donde,

$$-2 \int_{\Sigma} (L\phi)^2 \, d\sigma \leq \left(-2\Lambda - \frac{32\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} + \frac{4\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|} \right) \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\sigma. \quad (2.5)$$

Agora, considere uma autofunção associada ao primeiro autovalor, isto é, $L\phi + \lambda_1(L)\phi = 0$ com $\lambda_1(L) > 0$ já que Σ é estritamente estável. Desse modo, utilizando a desigualdade (2.5) decorre que

$$-2\lambda_1(L)^2 \int_{\Sigma} \phi^2 d\sigma \leq \left(2\Lambda + \frac{32\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} - \frac{4\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|} \right) \lambda_1(L) \int_{\Sigma} \phi^2 d\sigma,$$

que implica

$$(\lambda_1(L) + \Lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \geq 2\pi\chi(\Sigma). \quad (2.6)$$

Pela desigualdade da estabilidade segue que

$$\lambda_1(L) \int_{\Sigma} \phi^2 d\sigma + \int_{\Sigma} (\text{Ric}(\nu, \nu) + |A|^2) \phi^2 d\sigma \leq \int_{\Sigma} |\nabla \phi|^2 d\sigma, \quad \forall \phi \in C^\infty(\Sigma),$$

considerando $\phi = 1$ tem-se

$$\lambda_1(L) \int_{\Sigma} d\sigma + \int_{\Sigma} (\text{Ric}(\nu, \nu) + |A|^2) d\sigma \leq 0,$$

e fazendo uso da Equação de Gauss obtemos

$$\lambda_1(L)|\Sigma| + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R + |A|^2) d\sigma \leq \int_{\Sigma} K_{\Sigma} d\sigma.$$

Como $R \geq 2|E|^2 + 2\Lambda$, utilizando a desigualdade de Holder e considerando ν um campo vetorial normal unitário em Σ obtemos

$$\int_{\Sigma} |\langle E, \nu \rangle| d\sigma \leq \left(\int_{\Sigma} |E|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Sigma} |\nu|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde,

$$\frac{1}{|\Sigma|} \left| \left(\int_{\Sigma} \langle E, \nu \rangle d\sigma \right) \right|^2 \leq \int_{\Sigma} |E|^2 d\sigma,$$

de modo que,

$$\frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \leq \int_{\Sigma} |E|^2 d\sigma.$$

Assim, pelo Teorema de Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned} (\lambda_1(L) + \Lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} &\leq \lambda_1(L)|\Sigma| + \Lambda|\Sigma| + \int_{\Sigma} |E|^2 d\sigma \\ &\leq \int_{\Sigma} K_{\Sigma} d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R + |A|^2) d\sigma + \Lambda|\Sigma| + \int_{\Sigma} |E|^2 d\sigma \\ &\leq 2\pi\chi(\Sigma) - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R - 2|E|^2 - 2\Lambda) d\sigma - \int_{\Sigma} |A|^2 d\sigma \\ &\leq 2\pi\chi(\Sigma). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Portanto, pelas desigualdades (2.6) e (2.7), concluímos que

$$(\lambda_1(L) + \Lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 2\pi\chi(\Sigma). \quad (2.8)$$

Além disso, segue que $\Lambda = 0$ e $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$ ao longo de Σ . Tomando $\phi = 1$ na equação de estabilidade obtemos

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}(\nu, \nu) + \lambda_1(L)) d\sigma = 0.$$

Assim, fazendo $\phi = c$ (constante), obtemos $\int_{\Sigma} \phi(L + \lambda_1(L))(\phi) d\sigma = 0$. Logo, o primeiro autovalor de $(L + \lambda_1(L))\phi$ é igual a zero, assim $(L + \lambda_1(L))c = 0$. Sabendo disto, observe que

$$(L + \lambda_1(L))c = (\text{Ric}(\nu, \nu) + \lambda_1(L))c,$$

donde, obtemos que $\text{Ric}(\nu, \nu) = -\lambda_1(L)$. Para finalizar, pela equação de Gauss e a equação (2.8), segue que $K_{\Sigma} = \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}$. $\square$

A prova do resultado seguinte é consequência da Proposição 2 em [2] e da Proposição 5 em [1]. O resultado apresenta a construção de uma família a um parâmetro Σ_t em uma vizinhança de Σ de forma que Σ_t é compacta e possui curvatura média constante.

Proposição 4. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana com curvatura escalar satisfazendo $R \geq 2|E|^2 + 2\Lambda$, aqui $E \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\text{div } E = 0$. Se $\Sigma \hookrightarrow M^3$ é uma superfície mínima, fechada e estável satisfazendo*

$$(\lambda_1(L) + \Lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Então existe $\epsilon > 0$ e uma função suave $\mu : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Sigma_t = \{\exp_x(\mu(t, x)\nu(x)); x \in \Sigma\}$$

é uma família de superfícies fechadas com curvatura média constante. Além disso, para cada $x \in \Sigma$ e para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, as seguintes propriedades são satisfeitas

$$\mu(0, x) = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t}(0, x) = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\Sigma} (\mu(t, \cdot) - t) d\sigma = 0.$$

Demonstração. veja [8].

A partir da proposição anterior, podemos definir a aplicação $f_t : \Sigma \rightarrow M$ dada por $f_t(x) = \exp_x(\mu(t, x)v(x))$, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Observe que $\Sigma_0 = \Sigma$. Assim, definimos a função lapso $\rho_t : \Sigma(t) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\rho_t(x) = \langle v_t(x), \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) \rangle$$

para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, onde $v_t(x)$ é o campo vetorial normal unitário ao longo de Σ_t tal que $v_0(x) = v(x)$ para todo $x \in \Sigma$.

Para finalizarmos este capítulo, apresentaremos a seguir um lema técnico de fundamental importância para a prova de um dos nossos resultados.

Lema 4. *Considere (M^3, g) , $\Sigma \subset M$ e $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ como na Proposição 4, então*

$$\int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(v_t, v_t) + |A_t|^2)(\rho_t - \bar{\rho}_t) d\sigma_t = \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t + H'_t \theta(t, x),$$

onde $\theta(t, x)$ é uma função não positiva e $\bar{\rho}_t = \frac{1}{|\Sigma(t)|} \int_{\Sigma} \rho_t d\sigma_t$.

Demonstração. Inicialmente, observe que $H'_t = L_{\Sigma_t} \rho_t$, assim

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(v_t, v_t) + |A_t|^2)(\rho_t - \bar{\rho}_t) d\sigma_t \\ &= \int_{\Sigma_t} (H'_t - \Delta_{\Sigma_t} \rho_t) d\sigma_t - \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(v_t, v_t) + |A_t|^2) d\sigma_t \\ &= H'_t |\Sigma_t| - \int_{\Sigma_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t - \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} (-\Delta_{\Sigma_t} + \Delta_{\Sigma_t} + \text{Ric}(v_t, v_t) + |A_t|^2) \frac{\rho_t}{\rho_t} d\sigma_t \\ &= H'_t |\Sigma_t| - \int_{\Sigma_t} \text{div}_{\Sigma_t}(\nabla \rho_t) d\sigma_t + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t \\ & \quad - \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} (\Delta_{\Sigma_t} + \Delta_{\Sigma_t} \text{Ric}(v_t, v_t) + |A_t|^2) \frac{\rho_t}{\rho_t} d\sigma_t \\ &= H'_t |\Sigma_t| + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t - \bar{\rho}_t H'_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t \\ &= \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t + H'_t \left[|\Sigma_t| - \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t \right], \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema da Divergência e notamos que $\bar{\rho}_t$ não depende de t . Fazendo $\theta(t, x) = |\Sigma_t| - \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t$, obtemos

$$\int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(v_t, v_t) + |A_t|^2)(\rho_t - \bar{\rho}_t) d\sigma_t = \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t + H'_t \theta(t, x).$$

Além disso, pela desigualdade de Holder concluímos que

$$\begin{aligned}
 |\Sigma_t|^2 &= \left[\int_{\Sigma_t} \left(\sqrt{\rho_t} \frac{1}{\sqrt{\rho_t}} \right) d\sigma_t \right]^2 \\
 &\leq \int_{\Sigma_t} (\sqrt{\rho_t})^2 d\sigma_t \int_{\Sigma_t} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_t}} \right)^2 d\sigma_t \\
 &= \int_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t,
 \end{aligned}$$

o que implica em

$$|\Sigma_t| \leq \overline{\rho_t} \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t.$$

Portanto, $\theta(t, x)$ é uma função não positiva. □

Capítulo 3

Principais Resultados

Depois de apresentarmos as definições e resultados auxiliares necessários, podemos demonstrar os teoremas principais deste trabalho, é o que será feito neste capítulo. O resultado a seguir trata de superfícies estritamente estáveis que maximizam localmente a massa de Hawking carregada.

Teorema 5. *Seja (M^3, g, K, E) um conjunto de dados iniciais maximal satisfazendo a condição de energia dominante, ou seja, $R \geq 2|E|^2 + 2\Lambda$, aqui $E \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\operatorname{div} E = 0$. Seja $\Sigma \hookrightarrow M$ uma superfície mergulhada em M fechada, dois lados, estritamente estável, mínima e que maximiza localmente a massa de Hawking carregada. Então*

$$(\lambda_1 + \Lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 2\pi\chi(\Sigma),$$

aqui λ_1 é o primeiro autovalor do operador de Jacobi. Além disso se $\Lambda = -3$ então uma das condições são satisfeitas:

1. *Se Σ é uma 2-esfera, então Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a $\frac{1}{a^2}$ e uma vizinhança de Σ em M é isométrica ao espaço Anti-de Sitter Reissner-Nordström $((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{S}^2, (g_{m,q,\Lambda}))$ para algum $\epsilon > 0$.*
2. *Se Σ tem gênero $g(\Sigma) \geq 2$, então Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a $-\frac{1}{a^2}$ e existe uma vizinhança de Σ em M que é isométrica a $((-\epsilon, \epsilon) \times \widehat{\Sigma}, \overline{g}_a)$ para algum $\epsilon > 0$, aqui $\overline{g}_a$ é uma métrica de curvatura Gaussiana constante igual a -1 .*
3. *Se Σ tem gênero um, então Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a zero e existe uma vizinhança de Σ em M que é isométrica a $((-\epsilon, \epsilon) \times \widehat{\Sigma}, g'_a)$ para algum $\epsilon > 0$, aqui g'_a é uma métrica flat em M .*

Demonstração. Pela Proposição 3 temos que o operador de Jacobi de Σ é dado por $L = \Delta - \lambda_1(L)$, e pela Proposição 4 podemos construir uma família $\{\Sigma(t)\}_{|t|<\epsilon}$ CMC em torno de $\Sigma_0 = \Sigma$. Usando o Lema 4, a fórmula de Gauss e a primeira variação da massa de Hawking carregada segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) &= \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \left(\frac{\chi(\Sigma_t)}{2} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{4}{3} \Lambda \right) d\sigma_t + \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} \right) \\ &\quad - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\Sigma_t} 2H_t H'_t d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{4}{3} \Lambda \right) \frac{d}{dt} (\sigma_t) \right) \\ &\quad - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|^2} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (\sigma_t) + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{8\pi Q(\Sigma_t)}{|\Sigma_t|} \frac{d}{dt} Q(\Sigma_t). \end{aligned}$$

Usando que $Q(\Sigma_t) = Q(\Sigma)$, para todo t , temos que $\frac{d}{dt} Q(\Sigma_t) = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) &= \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (\sigma_t) \left(\frac{\chi(\Sigma_t)}{2} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_t} \left(H^2(t) + \frac{4}{3} \Lambda \right) d\sigma_t + \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} \right) \\ &\quad - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\Sigma_t} 2H(t) H'(t) d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} \left(H^2(t) + \frac{4}{3} \Lambda \right) \frac{d}{dt} (\sigma_t) \right) \\ &\quad - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|^2} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (\sigma_t). \end{aligned}$$

Desde que $\frac{d}{dt} (d\sigma_t) = -H_t \rho_t d\sigma_t$, $H'_t = \Delta_{\Sigma_t} \rho_t + \text{Ric}(\nu_t, \nu_t) \rho_t + |A_t|^2 \rho_t$ (veja Teorema 3.2, [12]) e a curvatura média H_t é constante ao longo de Σ , podemos usar o Lema 4 para inferir que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) &= \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} -H_t \rho_t d\sigma_t \left(\frac{\chi(\Sigma_t)}{2} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_t} \left(H_t^2 + \frac{4}{3} \Lambda \right) d\sigma_t + \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} \right) \\ &\quad - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(2H_t \int_{\Sigma_t} (\Delta_{\Sigma_t} + \text{Ric}(\nu_t, \nu_t) + |A|^2) \rho_t d\sigma_t + \left(H_t^2 + \frac{4}{3} \Lambda \right) \int_{\Sigma_t} -H_t \rho_t d\sigma_t \right) \\ &\quad - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|^2} \int_{\Sigma_t} -H_t \rho_t d\sigma_t \\ &= -\frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} -H_t \rho_t d\sigma_t \frac{\chi(\Sigma_t)}{2} + \frac{3}{2} \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(H_t^2 + \frac{4}{3} \Lambda \right) \int_{\Sigma_t} H_t \rho_t d\sigma_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{4\pi Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} \int_{\Sigma_t} H_t \rho_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} 2H_t \int_{\Sigma_t} (\Delta_{\Sigma_t} + \text{Ric}(\nu_t, \nu_t) + |A|^2) \rho_t d\sigma_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(32\pi)^{\frac{3}{2}}} H_t \int_{\Sigma_t} (\Delta_{\Sigma_t} + \text{Ric}(\nu_t, \nu_t) + |A|^2) \rho_t \, d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(32\pi)^{\frac{3}{2}}} H_t 2\pi \chi(\Sigma_t) \bar{\rho}_t \\
 &\quad + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(32\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{16\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} H_t \bar{\rho}_t + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(32\pi)^{\frac{3}{2}}} H_t \left(\frac{3}{4} H_t^2 + \Lambda \right) \int_{\Sigma_t} \rho_t \, d\sigma_t \\
 &= -\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(32\pi)^{\frac{3}{2}}} H_t \left[\int_{\Sigma_t} (\Delta_{\Sigma_t} + \text{Ric}(\nu_t, \nu_t) + |A|^2) \rho_t \, d\sigma_t + 2\pi \chi(\Sigma_t) \bar{\rho}_t \right. \\
 &\quad \left. - \frac{16\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} H_t \bar{\rho}_t - \left(\frac{3}{4} H_t^2 + \Lambda \right) \int_{\Sigma_t} \rho_t \, d\sigma_t \right] \\
 &= -\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(32\pi)^{\frac{3}{2}}} H_t \left[\bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(\nu_t, \nu_t) + |A|^2) \rho_t \, d\sigma_t + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} \, d\sigma_t + H_t' \theta(t, x) \right. \\
 &\quad \left. + 2\pi \chi(\Sigma_t) \bar{\rho}_t - \frac{16\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} H_t \bar{\rho}_t - \left(\frac{3}{4} H_t^2 + \Lambda \right) \int_{\Sigma_t} \rho_t \, d\sigma_t \right].
 \end{aligned}$$

Novamente fazendo uso da fórmula de Gauss segue que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) &= -\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(32\pi)^{\frac{3}{2}}} H_t \left[\bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \left(\frac{1}{2} R - K_{\Sigma} + \frac{1}{2} H_t^2 + \frac{1}{2} |A_t|^2 \right) \, d\sigma_t + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} \, d\sigma_t \right. \\
 &\quad \left. + H_t' \theta(t, x) + 2\pi \chi(\Sigma_t) \bar{\rho}_t - \frac{16\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} H_t \bar{\rho}_t - \left(\frac{3}{4} H_t^2 + \Lambda \right) \int_{\Sigma_t} \rho_t \, d\sigma_t \right] \\
 &= -\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(32\pi)^{\frac{3}{2}}} H_t \left[\frac{\bar{\rho}_t}{2} \int_{\Sigma_t} \left(R - 2\Lambda + |A_t|^2 - \frac{H_t^2}{2} \right) \, d\sigma_t + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} \, d\sigma_t \right. \\
 &\quad \left. + H_t' \theta(t, x) - \frac{16\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} H_t \bar{\rho}_t \right]. \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

Como $\rho_0 = 1$, diminuindo ϵ se necessário, podemos supor que $\rho_t(x) > 0$, para cada $t \in (\epsilon, \epsilon)$ e $x \in \Sigma_t$. Usando o fato de que $R \geq 2|E|^2 + 2\Lambda$ e a desigualdade de Holder temos

$$\frac{16\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} \leq \int_{\Sigma_t} |E|^2 \, d\sigma_t,$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \bar{\rho}_t \left(\int_{\Sigma_t} |E|^2 \, d\sigma_t - \frac{16\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} \right) \\
 &\leq \bar{\rho}_t \left(\int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{2} \left(|A_t|^2 - \frac{H_t^2}{2} \right) \, d\sigma_t \right) - \frac{16\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} \bar{\rho}_t \\
 &\quad + H_t' \theta(t, x) + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} \, d\sigma_t.
 \end{aligned}$$

Pela segunda variação da Massa de Hawking carregada e utilizando novamente as Proposições 3 e 4, que a família $\{\Sigma_t\}$ é CMC, obtemos

$$\left. \frac{d}{dt} H_t \right|_{t=0} = \text{Ric}(\nu, \nu) = -\lambda_1(L) < 0, \text{ para todo } t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Tomando ϵ suficientemente pequeno se necessário, temos para cada $t \in (0, \epsilon)$, $H_t < 0$ e para cada $t \in (-\epsilon, 0)$ que $H_t > 0$, isto é, H é decrescente em t . Desse modo, teremos que $\frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) \geq 0$, para $t \in [0, \epsilon)$ e $\frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) \leq 0$, para cada $t \in (-\epsilon, 0]$. Portanto, obtemos que

$$m_{CH}(\Sigma_t) \geq m_{CH}(\Sigma),$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Por outro lado, Σ maximiza localmente a massa de Hawking carregada, ou seja, $m_{CH}(\Sigma_t) \leq m_{CH}(\Sigma)$. Logo, $m_{CH}(\Sigma_t) = m_{CH}(\Sigma)$ e, sendo Σ ponto crítico da massa de Hawking carregada, temos $\frac{d}{dt} m_{CH}(\Sigma_t) = 0$, para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Assim, pelo Teorema 4, $\Sigma(t)$ é umbílica, $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$ e $|E|$ é constante ao longo de $\Sigma(t)$. Daí, $\rho_t = 1$ para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Com efeito, pela equação (3.1) obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\bar{\rho}_t}{2} \int_{\Sigma_t} \left(R - 2\Lambda + |A_t|^2 - \frac{H_t^2}{2} \right) d\sigma_t + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t \\ &\quad + H'_t \theta(t, x) - \frac{16\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} H_t \bar{\rho}_t, \end{aligned}$$

assim,

$$H'_t \theta(t, x) + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t = 0$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Como $\rho_0 = 1$ e $H'_t \theta(t, x) \geq 0$, obtemos que

$$\int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t = 0.$$

Donde $|\nabla \rho_t|^2 = 0$, de modo que $\rho_t = 1$ para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Sabendo disto, e utilizando a Proposição 4 temos $\mu(0, x) = 0$ e

$$\begin{aligned} 1 = \rho_t &= \left\langle \nu(t, x), \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right\rangle \\ &= \left\langle \nu(t, x), D(\exp_x)_0 \left(\frac{\partial \mu}{\partial t}(t, x) \nu(x) \right) \right\rangle \\ &= \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, x), \end{aligned}$$

donde podemos concluir que $\mu(t, x) = t$ para todo $(t, x) \in (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$. Agora, considere g_{Σ_t} a métrica induzida em Σ_t pela isometria $f(t, x) = \exp_x(tv(x))$, assim a métrica em uma vizinhança suficientemente pequena de Σ pode ser escrita como

$$g = dt^2 + g_{\Sigma_t}.$$

De acordo com [12], a métrica induzida em Σ_t evolui do seguinte modo,

$$\frac{\partial}{\partial t}((g_{ij})_t) = -2\rho_t(\Lambda_{ij})_t,$$

onde $((g_{ij})_t) = g_{\Sigma_t}$. Sabendo que $\rho_t = 1$, Σ_t é umbílica e H_t é constante segue que

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_{\Sigma_t}) = -H_t g_{\Sigma_t},$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Logo, obtemos $g_{\Sigma_t} = e^{-\int_0^t H(s) ds} g_{\Sigma}$. Por fim, vamos analisar cada item apontado no teorema. Suponha que Σ é uma 2-esfera, assim, $g_{\Sigma_t} = u_{Q,a}(t)^2 \cdot g_{\mathbb{S}^2}$, onde $u_{Q,a}(t) = a \cdot e^{-\frac{1}{2} \int_0^t H(s) ds}$ com $Q = Q(\Sigma) = a^2|E|$ e $a^2 = \frac{|\Sigma|}{4\pi}$. Além disso, a função $u_{Q,a}(t)$ satisfaz a seguinte equação

$$u''(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - u'(t)^2}{u(t)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{-3u(t)^4 + Q^2}{u(t)^3} \right). \quad (3.2)$$

Com efeito,

$$u'_{Q,\alpha}(t) = -\frac{H(t)}{2} u_{Q,\alpha}(t),$$

assim,

$$u''_{Q,\alpha}(t) = -\frac{H'_t}{2} u_{Q,\alpha}(t) + \frac{H_t^2}{4} u_{Q,\alpha}(t).$$

Como $H'_t = L(\rho_t)$ e $\rho_t \equiv 1$, pela equação de Gauss decorre que

$$\begin{aligned} H'_t &= \Delta \rho_t + \left(\text{Ric}(v_t, v_t) + \frac{H_t^2}{2} \right) \rho_t \\ &= \text{Ric}(v_t, v_t) + \frac{H_t^2}{2} \\ &= \frac{R}{2} - K_{\Sigma_t} + \frac{H_t^2}{2} - \frac{H_t^2}{4} + \frac{H_t^2}{2} \\ &= \frac{Q^2}{u_{Q,\alpha}(t)^4} - 3 - \frac{1}{u_{Q,\alpha}(t)^2} + \frac{3H_t^2}{4}. \end{aligned}$$

usando o fato de que $g_{\Sigma_t} = u_{Q,\alpha}(t)^2 g_{\mathbb{S}^2}$ resulta em $K_{\Sigma_t} = \frac{1}{u_{Q,\alpha}(t)^2}$. Portanto, substituindo esta última igualdade na igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} u''_{\alpha}(t) &= -\frac{u_{Q,\alpha}(t)Q^2}{2u_{Q,\alpha}(t)^4} + \frac{3u_{Q,\alpha}(t)}{2} + \frac{1}{2u_{Q,\alpha}(t)} - \frac{H_t^2 u_{Q,\alpha}(t)}{8} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - u'_{Q,\alpha}(t)^2}{u_{Q,\alpha}(t)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{-3u_{Q,\alpha}(t)^4 + Q^2}{u_{Q,\alpha}(t)^3} \right). \end{aligned}$$

Pela unicidade de soluções para EDO's concluímos que $(-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$ é isométrico a uma parte do espaço Anti-de Sitter Reissner-Nordström com métrica igual a $dt^2 + u_{Q,a}(t)^2 g_{\mathbb{S}^2}$ induzida por $f(t, x) = \exp_x(tv(x))$.

Para o caso em que Σ tem $g(\Sigma) \geq 2$, segue que $\chi(\Sigma) \leq -2$ e pelo teorema de Gauss Bonnet obtemos que Σ tem curvatura Gaussiana constante negativa. Assim, podemos considerar $g_{\Sigma_t} = u_{Q,a}(t)^2 \cdot g_{\widehat{\Sigma}}$, onde $g_{\widehat{\Sigma}}$ tem curvatura Gaussiana constante igual a -1 e $a^2 = \frac{|\Sigma|}{4\pi(g(\Sigma) - 1)}$. Perceba que para este caso, $u(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$u''(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1 - u'(t)^2}{u(t)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{-3u(t)^4 + Q^2}{u(t)^3} \right).$$

Logo, de modo analógico ao item 1, obtemos uma vizinhança de Σ em M isométrica à $((-\epsilon, \epsilon) \times \widehat{\Sigma}, g_{\widehat{\Sigma}})$. De modo similar, obtemos o item 3. $\square$

Para a prova do segundo resultado a seguir, utilizamos as ideias contidas no estudo de Micallef e Moraru [15]. De forma semelhante, Baltazar, Barros e Batista [1] também utilizaram suas ideias para estabelecer uma generalização do resultado de Bray, Brendle e Neves [3] no contexto carregado.

Teorema 6. *Seja (M^3, g, K, E) um conjunto de dados iniciais maximal que satisfaz a condição de energia dominante, ou seja, $R \geq 2|E|^2 - 6$, aqui $E \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\operatorname{div} E = 0$. Seja Σ uma superfície mergulhada em M , fechada, dois lados que localmente é minimizante de área, então Σ satisfaz*

$$3|\Sigma| - \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \geq 4\pi(g(\Sigma) - 1).$$

Além disso, se vale a igualdade uma das condições são satisfeitas:

1. Se Σ têm gênero $g(\Sigma) \geq 2$, então tem curvatura de Gauss constante $K_{\Sigma} = |E|^2 - 3$ e existe uma vizinhança de Σ em M isométrica a $((-\delta, \delta) \times \Sigma, dt^2 + g_{\Sigma})$.
2. Se Σ têm gênero igual a um, então Σ tem curvatura de Gauss constante $K_{\Sigma} = 0$ e existe uma vizinhança de Σ em M isométrica a $((-\delta, \delta) \times T^2, dt^2 + g_{\Sigma})$, aqui g_{Σ} é uma métrica plana em T^2 .
3. Se Σ tem gênero zero, então Σ tem curvatura de Gauss constante $K_{\Sigma} = |E|^2 - 3$ e existe uma vizinhança de Σ em M isométrica a $((-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^2, dt^2 + g_{\Sigma})$.

Demonstração. Inicialmente, desde que Σ localmente minimizante de área, segue da fórmula da segunda variação de área que

$$\frac{d^2}{dt^2} |\Sigma(t)| \Big|_{t=0} = \int_{\Sigma} (|\nabla \phi|^2 - (\text{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + |\mathbf{A}|^2) \phi^2) d\sigma \geq 0,$$

donde obtemos

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + |\mathbf{A}|^2) \phi^2 d\sigma \leq \int_{\Sigma} |\nabla \phi|^2 d\sigma,$$

para toda $\phi \in C^\infty(\Sigma)$. Com isto, concluimos que

$$\begin{aligned} J(\phi) &= - \int_{\Sigma} \phi \Delta \phi d\sigma - \int_{\Sigma} (\text{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + |\mathbf{A}|^2) \phi^2 d\sigma \\ &\geq \int_{\Sigma} |\nabla \phi|^2 d\sigma - \int_{\Sigma} |\nabla \phi|^2 d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Portanto, Σ é estável. Escolhendo $\phi \equiv 1$, usando a equação de Gauss e a hipótese de que $R \geq 2|E|^2 - 6$ segue

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{R}{2} - K_{\Sigma} + \frac{H^2}{2} + \frac{|\mathbf{A}|^2}{2} \right) d\sigma \leq 0,$$

implicando em

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |E|^2 d\sigma - \int_{\Sigma} 3 d\sigma &\leq \int_{\Sigma} K_{\Sigma} d\sigma - \int_{\Sigma} \left(\frac{H^2}{2} + \frac{|\mathbf{A}|^2}{2} \right) d\sigma \\ &\leq \int_{\Sigma} K_{\Sigma} d\sigma \\ &= 2\pi\chi(\Sigma). \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} |\Sigma| - 3|\Sigma| \leq 4\pi(1 - g(\Sigma)), \quad (3.3)$$

donde obtemos a desigualdade pretendida.

Além disso, a igualdade é válida se, e somente se, ao longo de Σ temos $R = 2|E|^2 - 6$, $A = 0$, $\text{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ e $K_{\Sigma} = |E|^2 - 3$, com $|E|$ constante.

Pela Proposição 4, podemos construir uma família $\{\Sigma_t\}$ CMC em uma vizinhança de Σ . Usando o fato de que a curvatura média evolui da seguinte forma

$$H'_t = \Delta_{\Sigma_t} \rho_t + (\text{Ric}(\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_t) + |\mathbf{A}_t|^2) \rho_t, \rho_t > 0,$$

pela fórmula de Gauss e como $\rho_0(x) = 1$ segue que

$$\begin{aligned} -\frac{H'_t}{\rho_t} &= -\frac{1}{\rho_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t - \left(\frac{R_t}{2} - K_{\Sigma_t} + \frac{H_t^2}{2} + \frac{|A_t|^2}{2} \right) \\ &\leq -\frac{1}{\rho_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t - (|E_t|^2 - 3) + K_{\Sigma_t} - \left(\frac{H_t^2}{2} + \frac{|A_t|^2}{2} \right) \\ &\leq -\frac{1}{\rho_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t - (|E_t|^2 - 3) + K_{\Sigma_t}. \end{aligned}$$

Integrando a desigualdade anterior e sabendo que H'_t é constante ao longo Σ_t , obtemos

$$\begin{aligned} -H'_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t &\leq - \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t^2} |\nabla \rho_t|^2 d\sigma_t - \int_{\Sigma_t} |E_t|^2 d\sigma_t + 3|\Sigma_t| + 2\pi\chi(\Sigma) \\ &\leq -\frac{16\pi^2 Q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} + 3|\Sigma_t| + 2\pi\chi(\Sigma). \end{aligned}$$

Sendo $\operatorname{div} E = 0$ podemos aplicar o Teorema da Divergência para obter $Q(\Sigma_t) = Q(\Sigma)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Pela desigualdade (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} -H'_t \int_{\Sigma(t)} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t &\leq -\frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma_t|} + 3|\Sigma_t| - 3|\Sigma| + \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \\ &= 16\pi^2 Q(\Sigma)^2 \left(\frac{1}{|\Sigma|} - \frac{1}{|\Sigma_t|} \right) + 3(|\Sigma_t| - |\Sigma|), \end{aligned}$$

o que implica em

$$|\Sigma_t|(-H'_t) \int_{\Sigma(t)} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t \leq \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} (|\Sigma_t| - |\Sigma_t|) + 3|\Sigma_t|(|\Sigma_t| - |\Sigma|).$$

Diminuindo ϵ se necessário, podemos assumir que existe uma constante $C > 0$ tal que $|\Sigma_t| \leq C$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Então,

$$\begin{aligned} |\Sigma_t|(-H'_t) \int_{\Sigma(t)} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t &\leq \left(\frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + 3C \right) (|\Sigma_t| - |\Sigma|) \\ &= \left(\frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + 3C \right) \int_0^t \frac{d}{ds} |\Sigma_s| ds \\ &= \left(\frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + 3C \right) \int_0^t \left(\int_{\Sigma_s} -H_s \rho_s d\sigma_s \right) ds \\ &= \left(\frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + 3C \right) \int_0^t \left(-H_s \int_{\Sigma_s} \rho_s d\sigma_s \right) ds. \end{aligned}$$

Para simplificar os cálculos, definimos $\varphi(t) = \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t$, $\gamma(s) = \int_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t$ e $k = \frac{16\pi^2 Q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + 3C$, assim, podemos reescrever a desigualdade anterior da seguinte forma

$$|\Sigma_t|(-H'_t)\varphi(t) \leq k \int_0^t (-H'_t)\gamma(s) ds. \quad (3.4)$$

Como $\rho_0(x) = 1$, podemos supor que $\frac{1}{2} < \rho_t < 2$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Assim,

$$\frac{1}{2}|\Sigma_t| < \gamma(t) < 2|\Sigma_t|, \text{ para todo } t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Para prosseguir, escolhendo novamente ϵ se necessário, podemos também supor que $\frac{1}{2}|\Sigma| < |\Sigma_t| < 2|\Sigma|$, o que implica em

$$\frac{1}{4}|\Sigma_t| < \gamma(t) < 4|\Sigma_t|.$$

De modo análogo, segue que $\frac{1}{4}|\Sigma_t| < \varphi(t) < 4|\Sigma_t|$. Assim,

$$\frac{1}{\varphi(t)} < \frac{4}{|\Sigma|} \quad \text{e} \quad \gamma(t) < 4|\Sigma|. \quad (3.5)$$

Por fim, para completar a prova do Teorema, provaremos que existe $\delta > 0$ tal que $H_t \geq 0$ para todo $t \in [0, \delta)$. De fato, tomando um $\delta < \epsilon$ arbitrário suponha por contradição que existe $t_0 \in [0, \delta)$ tal que $H_{t_0} < 0$. Considere o conjunto $I := \{t \in [0, t_0] : H_t \leq H_{t_0}\}$ e denote seu ínfimo por $t^* = \inf I$. Observe que se tivermos $t^* > 0$, então pelo Teorema do Valor Médio existe $t_1 \in (0, t^*)$ tal que $H_{t^*} = H'_{t_1} \cdot t^*$, (sabendo que $H_0 = 0$) e consequente, pelas desigualdades (3.4) e (3.5) podemos obter a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} -H_{t^*} &= t^*(-H'_{t_1}) \leq \frac{k \cdot t^*}{|\Sigma_{t_1}| \varphi(t_1)} \int_0^{t_1} -H_s \gamma(s) \, ds, \\ &< \frac{4kt^*}{|\Sigma|^2} (-H_{t^*}) \int_0^{t_1} \gamma(s) \, ds \\ &< \frac{16kt_1 t^*}{|\Sigma|} (-H_{t^*}) \\ &< \frac{16k(t^*)^2}{|\Sigma|} (-H_{t^*}). \end{aligned}$$

Logo, se considerarmos $\delta < \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16k}}$ obtemos uma contradição, portanto $t^* = 0$. Além disso,

$$0 = H_0 \leq H_{t_0} < 0,$$

obtendo outra contradição, e isso nos mostra que nossa afirmação é verdadeira. Agora, sabendo que $H_t \geq 0$ para todo $t \in [0, \delta)$ e $\frac{d}{dt}(\sigma_t) = -H_t \rho_t d\sigma_t$, é imediato que $\frac{d}{dt}|\Sigma_t| \leq 0$, o que implica que $|\Sigma_t| \leq |\Sigma_t|$ para todo $t \in [0, \delta)$. De modo análogo, obtemos que $\frac{d}{dt}|\Sigma_t| \geq 0$, para todo $t \in [-\delta, 0)$, o que implica novamente em $|\Sigma_t| \leq |\Sigma_t|$ para todo

$t \in [-\delta, 0)$. Por hipótese, sendo Σ localmente minimizante de área tem-se que $|\Sigma| \leq |\Sigma_t|$ e, portanto, $|\Sigma_t| = |\Sigma|$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Por fim, Σ_t é totalmente geodésica, $|E|$ constante em Σ_t , $R = 2|E|^2 - 6$, $K_{\Sigma_t} = |E|^2 - 3$ e $\text{Ric}(\nu_t, \nu_t) = 0$.

No caso em que vale a igualdade, suponha que $g(\Sigma) \geq 2$ (item 1), assim, $\chi(\Sigma) \leq -2$. Dáí, decorre que $K_\Sigma < 0$ com $K_\Sigma = |E|^2 - 3$ e utilizando um argumento padrão semelhante ao teorema anterior, garantimos a existência de uma vizinhança de Σ isométrica a $((-\delta, \delta) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$. Os itens 2 e 3 são obtidos de forma similar. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Baltazar, H.; Barros, A.; Batista, R.: A local rigidity theorem for minimal two-spheres in charged time-symmetric initial data set. **113** (2023) <https://doi.org/10.1007/s11005-023-01713-8>
- [2] Barros, A.; Batista, R.; Cruz, T.: Hawking mass and local rigidity of minimal surfaces in three-manifolds. *Commun. Anal. Geom.* **25**(1), 1-23 (2017)
- [3] Bray, H.; Brendle, S.; Neves, A.: Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds. *Commun. Anal. Geom.* **18**(4), 821-830 (2010)
- [4] Cai, M.; Galloway, G.: Rigidity of area minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. *Commun. Anal. Geom.* **8**, 565-573 (2000)
- [5] Caminha, A.; Souza, P.; Camargo, F. *Complete foliations of space forms by hypersurfaces*. *Bull Braz Math Soc, New Series* 41, 339-353 (2010). <https://doi.org/10.1007/s00574-010-0015-y>
- [6] Chen, D.; Li, H.; Zhou, T.: A Penrose type inequality for graphs over Reissner-Nordström-anti-deSitter manifold. *J. Math. Phys.* **60**, 043503 (2019)
- [7] Colding, T. H.: Minicozzi, W. P. II: A course in minimal surfaces, volume 121 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [8] Cruz, T.; Lima, V.; Sousa, A.: Min-max minimal surfaces, horizons and electrostatic systems. *J. Differ. Geom.* **128**, 583-637 (2024) <https://doi.org/10.4310/jdg/1727712890>
- [9] Do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides. IMPA, 2015.

- [10] Gourgoulhon, E.: 3 + 1 Formalism in General Relativity. Bases of Numerical Relativity. Springer, Berlin (2012)
- [11] Huisken, G.; Ilmanen, T.: The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. *J. Differential Geom.* **59**(3) (2001), 353-437.
- [12] Huisken, G.; Polden, A.: Geometric evolution equations for hypersurfaces. In: Hildebrandt, S.; Struwe, M. (eds.) *Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems*. Lecture Notes in Mathematics. 1713, pp. 45-84. Springer, Berlin (1999)
- [13] Knapp, Anthony. *Stokes's Theorem and Whitney Manifolds*. original digital edition, 2021.
- [14] Máximo, D.; Nunes, I.: Hawking mass and local rigidity of minimal two-spheres in three-manifolds. *Commun. Anal. Geom.* **21**(2), 409-433 (2013)
- [15] Micallef, M.; Moraru, V.: Splitting of 3-manifolds and rigidity of area-minimising surfaces. *Proc. Am. Math. Soc.* **143**(n7), 2865-2872 (2015)
- [16] Nunes, I.: Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds. *J. Geom. Anal.* **23**, 1290-1302 (2013)
- [17] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 103, Academic Press, New York, 1983.
- 104746 (2023) <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2022.104746>
- [18] Schoen, R.; Yau, S.T.: Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-manifolds with nonnegative scalar curvature. *Ann. Math.* 110(4) (1979), 127-142.
- [19] Sousa, P. A., Lima, A. B. Charged Hawking Mass and Local Rigidity of Three-Manifolds. *J. Geom. Anal.* 33, 11 (2023). <https://doi.org/10.1007/s12220-022-01070-3>
- [20] Wang, Z. H.: A Minkowski-type inequality for hypersurfaces in the Reissner-Nordström-anti-deSitter manifold. Ph.D. dissertation (Columbia University, 2015)