



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

**Existência de pontos críticos para funcionais do tipo
Trudinger-Moser**

Ruan Diego da Silva Paiva

Teresina - 2025

Ruan Diego da Silva Paiva

Tese de doutorado:

**Existência de pontos críticos para funcionais do tipo
Trudinger-Moser**

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira

Teresina - 2025



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência de pontos críticos para funcionais do tipo Trudinger-Moser

Ruan Diego da Silva Paiva

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 30 de Julho de 2025.

Banca Examinadora:



Documento assinado digitalmente
JOSE FRANCISCO ALVES DE OLIVEIRA
Data: 31/07/2025 10:37:37-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira - Orientador



Documento assinado digitalmente
MARCELO FERNANDES FURTADO
Data: 31/07/2025 10:54:13-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - membro externo - UnB



Documento assinado digitalmente
MANASSES XAVIER DE SOUZA
Data: 31/07/2025 22:04:37-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - membro externo - UFPB



Documento assinado digitalmente
ABIEL COSTA MACEDO
Data: 01/08/2025 00:56:04-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Abiel Costa Macedo - membro externo - UFG



Documento assinado digitalmente
MYKAEL DE ARAUJO CARDOSO
Data: 01/08/2025 15:01:30-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Mykael de Araujo Cardoso - membro interno

Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Divisão de Representação da Informação

P149e Paiva, Ruan Diego da Silva.
Existência de pontos críticos para funcionais do tipo Trudinger-
Moser / Ruan Diego da Silva Paiva. — Teresina, 2025.
95 f. : il.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Piauí, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, 2025.
“Orientador: Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira”

1. Desigualdade de Trudinger-Moser. 2. Pontos críticos. 3.
Análise. 4. Operadores não-lineares. I. Cunha, Antonio Wilson
Rodrigues da. II. Título.

CDD 515

Elaborada por Fabíola Nunes Brasilino CRB 3/ 1014

*Dedico à minha mãe, Teresa, minha avó Antônia,
meus irmãos, Tayná e Latorre, e a meu padrasto
José.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, saúde, por todos os momentos de conforto e por ter colocado pessoas tão especiais na minha vida.

Agradeço a todos os meus familiares, em especial, a minha mãe Teresa e a minha avó Antônia por sempre me incentivarem e me apoiarem em tudo que tentasse, que não mediram esforços pela a minha formação, aos meus irmãos Tayná e Latorre, pelo apoio e incentivo. Aos meus sobrinhos João e Isaac pelos momentos de riso que me fizeram descansar.

Agradeço ao meu orientador, professor José Francisco, pela amizade, apoio, ensinamentos, paciência e incentivo ao longo de pouco mais de oito anos, desde a iniciação científica até este momento.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFPI, em especial aos professores José Francisco, Paulo Alexandre, Halyson Baltazar, Jurandir Oliveira, Barnabé Pessoa Lima, Leandro Pessoa, Gleison Nascimento, Vitaliano Amaral, Antônio Wilson, Mykael Cardoso e Rondinelle Batista e aos demais professores do departamento de matemática que me acompanharam ao longo desses mais de 10 anos na UFPI expresso minha profunda gratidão pela valiosa contribuição à minha formação acadêmica.

Agradeço aos professores Abiel Costa Macedo, Manassés Xavier de Souza, Marcelo Fernandes Furtado e Mykael de Araújo Cardoso por gentilmente aceitarem o convite para compor a banca examinadora. Sou grato pelas valiosas sugestões, pelo esclarecimento de dúvidas e pela contribuição essencial para o aprimoramento deste trabalho. Estendo meus agradecimentos aos professores Pitágoras Pinheiro de Carvalho e Leandro de Freitas Pessoa por aceitarem o convite para atuarem como suplentes nesta banca de defesa.

Agradeço a todos os amigos que fiz ao longo da pós-graduação e no Departamento

de Matemática da UFPI pelo incentivo, apoio e companheirismo. Em especial, expresso minha gratidão a João Vinícius, Erisvaldo Vêras, José Edilson, José Márcio, Antônio Nilson, Dieme, Pedro Paulo, Pedro Rodrigues, Raimundo Bruno, Christopher, Emanuely, Leonardo Silva, Edimilson Lopes, Thassio Luan, Igor, Ricael, Jeferson Brito, Anderson Brito, Sillas Augusto, Lázaro, Jonatas Arrais, Jonas Bloch, Bruno Vasconcelos, Gustavo de Sousa, Jefferson de Brito Sousa, João Santos, Alexandre Bezerra, Jeferson Silva, Rafael Emanuel. A amizade, apoio e os momentos de café deixaram tudo mais leve.

Agradeço a todos os funcionários da pós-graduação pelo suporte e dedicação, em especial à Larisse, por seu empenho, disponibilidade e prontidão em nos auxiliar sempre que necessário. Seu trabalho e atenção fizeram toda a diferença ao longo desta jornada.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

*“Prefiro sempre o temor do entendimento
ao temor da ignorância.”*

Douglas Adams.

Resumo

Neste trabalho, discutiremos a existência de pontos críticos para funcionais do tipo Trudinger-Moser. Nosso interesse está em funcionais definidos tanto em Espaços Sobolev clássicos quanto em Espaços de Sobolev com peso; ambos sob a influência de um termo logarítmico. Os espaços de Sobolev com peso que iremos considerar incluem dimensões fracionárias, são relacionados com a desigualdade de Hardy-Sobolev e são adequados para o estudo de uma classe de operadores diferenciais que abrange os operadores, Laplaciano, p -Laplaciano, k -Hessiano e poli-harmônico; quando agindo em funções radialmente simétricas. Em situações em que o funcional é limitado em um subconjunto do Espaço de Sobolev em questão, a existência de pontos críticos pode ser garantida pela atingibilidade do problema extremal associado, que é um problema delicado ante à perda de compacidade oriunda da otimalidade do crescimento exponencial nas inclusões de Sobolev, como observado por J. Hempel, G. Morris e N. Trudinger em 1970. Além de pontos críticos derivados de extremais, iremos também determinar tais pontos associados a máximos locais em situações que vão além da clássica constante crítica de Moser 1970. Isso estende, para o caso logarítmico, resultados clássicos obtidos por M. Struwe 1988 tanto para Espaços de Sobolev clássicos quanto para Espaços de Sobolev com peso. Em linha com trabalhos recentes devido a K. Tintarev 2014 e V.H. Nguyen 2018, obteremos uma nova desigualdade do tipo Trudinger-Moser para espaços de dimensão fracionária e investigamos a existência de pontos críticos para o funcional associado. Por fim, provamos a existência de soluções fracas para um problema do tipo côncavo-convexo com crescimento exponencial, também no contexto de espaços de dimensão fracionária, que dão uma informação sobre o alcance do conjunto dos pontos críticos.

Palavras-chave: Desigualdade de Trudinger-Moser; Pontos críticos; Espaços com peso; Operadores não-lineares.

Abstract

In this work, we discuss the existence of critical points for functionals of Trudinger–Moser type. Our interest lies in functionals defined both on classical Sobolev spaces and on weighted Sobolev spaces, all under the influence of a logarithmic term. The weighted Sobolev spaces we consider include fractional dimensions, are connected to the Hardy–Sobolev inequality, and are suitable for studying a class of differential operators encompassing the Laplacian, the $\mathbf{p}$ -Laplacian, the $\mathbf{k}$ -Hessian, and polyharmonic operators, when acting on radially symmetric functions. In situations where the functional is bounded on a subset of the corresponding Sobolev space, the existence of critical points may be ensured by the attainability of the associated extremal problem, which is delicate due to the lack of compactness caused by the optimal exponential growth in Sobolev embeddings, as observed by J. Hempel, G. Morris, and N. Trudinger in 1970. Beyond critical points arising from extremals, we also establish the existence of such points associated with local maxima in settings that go beyond the classical critical constant introduced by Moser in 1970. This extends, to the logarithmic case, classical results obtained by M. Struwe in 1988 for both classical Sobolev spaces and weighted Sobolev spaces. In line with recent developments by K. Tintarev (2014) and V.H. Nguyen (2018), we obtain a new Trudinger–Moser-type inequality for spaces of fractional dimension and investigate the existence of critical points for the associated functional. Finally, we prove the existence of weak solutions to a concave–convex-type problem with exponential growth, also in the context of fractional-dimensional spaces, which provides insight into the range of the set of critical points.

Keywords: Trudinger–Moser inequality; Critical points; Weighted spaces; Nonlinear operators.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	2
1 Maximizante local para o funcional de Moser supercrítico	9
1.1 Desigualdade de Trudinger-Moser	9
1.2 Funcional de Moser em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$	13
1.3 Propriedades para o funcional de Moser com peso logarítmico	15
1.4 Ponto crítico além da constante crítica com peso logarítmico	20
2 Maximizante local para o funcional de Moser supercrítico fracionário	26
2.1 Espaço $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$	26
2.2 Espaço $X_{1,w_0}^{1,p}$	29
2.3 Trudinger-Moser em dimensão fracionária	32
2.4 Propriedades do funcional de Moser fracionário	34
2.5 Ponto crítico além da constante crítica em dimensão fracionária	40
3 Pontos críticos para o funcional de Moser sob restrição do tipo Tintarev	45
3.1 Desigualdade de Trudinger-Moser do tipo Tintarev	45
3.2 Pontos críticos para restrições do tipo Tintarev	47
4 Existência de solução para um problema côncavo-convexo	52
4.1 Problema elíptico quasilinear com crescimento exponencial crítico	52
4.2 Problema de autovalor para o operador L	54

4.3	Método da iteração monótona e princípio de comparação	57
4.4	Existência de mínimo local para E_λ , com λ pequeno	62
4.5	Não existência para λ grande	64
4.6	Existência de solução para E_λ , com $\lambda \in (0, \lambda^*)$	64
Apêndice		73
Referências Bibliográficas		75

Lista de Figuras

1.1	Representação do conjunto N_ε	21
1.2	Representação do conjunto $N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon$	22

Parte dos resultados obtidos nesse trabalho foram aceitos para publicação em:

Da Silva Paiva, R.D., de Oliveira, J.F., *Maximizers for the logarithmic Trudinger-Moser functional beyond the critical threshold* to appear in J. Anal. Math., 2025

Introdução

Seja Ω domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). O espaço $W_0^{1,n}(\Omega)$ representa o caso limite para o teorema clássico de imersão de Sobolev, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ com $1 \leq p < n$ e $1 \leq q < p^*$. Sabe-se que $W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$, mas um exemplo simples mostra que $W_0^{1,n}(\Omega) \not\subset L^\infty(\Omega)$, por exemplo, caso Ω seja a bola unitária de $\mathbb{R}^n$ a função $\log(\log \frac{e}{|x|})$ pertence a $W_0^{1,n}(\Omega)$, mas não a $L^\infty(\Omega)$.

Na verdade, o crescimento máximo admissível para uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\varphi(u) \in L^1(\Omega)$ sempre que $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$, não é atingido por nenhuma função do tipo potência, ou seja, $\varphi(t) = t^q$, $t \geq 0$. Nos trabalhos [28, 44, 45, 51, 56], é mostrado que o espaço $W_0^{1,n}(\Omega)$ está imerso no Espaço de Orlicz $L_\phi(\Omega)$, com ϕ dada por $\phi(t) = e^{|t|^{n/(n-1)}} - 1$. Na verdade, o crescimento exponencial é o máximo admissível. Mais precisamente, de forma independente, Pohozaev [45], Trudinger [51], Yudovich [56] mostraram que

$$e^{|u|^{\frac{n}{n-1}}} \in L^1(\Omega)$$

sempre que $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$. E mostraram que existe $\mu > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} e^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx \leq c, \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,n}(\Omega) \text{ com } \|\nabla u\|_n \leq 1.$$

Um pouco depois, Hempel, Morris e Trudinger [28] mostraram que o crescimento exponencial é ótimo, isto é, se $g(t)$ é uma função com crescimento mais rápido do que $\exp(t^{\frac{n}{n-1}})$, então $g(u) \notin L^1(\Omega)$ para algum $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$. Em [38], Moser apresentou uma versão mais refinada desses resultados. De forma precisa, Moser mostrou que, para todo $\mu > 0$ e $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$, tem-se

$$e^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}} \in L^1(\Omega). \tag{1}$$

Além disso, vale a seguinte estimativa ótima

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,n}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_n \leq 1}} \int_{\Omega} e^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx \begin{cases} \leq C_n |\Omega|, & \text{se } \mu \leq \mu_n \\ = \infty, & \text{se } \mu > \mu_n \end{cases} \tag{2}$$

onde $\mu_n = n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$, $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω , ω_{n-1} a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Estimativas como em (2) são atualmente conhecidas como *desigualdades do tipo Trudinger-Moser* e há uma vasta literatura sobre elas e suas aplicações em Análise Geométrica, EDPs e Cálculo das Variações, veja por exemplo, [1–3, 10, 14, 16, 18–20, 24, 25, 31, 35].

Uma questão natural que surge é saber quando podemos garantir que existe um extremal para (2), isto é, uma função que realiza o supremo. Este problema está ligado ao estudo dos pontos críticos do funcional de Moser associado, que apresenta desafios devido à natureza não-compacta do problema e à criticalidade do expoente. A existência de uma função extremal para (2) no *caso subcrítico* $\mu < \mu_n$ é garantida por argumentos padrões e utilizando o Teorema da Convergência de Vitali. No entanto, no *caso crítico* $\mu = \mu_n$, a perda de compacidade decorrente da optimalidade do crescimento exponencial exerce forte influência, tornando o problema de existência de extremal mais delicado. Apesar disso, Carleson e Chang [6], considerando Ω como uma bola em $\mathbb{R}^n$, demonstraram a existência de uma função extremal para (2) mesmo no caso crítico $\mu = \mu_n$. Posteriormente, Struwe [49] demonstrou o mesmo resultado quando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ está suficientemente próxima de uma bola, e Flucher [24] estende o resultado de Struwe para domínios arbitrários $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Finalmente, Lin [32] resolveu completamente o problema extremal ao demonstrar a existência para qualquer domínio suave e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para uma discussão mais aprofundada sobre este tópico e suas generalizações, recomendamos [2, 14, 15, 18, 30, 52].

Variantes e melhorias da desigualdade de Trudinger-Moser foram estudadas ao longo do tempo. Sejam B a bola unitária de $\mathbb{R}^n$, $0 \leq \beta < 1$ e $w_0(r) = (-\log r)^{\beta(n-1)}$. É denotado por $W_{0,\text{rad}}^{1,n}(B, w_0)$ o Espaço de Sobolev com peso, definido como o fecho das funções $C_{0,\text{rad}}^\infty(B)$ com respeito à norma

$$\|u\|_{w_0} = \left(\int_B |\nabla u|^n w_0 dx \right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Recentemente, Calanchi e Ruf [4, 5] investigaram como a introdução de pesos na norma do espaço de Sobolev pode influenciar a constante crítica da desigualdade de Trudinger-Moser. Especificamente, ao modificar o espaço de funções, os autores obtiveram uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser clássica no espaço $W_{0,\text{rad}}^{1,n}(B, w_0)$. Mais precisamente, vale o seguinte

- (a) Para todo $u \in W_{0,\text{rad}}^{1,n}(B, w_0)$ e $\gamma \leq \gamma_{\beta,n} := \frac{n}{(n-1)(1-\beta)}$ tem-se que $e^{|u|^\gamma} \in L^1(B)$;
- (b)

$$\sup_{\substack{u \in W_{0,\text{rad}}^{1,n}(B, w_0) \\ \|u\|_{w_0} \leq 1}} \int_B e^{\mu|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}} dx < \infty \iff \mu \leq \mu_\beta := n[\omega_{\frac{n-1}{n}}(1-\beta)]^{\frac{1}{1-\beta}}. \quad (3)$$

Calanchi e Ruf [4] mostram a existência de maximizante para (3) no caso subcrítico, $\mu < \mu_\beta$, quando $n = 2$.

No caso crítico, a atingibilidade é mais delicada devido à perda de compacidade. No entanto, quando $\beta > 0$ é suficientemente pequeno, os trabalhos [40, 46, 47] demonstram que é possível garantir a atingibilidade de (3) no caso crítico, $\mu = \mu_\beta$.

Outra variação da Desigualdade de Trudinger–Moser foi proposta por Adimurthi e Druet [2] no caso bidimensional, e posteriormente generalizada por Yang [55] para dimensão $n \geq 3$. De forma precisa, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um domínio limitado e suave. Então, para todo $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ com $\|\nabla u\|_n \leq 1$, vale

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,n}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_n \leq 1}} \int_\Omega e^{\mu_n(1+\nu\|u\|_n^n)^{\frac{1}{n-1}}|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx < \infty, \quad (4)$$

com

$$0 \leq \nu < \inf_{u \in W_0^{1,n}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_n^n}{\|u\|_n^n}.$$

No caso $n = 2$, a desigualdade (4) é precisamente o resultado de Adimurthi e Druet com a constante crítica $\mu_2 = 4\pi$. Yang [54, 55] também mostrou que a desigualdade (4) admite extremal. Em um trabalho recente, Nguyen [39] mostrou que

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,n}(\Omega) \\ H_\nu(u) \leq 1}} \int_\Omega e^{\mu_n|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx < \infty, \quad (5)$$

onde $H_\nu(u) = (\|\nabla u\|_n^n - \nu\|u\|_n^n)^{\frac{1}{n}}$, e além disso, (5) é atingido. Note que, se $\|\nabla u\|_n \leq 1$, tomando $w = u(1 + \nu\|u\|_n^n)^{\frac{1}{n}}$, então $H_\nu(w) \leq 1$, e é possível obter a desigualdade (4) a partir de (5).

Para Ω um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^2$, consideremos o funcional de Moser $I : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \int_\Omega e^{u^2} dx.$$

Uma questão intrigante que atraiu a atenção de vários autores, veja [11, 20, 34, 35, 49], é a busca por pontos críticos do funcional I sob restrições, por exemplo

$$M_\mu = \{u \in H_0^1(\Omega) ; \|\nabla u\|_2^2 = \mu\}, \quad \mu > 0. \quad (6)$$

Devido à existência de funções extremais para a desigualdade de Trudinger–Moser, para todo $\mu \leq \mu_2 = 4\pi$, o funcional I admite um ponto crítico, que é um máximo global restrito a M_μ . A existência de pontos críticos de $I|_{M_\mu}$ no regime supercrítico, isto é, para $\mu > 4\pi$, torna-se ainda mais desafiadora. Monahan [37] apresentou evidências numéricas sugerindo que, quando $\Omega = B_1(0)$, existe $\mu^\sharp > 4\pi$ tal que o funcional $I|_{M_\mu}$ admite um ponto de máximo local.

Defina $I_\mu : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$I_\mu(u) = \int_\Omega e^{\mu u^2} dx.$$

Fazendo $v = \sqrt{\mu}u$, tem-se $\|\nabla u\|_2^2 = 1$ se, e só se, $\|\nabla v\|_2^2 = \mu$ e vale que $I_\mu(u) = I(v)$. Dessa relação é possível notar que a existência de pontos críticos para $I|_{M_\mu}$ está ligada a existência de pontos críticos para $I_\mu|_\Sigma$, onde $\Sigma = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \|\nabla u\|_2^2 = 1\}$.

Struwe [49] mostrou que existe $\mu^\sharp > 4\pi$ tal que o funcional I_μ admite um ponto crítico (máximo local) quando $\mu \in (4\pi, \mu^\sharp)$ restrito a Σ . Embora a limitação uniforme da desigualdade de Moser-Trudinger não seja válida no regime supercrítico, ainda é possível obter pontos críticos do funcional de Moser sob restrição.

A existência de pontos críticos para os funcionais do tipo Trudinger-Moser em contextos supercríticos é um tema de estudo que têm despertado crescente interesse, especialmente devido aos desafios analíticos envolvidos. Para mais detalhes, recomendamos os resultados presentes em [2, 16, 20, 41], onde diferentes estratégias são empregadas para lidar com a perda de compacidade causada pelo crescimento além do crítico.

Nesse trabalho iremos investigar a existência de pontos críticos em diferentes situações para funcionais do tipo Trudinger-Moser.

No Capítulo 1, estendemos o resultado de Struwe [49] para o espaço de Sobolev radial $W_{0,\text{rad}}^{1,2}(B, w_0)$. Mais precisamente, estudamos a existência de pontos críticos para o funcional $I_\mu : W_{0,\text{rad}}^{1,2}(B, w_0) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_\mu(u) = \int_B e^{\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx,$$

sob a restrição

$$\Sigma = \{u \in W_{0,\text{rad}}^{1,2}(B, w_0); \|u\|_{w_0}^2 = 1\}.$$

Como resultado, mostramos que existe $\beta^* \in (0, 1)$ tal que, para todo $\beta \in (0, \beta^*)$, existe $\mu^\sharp > \mu_\beta$ para o qual o funcional I_μ admite um maximizante local u_μ em Σ , para todo $\mu \in (0, \mu^\sharp)$. Note que por (3) a constante μ_β é ótima, sendo assim estamos garantindo a existência de pontos críticos além da constante crítica.

No Capítulo 2, investigamos um Espaço de Sobolev em dimensão fracionária com peso do tipo logarítmico, denotado por $X_{1,w_0}^{1,p} = X_{1,w_0}^{1,p}(\alpha, \theta)$ que definiremos a seguir. Seja $AC_1(0, 1)$ o conjunto das funções localmente absolutamente contínuas $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\lim_{r \rightarrow 1} u(r) = 0$. Para $q \geq 1$ e $\theta \geq 0$, denotamos por L_θ^q o espaço das funções mensuráveis $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\|u\|_{L_\theta^p} = \begin{cases} \left(\int_0^1 |u(r)|^p d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{0 < r < 1} |u(r)| < \infty, & \text{se } p = \infty \end{cases}, \quad (7)$$

onde $d\lambda_\theta$ é a medida “fracionária” definida por

$$d\lambda_\theta = \omega_\theta r^\theta dr, \quad \text{com} \quad \omega_\theta = \frac{2\pi^{\frac{\theta+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\theta+1}{2}\right)}.$$

Para $u \in AC_1(0, 1)$ definimos

$$\|u\|_{X_{w_0}} = \left(\int_0^1 |u'|^p (-\log r)^{\beta(p-1)} d\lambda_\alpha \right)^{1/p}.$$

O espaço $X_{1,w_0}^{1,p}$ é definido por

$$X_{1,w_0}^{1,p} = \overline{\{u \in AC_1(0, 1); \quad \|u\|_{X_{w_0}} < \infty\}},$$

onde o fecho é tomado com respeito à norma $\|\cdot\|_{X_{w_0}}$.

Uma vez que estamos interessado no crescimento ótimo do tipo exponencial, de agora em diante, iremos assumir a condição $\alpha = p - 1$ a qual é conhecida na literatura como condição de Trudinger-Moser nesse cenário, veja [19, 53]. O funcional de Moser correspondente $I_\mu : X_{w_0}^{1,p} \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$I_\mu(u) = \int_0^1 e^{\mu|u|^{\frac{p}{(p-1)(1-\beta)}}} d\lambda_\theta.$$

Nosso principal resultado estabelece que existe $\beta^* \in (0, 1)$ tal que, para todo $\beta \in (0, \beta^*)$, existe $\mu^\sharp > \mu_{\alpha,\theta,\beta} = (\theta + 1)[\omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}(1 - \beta)]^{\frac{1}{1-\beta}}$ para o qual o funcional I_μ admite um maximizante local u_μ em $\Sigma = \{u \in X_{1,w_0}^{1,p} : \|u\|_{X_{w_0}} = 1\}$, para todo $\mu \in (0, \mu^\sharp)$. Note que, como provado em [53], $\mu_{\alpha,\theta,\beta}$ é ótima para a desigualdade do tipo Trudinger-Moser logarítmica

nesse contexto. Sendo assim, estamos garantindo a existência de pontos críticos além da constante crítica.

No Capítulo 3, investigaremos a existência de pontos críticos para o funcional de Moser no espaço de dimensão fracionária $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ dado por

$$X_1^{1,p}(\alpha, \theta) = \overline{\{u \in AC_1(0, 1); \|u'\|_{L_\alpha^p} < \infty\}}$$

no qual o fecho é tomado com respeito à norma

$$\|u\|_X = \|u'\|_{L_\alpha^p}.$$

Observe que, sob a condição de Trudinger-Moser $\alpha = p - 1$ e $\theta \geq 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L_\theta^p} \leq C \|u'\|_{L_\alpha^p}, \quad \text{para todo } u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta).$$

Sendo assim, podemos definir

$$\lambda_{\alpha, \theta} = \inf_{u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \setminus \{0\}} \frac{\|u'\|_{L_\alpha^p}}{\|u\|_{L_\theta^p}}.$$

Para mais detalhes sobre esses espaços recomendamos [8, 15, 16, 19, 42]. Investigamos a existência de pontos críticos para o funcional $I_\mu : X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \rightarrow \mathbb{R}$

$$I_\mu(u) = \int_0^1 e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta,$$

sob a restrição do tipo Tintarev [50]

$$\Sigma_\nu = \left\{ u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta); \left(\|u'\|_{L_\alpha^p}^p - \nu \|u\|_{L_\theta^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1 \right\},$$

no qual $0 \leq \nu < \lambda_{\alpha, \theta}$.

No Capítulo 4, estudamos a existência de soluções fracas positivas em $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ para o problema

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(u), & \text{em } (0, 1) \\ u > 0, & \text{em } (0, 1) \\ u(1) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

onde $\lambda > 0$, e para $p > 1$, $\alpha, \theta \geq 0$

$$Lu = -r^{-\theta} (r^\alpha |u'|^{p-2} u')' \quad (9)$$

e a não linearidade de $f(t)$ considerada é côncava para valores de t próximos de zero e convexa para t suficientemente grandes.

Observamos que a classe de operadores (9) é importante por si só e tem atraído a atenção de pesquisadores devido à sua aplicação no estudo de sistemas microeletromecânicos (MEMS) [22, 23], bem como por sua conexão com operadores clássicos, como o de Laplace, o p -laplaciano e o k -hessiano [15, 16, 18, 19]. Uma outra razão para estudarmos o problema (8) é sua conexão com a existência de pontos críticos para funcional de Moser sob restrições. De fato, sejam $I : X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \int_0^1 e^{|u|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta \quad \text{e} \quad M_\mu = \{u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta); \|u\|_X^p = \mu\}.$$

Utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, um ponto crítico positivo de I restrito a M_μ deve satisfazer

$$\begin{cases} Lu = \lambda |u|^{\frac{1}{p-1}} e^{|u|^{p'}} r^\theta, & \text{em } (0, 1) \\ u > 0, & \text{em } (0, 1) \\ u(1) = 0 \\ \|u\|_X^p = \mu, \end{cases} \quad (10)$$

onde $p' = \frac{p}{p-1}$ e $\lambda = \lambda(\alpha, \theta, p) = \frac{\omega_\theta}{\omega_\alpha(p-1)} \tau$; com $\tau > 0$. Assim, a existência de pontos críticos de $I|_{M_\mu}$ está ligada à existência de soluções para o problema (8). Mostraremos que existe um λ^* para o qual o problema (8) admite solução para $0 < \lambda < \lambda^*$. Além disso, (8) não possui solução para $\lambda > \lambda^*$.

Capítulo 1

Maximizante local para o funcional de Moser supercrítico

Este capítulo dedica-se à extensão de parte dos resultados do trabalho de Struwe [49]. Nosso principal resultado estabelece a existência de maximizantes locais para o funcional de Moser com peso logarítmico. Para isso, iremos nos apoiar na atingibilidade do supremo no caso crítico, conforme formulado em [40, 46].

1.1 Desigualdade de Trudinger-Moser

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) um domínio limitado e suave. O espaço de Sobolev $W_0^{1,n}(\Omega)$ representa um caso crítico no contexto das imersões do tipo Sobolev. De fato, para $1 \leq p < n$, temos

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{para todo } 1 \leq q \leq p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Contudo, no caso limite $p = n$, essa fórmula não se aplica diretamente, pois o expoente p^* tende ao infinito quando $p \rightarrow n$. Nesse caso, apesar das inclusões

$$W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q < \infty.$$

não vale a imersão $W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Um exemplo clássico que mostra esse fenômeno é a função

$$u(x) = \log \left(\log \frac{e}{|x|} \right), \quad x \in B \setminus \{0\}$$

onde B é a bola unitária de $\mathbb{R}^n$. Pode-se verificar que $u \in W_0^{1,n}(B)$, mas $u \notin L^\infty(B)$.

O crescimento máximo (ótimo) admissível para uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para que $\varphi(u) \in L^1(\Omega)$ sempre que $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$, foi determinado por Hempel, Morris e Trudinger [28]. Para tornar isso preciso, necessitamos introduzir uma classe de espaços mais gerais do que os espaços de Lebesgue L^q , os espaços de Orlicz.

Dizemos que $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma Φ -função, se satisfaz as propriedades:

1. ϕ é convexa;
2. ϕ é contínua a esquerda;
3. $\phi(0) = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0^+} \phi(r) = 0$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = \infty$.

Definição 1.1. *Seja (A, M, μ) um espaço de medida σ -finito e completo. Dizemos que uma função real $\phi : A \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma Φ -função generalizada em (A, M, μ) , quando*

1. $\phi(y, \cdot)$ é uma Φ -função para cada $y \in A$;
2. $y \mapsto \phi(y, r)$ é mensurável para todo $r \geq 0$.

Se uma função é Φ -função generalizada em (A, M, μ) , escrevemos $\phi \in \Phi(A, \mu)$.

Denotaremos por $L^0(A, \mu)$ o espaço das funções μ -mensuráveis $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 1.2. *Sejam $\phi \in \Phi(A, \mu)$ e ρ_ϕ dado por*

$$\rho_\phi(f) = \int_A \phi(y, |f(y)|) d\mu(y), \quad \forall f \in L^0(A, \mu).$$

O espaço de Orlicz generalizado, denotado por $L^\phi = (L^\phi(A, \mu), \|\cdot\|_\phi)$, é definido por

$$\begin{aligned} L^\phi(A, \mu) &:= \{f \in L^0(A, \mu); \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho_\phi(\lambda f) = 0\} \\ &= \{f \in L^0(A, \mu); \rho_\phi(\lambda f) < \infty \text{ para algum } \lambda > 0\} \end{aligned}$$

e sua norma

$$\|f\|_{L^\phi} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_\phi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}.$$

Lema 1.1. *Se $\phi \in \Phi(A, \mu)$, então o espaço de Orlicz generalizado L^ϕ é um espaço de Banach, veja [21, Teorema 2.3.13].*

Por fim, se ϕ e ψ são suas Φ -funções, dizemos que ψ cresce estritamente mais rápido do que ϕ se $\phi(t)/\psi(\eta t) \rightarrow 0$ se $t \rightarrow \infty$, para todo $\eta > 0$. Com essa ideia, a questão é a

seguinte: Qual é o maior crescimento admissível para uma função Φ -função $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que $W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^\varphi(\Omega, d\mu)$ continuamente? A resposta para essa pergunta contou com a participação de diferentes autores. Inicialmente, de forma independente, Yudovich Pohozaev [45], Trudinger [51] e [56] mostraram que $e^{|u|^{\frac{n}{n-1}}} - 1$ pertence a $L^1(\Omega)$, para toda $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$. Além disso, existe $\mu > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} e^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx \leq c, \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,n}(\Omega) \text{ com } \|\nabla u\|_n \leq 1.$$

Por fim, Hempel, Morris e Trudinger [28] mostraram que $\phi(t) = e^{|t|^{\frac{n}{n-1}}} - 1$ é o maior crescimento admissível. Além disso, essa otimalidade causa perda de compacidade no mergulho contínuo.

Posteriormente, utilizando técnicas de simetrização de Schwarz, Moser [38] foi capaz de reduzir a questão a um problema unidimensional e obteve uma versão aprimorada desses resultados. Precisamente, ele mostrou que para qualquer $\mu > 0$ e $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$, temos

$$e^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}} - 1 \in L^1(\Omega). \quad (1.1)$$

Além disso, obteve a seguinte estimativa ótima

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,n}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_n \leq 1}} \int_{\Omega} e^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx \begin{cases} \leq C_n |\Omega|, & \text{se } \mu \leq \mu_n \\ = \infty, & \text{se } \mu > \mu_n \end{cases}, \quad (1.2)$$

onde $\mu_n = n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$, sendo $|\Omega|$ a medida de Lebesgue do domínio Ω e ω_{n-1} a medida da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Desigualdades semelhantes a (1.2) são atualmente conhecidas como desigualdades do tipo Trudinger-Moser, veja por exemplo [1–3, 10, 14, 16, 18–20, 24, 25, 31, 33, 35, 57] e referências destes.

No *caso subcrítico* $\mu < \mu_n$, a existência de uma função extremal (1.2) pode ser demonstrada por meio de argumentos clássicos, recorrendo a técnicas padrão de análise funcional e ao teorema da convergência de Vitali. Por outro lado, no *caso crítico* $\mu = \mu_n$, a situação torna-se mais delicada, principalmente devido à perda de compacidade provocada pelo caráter ótimo do crescimento exponencial na desigualdade de Trudinger-Moser. Apesar dessas dificuldades, Carleson e Chang [6] demonstraram a existência de uma função extremal para (1.2) no caso particular em que o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma bola.

Posteriormente, Struwe [49] estendeu esse resultado ao provar a existência de extremais para domínios bidimensionais suficientemente próximos (deformações) de uma bola. Em

seguida, Flucher [24] generalizou o resultado de Struwe ao estabelecer a atingibilidade da desigualdade para domínios arbitrários em $\mathbb{R}^2$. Finalmente, Lin [32] completou o quadro geral ao demonstrar a existência de funções extremais em qualquer domínio limitado e suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$.

A existência de funções extremais para (1.2) está estreitamente relacionado com a existência de pontos críticos para o funcional de Moser $I : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \int_{\Omega} e^{u^2} dx$$

submetido a uma restrição da forma

$$M_{\mu} = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \|\nabla u\|_2^2 = \mu\}, \quad \mu > 0.$$

A análise dos pontos críticos desse funcional I constitui um tema de pesquisa interessante. Note que $u = 0$ é um ponto crítico, mínimo global, para I em $W_0^{1,2}(B)$, mas o funcional não admite um maximizante global nesse espaço. Porém, há a possibilidade de pontos críticos do tipo máximo (mínimo) local ou sela. Assim, é natural buscar pontos críticos para I restrito a M_{μ} o que conecta o tema com a existência de funções extremais para a desigualdade de Trudinger-Moser (1.2).

No caso $\mu \leq \mu_2 = 4\pi$, o funcional I restrito a M_{μ} admite um ponto crítico, que é um máximo global devido à atingibilidade da desigualdade de Trudinger-Moser. A existência de pontos críticos no caso supercrítico $\mu > 4\pi$ é intrigante. De fato, diversos autores têm se dedicado a esta questão. Monahan [37] forneceu evidências numéricas de que, quando $\Omega = B$ é a bola unitária, para algum $\mu^{\sharp} > 4\pi$, o funcional $I|_{M_{\mu}}$ possui um máximo local e um ponto crítico do tipo passo da montanha para todo $\mu \in (4\pi, \mu^{\sharp})$. Struwe [49] mostrou que existe um valor $\mu^{\sharp} > 4\pi$ tal que o funcional admite um maximizante local para todo $\mu \in (0, \mu^{\sharp})$, del Pino, Musso e Ruf [20] analisam a influência da topologia do domínio Ω na existência de pontos críticos. Malchiodi e Martinazzi [34] garantiram a existência de um valor $\mu^{\sharp}$ tal que há pelo menos dois pontos críticos $\mu \in (4\pi, \mu^{\sharp})$ e não há ponto crítico para $\mu > \mu^{\sharp}$. Para uma discussão mais aprofundada sobre o tema recomendamos [11, 12, 20, 34, 35, 49] e referências destes.

1.2 Funcional de Moser em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$

Nosso objetivo é provar a existência de pontos críticos, no caso supercrítico, para o funcional de Moser associado a uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser logarítmica estabelecida por Calanchi e Ruf [4, 5].

Sejam B a bola unitária de $\mathbb{R}^2$, $0 \leq \beta < 1$ e $w_0(r) = (-\log r)^\beta$. Denotamos por $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ o espaço de Sobolev com peso, definido como

$$H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0) = \overline{\left\{ u \in C_{0,\text{rad}}^\infty(B); \quad \left(\int_B |\nabla u|^2 w_0 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}}$$

onde o fecho é tomado com respeito a norma

$$\|u\|_{w_0} = \left(\int_B |\nabla u|^2 w_0 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Como observado por Calanchi e Ruf [4] a presença de pesos (radiais) adequados permite um aumento no crescimento máximo para integrabilidade quando se restringe a análise a funções radiais.

Recordamos que $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ é um espaço de Hilbert, com produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_B \nabla u \nabla v w_0 dx,$$

portanto é reflexivo. Calanchi e Ruf [4] obtiveram a seguinte estimativa pontual para todo $u \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$

$$|u(x)| \leq \frac{(-\log |x|)^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi(1-\beta)}} \|u\|_{w_0}, \quad x \in B. \quad (1.3)$$

Dessa forma, para qualquer $1 < q < \infty$ temos

$$\|u\|_{L^q(B)} = \left(\int_B |u(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq \frac{\|u\|_{w_0}}{\sqrt{2\pi(1-\beta)}} \left(\int_B (-\log |x|)^{\frac{q(1-\beta)}{2}} dx \right)^{1/q}.$$

Segue que,

$$\int_B (-\log |x|)^{\frac{q(1-\beta)}{2}} dx = 2\pi \int_0^1 (-\log r)^{\frac{q(1-\beta)}{2}} r dr,$$

fazendo $r = e^{-t}$, $t \in [0, \infty)$,

$$\int_0^1 (-\log r)^{\frac{q(1-\beta)}{2}} r dr = \int_0^\infty t^{\frac{q(1-\beta)}{2}} e^{-2t} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{q(1-\beta)}{2} + 1\right)}{2^{\frac{q(1-\beta)}{2} + 1}}.$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^q(B)} \leq C \|u\|_{w_0}, \quad 1 < q < \infty. \quad (1.4)$$

O que nos fornece o mergulho contínuo

$$H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0) \hookrightarrow L^q(B). \quad (1.5)$$

Como consequência de B. Opic e A. Kufner [42], veja Apêndice Teorema 1, o mergulho (1.5) é compacto.

Vamos definir o funcional de Moser em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$. Sejam $I_\mu : H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_\mu(u) = \int_B e^{\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \quad (1.6)$$

e Σ dado por

$$\Sigma = \{u \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0) : \|u\|_{w_0} = 1\}. \quad (1.7)$$

Conforme demonstrado por Calanchi e Ruf [4], para todo $u \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ e $\mu > 0$, tem-se

$$e^{\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} \in L^1(B).$$

E vale a seguinte desigualdade do tipo Trudinger-Moser

$$\sup_{\substack{u \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0) \\ \|u\|_{w_0} \leq 1}} \int_B e^{\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx < \infty \iff \mu \leq \mu_\beta := 2[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{1-\beta}}. \quad (1.8)$$

Com isso, o funcional (1.6) está bem definido. Assim como no caso clássico, a existência de pontos críticos para o funcional I_μ constitui uma questão de grande interesse. No caso crítico, isto é, quando $\mu = \mu_\beta$, Roy [46] e Nguyen [40] demonstraram que, para $\beta > 0$ suficientemente pequeno, o funcional I_{μ_β} , restrito ao conjunto Σ , admite um ponto crítico. No caso subcrítico, isto é, para $\mu < \mu_\beta$, a existência de pontos críticos de I_μ em Σ pode ser demonstrada com o auxílio do Teorema da Convergência de Vitali, como a seguir. Seja $(u_j) \subset \Sigma$ uma sequência que converge para o supremo em (1.8). Como $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ é um espaço reflexivo, podemos supor, sem perda de generalidade, que $u_j \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ e que $u_j(x) \rightarrow u_0(x)$ quase em todo ponto de B . Além disso, dado $p > 1$ suficientemente próximo de 1, temos $p\mu < \mu_\beta$. Pela desigualdade (1.8), segue que

$$\int_B e^{p\mu|u_j|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \leq \int_B e^{\mu_\beta|u_j|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx < \infty \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Assim, a sequência $(e^{\mu|u_j|^2})$ é uniformemente integrável, o Teorema da Convergência de Vitali, ver Apêndice, Teorema 4, garante que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_B e^{\mu|u_j|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx = \int_B e^{\mu|u_0|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx.$$

Enquanto esse argumento garante a existência de pontos críticos no regime subcrítico, e os resultados de Roy [46] e Nguyen [40] tratam do caso crítico, nosso objetivo neste capítulo é ir além, investigando a existência de pontos críticos do funcional I_μ também no regime supercrítico, isto é, para $\mu > \mu_\beta$, mantendo a restrição ao conjunto Σ .

Um resultado fundamental para obter a atingibilidade no caso crítico é o Lema de Concentração e Compacidade do tipo Lions, apresentado em [46].

Dizemos que uma sequência $(w_j) \subset H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ concentra em $x = 0$ se $\|w_j\|_{w_0} \leq 1$ e para todo $\delta \in (0, 1)$, tem-se

$$\int_{B \setminus B_\delta} |\nabla w_j|^2 w_0 \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

Lema 1.2 (Alternativa Concentração e Compacidade). *Seja (w_j) uma sequência em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ tal que $w_j \rightharpoonup w$ em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$. Então, ocorre uma das seguintes alternativas:*

i) $I_{\mu_\beta}(w_j) \rightarrow I_{\mu_\beta}(w)$; ou

ii) w_j concentra em $x = 0$.

Além disso, como visto em [46, Lema 9], temos a seguinte estimativa para o nível de concentração, se uma sequência w_j é concentrada na origem, então

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} I_{\mu_\beta}(w_j) \leq |B|(1 + e).$$

onde $|B| = \int_B 1 dx$.

1.3 Propriedades para o funcional de Moser com peso logarítmico

Lema 1.3. *Para $\mu > 0$, seja $I_\mu : H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por (1.6). Então, I_μ é Fréchet diferenciável em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ e $I'_\mu : H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0) \rightarrow (H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0))^*$ é localmente uniformemente contínua e limitada.*

Demonstração. Iremos aplicar o Teorema da Convergência de Vitali. Primeiro, veja que para $u, v \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$, com $\|v\|_{w_0} \leq 1$, e (s_j) qualquer sequência positiva tal que $s_j \rightarrow 0$, podemos escrever

$$I_\mu(u + s_j v) - I_\mu(u) = \frac{2\mu}{1 - \beta} \int_B \int_0^{s_j} v |u + tv|^{\frac{2\beta}{1-\beta}} (u + tv) e^{\mu|u+tv|^{\frac{2}{1-\beta}}} dt dx. \quad (1.9)$$

Para qualquer $j \in \mathbb{N}$, seja $f_j : B \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f_j(x) = \frac{1}{s_j} \int_0^{s_j} v|u + tv|^{\frac{2\beta}{1-\beta}} (u + tv) e^{\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dt$$

e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = uv|u|^{\frac{2\beta}{1-\beta}} e^{\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}}.$$

Afirmamos que (f_j) converge para f em $L^1(B)$. De fato, temos $f_j(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em B .

Utilizando (1.4), (1.8) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} & \int_B |v||u|^{\frac{2}{1-\beta}-1} e^{\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \\ & \leq \left(\int_B |u|^{\frac{4}{1-\beta}-2} e^{2\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left(\int_B |u|^{\frac{4}{1-\beta}-2} e^{2\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B (-\log r)^{(1-\beta)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde C depende somente de β e $\|v\|_{w_0}$. Por (1.10) obtemos que $f \in L^1(B)$. Para garantir a integrabilidade uniforme de (f_j) , é suficiente mostrar que é uma sequência limitada em $L^q(B)$ para algum $q > 1$. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |f_j(x)| & \leq \frac{1}{s_j} \int_0^{s_j} |v||u + tv|^{\frac{2}{1-\beta}-1} e^{\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dt \\ & \leq \frac{1}{s_j} s_j^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{s_j} |v|^q (|u + tv|^{\frac{q2}{1-\beta}-q} e^{q\mu|u+tv|^{\frac{2}{1-\beta}}}) dt \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

e assim,

$$|f_j(x)|^q \leq \frac{1}{s_j} \int_0^{s_j} |v|^q |u + tv|^{\frac{q2}{1-\beta}-q} e^{q\mu|u+tv|^{\frac{2}{1-\beta}}} dt.$$

Veja que, para $\sigma, \theta > 0$, temos

$$\tau^\sigma e^{\mu\tau^\theta} \leq ce^{c\tau^\theta}, \tau \geq 0$$

para algum $c > 0$ dependendo somente de σ, θ e μ . Então, para algum $t \in [0, s_j]$ e algum $c > 0$ dependendo somente de μ e β , temos

$$\begin{aligned} |u + tv|^{\frac{2}{1-\beta}-1} e^{\mu|u+tv|^{\frac{2}{1-\beta}}} & \leq ce^{c|u+tv|^{\frac{2}{1-\beta}}} \\ & \leq ce^{c_1|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} e^{c_1 s_j^{\frac{2}{1-\beta}} |v|^{\frac{2}{1-\beta}}}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

para algum $c_1 > 0$ dependendo somente de μ e β . Acima utilizamos que a função $g(x) = x^p$ é convexa, daí

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{g(a) + g(b)}{2}.$$

Para $q > 1$, temos $3qc_1s_j^{\frac{2}{1-\beta}} \leq \mu_\beta$, para j suficientemente grande. Portanto, utilizando a desigualdade de Hölder, (1.8), (1.4) e (1.11), obtemos

$$\begin{aligned} \int_B |f_j|^q dx &\leq \frac{c}{s_j} \int_0^{s_j} \int_B |v|^q e^{qc_1|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} e^{qc_1s_j^{\frac{2}{1-\beta}}|v|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx dt \\ &\leq c \|v\|_{L^{3q}}^q \left(\int_B e^{3qc_1|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_B e^{3qc_1s_j^{\frac{2}{1-\beta}}|v|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq C \left(\int_B e^{3qc_1|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde utilizamos $\|v\|_{w_0} \leq 1$. Utilizando o Teorema da Convergência de Vitali obtemos que $f_j \rightarrow f$ em $L^1(B)$. Dividindo (1.9) por s_j e fazendo $j \rightarrow \infty$, obtemos a derivada de Gateaux

$$I'_\mu(u) \cdot v = \frac{2\mu}{1-\beta} \int_B v |u|^{\frac{2\beta}{1-\beta}} u e^{\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx.$$

Resta provar que $I'_\mu : H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0) \rightarrow (H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0))^*$ é localmente uniformemente contínua e limitada. Primeiramente, iremos provar a limitação local de I'_μ . Sejam $u \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ fixado arbitrariamente e $U(u; \varepsilon) = \{w \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0) : \|w - u\|_{w_0} < \varepsilon\}$, onde $\varepsilon > 0$ iremos escolher posteriormente. Para $w \in U(u; \varepsilon)$, definamos $h = (w - u)/\varepsilon$. Utilizando (1.4) em conjunto com a desigualdade de Hölder e argumentando novamente como em (1.11) temos

$$\begin{aligned} |I'_\mu(w) \cdot v| &\leq \frac{2\mu}{1-\beta} \int_B |v| e^{c\mu|u+\varepsilon h|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \\ &\leq \frac{2\mu}{1-\beta} \int_B |v| e^{c_1\mu(|u|^{\frac{2}{1-\beta}} + |\varepsilon h|^{\frac{2}{1-\beta}})} dx \\ &\leq \frac{2\mu}{1-\beta} \|v\|_{L^2} \left(\int_B e^{4c_1\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_B e^{\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}} 4c_1\mu|h|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq \frac{2\mu C}{1-\beta} \|v\|_{w_0} \left(\int_B e^{4c_1\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_B e^{4\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}} c_1\mu|h|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

para qualquer $v \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$. Assim, iremos escolher $\varepsilon > 0$ satisfazendo $4\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}} c_1\mu \leq \mu_\beta$, então pela desigualdade (1.8), temos

$$\begin{aligned} \|I'_\mu(w)\|_* &= \sup_{\|v\|_{w_0}=1} |I'_\mu(w) \cdot v| \\ &\leq C \left(\int_B e^{4c_1\mu|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

para todo $w \in U(u; \varepsilon)$. Assim, I'_μ é localmente limitada. Para qualquer $v \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$

com $\|v\|_{w_0} \leq 1$, como em (1.9) obtemos

$$\begin{aligned} |I'_\mu(u + \varepsilon h) \cdot v - I'_\mu(u) \cdot v| &= \left| \frac{2\mu}{1-\beta} \int_B v \int_0^\varepsilon \frac{d}{dt} \left(|u + th|^{\frac{2\beta}{1-\beta}} (u + th) e^{\mu|u+th|^{\frac{2}{1-\beta}}} \right) dt dx \right| \\ &\leq C \int_0^\varepsilon \int_B |v||h| |u + th|^{\frac{2\beta}{1-\beta}} e^{\mu|u+th|^{\frac{2}{1-\beta}}} dt dx \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$+ C \int_0^\varepsilon \int_B |v||h| |u + th|^{\frac{2+2\beta}{1-\beta}} e^{\mu|u+th|^{\frac{2}{1-\beta}}} dt dx, \quad (1.14)$$

onde C depende somente de μ e β . Vamos estimar cada uma das integrais acima. De modo similar a (1.11) e (1.12), para todo $t \in [0, \varepsilon]$ obtemos

$$\begin{aligned} &\int_B |v||h| |u + th|^{\frac{2\beta}{1-\beta}} e^{\mu|u+th|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \\ &\leq c \int_B |v||h| e^{c_1|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} e^{c_1\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}}|h|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \\ &\leq C \|v\|_{L^4} \|h\|_{w_0} \left(\int_B e^{4c_1|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_B e^{4c_1\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}}|h|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq C \left(\int_B e^{4c_1|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

contanto que $4c_1\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}} \leq \mu_\beta$.

Analogamente,

$$\begin{aligned} &\int_B |v||h| |u + th|^{\frac{2}{1-\beta}-2} e^{\mu|u+th|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \\ &\leq c \int_B |v||h| e^{c_1|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} e^{c_1\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}}|h|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \\ &\leq C \|v\|_{L^4} \|h\|_{w_0} \left(\int_B e^{4c_1|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_B e^{4c_1\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}}|h|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq C \left(\int_B e^{4c_1|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Combinado (1.13), (1.15) e (1.16), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\|I'_\mu(u + \varepsilon h) - I'_\mu(u)\|_* \leq C\varepsilon,$$

para alguma constante $C > 0$ dependendo somente de β, μ e u . Assim, I'_μ é localmente uniformemente contínua. Finalmente, a continuidade da derivada de Gateaux I'_μ garante que I_μ é continuamente Fréchet diferenciável. $\square$

A seguir, iremos provar uma estimativa L^∞ para soluções de um problema de Dirichlet, que envolve uma não linearidade do tipo exponencial.

Lema 1.4. Se $u \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ solução fraca de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w_0 \nabla u) = \lambda |u|^{\frac{2\beta}{1-\beta}} u e^{\mu_\beta |u|^{\frac{2}{1-\beta}}}, & \text{em } B, \\ u = 0, & \text{em } \partial B \end{cases} \quad (1.17)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $u \in L^\infty(B)$.

Demonstração. Utilizando (1.8) e (1.4), para todo $p > 1$ a desigualdade de Hölder nos dá

$$\int_B |u|^{\frac{2p\beta}{1-\beta}} |u|^p e^{p\mu_\beta |u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \leq \left(\int_B |u|^{2p(\frac{2\beta}{1-\beta}+1)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B e^{2p\mu_\beta |u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.18)$$

Para $k > 0$, considere a função $T_k(s) = (s+k)\chi_{(-\infty, -k]} + (s-k)\chi_{[k, \infty)}$ e seja $B_k = \{x \in B : |u| \geq k\}$, onde χ_A é a função característica do conjunto A . De (1.17), obtemos

$$\int_B \nabla u \nabla T_k(u) w_0 dx = \lambda \int_B |u|^{\frac{2\beta}{1-\beta}} u e^{\mu_\beta |u|^{\frac{2}{1-\beta}}} T_k(u) dx. \quad (1.19)$$

Para $r = \theta\eta$ e $\eta = \frac{3}{\theta-1}$ com $\theta > 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lambda \int_B |u|^{\frac{2\beta}{1-\beta}} u e^{\mu_\beta |u|^{\frac{2}{1-\beta}}} T_k(u) dx &\leq |\lambda| \left(\int_B |u|^{\theta \frac{1+\beta}{1-\beta}} e^{\theta \mu |u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\int_B |T_k(u)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} |B_k|^{\frac{r-\eta-1}{r}} \\ &\leq C \|T_k(u)\|_{L^r} |B_k|^{\frac{r-\eta-1}{r}}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Por outro lado, utilizando (1.4) obtemos

$$\int_B \nabla u \nabla T_k(u) w_0 dx \geq C \|T_k(u)\|_{w_0}^2 \geq C \|T_k(u)\|_{L^r}^2. \quad (1.21)$$

Por (1.19), (1.20) e (1.21) nos temos

$$\int_B |T_k(u)|^r dx \leq C |B_k|^2. \quad (1.22)$$

Note que $|T_k(s)| = (|s| - k)(1 - \chi_{[-k, k]}(s))$ se $s \in \mathbb{R}$ e $B_h \subset B_k$ para $0 < k < h$. Então,

$$\int_B |T_k(u)|^r dx = \int_{B_k} (|u| - k)^r dx \geq \int_{B_h} (|u| - k)^r dx \geq (h - k)^r |B_h|. \quad (1.23)$$

Seja $\psi(k) = |B_k|$ com $k \geq 0$, naturalmente $\psi(0) = |B|$. De (1.22) e (1.23) obtemos

$$\psi(h) \leq C(h - k)^{-r} \psi(k)^2, \quad 0 < k < h. \quad (1.24)$$

Sejam $d = 4C^{\frac{1}{r}}|B|^{\frac{1}{r}}$ e k_m a sequência definida por $k_0 = 0$ e $k_m = k_{m-1} + \frac{d}{2^m}$, para $m = 1, 2, \dots$. Por indução em (1.24), obtemos

$$\psi(k_m) \leq 2^{-mr} \psi(0) \rightarrow 0, \quad \text{as } m \rightarrow \infty.$$

De fato, para $m = 1$ temos

$$\psi(k_1) \leq C(k_1 - k_0)^{-r} \psi(0)^{p'} = C\left(\frac{2}{d}\right)^r \psi(0)^2 = 2^{-s} \psi(0).$$

Suponha que a desigualdade seja verdadeira para m . Então,

$$\begin{aligned} \psi(k_{m+1}) &\leq C(k_{m+1} - k_m)^{-r} \psi(k_m)^2 \\ &= C \frac{2^{(m+1)r}}{d^r} \psi(k_m)^2 \\ &\leq C \frac{2^{(m+1)r}}{(2^2 C^{\frac{1}{r}} |B|^{\frac{1}{r}})^r} (2^{-mr})^2 \psi(0)^2 \\ &= 2^{(m+1)s(1-p)} \psi(0). \end{aligned}$$

Como $k_m \rightarrow d$ e ψ é não crescente, obtemos $\psi(d) = 0$. Consequentemente, $\|u\|_{L^\infty} \leq d$. □

1.4 Ponto crítico além da constante crítica com peso logarítmico

Nesta seção, provaremos a existência de um maximizante local para o funcional I_μ , além da constante crítica μ_β . Para isso precisamos estender alguns resultados presentes em [49] para o funcional de Moser com peso logaritmo.

Lembremos que existe $\beta^* \in (0, 1)$ tal que

$$A_{\mu_\beta}^\# := \sup_{u \in \Sigma} I_{\mu_\beta}(u) > |B|(e + 1), \quad (1.25)$$

para qualquer $\beta \in (0, \beta^*)$, veja [46, pág 196] ou [47, pág 5210].

Lema 1.5. *Para qualquer $\beta \in (0, \beta^*)$, o conjunto $K_{\mu_\beta} = \{u \in \Sigma : I_{\mu_\beta}(u) = A_{\mu_\beta}^\#\}$ é compacto.*

Demonstração. Seja (u_j) uma sequência em K_{μ_β} . Sem perda de generalidade, iremos supor que $u_j \rightharpoonup u$ em $H_{0,rad}^1(B, w_0)$. Como (u_j) é uma sequência maximizante para $A_{\mu_\beta}^\#$, de acordo com Lema de concentração e compacidade de Lions Lema 1.2, uma das alternativas deve ocorrer:

1. $u \neq 0$ e $I_{\mu_\beta}(u) = A_{\mu_\beta}^\#$, ou
2. $u \equiv 0$ e $\limsup_{m \rightarrow \infty} I_{\mu_\beta}(u_j) \leq |B|(1 + e)$.

Contudo, a segunda alternativa contradiz (1.25) pois $I_{\mu_\beta}(u_j) = A_{\mu_\beta}^\#$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, $u \neq 0$ e $I_{\mu_\beta}(u) = A_{\mu_\beta}^\#$. Da semicontinuidade inferior da norma, devemos ter

$$0 < \|u\|_{w_0} \leq \liminf \|u_j\|_{w_0} = 1.$$

Portanto,

$$A_{\mu_\beta}^\# = I_{\mu_\beta}(u) \leq I_{\mu_\beta}(u/\|u\|_{w_0}) \leq A_{\mu_\beta}^\#.$$

Segue que

$$\int_B \left(e^{\mu_\beta \left(\frac{|u|}{\|u\|_{w_0}} \right)^{\frac{2}{1-\beta}}} - e^{\mu_\beta |u|^{\frac{2}{1-\beta}}} \right) dx = 0.$$

Como $0 < \|u\|_{w_0} \leq 1$, se $\|u\|_{w_0} < 1$, então $|u| < |u|/\|u\|_{w_0}$. Consequentemente o integrando acima é estritamente positivo e a integral nunca se anula, com isso $\|u\|_{w_0} = 1$. Logo, devemos ter que $u \in K_{\mu_\beta}$. Como $u_j \rightarrow u$ em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ e $\|u_j\|_{w_0} = \|u\|_{w_0}$ e sendo o $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ uniformemente convexo. Segue que $u_j \rightarrow u$ forte em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$. $\square$

Para cada $\varepsilon > 0$, vamos definir $N_\varepsilon = \{u \in \Sigma : \text{dist}(u, K_{\mu_\beta}) < \varepsilon\}$, onde $\text{dist}(u, K_{\mu_\beta}) = \inf\{\|u - v\|_{w_0} : v \in K_{\mu_\beta}\}$. Como K_{μ_β} é compacto, a família $(N_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ constitui uma base de vizinhança para K_{μ_β} em Σ , isto é

1. $K_{\mu_\beta} \subset N_\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$;
2. Se U é um aberto em Σ tal que $K_{\mu_\beta} \subset U$, então $N_\varepsilon \subset U$ para algum $\varepsilon > 0$.

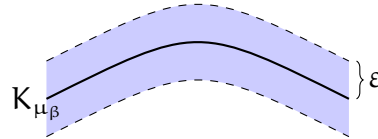


Figura 1.1: Representação do conjunto N_ε .

Note que

$$\sup_{u \in N_\varepsilon} I_{\mu_\beta}(u) \leq \sup_{u \in \Sigma} I_{\mu_\beta}(u) = A_{\mu_\beta}^\#, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Além disso, temos que $A_{\mu_\beta}^\#$ é atingido, para todo $\beta \in (0, \beta^*)$ (ver Apêndice, Teorema 6).

Assim, $K_{\mu_\beta} \neq \emptyset$ e como $K_{\mu_\beta} \subset N_\varepsilon$, temos

$$A_{\mu_\beta}^\# = \sup_{u \in N_\varepsilon} I_{\mu_\beta}(u), \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (1.26)$$

Lema 1.6. *Suponha que $\beta \in (0, \beta^*)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$*

$$\sup_{u \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_{\mu_\beta}(u) < A_{\mu_\beta}^\# = \sup_{u \in N_\varepsilon} I_{\mu_\beta}(u). \quad (1.27)$$

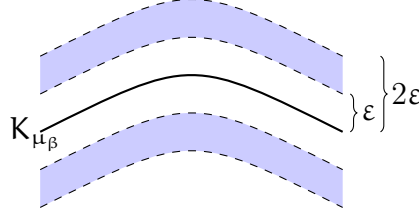


Figura 1.2: Representação do conjunto $N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon$.

Demonstração. Denotemos por

$$\gamma_\varepsilon = \sup_{u \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_{\mu_\beta}(u).$$

É claro que temos $\gamma_\varepsilon \leq A_{\mu_\beta}^\#$, para todo $\varepsilon > 0$. Por contradição, suponha que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\gamma_{\varepsilon_0} = A_{\mu_\beta}^\#$. Seja $(u_j) \subset N_{2\varepsilon_0} \setminus N_{\varepsilon_0}$ tal que $I_{\mu_\beta}(u_j) \rightarrow A_{\mu_\beta}^\#$ e $u_j \rightharpoonup u$ em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$, quando $j \rightarrow \infty$. Pelo mesmo argumento do Lema 1.5, utilizando (1.25) e o Lema 1.2, temos

$$\|u\|_{w_0} = 1 \text{ e } I_{\mu_\beta}(u) = A_{\mu_\beta}^\#. \quad (1.28)$$

Novamente como $u_j \rightharpoonup u$ e $\|u_j\|_{w_0} = \|u\|_{w_0}$ temos que $u_j \rightarrow u$ em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$. De (1.28), temos $u \in K_{\mu_\beta}$, mas

$$\text{dist}(u, K_{\mu_\beta}) = \lim_j \text{dist}(u_j, K_{\mu_\beta}) \geq \varepsilon_0 > 0,$$

o que nos dá uma contradição. Portanto, devemos ter a desigualdade estrita $\gamma_\varepsilon < A_{\mu_\beta}^\#$, para todo $\varepsilon > 0$. $\square$

O próximo resultado é fundamental para demonstração do principal teorema deste capítulo, pois ele garante que a desigualdade (1.27) continua válida para $\mu > \mu_\beta$, ao menos enquanto μ estiver próximo de μ_β .

Lema 1.7. *Suponha que $\beta \in (0, \beta^*)$. Então, existe $\mu^\# > \mu_\beta$ tal que para qualquer $\mu \in [\mu_\beta, \mu^\#)$, temos*

$$\sup_{u \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_\mu(u) < \sup_{u \in N_\varepsilon} I_\mu(u) := A_\mu^\#, \text{ para } \varepsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno.} \quad (1.29)$$

Além disso, $A_\mu^\#$ é atingido em N_ε e $K_\mu = \{u \in N_\varepsilon : I_\mu(u) = A_\mu^\#\}$ é compacto.

Demonstração. Do Lema 1.3, I'_μ é localmente limitada então, I_μ é localmente uniformemente contínua. Para cada $v \in K_{\mu_\beta}$, seja $U(v; \varepsilon_v) = \{u \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0) : \|u - v\|_{w_0} < \varepsilon_v\}$ uma vizinhança de v tal que I_μ é localmente uniformemente contínua. Como K_{μ_β} é compacto, existem $v_1, \dots, v_m$ tais que

$$K_{\mu_\beta} \subset \bigcup_{i=1}^m U(v_i; \frac{\varepsilon_i}{2}).$$

Defina $U = \bigcup_{i=1}^m U(v_i; \frac{\varepsilon_i}{2})$. Como I_μ é localmente uniformemente contínua em cada $U(v_i; \varepsilon_i)$, dado $\varepsilon_0 > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que, para todo $i = 1, \dots, m$ temos

$$u, v \in U(v_i; \varepsilon_i), \|u - v\|_{w_0} < \sigma \text{ implica } |I_\mu(u) - I_\mu(v)| < \varepsilon_0. \quad (1.30)$$

Seja $\varepsilon_M = \max\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$. Para $\mu, \xi > 0$, iremos escolher $\delta > 0$ tal que

$$|\mu - \xi| < \delta \text{ implica } \left| 1 - \left(\frac{\xi}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} \right| \left(1 + \frac{\varepsilon_M}{2}\right) < \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, \frac{\varepsilon_m}{2}, \sigma\right\}. \quad (1.31)$$

Se $u \in U$, então, $u \in U(v_i; \frac{\varepsilon_i}{2})$ para algum $i \in \{1, \dots, m\}$. Da escolha de δ em (1.31), para $|\mu - \xi| < \delta$ temos

$$\left(\frac{\xi}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} u \in U(v_i; \varepsilon_i).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left\| v_i - \left(\frac{\xi}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} u \right\|_{w_0} &\leq \|v_i - u\|_{w_0} + \left\| u - \left(\frac{\xi}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} u \right\|_{w_0} \\ &\leq \frac{\varepsilon_i}{2} + \left| 1 - \left(\frac{\xi}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} \right| \|u\|_{w_0} \\ &\leq \frac{\varepsilon_i}{2} + \left| 1 - \left(\frac{\xi}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} \right| \left(\frac{\varepsilon_i}{2} + \|v_i\|_{w_0} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon_i}{2} + \left| 1 - \left(\frac{\xi}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} \right| \left(\frac{\varepsilon_M}{2} + 1 \right) \leq \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Se $\|u - v_i\|_{w_0} \leq \frac{\varepsilon_i}{2}$ então, $\|u\|_{w_0} \leq \|v_i\|_{w_0} + \frac{\varepsilon_M}{2}$. Daí

$$\left\| u - \left(\frac{\xi}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} u \right\|_{w_0} \leq \left| 1 - \left(\frac{\xi}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} \right| \|u\|_{w_0} \leq \left| 1 - \left(\frac{\xi}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} \right| \left(\frac{\varepsilon_M}{2} + 1 \right) < \sigma.$$

De (1.30), segue que

$$|\mu - \xi| < \delta \text{ implica } |I_\mu(u) - I_\xi(u)| = \left| I_\mu(u) - I_\mu\left(\left(\frac{\xi}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} u\right) \right| < \varepsilon_0. \quad (1.32)$$

Consequentemente, a aplicação $\mu \mapsto I_\mu(u)$ é contínua, de forma uniforme com respeito a $u \in U$. Tome $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $N_{2\varepsilon} \subset U$. Utilizando (1.27), podemos escolher $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{u \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_{\mu_\beta}(u) < \sup_{u \in N_\varepsilon} I_{\mu_\beta}(u) - 2\varepsilon_0. \quad (1.33)$$

Para $\xi = \mu_\beta$ e escolhendo ε_0 como acima, tomemos $\delta > 0$ tal que (1.32) é válido. Portanto, de (1.32) e (1.33), para todo $\mu \in [\mu_\beta, \mu_\beta + \delta)$ obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{u} \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_\mu(\mathbf{u}) &\leq \varepsilon_0 + \sup_{\mathbf{u} \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_{\mu_\beta}(\mathbf{u}) \\ &< \sup_{\mathbf{u} \in N_\varepsilon} I_{\mu_\beta}(\mathbf{u}) - \varepsilon_0 \\ &\leq \sup_{\mathbf{u} \in N_\varepsilon} I_\mu(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Isso mostra (1.29). Para $\mu \in [\mu_\beta, \mu_\beta + \delta)$, seja $(\mathbf{u}_j) \subset N_\varepsilon$ uma sequência maximizante para $A_\mu^\sharp$, isto é, $I_\mu(\mathbf{u}_j) \rightarrow A_\mu^\sharp$ quando $j \rightarrow \infty$, podemos supor que $\mathbf{u}_j \rightharpoonup \mathbf{u}$ fraco em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ e $\mathbf{u}_j(x) \rightarrow \mathbf{u}(x)$ q.t.p. em B . Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $(\mathbf{v}_j) \subset K_{\mu_\beta}$ satisfazendo $\|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j\|_{w_0} \leq \varepsilon$. Por compacidade, a menos de uma subsequência, temos $\mathbf{v}_j \rightarrow \mathbf{v}$ forte em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$ para algum $\mathbf{v} \in K_{\mu_\beta}$. Em particular, $\mathbf{v}$ é solução de (1.17) e o Lema 2.6 nos dá que $\mathbf{v} \in L^\infty(B)$. Defina $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j + \mathbf{v}$ e veja que $\mathbf{w}_j - \mathbf{u}_j \rightarrow 0$ forte em $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$. Utilizando a convexidade da função $x \mapsto x^q$, para todo $q \geq 1$ e $\tau > 0$, temos

$$(x + y)^q \leq (1 + \tau)^{\frac{q-1}{q}} x^q + (1 - (1 + \tau)^{-\frac{1}{q}})^{1-q} y^q, \quad x, y \geq 0, \quad (1.34)$$

ver apêndice Teorema 2. Segue que

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}_j|^q &\leq (|\mathbf{v}| + |\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j|)^q \\ &\leq (1 + \tau)^{\frac{q-1}{q}} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty}^q + (1 - (1 + \tau)^{-\frac{1}{q}})^{1-q} \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j\|_{w_0}^q \left| \frac{\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j}{\|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j\|_{w_0}} \right|^q \\ &\leq (1 + \tau)^{\frac{q-1}{q}} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty}^q + (1 - (1 + \tau)^{-\frac{1}{q}})^{1-q} \varepsilon^q \left| \frac{\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j}{\|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j\|_{w_0}} \right|^q. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Escolhendo $q = \frac{2}{1-\beta}$, $\tau = 1$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $2\mu(1 - 2^{-\frac{1}{q}})^{1-q} \varepsilon^q \leq \mu_\beta$ para todo $\mu \in [\mu_\beta, \mu_\beta + \delta)$, de (1.8) e (1.35) temos

$$\int_B e^{2\mu|\mathbf{w}_m|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx$$

é uniformemente limitada. Assim, pelo Teorema da Convergência de Vitali, temos $I_\mu(\mathbf{w}_m) \rightarrow I_\mu(\mathbf{u})$ e a continuidade uniforme local nós dá que $I_\mu(\mathbf{w}_j) - I_\mu(\mathbf{u}_j) \rightarrow 0$. Portanto, $I_\mu(\mathbf{u}) = A_\mu^\sharp$. Além disso, pela semi-continuidade inferior da norma temos $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{w_0} \leq \liminf \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j\|_{w_0} \leq \varepsilon$ e utilizando que $\|\mathbf{v}\|_{w_0} = 1$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{v} - \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_{w_0}} \right\|_{w_0} &\leq \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_{w_0} + |1 - \|\mathbf{u}\|_{w_0}| \\ &= \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_{w_0} + |\|\mathbf{v}\|_{w_0} - \|\mathbf{u}\|_{w_0}| \\ &\leq 2\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_{w_0} \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Isso implica que $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_{w_0}} \in \overline{N}_{2\varepsilon}$, e de (1.29), obtemos $I_\mu\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_{w_0}}\right) \leq A_\mu^\sharp = I_\mu(\mathbf{u})$. Segue que $\|\mathbf{u}\|_{w_0} = 1$. Assim, $\mathbf{u} \in \Sigma$, o que nos dá $\mathbf{u} \in \overline{N}_\varepsilon$. Contudo, por (1.29), devemos ter que $\mathbf{u} \in N_\varepsilon$, e $A_\mu^\sharp$ é atingido N_ε . Finalmente, se $(\mathbf{u}_j) \subset K_\mu$ com $\mathbf{u}_j \rightharpoonup \mathbf{u}$, pelo argumento acima, $\mathbf{u}_j \rightarrow \mathbf{u}$ forte, e $\mathbf{u} \in K_\mu$. O que mostra que K_μ é compacto. $\square$

Agora iremos provar o principal resultado desse capítulo, onde estenderemos o resultado de Struwe [49] para a $H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$.

Teorema 1.1. *Existe $\beta^* \in (0, 1)$ tal que para qualquer $\beta \in (0, \beta^*)$ existe $\mu^\sharp > \mu_\beta$ onde I_μ admite um maximizante local $\mathbf{u}_\mu$ em Σ para qualquer $\mu \in (0, \mu^\sharp)$.*

Demonstração. Da discussão da seção 1.2, para $\mu < \mu_\beta$, existe um maximizante para o funcional I_μ restrito a Σ . No caso crítico $\mu = \mu_\beta$, como pode ser visto em [40, 46, 47] o funcional I_{μ_β} admite uma função maximizante quando restrito a Σ com $\beta \in (0, \beta^*)$, para $\beta^* > 0$ suficientemente pequeno. No caso supercrítico, o Lema 2.9 garante que existe $\mu^\sharp > \mu_\beta$ tal que o funcional I_μ admite um maximizante local quando restrito a Σ para todo $\mu \in (\mu_\beta, \mu^\sharp)$. $\square$

Como consequência do Teorema 1.1, o funcional (1.6) admite um ponto crítico restrito ao conjunto Σ , que corresponde a um maximizante global quando $\mu \leq \mu_\beta$ e um maximizante local quando $\mu \in (\mu_\beta, \mu^\sharp)$.

Capítulo 2

Maximizante local para o funcional de Moser supercrítico fracionário

Neste capítulo iremos apresentar uma outra versão dos resultados propostos por Struwe [49]. Em espaços de dimensão fracionária e com peso do tipo logarítmico estendendo um resultado recente [53] de existência de pontos críticos para o funcional de Moser.

2.1 Espaço $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$

Para $p \geq 1$ e $\theta > 0$, denotamos por $L_\theta^p(0, 1)$, ou simplesmente L_θ^p , o espaço de todas as funções mensuráveis $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\|u\|_{L_\theta^p} = \begin{cases} \left(\int_0^1 |u(r)|^p d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{0 < r < 1} |u(r)| < \infty, & \text{se } p = \infty, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $d\lambda_\theta = \omega_\theta r^\theta dr$, com $\omega_\theta = 2\pi^{\frac{\theta+1}{2}}/\Gamma(\frac{\theta+1}{2})$ e Γ representa a função Gamma de Euler, definida por $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Estamos particularmente interessado nesses espaços devido a presença natural de pesos quando lidamos com funções radialmente simétricas. Seja $f : B_R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função radialmente simétrica, ou seja, existe uma função $g : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(r)$, onde $r = |x|$. Nesse caso, f é integrável em B_R com respeito à medida de Lebesgue dx se, e somente se, g é integrável em $(0, R)$ com respeito à medida $\lambda_{n-1}(r) = \omega_{n-1} r^{n-1} dr$. Além disso, vale a igualdade:

$$\int_{B_R} f(x) dx = \omega_{n-1} \int_0^R g(r) r^{n-1} dr = \int_0^R g(r) d\lambda_{n-1}.$$

Logo a medida $d\lambda_\theta$ estende de modo natural a integração em $\mathbb{R}^N$ para espaços que não necessariamente possuem dimensão inteira. Isso nos possibilita procurar extensões de resultados clássicos em $\mathbb{R}^N$ para dimensões não inteiras. A integração em espaços de dimensão não inteira é frequentemente usada no método de regularização dimensional como uma ferramenta poderosa para obter resultados em Mecânica, Estatística e Teoria Quântica de Campos. Para mais detalhes, veja [8, 16, 19, 22, 58].

Seja $AC_1(0, 1)$ o conjunto das funções localmente absolutamente contínuas $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\lim_{r \rightarrow 1} u(r) = 0$. Definimos o espaço de de dimensão fracionária $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ por

$$X_1^{1,p}(\alpha, \theta) = \overline{\{u \in AC_1(0, 1); \quad (\|u'\|_{L_\alpha^p} + \|u\|_{L_\theta^p})^{\frac{1}{p}} < \infty\}},$$

no qual o fecho é tomado com respeito à norma

$$\|u\|_X = \|u'\|_{L_\alpha^p} + \|u\|_{L_\theta^p}.$$

O estudo dos espaços $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ pode ser feito sob diversas condições dos parâmetros, α, θ, p . Vale destacar casos bem distintos e temas de estudo na literatura.

- i) Caso Sobolev: $\alpha - p + 1 > 0$;
- ii) Caso Trudinger-Moser: $\alpha - p + 1 = 0$;
- iii) Caso Morrey $\alpha - p + 1 < 0$.

Como os espaços com pesos desempenham um papel importante no estudo de operadores diferenciais parciais, muitos trabalhos têm sido dedicados a esse tema. Na década de 1990, Opic e Kufner [42] demonstraram a seguinte desigualdade do tipo Hardy:

$$\left(\int_0^1 |u(r)|^q r^\nu dr \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 |u'(r)|^p r^\alpha dr \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta). \quad (2.2)$$

Essa desigualdade vale sob as seguintes condições de parâmetros.

- (i) Caso Sobolev ($\alpha - p + 1 > 0$) : Sejam $\nu \geq 0$ e $u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. Então (2.2) vale desde que

- $\nu \geq \alpha - p$ e $q \in (1, \frac{(\nu+1)p}{\alpha-p+1}]$, ou
- $\nu < \alpha - p$ e $q \in (1, \frac{(\nu+1)p}{\alpha-p+1})$

- (ii) Caso Trudinger-Moser ($\alpha - p + 1 = 0$): Sejam $\nu \geq 0$, $\alpha > 0$, $p > 1$ e $u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. Então (2.2) vale desde que

- $q \in (1, \infty)$.

Utilizando isso, Opic e Kufner [42] estabeleceram os seguintes mergulhos.

No caso Sobolev, vale o seguinte mergulho contínuo

$$X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_v^q, \quad (2.3)$$

para todo $q \in (1, p^*]$ e $\theta \geq \alpha - p$, onde $p^* = \frac{(v+1)p}{\alpha-p+1}$. Caso $q < p^*$, o mergulho (2.3) é compacto.

No caso Trudinger-Moser, vale a seguinte imersão compacta

$$X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_v^q, \quad \text{para todo } q \in (1, \infty) \text{ e } v \geq 0. \quad (2.4)$$

Um estudo mais detalhado dessas imersões será apresentado na próxima seção, dentro de um contexto mais geral.

Se $\theta \geq \alpha - p$ a norma de $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ é equivalente a norma $\|u'\|_{L_\alpha^p}$. Em particular no caso Trudinger-Moser essas normas são equivalentes para todo $\alpha, \theta \geq 0$, e $p > 1$. Em geral, a propriedade de convexidade uniforme não é preservada por normas equivalentes, sendo assim faz-se necessário destacar o espaço $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ munido com a norma $\|u'\|_{L_\alpha^p}$ é uniformemente convexo e reflexivo.

A fim de simplificações a norma de $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ que equivale a $\|u'\|_{L_\alpha^p}$ será denotada por $\|u\|_X$.

Nosso interesse por esses espaços decorre do fato de eles serem modelos apropriados para o estudo, via cálculo variacional, de problemas envolvendo a seguinte classe de operadores elípticos quasilineares

$$Lu := r^{-\theta}(r^\alpha |u'|^p u')'. \quad (2.5)$$

A classe de operadores L inclui diversos operadores clássicos quando considerados em sua forma radial, como o m -laplaciano e o k -hessiano, além de vários outros operadores quasilineares.

Operador	α	p	θ
m -Laplaciano ($m > 1$)	$n - 1$	$m - 2$	$n - 1$
k -Hessiano	$n - k$	$k - 1$	$n - 1$

Lembrando que o operador k -hessiano $S_k(D^2u)$ é definido por $S_k(D^2u) = [D^2u]_k$, onde $[D^2u]_k$ é a soma de todos os determinantes menores principais de ordem k da matriz

hessiana. Em particular o $S_1(D^2u)$ coincide com o laplaciano e $S_N(D^2u)$ o operador de Monge-Ampère. Esse último é um exemplo clássico de operador totalmente não-linear.

Uma aplicação clássica e relevante ocorre no estudo dos conhecidos sistemas micro-mecânicos (MEMS — Microelectromechanical Systems). Dispositivos MEMS são fundamentais na tecnologia moderna, com presença marcante em áreas como telecomunicações, engenharia biomédica e exploração espacial. Para mais informações sobre as aplicações de MEMS e outras versões, recomendamos. [7, 23, 43].

A classe de operadores L tem sido objeto de pesquisas recentes e relevantes, por permitir a extensão de diversos resultados clássicos para o contexto de espaços com dimensão fracionária. Para uma análise mais aprofundada e aplicações relacionadas ao operador L , recomendamos [8, 16, 19, 22, 29].

2.2 Espaço $X_{1,w_0}^{1,p}$

Nesta seção, consideraremos exclusivamente o caso Trudinger-Moser, isto é, quando $\alpha = p-1$. Em um trabalho recente, J. Xue, C. Zhang e M. Zhu [53] introduziram um novo espaço de funções com peso, na dependência de peso que envolve um termo logarítmico. Mais precisamente, sejam X_1 definido conforme a Seção 2.1 e w_0 dado por

$$w_0(r) := (-\log r)^{\beta(p-1)}, \quad 0 < r \leq 1, \quad 0 \leq \beta < 1.$$

Para $u \in AC_1(0, 1)$ definimos

$$\|u\|_{X_{w_0}} = \left(\int_0^1 |u'|^p (-\log r)^{\beta(p-1)} d\lambda_\alpha \right)^{1/p}.$$

O espaço $X_{1,w_0}^{1,p}$ é definido por

$$X_{1,w_0}^{1,p} = \overline{\{u \in AC_1(0, 1) : \|u\|_{X_{w_0}} < \infty\}},$$

onde o fecho é tomado com respeito à norma $\|\cdot\|_{X_{w_0}}$.

Uma questão natural que surge é: sob quais condições o espaço $X_{1,w_0}^{1,p}$ está imerso continuamente ou de forma compacta em L_θ^q ?

Com base nos resultados e na notação introduzidos por A. Kufner e B. Opic [42], definem-se F_1 , A_1 e B_1 da seguinte forma:

- Para $1 \leq p \leq q \leq \infty$, define-se $F_1 : (0, 1) \rightarrow [0, \infty]$ por

$$F_1(r) = \left(\int_0^r \omega_\theta s^\theta ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_r^1 (\omega_\alpha (-\log s)^\beta s^\alpha)^{1-p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (2.6)$$

Para simplificar a expressão, utilizando que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ temos

$$F_1(r) = \left(\frac{\omega_\theta}{\theta+1} r^{\theta+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_r^1 \omega_\alpha^{1-p'} (-\log s)^{-\beta} s^{-1} ds \right)^{\frac{1}{p'}}$$

fazendo a mudança $-\log s = t$, temos $-\frac{1}{s} ds = dt$, segue que

$$F_1(r) = \left(\frac{\omega_\theta}{\theta+1} r^{\theta+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{-\log r} \omega_\alpha^{1-p'} t^{-\beta} dt \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Assim,

$$F_1(r) = C_1 r^{\frac{\theta+1}{q}} (-\log r)^{\frac{1-\beta}{p'}}, \quad (2.7)$$

onde C_1 depende apenas de α, θ, p, q com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

- Define-se

$$B_1 := \sup_{0 < r < 1} F_1(r).$$

- Para $1 \leq q < p < \infty$, define-se

$$A_1 := \frac{\omega_\theta^{1/q}}{(\theta+1)^{1/q}} \cdot \frac{\omega_\alpha^{(1-p')/q}}{(1-\beta)^{1/q'}} \left(\int_0^1 r^{\frac{\theta+1}{q}m-1} (-\log r)^{(1-\beta)m+\beta} dr \right)^{1/m},$$

onde $\frac{1}{m} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Fazendo a substituição $t = -\log r$, obtém-se

$$A_1 = C_1 \left(\int_0^\infty e^{-t(\frac{\theta+1}{q}m)} t^{(1-\beta)m+\beta} dt \right)^{\frac{1}{m}},$$

onde C_1 depende de p, q, α, θ assim,

$$A_1 = C_1 \frac{\Gamma((1-\beta)m + \beta + 1)^{\frac{1}{m}}}{\left(\frac{\theta+1}{q}m \right)^{(1-\beta) + \frac{\beta+1}{m}}}. \quad (2.8)$$

Considere H o seguinte operador linear

$$H : L_{\alpha, w_0}^p \rightarrow L_\theta^q, \quad (Hf)(r) := \int_r^1 f(s) ds.$$

Sobre quais condições o operador está bem definido, é contínuo e compacto?

Com essa notação, B. Opic e A. Kufner mostram que o operador H é contínuo se, e somente se, B_1 é finito ou, equivalentemente, se A_1 é finito, dependendo dos casos $1 < p \leq q < \infty$ ou $1 < q < p < \infty$.

Além disso, para $1 < p \leq q < \infty$, H é compacto se, e somente se,

$$B_1 < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} F_1(r) = \lim_{r \rightarrow 1^-} F_1(r) = 0.$$

Já no caso $1 < q < p < \infty$, H é compacto se, e somente se,

$$A_1 < \infty.$$

Observe que, pela expressão obtida em (2.7),

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} C_1 r^{\frac{\theta+1}{q}} (-\log r)^{\frac{1-\beta}{p'}} = \lim_{r \rightarrow 1^-} C_1 r^{\frac{\theta+1}{q}} (-\log r)^{\frac{1-\beta}{p'}} = 0,$$

como $F_1(r) = r^{\frac{\theta+1}{q}} (-\log r)^{\frac{1-\beta}{p'}}$ é contínua em $(0, 1)$ e os limites para os extremos 0 e 1 existem e são nulos, segue que $B_1 < \infty$. Por outro lado, de (2.8), conclui-se imediatamente que $A_1 < \infty$, já que $(1 - \beta)m + \beta + 1 > 0$. O espaço $X_{1, w_0}^{1, p}$ é particularmente adequado para análise, pois satisfaz uma desigualdade do tipo Hardy, a qual desempenha um papel fundamental no estudo de propriedades funcionais e nas imersões associadas.

Lema 2.1 ([42], Teorema 6.2). *Sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e u localmente absolutamente contínua. A desigualdade de Hardy*

$$\left(\int_0^1 |u|^q d\lambda_\theta \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^1 |u'|^p w_0 d\lambda_\alpha \right)^{1/p}$$

é válida se, e somente se, $B_1 < \infty$.

Lema 2.2 ([42], Teorema 6.3). *Sejam $1 \leq q < p \leq \infty$ e u localmente absolutamente contínua. A desigualdade de Hardy*

$$\left(\int_0^1 |u|^q d\lambda_\theta \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^1 |u'|^p w_0 d\lambda_\alpha \right)^{1/p}$$

é válida se, e somente se, $A_1 < \infty$.

Pela discussão anterior, conclui-se que $B_1, A_1 < \infty$. Assim, as desigualdades estabelecidas nos lemas acima são válidas para todas as funções $u \in X_{1, w_0}^{1, p}$.

Recentemente, de Oliveira, do Ó e Ponciano [17], apresentaram uma forma bem mais geral da desigualdade do tipo Hardy (2.2). O trabalho estabelece condições sobre os parâmetros $p, q, \alpha, \theta, \nu, \mu$ que garantem a validade da desigualdade

$$\left(\int_0^1 |w|^q (-\log r)^\mu r^\theta dr \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 |w'|^p (-\log r)^\nu r^\alpha dr \right)^{\frac{1}{p}}$$

na qual w é uma função localmente absolutamente contínua. Essa formulação é utilizada para obter uma desigualdade do tipo Hardy no contexto do espaço das funções k -admissíveis com peso logarítmico, denotado por $\Phi_{0,\text{rad}}^k(B, w_0)$. Esse espaço generaliza o espaço clássico das funções k -admissíveis que é particularmente útil na obtenção de estimativas elípticas para o operador k -hessiano.

Por fim destacamos que o espaço $X_{1,w_0}^{1,p}$ está compactamente imerso em L_θ^q , ou seja, $X_{1,w_0}^{1,p} \hookrightarrow L_\theta^q$.

Lema 2.3 ([17], Corolário 1.1). *Suponha que $\alpha = p - 1$ e seja $\theta \geq 0$. Então, a inclusão $X_{1,w_0}^{1,p} \hookrightarrow L_\theta^q$ é compacta para todo $q \in (1, \infty)$.*

A fim de complementar o estudo desses espaços com peso, surge a seguinte questão: que tipo de imersão se obtém caso $\beta \geq 1$? Considere o espaço $X_{1,w_1}^{1,p}$, definido de forma análoga a $X_{1,w_0}^{1,p}$, mas associado ao peso $w_1(r) = \left(\log \frac{e}{r}\right)^{\beta(p-1)}$, para $0 \leq r < 1$. Nessas condições, tem-se que $X_{1,w_1}^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ quando $\beta > 1$, enquanto no caso crítico $\beta = 1$, observa-se um crescimento do tipo duplo exponencial,

i)

$$\int_0^1 e^{e^{|u|^{\frac{p}{p-1}}}} d\lambda_\theta < +\infty, \quad \forall u \in X_{1,w_1}^{1,p},$$

ii)

$$\sup_{\|u\|_{X_{w_1}} \leq 1} \int_0^1 e^{ae^{\omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} |u|^{\frac{p}{p-1}}}} d\lambda_\theta < +\infty \iff \alpha \leq \theta + 1.$$

2.3 Trudinger-Moser em dimensão fracionária

Com relação aos espaços $X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$, recentemente do Ó e de Oliveira [16, 19] estabelecem uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser para esses espaços, ou seja,

$$\sup_{u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) : \|u'\|_{L_\alpha^p} \leq 1} \int_0^1 e^{\mu |u|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta < \infty \iff \mu \leq \mu_{\alpha, \theta} = (\theta + 1) \omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (2.9)$$

onde $\alpha = p - 1$ (condição de Trudinger-Moser). Além disso, existe um extremal para (2.9) sempre que $\mu \leq \mu_{\alpha, \theta}$. Recentemente Xue, Zhang e Zhu [53], inspirados pelos trabalhos [5, 19, 46] demonstraram que vale uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser nos espaços de dimensão fracionária com peso logarítmico $X_{1, w_0}^{1, p}$. Ou seja, vale:

$$\sup_{\|u\|_{X_{w_0}} \leq 1} \int_0^1 e^{\mu|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta < \infty \iff \mu \leq \mu_{\alpha, \theta, \beta} = (\theta + 1)[\omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}(1 - \beta)]^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad (2.10)$$

onde $p' = \frac{p}{p-1}$. Além disso, assim como em [40, 46, 47], a atingibilidade do supremo em (2.10) é garantida caso $\beta > 0$ seja suficientemente pequeno. De maneira semelhante ao que ocorre em $H_{0, rad}^1(B, w_0)$, tem-se que, se $u \in X_{1, w_0}^{1, p}$, então

$$e^{|u|^\gamma} \in L^1, \text{ caso } \gamma \leq \frac{p'}{1 - \beta}. \quad (2.11)$$

como pode ser visto em [53].

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, vale a seguinte estimativa pontual para funções $u \in X_{1, w_0}^{1, p}$

$$|u(r)| \leq \frac{(-\log r)^{\frac{1-\beta}{p'}}}{\omega_\alpha^{\frac{1}{p}}(1 - \beta)^{\frac{1}{p'}}} \|u\|_{X_{w_0}}. \quad (2.12)$$

De fato, como $u(1) = 0$, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |u(r)| &\leq \int_r^1 \left(t^{\frac{\alpha}{p}} (-\log t)^{\frac{\beta}{p'}} |u'(t)| \right) \left(t^{-\frac{\alpha}{p}} (-\log t)^{-\frac{\beta}{p'}} \right) dt \\ &\leq \left(\int_r^1 t^\alpha (-\log t)^{\beta(p-1)} |u'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_r^1 t^{-1} (-\log t)^{-\beta} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \frac{1}{\omega_\alpha^{\frac{1}{p}}} \left(\omega_\alpha \int_r^1 t^\alpha (-\log t)^{\beta(p-1)} |u'(t)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \left(-\frac{(-\log t)^{1-\beta}}{1-\beta} \Big|_r^1 \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \frac{(-\log r)^{\frac{1-\beta}{p'}}}{\omega_\alpha^{\frac{1}{p}}(1 - \beta)^{\frac{1}{p'}}} \|u\|_{X_{w_0}}. \end{aligned}$$

Estamos considerando o caso em que $0 \leq \beta < 1$. Nosso objetivo é estender os resultados de Struwe para o contexto de dimensão fracionária com peso logarítmico.

Inicialmente, introduziremos o funcional de Moser no espaço $X_{1, w_0}^{1, p}$. Sejam $I_\mu : X_{1, w_0}^{1, p} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I_\mu(u) = \int_0^1 e^{\mu|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta, \quad (2.13)$$

e Σ dado por

$$\Sigma = \{u \in X_{1, w_0}^{1, p} ; \quad \|u\|_{X_{w_0}} = 1\}. \quad (2.14)$$

Por (2.11) o funcional é bem definido.

No caso subcrítico, ou seja, para $\mu < \mu_{\alpha, \theta, \beta}$, existe um ponto crítico de I_μ restrito a Σ , conforme demonstrado em [53], com o auxílio do Teorema da Convergência de Vitali. Já no caso crítico, $\mu = \mu_{\alpha, \theta, \beta}$, a existência de ponto crítico esta garantida apenas para $\beta > 0$ suficientemente pequeno. Vale ressaltar que a existência desses pontos críticos para (2.13) restrito a (2.14) está relacionada à existência de extremais para (2.10).

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar a existência de um maximizante local para I_μ e, conseqüentemente, a existência de pontos críticos desse funcional, sob a condição $\mu > \mu_{\alpha, \theta, \beta}$.

Um resultado crucial para a demonstração da existência de pontos críticos do funcional de Moser é um teorema do tipo concentração-compacidade de Lions apresentado em [53]. Dizemos que uma sequência $(w_j) \subset X_{1, w_0}^{1, p}$ concentra na origem se $\|w_j\|_{X_{w_0}} = 1$ e, para todo $\delta \in (0, 1)$, tem-se

$$\int_{\delta}^1 |w'_j|^p w_0 d\lambda_\alpha \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

Além disso, se uma sequência concentra na origem, então

$$I_{\mu_{\alpha, \theta, \beta}}(w) \leq \frac{\omega_\theta}{\theta + 1} (1 + e^{\gamma + \Psi(p)}),$$

onde $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j} - \ln m \right)$ é a constante de Euler, e $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$, sendo Γ a função Gamma de Euler, veja Apêndice Teorema 7.

Lema 2.4 (Alternativa de Concentração e Compacidade). *Seja (w_j) uma sequência em $X_{1, w_0}^{1, p}$ tal que $w_j \rightharpoonup w$ fracamente em $X_{1, w_0}^{1, p}$. Então, somente uma das seguintes alternativas ocorre:*

- i) $I_{\mu_{\alpha, \theta, \beta}}(w_j) \rightarrow I_{\mu_{\alpha, \theta, \beta}}(w)$;
- ii) w_j concentra em $r = 0$.

Veja [53, Teorema 1.4].

2.4 Propriedades do funcional de Moser fracionário

Lema 2.5. *Para $\mu > 0$, seja $I_\mu : X_{1, w_0}^{1, p} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por (2.13). Então, I_μ é Fréchet diferenciável em $X_{1, w_0}^{1, p}$ e $I'_\mu : X_{1, w_0}^{1, p} \rightarrow (X_{1, w_0}^{1, p})^*$ é localmente uniformemente contínua e limitada.*

Demonstração. Iremos aplicar o Teorema da Convergência de Vitali. Primeiro, veja que para $u, v \in X_{1, w_0}^{1, p}$ e (s_j) qualquer sequência positiva tal que $s_j \rightarrow 0$, podemos escrever

$$I_\mu(u + s_j v) - I_\mu(u) = \frac{p'\mu}{1-\beta} \int_0^1 \int_0^{s_j} v|u + tv|^{\frac{p'}{1-\beta}-2}(u + tv)e^{\mu|u+tv|^{\frac{p'}{1-\beta}}} dt d\lambda_\theta. \quad (2.15)$$

Para qualquer $j \in \mathbb{N}$, seja $f_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f_j(r) = \frac{1}{s_j} \int_0^{s_j} v|u + tv|^{\frac{p'}{1-\beta}-2}(u + tv)e^{\mu|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} dt$$

e $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(r) = uv|u|^{\frac{p'}{1-\beta}-2}e^{\mu|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}}.$$

Afirmamos que (f_j) converge para f em $L^1([0, 1])$. De fato, temos $f_j(r) \rightarrow f(r)$ q.t.p. em $[0, 1]$. Pela desigualdade de Hölder juntamente com (3) e (2.12) temos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |v||u|^{\frac{p'}{1-\beta}-1}e^{\mu|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \\ & \leq \left(\int_0^1 |u|^{\frac{2p'}{1-\beta}-2}e^{2\mu|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |v|^2 d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left(\int_0^1 |u|^{\frac{2p'}{1-\beta}-2}e^{2\mu|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (-\log r)^{\frac{2(1-\beta)(p-1)}{p}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde C depende somente de α, β e $\|v\|_{X_{w_0}}$. Fazendo a mudança $-\log r = t$ temos na última integral

$$\int_0^1 (-\log r)^{\frac{2(1-\beta)}{p'}} d\lambda_\theta = \omega_\theta \frac{\Gamma(\frac{2(1-\beta)}{p'} + 1)}{(\theta + 1)^{\frac{2(1-\beta)}{p'} + 1}}.$$

Por (2.16) obtemos que $f \in L^1([0, 1])$. Para garantir a integrabilidade uniforme de (f_j) , basta mostrar que ela limitada em $L^q([0, 1])$ para algum $q > 1$. Novamente pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} |f_j(r)| & \leq \frac{1}{s_j} \int_0^{s_j} v|u + tv|^{\frac{p'}{1-\beta}-1}e^{\mu|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} dt \\ & \leq \frac{1}{s_j} s_j^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{s_j} |v|^q |u + tv|^{\frac{qp'}{1-\beta}-q}e^{q\mu|u+tv|^{\frac{p'}{1-\beta}}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

e assim

$$|f_j(x)|^q \leq \frac{1}{s_j} \int_0^{s_j} |v|^q |u + tv|^{\frac{qp'}{1-\beta}-q}e^{q\mu|u+tv|^{\frac{p'}{1-\beta}}} dt.$$

Veja que, para $\sigma, \nu > 0$, vale

$$\tau^\sigma e^{\mu\tau^\nu} \leq ce^{c\tau^\nu}, \tau \geq 0$$

para alguma constante $c > 0$, que depende somente de σ, ν e μ . Assim, para algum $t \in [0, s_j]$, e $c > 0$ dependendo somente de μ e β temos

$$\begin{aligned} |u + tv|^{\frac{p'}{1-\beta}-1} e^{\mu|u+tv|^{\frac{p'}{1-\beta}}} &\leq c e^{c|u+tv|^{\frac{p'}{1-\beta}}} \\ &\leq c e^{c(2^{\frac{p'}{1-\beta}-1} (|u|^{\frac{p'}{1-\beta}} + t^{\frac{p'}{1-\beta}} |v|^{\frac{p'}{1-\beta}}))} \\ &\leq c e^{c_1|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} e^{c_1 s_j^{\frac{p'}{1-\beta}} |v|^{\frac{p'}{1-\beta}}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

para algum $c_1 > 0$ dependendo somente de μ e β ($c_1 = c 2^{\frac{p'}{1-\beta}-1}$ nesse caso).

Para $q > 1$, temos $3q c_1 s_j^{\frac{p'}{1-\beta}} \leq \mu_{\alpha, \theta, \beta}$, para j suficientemente grande. Portanto, utilizando a desigualdade de Hölder, (2.10), (2.12), (2.17), temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_j|^q d\lambda_\theta &\leq \frac{c}{s_j} \int_0^{s_j} \int_0^1 |v|^q e^{q c_1 |u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} e^{q c_1 s_j^{\frac{p'}{1-\beta}} |v|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta dt \\ &\leq c \|v\|_{L_{\theta}^{3q}}^q \left(\int_0^1 e^{3q c_1 |u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^1 e^{3q c_1 s_j^{\frac{p'}{1-\beta}} |v|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq C \|v\|_{X_{w_0}}^q \left(\int_0^1 e^{3q c_1 |u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq C \left(\int_0^1 e^{3q c_1 |u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde utilizamos $\|v\|_{X_{w_0}} < \infty$. Portanto, utilizando o teorema da convergência de Vitali obtemos que $f_j \rightarrow f$ em L^1 . Dividindo (2.15) por s_j e fazendo $j \rightarrow \infty$ obtemos a derivada de Gateaux

$$I'_\mu(u) \cdot v = \frac{p'\mu}{1-\beta} \int_0^1 v |u|^{\frac{p'}{1-\beta}-2} u e^{\mu|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta.$$

Resta provar que $I'_\mu : X_{1, w_0}^{1, p} \rightarrow (X_{1, w_0}^{1, p})^*$ é localmente uniformemente contínua e limitada. Primeiramente, iremos provar a limitação local de I'_μ . Sejam $u \in X_{1, w_0}^{1, p}$ fixado arbitrariamente e $U(u; \varepsilon) = \{w \in X_{1, w_0}^{1, p} : \|w - u\|_{X_{w_0}} < \varepsilon\}$, onde $\varepsilon > 0$ será escolhido posteriormente. Para $w \in U(u; \varepsilon)$, definamos $h = (w - u)/\varepsilon$. Utilizando (2.12) em conjunto com a desigualdade de Hölder e argumentando novamente como em (2.17) temos

$$\begin{aligned} |I'_\mu(w) \cdot v| &\leq \frac{p'\mu}{1-\beta} \int_0^1 |v| e^{c\mu|u+\varepsilon h|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \\ &\leq \frac{p'\mu}{1-\beta} \int_0^1 |v| e^{c_1\mu(|u|^{\frac{p'}{1-\beta}} + |\varepsilon h|^{\frac{p'}{1-\beta}})} d\lambda_\theta \\ &\leq \frac{p'\mu}{1-\beta} \|v\|_{L_\theta^2} \left(\int_0^1 e^{4c_1\mu|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^1 e^{\varepsilon^{\frac{p'}{1-\beta}} 4c_1\mu|h|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq \frac{p'\mu C}{1-\beta} \|v\|_{X_{w_0}} \left(\int_B e^{4c_1\mu|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_B e^{4\varepsilon^{\frac{p'}{1-\beta}} c_1\mu|h|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

para qualquer $v \in X_{1,w_0}^{1,p}$. Assim, iremos escolher $\varepsilon > 0$ satisfazendo $4\varepsilon^{\frac{p'}{1-\beta}} c_1 \mu \leq \mu_{\alpha,\theta,\beta}$, pela desigualdade de Trudinger-Moser (3) temos

$$\begin{aligned} \|I'_\mu(w)\|_* &= \sup_{\|v\|_{X_{w_0}}=1} |I'_\mu(w) \cdot v| \\ &\leq C \left(\int_0^1 e^{4c_1 \mu |u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

para todo $w \in \mathcal{U}(u; \varepsilon)$. Assim, I'_μ é localmente limitada. Para qualquer $v \in X_{1,w_0}^{1,p}$ com $\|v\|_{X_{w_0}} \leq 1$, seja $L(t, r)$ dada por

$$L(t, r) = |u + th|^{\frac{p'}{1-\beta}-2} (u + th) e^{\mu|u+th|^{\frac{p'}{1-\beta}}}$$

como em (2.15) obtemos

$$\begin{aligned} |I'_\mu(u + \varepsilon h) \cdot v - I'_\mu(u) \cdot v| &= \left| \frac{p'\mu}{1-\beta} \int_0^1 v \int_0^\varepsilon \frac{d}{dt} L(t, r) dt d\lambda_\theta \right| \\ &\leq C \int_0^\varepsilon \int_0^1 |v||h||u + th|^{\frac{p'}{1-\beta}-2} e^{\mu|u+th|^{\frac{p'}{1-\beta}}} dt d\lambda_\theta \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$+ C \int_0^\varepsilon \int_0^1 |v||h||u + th|^{\frac{2p'}{1-\beta}-2} e^{\mu|u+th|^{\frac{p'}{1-\beta}}} dt d\lambda_\theta, \quad (2.20)$$

onde C depende somente de μ , β e p . Vamos estimar as integrais (2.19) e (2.20). De modo similar a (2.17) e (2.18), para todo $t \in [0, \varepsilon]$ obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |v||h||u + th|^{\frac{p'}{1-\beta}-2} e^{\mu|u+th|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \\ &\leq c \int_0^1 |v||h| e^{c_1|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} e^{c_1\varepsilon^{\frac{p'}{1-\beta}}|h|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \\ &\leq C \|v\|_{L_\theta^4} \|h\|_{X_{w_0}} \left(\int_0^1 e^{4c_1|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^1 e^{4c_1\varepsilon^{\frac{p'}{1-\beta}}|h|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq C \left(\int_0^1 e^{4c_1|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

contanto que

$$4c_1\varepsilon^{\frac{p'}{1-\beta}} \leq \mu_{\alpha,\theta,\beta}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |v||h||u + th|^{\frac{2p'}{1-\beta}-2} e^{\mu|u+th|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \\ &\leq c \int_0^1 |v||h| e^{c_1|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} e^{c_1\varepsilon^{\frac{p'}{1-\beta}}|h|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \\ &\leq C \|v\|_{L_\theta^4} \|h\|_{X_{w_0}} \left(\int_0^1 e^{4c_1|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^1 e^{4c_1\varepsilon^{\frac{p'}{1-\beta}}|h|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq C \left(\int_0^1 e^{4c_1|u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Combinado (2.19), (2.21) e (2.22), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\|I'_\mu(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h}) - I'_\mu(\mathbf{u})\|_* \leq C\varepsilon$$

para alguma constante $C > 0$ dependendo somente de $\beta, \mu, \mathbf{u}$ e $\mathbf{p}$. Assim, I'_μ é localmente uniformemente contínua. Finalmente, a continuidade da derivada de Gateaux I'_μ garante que I_μ é continuamente Fréchet diferenciável. $\square$

Agora, iremos provar uma estimativa L^∞ para soluções de um problema de Dirichlet, que envolve não linearidade do tipo exponencial. A fim de simplicidade a constante λ que aparece no teorema abaixo depende de ω_α e ω_θ .

Lema 2.6. *Se $\mathbf{u} \in X_{1, \mathbf{w}_0}^{1, \mathbf{p}}$ é solução fraca de*

$$\begin{cases} -(r^\alpha |\mathbf{u}'|^{p-2} \mathbf{u}' \mathbf{w}_0)' = \lambda |\mathbf{u}|^{\frac{p'}{1-\beta}-2} \mathbf{u} e^{\mu_{\alpha, \theta, \beta} |\mathbf{u}|^{\frac{p'}{1-\beta}}} r^\theta, & \text{em } (0, 1), \\ \mathbf{u}(1) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $\mathbf{u} \in L^\infty([0, 1])$.

Demonstração. Utilizando (2.10) e Lema 2.3, a desigualdade de Hölder nós dá

$$\int_0^1 |\mathbf{u}|^{\frac{p'q}{1-\beta}-2q} |\mathbf{u}|^q e^{q\mu_{\alpha, \theta, \beta} |\mathbf{u}|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta \leq \left(\int_0^1 |\mathbf{u}|^{2q(\frac{p'}{1-\beta}-1)} r^\theta dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 e^{2q\mu_{\alpha, \theta, \beta} |\mathbf{u}|^{\frac{p'}{1-\beta}}} r^\theta dr \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.24)$$

Assim,

$$\int_0^1 |\mathbf{u}|^{\frac{p'q}{1-\beta}-2q} |\mathbf{u}|^q e^{q\mu_{\alpha, \theta, \beta} |\mathbf{u}|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta < \infty, \quad \text{para todo } q > 1. \quad (2.25)$$

Para $k > 0$, considere

$$T_k(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} + k)\chi_{(-\infty, -k]} + (\mathbf{v} - k)\chi_{[k, \infty)}.$$

Seja $B_k = \{r \in (0, 1) : |\mathbf{u}| \geq k\}$, onde χ_A é a função característica do conjunto A , e denotaremos por $|B_k| = \int_{B_k} \mathbf{w}_0 r^\alpha dr$. De (2.23), obtemos

$$\int_0^1 |\mathbf{u}'|^{p-2} \mathbf{u}' (T_k(\mathbf{u}))' \mathbf{w}_0 r^\alpha dr = \lambda \int_0^1 |\mathbf{u}|^{\frac{p'}{1-\beta}-2} \mathbf{u} e^{\mu_{\alpha, \theta, \beta} |\mathbf{u}|^{\frac{p'}{1-\beta}}} T_k(\mathbf{u}) r^\theta dr. \quad (2.26)$$

Para $s = \eta\sigma$ e $\eta = \frac{p+1}{\sigma-1}$ com $\sigma > 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \lambda \int_0^1 |\mathbf{u}|^{\frac{p'}{1-\beta}-2} \mathbf{u} e^{\mu_{\alpha, \theta, \beta} |\mathbf{u}|^{\frac{p'}{1-\beta}}} T_k(\mathbf{u}) r^\theta dr \\ & \leq |\lambda| \left(\int_0^1 |\mathbf{u}|^{\sigma \frac{p'}{1-\beta}-\sigma} e^{\sigma \mu_{\alpha, \theta, \beta} |\mathbf{u}|^{\frac{p'}{1-\beta}}} r^\theta dr \right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\int_0^1 |T_k(\mathbf{u})|^s r^\theta dr \right)^{\frac{1}{s}} |B_k|^{\frac{s-\eta-1}{s}} \\ & \leq C \|T_k(\mathbf{u})\|_{L_\theta^s} |B_k|^{\frac{r-\eta-1}{r}}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde na primeira integral utilizamos a desigualdade de Hölder e que $e^{|u|^{p'/(1-\beta)}} \in L^1$. Por outro lado, utilizando (2.12) temos

$$\int_0^1 |u'|^{p-2} u' (T_k(u))' w_0 r^\alpha dr \geq C \|T_k(u)\|_{X_{w_0}}^p \geq C \|T_k(u)\|_{L^s}^p. \quad (2.28)$$

Por (2.26), (2.27) e (2.28) temos

$$\left(\int_0^1 |T_k(u)|^s dr \right)^{\frac{p-1}{s}} \leq C |B_k|^{\frac{s-\eta-1}{s}}.$$

Assim,

$$\int_0^1 |T_k(u)|^s dr \leq C |B_k|^{p'}. \quad (2.29)$$

Note que $|T_k(v)| = (|v| - k)(1 - \chi_{[-k,k]}(v))$ se $v \in \mathbb{R}$ e $B_h \subset B_k$ para $0 < k < h$. Então

$$\int_0^1 |T_k(u)|^s dr = \int_{B_k} (|u| - k)^s dr \geq \int_{B_h} (|u| - k)^s dr \geq (h - k)^s |B_h|. \quad (2.30)$$

Seja $\psi(k) = |B_k|$, $k \geq 0$. De (2.29) e (2.30) obtemos

$$\psi(h) \leq C(h - k)^{-s} \psi(k)^{p'}, \quad 0 < k < h. \quad (2.31)$$

Seja $d = 2^p C^{\frac{1}{s}} |B|^{\frac{1}{(p-1)s}}$ e considere a sequência k_m definida por $k_0 = 0$ e $k_m = k_{m-1} + \frac{d}{2^m}$, para $m = 1, 2, \dots$. Por indução em (2.31), obtemos

$$\psi(k_m) \leq 2^{ms(1-p)} \psi(0) \rightarrow 0, \quad \text{as } m \rightarrow \infty.$$

De fato, para $m = 1$, temos

$$\psi(k_1) \leq C(k_1 - k_0)^{-s} \psi(0)^{p'} = C\left(\frac{2}{d}\right)^s \psi(0)^{p'} = 2^{s(1-p)} \psi(0).$$

Suponha que a desigualdade seja verdadeira para m . Então,

$$\begin{aligned} \psi(k_{m+1}) &\leq C(k_{m+1} - k_m)^{-s} \psi(k_m)^{p'} \\ &= C \frac{2^{(m+1)s}}{d^s} \psi(k_m)^{p'} \\ &\leq C \frac{2^{(m+1)s}}{(2^p C^{\frac{1}{s}} |B|^{\frac{1}{(p-1)s}})^s} (2^{ms(1-p)})^{p'} \psi(0)^{p'} \\ &= 2^{(m+1)s(1-p)} \psi(0). \end{aligned}$$

Como $k_m \rightarrow d$ e ψ é não crescente, obtemos $\psi(d) = 0$. Consequentemente, $\|u\|_{L^\infty} \leq d$. □

2.5 Ponto crítico além da constante crítica em dimensão fracionária

Nesta seção, provaremos o principal resultado deste capítulo: a existência de um maximizante local para o funcional I_μ , além da constante crítica $\mu_{\alpha,\theta,\beta}$. Para isso, será necessário estender alguns resultados clássicos de Struwe [49] ao contexto do funcional de Moser definido no espaço $X_{1,w_0}^{1,p}$. Lembremos que existe $\beta^* \in (0, 1)$ tal que

$$A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\# := \sup_{u \in \Sigma} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) > \frac{\omega_\theta}{\theta + 1} (1 + e^{\gamma + \Psi(p)}), \quad (2.32)$$

para qualquer $\beta \in (0, \beta^*)$, veja Apêndice Teorema 8. Os próximos lemas desempenham um papel fundamental na demonstração do principal resultado deste capítulo.

Lema 2.7. *Para qualquer $\beta \in (0, \beta^*)$, o conjunto $K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}} = \{u \in \Sigma : I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) = A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#\}$ é compacto.*

Demonstração. Seja (u_j) uma sequência em $K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}$. Sem perda de generalidade, iremos supor que $u_j \rightharpoonup u$ em $X_{1,w_0}^{1,p}$. Como (u_j) é uma sequência maximizante para $A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#$, pelo Lema de concentração e compacidade de Lions 2.4, uma das alternativas deve ocorrer:

1. $u \not\equiv 0$ e $I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) = A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#$, ou
2. $u \equiv 0$ e $\limsup_{j \rightarrow \infty} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u_j) \leq \frac{\omega_\theta}{\theta + 1} (1 + e^{\gamma + \Psi(p)})$.

Contudo, a segunda alternativa contradiz (2.32), pois $I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u_j) = A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, $u \not\equiv 0$ e $I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) = A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#$. Da semicontinuidade inferior da norma, devemos ter

$$0 < \|u\|_{X_{w_0}} \leq \liminf \|u_j\|_{X_{w_0}} = 1.$$

Portanto,

$$A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\# = I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) \leq I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u/\|u\|_{X_{w_0}}) \leq A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#.$$

Segue que

$$\int_0^1 \left(e^{\mu_{\alpha,\theta,\beta} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{X_{w_0}}} \right)^{\frac{p'}{1-\beta}}} - e^{\mu_{\alpha,\theta,\beta} |u|^{\frac{p'}{1-\beta}}} \right) d\lambda_\theta = 0.$$

Como $0 < \|u\|_{X_{w_0}} \leq 1$, se $\|u\|_{X_{w_0}} < 1$ então $|u| < |u|/\|u\|_{X_{w_0}}$ consequentemente o integrando acima é estritamente positivo e a integral nunca se anula, com isso $\|u\|_{X_{w_0}} = 1$. Assim, devemos ter que $u \in K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}$. Como $u_j \rightharpoonup u$ em $X_{1,w_0}^{1,p}$ e $\|u_j\|_{X_{w_0}} = \|u\|_{X_{w_0}}$. Segue que $u_j \rightarrow u$ forte em $X_{1,w_0}^{1,p}$. $\square$

Para cada $\varepsilon > 0$, seja $N_\varepsilon = \{u \in \Sigma : \text{dist}(u, K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}) < \varepsilon\}$, onde $\text{dist}(u, K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}) = \inf\{\|u - v\|_{X_{w_0}} : v \in K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}\}$. Como $K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}$ é compacto, a família $(N_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ constitui uma base de vizinhança para $K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}$ em Σ , isto é,

1. $K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}} \subset N_\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$;
2. Se U é um aberto em Σ tal que $K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}} \subset U$, então $N_\varepsilon \subset U$ para algum $\varepsilon > 0$.

Note que

$$\sup_{u \in N_\varepsilon} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) \leq \sup_{u \in \Sigma} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) = A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Além disso, temos que $A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#$ é atingido, para $\beta \in (0, \beta^*)$. Assim, $K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}} \neq \emptyset$ o que junto com $K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}} \subset N_\varepsilon$ nos dá

$$A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\# = \sup_{u \in N_\varepsilon} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u), \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (2.33)$$

Lema 2.8. *Suponha que $\beta \in (0, \beta^*)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$*

$$\sup_{u \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) < A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\# = \sup_{u \in N_\varepsilon} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u). \quad (2.34)$$

Demonstração. Denotemos por

$$\gamma_\varepsilon = \sup_{u \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u).$$

É claro que temos $\gamma_\varepsilon \leq A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#$, para todo $\varepsilon > 0$. Por contradição, suponha que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\gamma_{\varepsilon_0} = A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#$. Seja $(u_j) \subset N_{2\varepsilon_0} \setminus N_{\varepsilon_0}$ tal que $I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u_j) \rightarrow A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#$ e $u_j \rightarrow u$ em $X_{1,w_0}^{1,p}$, quando $j \rightarrow \infty$. Pelo mesmo argumento do Lema 2.7, utilizando (2.32) e Lema 2.4, temos

$$\|u\|_{X_{w_0}} = 1 \text{ e } I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) = A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#. \quad (2.35)$$

Novamente como $u_j \rightarrow u$ e $\|u_j\|_{X_{w_0}} = \|u\|_{X_{w_0}}$, temos que $u_j \rightarrow u$ em $X_{1,w_0}^{1,p}$. De (2.35), temos $u \in K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}$, mas

$$\text{dist}(u, K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}) = \lim_j \text{dist}(u_j, K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}) \geq \varepsilon_0 > 0,$$

o qual é uma contradição. Portanto, devemos ter a desigualdade estrita $\gamma_\varepsilon < A_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}^\#$, para todo $\varepsilon > 0$. $\square$

O próximo resultado é fundamental para a demonstração do teorema principal deste capítulo, pois assegura que a desigualdade (2.34) continua válida para $\mu > \mu_{\alpha,\theta,\beta}$, ao menos, enquanto μ estiver suficientemente próximo de $\mu_{\alpha,\theta,\beta}$.

Lema 2.9. *Suponha que $\beta \in (0, \beta^*)$. Então, existe $\mu^\sharp > \mu_{\alpha, \theta, \beta}$ tal que para qualquer $\mu \in [\mu_{\alpha, \theta, \beta}, \mu^\sharp)$, temos*

$$\sup_{u \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_\mu(u) < \sup_{u \in N_\varepsilon} I_\mu(u) := A_\mu^\sharp, \text{ para } \varepsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno.} \quad (2.36)$$

Além disso, $A_\mu^\sharp$ é atingido em N_ε e $K_\mu = \{u \in N_\varepsilon; \quad I_\mu(u) = A_\mu^\sharp\}$ é compacto.

Demonstração. Do Lema 2.5, I'_μ é localmente limitada, então I_μ é localmente uniformemente contínua. Para cada $v \in K_{\mu_{\alpha, \theta, \beta}}$, seja $U(v; \varepsilon_v) = \{u \in X_{1, w_0}^{1, p} : \|u - v\|_{X_{w_0}} < \varepsilon_v\}$ uma vizinhança de v tal que I_μ é localmente uniformemente contínua. Com $K_{\mu_{\alpha, \theta, \beta}}$ é compacto, existem $v_1, \dots, v_m$ tal que

$$K_{\mu_{\alpha, \theta, \beta}} \subset \bigcup_{i=1}^m U(v_i; \frac{\varepsilon_i}{2}).$$

Defina $U = \bigcup_{i=1}^m U(v_i; \frac{\varepsilon_i}{2})$. Como I_μ é localmente uniformemente contínua em cada $U(v_i; \varepsilon_i)$, dado $\varepsilon_0 > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que, para todo $i = 1, \dots, m$ temos

$$u, v \in U(v_i; \varepsilon_i), \quad \|u - v\|_{X_{w_0}} < \sigma \text{ implica } |I_\mu(u) - I_\mu(v)| < \varepsilon_0. \quad (2.37)$$

Seja $\varepsilon_M = \max\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$, para $\mu, v > 0$, iremos escolher $\delta > 0$ tal que

$$|\mu - v| < \delta \text{ implica } \left| 1 - \left(\frac{v}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{p'}} \right| \left(1 + \frac{\varepsilon_M}{2}\right) < \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, \frac{\varepsilon_m}{2}, \sigma\right\}. \quad (2.38)$$

Agora, se $u \in U$ então, $u \in U(v_i; \frac{\varepsilon_i}{2})$ para algum $i \in \{1, \dots, m\}$. Da escolha de δ em (2.38), para $|\mu - v| < \delta$ temos

$$\left(\frac{v}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{p'}} u \in U(v_i; \varepsilon_i).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left\| v_i - \left(\frac{v}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{p'}} u \right\|_{X_{w_0}} &\leq \|v_i - u\|_{X_{w_0}} + \left\| u - \left(\frac{v}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{p'}} u \right\|_{X_{w_0}} \\ &\leq \frac{\varepsilon_i}{2} + \left| 1 - \left(\frac{v}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{p'}} \right| \|u\|_{X_{w_0}} \\ &\leq \frac{\varepsilon_i}{2} + \left| 1 - \left(\frac{v}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{p'}} \right| \left(\frac{\varepsilon_i}{2} + \|v_i\|_{X_{w_0}} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon_i}{2} + \left| 1 - \left(\frac{v}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{p'}} \right| \left(\frac{\varepsilon_M}{2} + 1 \right) \leq \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Além disso, pelo mesmo argumento, também obtemos

$$\left\| u - \left(\frac{v}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{p'}} u \right\|_{X_{w_0}} \leq \left| 1 - \left(\frac{v}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{p'}} \right| \left(\frac{\varepsilon_M}{2} + 1 \right) < \sigma.$$

De (2.37), segue que

$$|\mu - \nu| < \delta \text{ implica } |I_\mu(u) - I_\nu(u)| = \left| I_\mu(u) - I_\mu\left(\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{1-\beta}{p'}} u\right) \right| < \varepsilon_0. \quad (2.39)$$

Consequentemente, a aplicação $\mu \mapsto I_\mu(u)$ é contínua, de forma uniforme com respeito a $u \in \mathcal{U}$. Tome $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $N_{2\varepsilon} \subset \mathcal{U}$. Utilizando (2.34), podemos escolher $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{u \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) < \sup_{u \in N_\varepsilon} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) - 2\varepsilon_0. \quad (2.40)$$

Para $\nu = \mu_{\alpha,\theta,\beta}$ e escolhendo ε_0 como acima, tomemos $\delta > 0$ tal que (2.39) seja válido. Portanto, combinando (2.39) e (2.40), para todo $\mu \in [\mu_{\alpha,\theta,\beta}, \mu_{\alpha,\theta,\beta} + \delta)$, vale

$$\begin{aligned} \sup_{u \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_\mu(u) &\leq \varepsilon_0 + \sup_{u \in N_{2\varepsilon} \setminus N_\varepsilon} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) \\ &< \sup_{u \in N_\varepsilon} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u) - \varepsilon_0 \\ &\leq \sup_{u \in N_\varepsilon} I_\mu(u). \end{aligned}$$

Isso mostra (2.36). Agora, para $\mu \in [\mu_{\alpha,\theta,\beta}, \mu_{\alpha,\theta,\beta} + \delta)$, seja $(u_j) \subset N_\varepsilon$ uma sequência maximizante para $A_\mu^\sharp$, isto é, $I_\mu(u_j) \rightarrow A_\mu^\sharp$ quando $j \rightarrow \infty$, podemos supor que $u_j \rightharpoonup u$ fraco em $X_{1,w_0}^{1,p}$ e $u_j(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. em $[0, 1]$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $(v_j) \subset K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}$ satisfazendo $\|u_j - v_j\|_{X_{w_0}} \leq \varepsilon$. Por compacidade, a menos de uma subsequência, temos $v_j \rightarrow v$ forte em $X_{1,w_0}^{1,p}$ para algum $v \in K_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}$. Em particular, v é solução de (2.23) e o Lema 2.6 nos dá que $v \in L^\infty(0, 1)$. Defina $w_j = u_j - v_j + v$ e veja que $w_j - u_j \rightarrow 0$ forte em $X_{1,w_0}^{1,p}$. Utilizando a convexidade da função $x \mapsto x^q$, $x \geq 0$ com $q > 1$, para $\tau > 0$, temos

$$(x + y)^q \leq (1 + \tau)^{\frac{q-1}{q}} x^q + (1 - (1 + \tau)^{-\frac{1}{q}})^{1-q} y^q, \quad x, y \geq 0, \quad (2.41)$$

ver Apêndice Teorema 2. Segue que,

$$\begin{aligned} |w_j|^q &\leq (|v| + |u_j - v_j|)^q \\ &\leq (1 + \tau)^{\frac{q-1}{q}} \|v\|_{L^\infty}^q + (1 - (1 + \tau)^{-\frac{1}{q}})^{1-q} \|u_j - v_j\|_{X_{w_0}}^q \left| \frac{u_j - v_j}{\|u_j - v_j\|_{X_{w_0}}} \right|^q \\ &\leq (1 + \tau)^{\frac{q-1}{q}} \|v\|_{L^\infty}^q + (1 - (1 + \tau)^{-\frac{1}{q}})^{1-q} \varepsilon^q \left| \frac{u_j - v_j}{\|u_j - v_j\|_{X_{w_0}}} \right|^q. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Escolhendo $q = p'/(1 - \beta)$, $\tau = 1$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $2\mu(1 - 2^{-\frac{1}{q}})^{1-q} \varepsilon^q \leq \mu_{\alpha,\theta,\beta}$ para todo $\mu \in [\mu_{\alpha,\theta,\beta}, \mu_{\alpha,\theta,\beta} + \delta)$, de (2.10) e (2.42), temos que

$$\int_0^1 e^{2\mu|w_j|^{\frac{p'}{1-\beta}}} d\lambda_\theta < C$$

de modo uniforme. Assim, pelo Teorema da Convergência de Vitali $I_\mu(w_j) \rightarrow I_\mu(u)$ e a continuidade uniforme local nós da que $I_\mu(w_j) - I_\mu(u_j) \rightarrow 0$. Portanto, $I_\mu(u) = A_\mu^\sharp$. Além disso, pela semi-continuidade inferior da norma temos $\|u - v\|_{X_{w_0}} \leq \varepsilon$ e utilizando que $\|v\|_{X_{w_0}} = 1$, temos

$$\begin{aligned} \left\| v - \frac{u}{\|u\|_{X_{w_0}}} \right\|_{X_{w_0}} &\leq \|v - u\|_{X_{w_0}} + |1 - \|u\|_{X_{w_0}}| \\ &= \|v - u\|_{X_{w_0}} + |\|v\|_{X_{w_0}} - \|u\|_{X_{w_0}}| \\ &\leq 2\|v - u\|_{X_{w_0}} \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Isso implica que $u/\|u\|_{X_{w_0}} \in \overline{N}_{2\varepsilon}$, e de (2.36), obtemos $I_\mu\left(u/\|u\|_{X_{w_0}}\right) \leq A_\mu^\sharp = I_\mu(u)$.

Logo, concluímos que $\|u\|_{X_{w_0}} = 1$. Assim, $u \in \Sigma$, segue então que $u \in \overline{N}_\varepsilon$. Contudo, por (2.36), devemos ter que $u \in N_\varepsilon$, e $A_\mu^\sharp$ é atingido em N_ε . Finalmente, se $(u_j) \subset K_\mu$ com $u_j \rightharpoonup u$, pelo argumento acima, $u_j \rightarrow u$ forte, e $u \in K_\mu$. O que mostra que K_μ é compacto. $\square$

Passamos agora à demonstração do principal resultado deste capítulo, que consiste na extensão do resultado de Struwe [49] ao contexto de dimensão fracionária com peso logarítmico.

Teorema 2.1. *Existe $\beta^* \in (0, 1)$ tal que para qualquer $\beta \in (0, \beta^*)$ existe $\mu^\sharp > \mu_{\alpha, \theta, \beta}$ onde I_μ admite um maximizante local u_μ em Σ para qualquer $\mu \in (0, \mu^\sharp)$.*

Demonstração. Da discussão da seção 2.3, para $\mu < \mu_\beta$, existe um maximizante para o funcional I_μ restrito a Σ . No caso crítico $\mu = \mu_{\alpha, \theta, \beta}$, como pode ser visto em [53] o funcional I_{μ_β} admite uma função maximizante quando restrito á Σ com $\beta \in (0, \beta^*)$, com $\beta^* > 0$ suficientemente pequeno. Agora, no caso supercrítico, o Lema 2.9 garante que existe $\mu^\sharp > \mu_{\alpha, \theta, \beta}$ tal que o funcional I_μ admite um maximizante local quando restrito a Σ para todo $\mu \in (\mu_{\alpha, \theta, \beta}, \mu^\sharp)$. $\square$

Como consequência do Teorema 2.1, o funcional (2.13) admite um ponto crítico restrito ao conjunto Σ , que corresponde a um maximizante global quando $\mu \leq \mu_{\alpha, \theta}$ e um maximizante local quando $\mu \in (\mu_{\alpha, \theta}, \mu^\sharp)$.

Capítulo 3

Pontos críticos para o funcional de Moser sob restrição do tipo Tintarev

Neste capítulo, exploraremos a existência de pontos críticos do funcional de Moser, definido em espaços de dimensão fracionária $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. O estudo será feito sob a restrição do tipo Tintarev.

3.1 Desigualdade de Trudinger-Moser do tipo Tintarev

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e de fronteira suave. Definindo

$$\lambda_{1,n} := \inf_{u \in W_0^{1,n}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_n^n}{\|u\|_n^n}.$$

Utilizando técnicas de análise de *blow-up*, Adimurthi e Druet [2] mostraram a seguinte versão da desigualdade de Trudinger-Moser (1.2) quando $n = 2$,

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\} \\ \|\nabla u\|_2 \leq 1}} \int_{\Omega} e^{4\pi(1+\xi\|u\|_2^2)u^2} dx < \infty, \quad (3.1)$$

válida para todo $0 \leq \xi < \lambda_1$. Quando $\xi \geq \lambda_1$, o supremo (3.1) se torna infinito. A existência de funções extremais para (3.1) foi posteriormente demonstrada por Yang [55]. Em um trabalho subsequente Yang [54] generalizou esses resultados para $n \geq 3$, provando

que

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,n}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_n \leq 1}} \int_{\Omega} e^{\mu_n(1+\xi\|u\|_n^n)^{1/(n-1)}|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx < \infty \quad (3.2)$$

para $0 \leq \xi < \lambda_1$. Além disso, utilizando análise blow-up ele também mostrou a existência de uma função extremal para (3.2).

Foi obtido por de Oliveira e do Ó [16] uma extensão de (3.2) para os espaços de dimensão fracionária $X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$. Precisamente, foi mostrado que

$$\sup_{\substack{u \in X_R^{1,p}(\alpha, \theta) \\ \|u\|_X \leq 1}} \int_0^R e^{\mu_{\alpha, \theta}(1+\xi\|u\|_{L_\theta^p}^p)^{1/(p-1)}|u|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta < \infty \quad (3.3)$$

se, e somente se, $0 \leq \xi < \lambda_{\alpha, \theta}$, onde

$$\lambda_{\alpha, \theta} := \inf_{X_R^{1,p}(\alpha, \theta) \setminus \{0\}} \frac{\|u'\|_{L_\alpha^p}^p}{\|u\|_{L_\theta^p}^p}.$$

Além disso, eles também estabeleceram a existência de uma função extremal $v \in X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$ para (3.3).

Em um trabalho recente, Nguyen [39] apresentou uma extensão para a desigualdade clássica de Trudinger–Moser (1.2), expressa pela seguinte estimativa

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,n}(\Omega) \\ (\|\nabla u\|_n^n - \xi\|u\|_n^n)^{\frac{1}{n}} \leq 1}} \int_{\Omega} e^{\mu_n|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx < \infty. \quad (3.4)$$

Ele mostrou também a existência de uma função extremal para (3.4). A desigualdade (3.4) é mais forte do que (3.2), como será mostrado ao final do capítulo no contexto de espaços de dimensão fracionária. No caso bidimensional, uma desigualdade em um contexto semelhante foi proposta inicialmente por Tintarev [50], em um contexto mais geral, sendo dada por

$$\sup_{\substack{u \in C_0^\infty(\Omega) \\ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \psi(u) \leq 1}} \int_{\Omega} e^{4\pi u^2} dx < \infty, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

com $\psi(u) = \int_{\Omega} V(x)u^2 dx$ para certos potenciais $V > 0$, incluindo o caso particular

$$V(r) = \frac{1}{4r^2(\log \frac{1}{r})^2 \max\{\sqrt{\log \frac{1}{r}}, 1\}}.$$

Para simplificar, iremos considerar $R = 1$ no espaço $X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$. Sejam $0 \leq \xi < \lambda_{\alpha, \theta}$ e $u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$, definamos

$$H_\xi(u) = \left(\|u'\|_{L_\alpha^p}^p - \xi \|u\|_{L_\theta^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.5)$$

Considere o funcional $I_\mu : X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I_\mu(u) = \int_0^1 e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta.$$

Observamos que por [16] o funcional I_μ está bem definido. O principal objetivo deste capítulo é mostrar que o funcional I_μ admite um ponto crítico restrito ao conjunto

$$\Sigma_\xi = \{u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) ; H_\xi(u) = 1\},$$

na condição subcrítica $\mu < \mu_{\alpha, \theta}$. Nesse trabalho não iremos investigar a condição a condição crítica $\mu = \mu_{\alpha, \theta}$ ou supercrítica $\mu > \mu_{\alpha, \theta}$. Esses casos são objetos de investigação futura que se encontram em estágio avançado de desenvolvimento.

3.2 Pontos críticos para restrições do tipo Tintarev

Para cada $\mu < \mu_{\alpha, \theta}$ considere

$$C_\mu = \sup\{I_\mu(u) : u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \text{ e } H_\xi(u) \leq 1\}. \quad (3.6)$$

Neste capítulo, nosso objetivo é demonstrar que $C_\mu < \infty$ e que existe uma função extremal $u_\mu \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. Esse resultado implica, em particular, na existência de um ponto crítico do funcional I_μ restrito ao conjunto Σ_ξ .

Inicialmente apresentaremos a seguinte estimativa do tipo Lions.

Lema 3.1. *Suponha que $0 \leq \xi < \lambda_{\alpha, \theta}$. Seja $u_j \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ tal que $H_\xi(u_j) = 1$ e $u_j \rightharpoonup u_0$ em $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. Então, para qualquer $0 < m < (1 - H_\xi^p(u_0))^{-\frac{1}{p-1}}$, temos*

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{\mu_{\alpha, \theta} m |u_j|^{p'}} d\lambda_\theta < \infty. \quad (3.7)$$

Demonstração. Suponha que $u_0 \equiv 0$. Então, pela imersão (2.4), temos que $\|u_j'\|_{L_\alpha^p}^p = 1 + \xi \|u_j\|_{L_\theta^p}^p \rightarrow 1$ quando $j \rightarrow \infty$. Como $H_\xi(u_0) = 0$, segue que $0 < m < 1$. Definindo $w_j = m^{\frac{p-1}{p}} u_j$, obtemos $\|w_j'\|_{L_\alpha^p}^p \leq m^{p-1} < 1$ para j suficientemente grande. A conclusão decorre diretamente da desigualdade de Trudinger-Moser (2.9) aplicada a sequência w_j .

Suponha $\mathbf{u}_0 \neq 0$, temos $\|\mathbf{u}'_j\|_{L_\alpha^p}^p = 1 + \xi\|\mathbf{u}_j\|_{L_\theta^p}^p \rightarrow 1 + \xi\|\mathbf{u}_0\|_{L_\theta^p}^p$ quando $j \rightarrow \infty$. Denote por $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j/\|\mathbf{u}'_j\|_{L_\alpha^p}$, então $\|\mathbf{w}'_j\|_{L_\alpha^p}^p = 1$ e $\mathbf{w}_j \rightarrow \mathbf{w}_0 := \mathbf{u}_0/(1 + \xi\|\mathbf{u}_0\|_{L_\theta^p}^p)^{1/p}$ em $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. Temos

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{\mu_{\alpha, \theta} q |\mathbf{w}_j|^{p'}} d\lambda_\theta < \infty \quad (3.8)$$

para qualquer $0 < q < (1 - \|\mathbf{w}'_0\|_{L_\alpha^p}^p)^{-\frac{1}{p-1}}$, veja Apêndice Teorema 9. Observe que, para $m < (1 - H_\xi^p(\mathbf{u}_0))^{-\frac{1}{p-1}}$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} m \|\mathbf{u}'_j\|_{L_\alpha^p}^{\frac{p}{p-1}} &= m(1 + \xi\|\mathbf{u}_0\|_{L_\theta^p}^p)^{\frac{1}{p-1}} \\ &< \left(\frac{1 + \xi\|\mathbf{u}_0\|_{L_\theta^p}^p}{1 - \|\mathbf{u}'_0\|_{L_\alpha^p}^p + \xi\|\mathbf{u}_0\|_{L_\theta^p}^p} \right)^{\frac{1}{p-1}} = (1 - \|\mathbf{w}_0\|_{L_\theta^p}^p)^{-\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Podemos escolher $q < (1 - \|\mathbf{w}_0\|_{L_\theta^p}^p)^{-\frac{1}{p-1}}$ de modo que $p\|\mathbf{u}'_j\|_{L_\alpha^p}^{p'} < q$, para todo j suficientemente grande. Além disso, vale a seguinte estimativa

$$\int_0^1 e^{\mu_{\alpha, \theta} m |\mathbf{u}_j|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta = \int_0^1 e^{\mu_{\alpha, \theta} m \|\mathbf{u}'_j\|_{L_\alpha^p}^{\frac{p}{p-1}} |\mathbf{w}_j|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta < \int_0^1 e^{\mu_{\alpha, \theta} q |\mathbf{w}_j|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta,$$

para j suficientemente grande. A conclusão segue da aplicação de uma estimativa do tipo Lions à sequência $(\mathbf{w}_j)$, veja Apêndice Teorema 9. $\square$

Agora estamos aptos a enunciar e provar o principal resultado deste capítulo responsável pela existência de pontos críticos para o funcional I_μ restrito a Σ_ξ .

Teorema 3.1. *Se $\theta \geq \alpha$, para cada $\mu < \mu_{\alpha, \theta}$ temos $C_\mu < \infty$. Além disso, existe uma função não-negativa $\mathbf{u}_\mu \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ tal que $H_\xi(\mathbf{u}_\mu) = 1$ e $C_\mu = I_\mu(\mathbf{u}_\mu)$. Em particular, I_μ admite um ponto crítico sob a restrição Σ_ξ . Além disso, $\mathbf{u}_\mu \in C^1[0, 1]$ e satisfaz*

$$\begin{cases} \int_0^1 |\mathbf{u}'_\mu|^{p-2} \mathbf{u}'_\mu v' d\lambda_\alpha = \frac{1}{\alpha_\mu} \int_0^1 \left(e^{\mu \mathbf{u}_\mu^{\frac{p}{p-1}}} \mathbf{u}_\mu^{\frac{1}{p-1}} + \xi \mathbf{u}_\mu^{p-1} \right) v d\lambda_\theta, \\ \alpha_\mu = \int_0^1 e^{\mu \mathbf{u}_\mu^{\frac{p}{p-1}}} \mathbf{u}_\mu^{\frac{p}{p-1}} d\lambda_\theta, \\ \mathbf{u}_\mu \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta), \mathbf{u}_\mu \geq 0, H_\xi(\mathbf{u}_\mu) = 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

para toda $v \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$.

Demonstração. Seja $(\mathbf{u}_j) \subset X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ uma sequência maximizante para C_μ , ou seja, $H_\xi(\mathbf{u}_j) \leq 1$ e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{\mu |\mathbf{u}_j|^{p'}} d\lambda_\theta = C_\mu. \quad (3.10)$$

Note que $|u_j|' = \text{sgn}(u_j)|u_j|$ portanto, $H_\xi(|u_j|) \leq H_\xi(u_j) \leq 1$, segue que $|u_j|$ também é uma sequência maximizante para C_μ . Assim, podemos substituir u_j por $|u_j|$ e assumir que u_j é não-negativa. Pela definição de $\lambda_{\alpha,\theta}$, temos

$$1 \geq \|u_j'\|_{L_\alpha^p}^p - \xi \|u_j\|_{L_\theta^p}^p \geq \|u_j'\|_{L_\alpha^p}^p - \xi \frac{\|u_j'\|_{L_\alpha^p}^p}{\lambda_{\alpha,\theta}} \geq \left(1 - \frac{\xi}{\lambda_{\alpha,\theta}}\right) \|u_j'\|_{L_\alpha^p}^p.$$

Como $\xi < \lambda_{\alpha,\theta}$, a sequência (u_j) é limitada em $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. Portanto,

$$u_j \rightharpoonup u_\mu \quad \text{em } X_1^{1,p}(\alpha, \theta), \quad u_j \rightarrow u_\mu \quad \text{em } L_\theta^p, \quad u_j(r) \rightarrow u_\mu(r) \text{ q.t.p. em } (0, 1).$$

Da convergência fraca, obtemos $\|u_\mu'\|_{L_\alpha^p}^p \leq \liminf \|u_j'\|_{L_\alpha^p}^p$. Logo

$$H_\xi(u_\mu) = (\|u_\mu'\|_{L_\alpha^p}^p - \|u_\mu\|_{L_\theta^p}^p)^{1/p} \leq \liminf (\|u_j'\|_{L_\alpha^p}^p - \|u_j\|_{L_\theta^p}^p)^{1/p} = H_\xi(u_j) \leq 1.$$

Naturalmente, $u_\mu \geq 0$. Afirmamos que $u_\mu \not\equiv 0$. De fato, se $u_\mu \equiv 0$, temos

$$\limsup \|u_j'\|_{L_\alpha^p}^p \leq 1 + \xi \limsup \|u_j\|_{L_\theta^p}^p \leq 1.$$

Pela desigualdade de Trudinger-Moser (1.2), a sequência $e^{\mu|u_j|^{p'}}$ é uniformemente limitada em L_θ^q para $1 < q < \frac{\mu_{\alpha,\theta}}{\mu}$. Usando o Teorema de Convergência de Vitali, temos

$$C_\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{\mu|u_j|^{p'}} d\lambda_\theta = \int_0^1 d\lambda_\theta = |B_1|_\theta, \quad (3.11)$$

que é impossível, pelos resultados apresentados em [16, Seção 6]. Assim, concluímos nossa afirmação. Agora, iremos analisar o caso $u_\mu \not\equiv 0$. Pelo Lema 3.1, a sequência $e^{\mu|u_j|^{p'}}$ é limitada em L_θ^q para algum $q > 1$. Consequentemente, temos

$$C_\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{\mu|u_j|^{p'}} d\lambda_\theta = \int_0^1 e^{\mu|u_\mu|^{p'}} d\lambda_\theta.$$

Isso mostra que $C_\mu < \infty$, pois $e^{\mu|u|^{p'}} \in L_\theta^1$ para todo $\mu > 0$ e $u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. Além disso, u_μ é não-negativa e constitui uma função extremal para (3.6). Iremos verificar que $H_\xi(u_\mu) = 1$. De fato, se $H_\xi(u_\mu) < 1$, poderíamos escolher um $a > 1$ tal que $H_\xi(au_\mu) = 1$, daí

$$C_\mu \geq \int_0^1 e^{\mu|au_\mu|^{p'}} d\lambda_\theta > \int_0^1 e^{\mu|u_\mu|^{p'}} d\lambda_\theta = C_\mu,$$

uma contradição. Logo, $H_\xi(u_\mu) = 1$. Consequentemente, o funcional I_μ possui um ponto crítico, máximo global, quando restrito ao conjunto Σ_ξ , qualquer que seja $\mu \in (0, \mu_{\alpha,\theta})$.

Utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, u_μ satisfaz

$$\int_0^1 |u_\mu'|^{p-2} u_\mu' v d\lambda_\alpha = \frac{1}{\alpha_\mu} \int_0^1 \left(e^{\mu u_\mu^{p'}} u_\mu^{\frac{1}{p-1}} + \xi u_\mu^{p-1} \right) v d\lambda_\theta \quad (3.12)$$

para toda $v \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. Tomando $v = u_\mu$ em (3.12), obtemos a caracterização de α_μ . Para mostrar que u_μ é de classe $C^1[0, 1]$, considere em (3.9) a função teste v_ρ dada por

$$v_\rho(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq r \\ 1 + \frac{1}{\rho}(r - t), & \text{se } r \leq t \leq r + \rho \\ 0, & \text{se } t \geq r + \rho. \end{cases} \quad (3.13)$$

Fazendo $\rho \rightarrow 0$, obtemos

$$\omega_\alpha r^\alpha |u'_\mu|^{p-2} u'_\mu = \int_0^r \left(\frac{1}{\alpha_\mu} e^{\mu u_\mu^{p'}} u_\mu^{\frac{1}{p-1}} + \xi u_\mu^{p-1} \right) d\lambda_\theta. \quad (3.14)$$

Observamos que a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = |t|^{-\frac{p-2}{p-1}} t$ é precisamente a inversa da função $\phi(t) = |t|^{p-2} t$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto, segue que

$$-u'_\mu(r) = g \left(\frac{1}{r^\alpha \omega_\alpha} \int_0^r \left(\frac{1}{\alpha_\mu} e^{\mu u_\mu^{p'}} u_\mu^{\frac{1}{p-1}} + \xi u_\mu^{p-1} \right) d\lambda_\theta \right) \quad (3.15)$$

e assim, $u_\mu \in C^1(0, 1]$. Seja $h(r)$ a função definida por

$$h(r) = \frac{1}{r^\alpha} \int_0^r \left(\frac{1}{\alpha_\mu} e^{\mu u_\mu^{p'}} u_\mu^{\frac{1}{p-1}} + \xi u_\mu^{p-1} \right) d\lambda_\theta.$$

Usando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} h(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\alpha_\mu} e^{\mu u_\mu(r)^{p'}} u_\mu(r)^{\frac{1}{p-1}} + \xi u_\mu(r)^{p-1} \right) r^{\theta-\alpha+1} \omega_\theta = 0.$$

Como $\theta \geq \alpha$, temos $\lim_{r \rightarrow 0^+} h(r) = 0$, logo $u'_\mu(0) = 0$ e, conseqüentemente $u_\mu \in C^1[0, 1] \cap X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. $\square$

Para finalizar esse capítulo, observamos que, para $\mu < \mu_{\alpha, \theta}$, a estimativa obtida no Teorema 3.1

$$C_\mu = \sup_{\substack{u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \\ H_\xi(u) \leq 1}} \int_0^1 e^{\mu |u|^{p'}} d\lambda_\theta < \infty \quad (3.16)$$

é mais forte que a estimativa (3.3). De fato, seja $u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ com $\|u'\|_{L_\alpha^p}^p \leq 1$ tome $w = (1 + \xi \|u\|_{L_\theta^p}^p)^{\frac{1}{p}} u$. Utilizando que $1 \leq \xi < \lambda_{\alpha, \theta}$, temos

$$\begin{aligned} H_\xi^p(w) &= (1 + \xi \|u\|_{L_\theta^p}^p) \|u'\|_{L_\alpha^p}^p - \xi (1 + \xi \|u\|_{L_\theta^p}^p) \|u\|_{L_\theta^p}^p \\ &= \|u'\|_{L_\alpha^p}^p + \xi \|u\|_{L_\theta^p}^p \|u'\|_{L_\alpha^p}^p - \xi \|u\|_{L_\theta^p}^p - \xi^2 \|u\|_{L_\theta^p}^{2p} \\ &\leq \|u'\|_{L_\alpha^p}^p + \xi \|u\|_{L_\theta^p}^p (\|u'\|_{L_\alpha^p}^p - 1) \\ &\leq \|u'\|_{L_\alpha^p}^p \leq 1. \end{aligned}$$

Veja que aplicando a função w em (3.16), obtemos (3.3). De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{\mu|w|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta &= \int_0^1 e^{\mu(1+\xi\|u\|_{L_\theta^p}^p)^{\frac{1}{p}}|u|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta \\ &= \int_0^1 e^{\mu(1+\xi\|u\|_{L_\theta^p}^p)^{\frac{1}{p-1}}|u|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Isso implica que, sendo finito o supremo em (3.16), o supremo em (3.3) também será finito.

Capítulo 4

Existência de solução para um problema côncavo-convexo

Neste capítulo, estudamos a existência de solução para um problema associado ao operador L , dado em (2.5), com não linearidades de crescimento exponencial. Estendemos parte dos apresentados em [27]. A não linearidade $f(t)$ considerada é côncava para valores de t próximos de zero e convexa para t suficientemente grande. Essa mudança na geometria de $f(t)$ introduz desafios para a existência de solução do problema.

4.1 Problema elíptico quasilinear com crescimento exponencial crítico

Nesta seção, seguindo a abordagem apresentada por Giacomoni [27], iremos estabelecer a existência de uma solução para o seguinte problema elíptico quasilinear

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(u), & \text{em } (0, 1) \\ u > 0, & \text{em } (0, 1) \\ u(1) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $Lu := -r^{-\theta}(r^\alpha|u'|^p u')'$ e $\lambda > 0$. Iremos supor que $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é da forma $f(t) = h(t)e^{|t|^{p'}}$, e que existem $\alpha \in (0, p-1)$ e $t_* \in (0, (p-2)^{\frac{1}{p'}})$, $p \geq 3$ tais que h e f satisfazem as propriedades:

(A1) $h \in C^1(0, \infty)$, $h(0) = 0$ e $h(t) > 0$ se $t > 0$;

(A2) $t \mapsto f(t)$ é não-decrescente em $(0, \infty)$;

(A3) $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-\alpha} h(t) > 0$ se $\alpha \geq \frac{1}{p-1}$, e $t \mapsto t^{1-p} f(t)$ é não-crescente em $(0, t_*)$;

(A4) $\liminf_{t \rightarrow \infty} h(t) e^{\epsilon |t|^{p'}} = \infty$ e $\limsup_{t \rightarrow \infty} h(t) e^{-\epsilon |t|^{p'}} = 0$, para todo $\epsilon > 0$;

(A5) $f(t) \leq (1 + |t|^q) e^{|t|^{p'}}$, para todo $t \geq 0$ e algum $q > 1$.

Por exemplo a função $h(t) = t^{\frac{1}{p-1}}$ satisfaz (A1)-(A5). Nosso interesse nesse problema é que ele possui uma relação com a existência de pontos críticos para o funcional de Moser sob restrição. Sejam $I : X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \rightarrow \mathbb{R}$ e M_μ definidos por

$$I(u) = \int_0^1 e^{|u|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta \quad \text{e} \quad M_\mu = \{u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) : \|u\|_X^p = \mu\}.$$

Utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange para operadores em espaços de Banach, um ponto crítico positivo de I restrito a M_μ deve satisfazer

$$\int_0^1 |u'|^{p-2} u' v' d\lambda_\alpha = \lambda' \int_0^1 e^{|u|^{\frac{p}{p-1}}} |u|^{\frac{1}{p-1}-1} u v d\lambda_\theta, \quad \forall v \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta),$$

onde $\lambda' = \frac{\lambda}{p-1}$. Um ponto crítico positivo deve satisfazer,

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2} u' r^\alpha)' = \lambda |u|^{\frac{1}{p-1}} e^{|u|^{p'}} r^\theta, & \text{em } (0, 1) \\ u > 0, & \text{em } (0, 1) \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *Seja $f(t) = h(t) e^{|t|^{p'}}$ suponha que f satisfaz as hipóteses (A1)-(A5). Então, existe λ^* tal que o problema (4.1) possui solução fraca se $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

A demonstração desse resultado é delicada e envolve um estudo detalhado do problema de autovalores associado ao operador L . O uso do método da iteração monótona em conjunto com a Teoria do Minimax, além de estimativas de regularidade.

Considere o funcional associado ao problema, $E_\lambda : X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{p} \int_0^1 |u'|^p r^\alpha dr - \lambda \int_0^1 F(u) r^\theta dr, \quad \text{onde} \quad F(t) = \int_0^t f(s) ds. \quad (4.3)$$

Veja que o funcional $\tilde{E}_{\tilde{\lambda}} : X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\tilde{E}_{\tilde{\lambda}}(u) = \frac{1}{p} \|u\|_X^p - \tilde{\lambda} \int_0^1 F(u) d\lambda_\theta, \quad \tilde{\lambda} > 0$$

satisfaz a identidade

$$\tilde{E}_{\tilde{\lambda}}(u) = \omega_{\alpha} E_{\lambda}(u), \quad \text{se } \tilde{\lambda} = \lambda \frac{\omega_{\alpha}}{\omega_{\theta}}. \quad (4.4)$$

Para maior simplicidade, ao longo deste capítulo, trabalharemos com o funcional E_{λ} , sem as constantes de normalização ω_{α} e ω_{θ} . No entanto, a partir de (4.4), os resultados obtidos podem ser recuperados para $\tilde{E}_{\tilde{\lambda}}$, se necessário.

4.2 Problema de autovalor para o operador L

Abordaremos o problema de autovalores associado ao operador elíptico quasilinear L definido em (2.5) sob a condição de Trudinger-Moser

$$\begin{cases} Lu = \lambda |u|^{p-2} u, & \text{em } (0, 1) \\ u(1) = u'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

para alguma autofunção $u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \setminus \{0\}$. Definamos

$$\lambda_1 := \lambda_1(\alpha, \theta, p) = \inf_{u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 |u'|^p r^{\alpha} dr}{\int_0^1 |u|^p r^{\theta} dr}. \quad (4.6)$$

Pelo mergulho (2.4), temos $\lambda_1 > 0$. Mais especificamente, vale o seguinte resultado, cuja a prova é baseada no caso Sobolev ($\alpha - p + 1 > 0$) em [8, Proposição 3.1].

Lema 4.1. *O ínfimo λ_1 é atingido por uma função $\varphi_1 \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$, e λ_1 é um autovalor do problema (4.5). Além disso, $\varphi_1(r) \neq 0$ para todo $r \in [0, 1]$ (podemos supor então que $\varphi_1 > 0$), λ_1 é o menor autovalor de (4.5).*

Demonstração. Seja $(u_j) \subset X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ uma sequência tal que

$$\frac{\int_0^1 |u_j'|^p r^{\alpha} dr}{\int_0^1 |u_j|^p r^{\theta} dr} \rightarrow \lambda_1.$$

Seja

$$v_j := \frac{u_j}{\left(\int_0^1 |u_j'|^p r^{\alpha} dr \right)^{1/p}}.$$

Assim, (v_j) é uma sequência limitada em $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. Pela imersão (2.4), temos

$$v_j \rightharpoonup v \text{ em } X_1^{1,p}(\alpha, \theta), \quad v_j \rightarrow v \text{ em } L_{\theta}^p, \quad \text{e} \quad v_j(r) \rightarrow v(r) \text{ q.t.p. } r \in [0, 1].$$

Pela semicontinuidade inferior da norma, obtemos

$$\int_0^1 |v'|^p r^{\alpha} dr \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 |v_j'|^p r^{\alpha} dr = 1,$$

e, como $\int_0^1 |v_j|^p r^\theta dr \rightarrow \frac{1}{\lambda_1}$, segue que

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 |v'|^p r^\alpha dr}{\int_0^1 |v|^p r^\theta dr} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 |u_j'|^p r^\alpha dr}{\int_0^1 |u_j|^p r^\theta dr} = \lambda_1.$$

Portanto, o ínfimo é atingido.

Inicialmente, provaremos que uma solução w de (4.5) é de classe C^2 . De fato, sendo solução de (4.5), temos que

$$\int_0^1 |w'|^{p-2} w' \varphi' r^\alpha dr = \lambda_1 \int_0^1 |w|^{p-2} w \varphi r^\theta dr, \quad \forall \varphi \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta). \quad (4.7)$$

Para cada $r \in (0, 1)$ e $\rho > 0$, considere $\varphi_\rho \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ por

$$\varphi_\rho(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < s \leq r \\ 1 + \frac{1}{\rho}(r - s), & \text{se } r \leq s \leq r + \rho \\ 0, & \text{se } s \geq r + \rho. \end{cases} \quad (4.8)$$

Usando φ_ρ como função teste em (4.7) e fazendo $\rho \rightarrow 0$, temos

$$-|w'|^{p-2} w' = \lambda_1 \frac{1}{r^\alpha} \int_0^r |w|^{p-2} w s^\theta ds. \quad (4.9)$$

Segue que w é de classe C^2 .

Suponha, por contradição, que φ_1 se anule para algum $r_0 \in [0, 1)$. Se $r_0 = 0$, fazendo $r \rightarrow 0$ em (4.9), obtemos $\varphi_1'(0) = 0$, o que implica que $\varphi_1 \equiv 0$. Assim, podemos supor que $r_0 > 0$. Como $|\varphi_1|$ minimiza a razão (4.6), segue que $|\varphi_1|$ é solução de (4.5) e, portanto, pertence a de classe C^2 em $(0, 1)$. Desse modo, temos $|\varphi_1(r_0)| = |\varphi_1'(r_0)| = 0$, o que implica $\varphi_1 \equiv 0$. Podemos, então, supor que $\varphi_1 > 0$.

Para mostrar a unicidade, consideremos φ_1 e φ_2 autofunções associadas a λ_1 . Temos $\varphi_1'(1)$ e $\varphi_2'(1)$ são diferentes de 0. De fato, caso contrário, de acordo com (4.9)

$$0 = -r^\alpha |\varphi_i'(1)|^{p-2} \varphi_i'(1) = \lambda_1 \int_0^1 |\varphi_i|^{p-2} \varphi_i s^\theta ds, \quad i = 1, 2,$$

o qual é uma contradição com o fato de φ_i ser positivo para $i = 1, 2$. Portanto, existe uma constante $\alpha \neq 0$ tal que $\varphi_1(1) = \alpha \varphi_2(1)$. Dessa forma, φ_1 e $\alpha \varphi_2$ são soluções da E.D.O.

$$\begin{cases} Lu = \lambda_1 |u|^{p-2} u, & \text{em } (0, 1) \\ u(1) = 0 \\ u'(1) = c. \end{cases} \quad (4.10)$$

Pelo princípio de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, concluímos que $\varphi_1(r) = \alpha\varphi_2(r)$ em $(0, 1)$. $\square$

Lema 4.2. *Qualquer autofunção φ associada a um autovalor $0 < \lambda \neq \lambda_1$ muda de sinal.*

Demonstração. Seja $\varphi \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \setminus \{0\}$ uma autofunção de (4.5) associada ao autovalor positivo $\lambda \neq \lambda_1$. Temos que

$$\int_0^1 |\varphi'|^{p-2} \varphi' v' r^\alpha dr = \lambda \int_0^1 |\varphi|^{p-2} \varphi v r^\theta dr, \quad \forall v \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta). \quad (4.11)$$

Utilizando φ_ρ definida em (4.8) como a função teste em (4.11) e fazendo $\rho \rightarrow 0$, obtemos

$$-r^\alpha |\varphi'|^{p-2} \varphi' = \lambda \int_0^r |\varphi|^{p-2} \varphi s^\theta ds.$$

Suponha, por contradição, que $\varphi \geq 0$, o caso $\varphi \leq 0$ é feito de maneira inteiramente análoga. Nesse caso, a identidade acima implica que φ é decrescente, e assim $\varphi > 0$ em $(0, 1)$. Além disso, como $\varphi(1) = 0$, temos

$$\varphi(r) = \int_r^1 \left(\frac{\lambda}{t^\alpha} \int_0^t |\varphi|^p s^\theta ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt.$$

Segue que $\varphi \in C^2(0, 1)$.

Seja $\varphi_1 > 0$ a autofunção associada ao autovalor λ_1 . Para cada $\epsilon > 0$, defina

$$H(\varphi_1, \varphi + \epsilon) = |\varphi'_1|^p + (p-1) \frac{\varphi_1^p}{(\varphi + \epsilon)^p} |\varphi'|^p - p \varphi'_1 \frac{\varphi_1^{p-1}}{(\varphi + \epsilon)^{p-1}} |\varphi'|^{p-2} \varphi'. \quad (4.12)$$

Utilizando a desigualdade de Young, $ab \leq \frac{|a|^p}{p} + (p-1) \frac{|b|^{\frac{p}{p-1}}}{p}$, com $a = \varphi'_1$ e $b = (|\varphi'|^{p-2} \varphi' \varphi_1^{p-1})/(\varphi + \epsilon)^{p-1}$, obtemos que $H(\varphi_1, \varphi + \epsilon) \geq 0$. Podemos escrever

$$H(\varphi_1, \varphi + \epsilon) = |\varphi'_1|^p - \left(\frac{\varphi_1^p}{(\varphi + \epsilon)^{p-1}} \right)' |\varphi'|^{p-2} \varphi'.$$

Tomando a função teste $\varphi_1^p/(\varphi + \epsilon)^{p-1}$ na equação (4.11), e que φ_1 satisfaz

$$\int_0^1 |\varphi'_1|^p r^\alpha dr = \lambda_1 \int_0^1 |\varphi_1|^p r^\theta dr, \quad (4.13)$$

obtemos,

$$0 \leq \int_0^1 H(\varphi_1, \varphi + \epsilon) r^\alpha dr = \int_0^1 \varphi_1^p \left(\lambda_1 - \lambda \frac{\varphi^p}{(\varphi + \epsilon)^p} \right) r^\theta dr.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\int_0^1 \varphi_1^p (\lambda_1 - \lambda) r^\theta dr \geq 0,$$

o qual é uma contradição com o fato de $\lambda_1 < \lambda$ e φ_1 ser não-negativa. Logo, uma autofunção associada a um autovalor diferente de λ_1 deve necessariamente mudar de sinal. $\square$

Lema 4.3. *O primeiro autovalor λ_1 é isolado, isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que o intervalo $(\lambda_1, \lambda_1 + \epsilon)$ não possui nenhum outro autovalor de (4.5).*

Demonstração. Por contradição, suponha que exista uma sequência decrescente λ_j de autovalores positivos satisfazendo $\lambda_j \rightarrow \lambda_1$. Seja (u_j) a sequência correspondente de autofunções, e defina $v_j = u_j / (\int_0^1 |u_j|^p r^\theta dr)^{\frac{1}{p}}$ com $p > 1$. A menos de subsequência, temos que

$$v_j \rightharpoonup v \text{ em } X_1^{1,p}(\alpha, \theta), \quad v_j \rightarrow v \text{ em } L_0^p \text{ e } v_j(r) \rightarrow v(r) \text{ q.t.p. } (0, 1). \quad (4.14)$$

Segue que,

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 |v_j|^p r^\theta dr \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 |v|^p r^\theta dr \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, utilizando o Lema de Fatou,

$$\int_0^1 |v'|^p r^\alpha dr \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |v'_j|^p r^\alpha dr = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda_1 = \lambda_1 \int_0^1 |v|^p r^\theta dr.$$

Por outro lado, sendo λ_1 o menor autovalor, temos

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 |v'_j|^p r^\alpha dr}{\int_0^1 |v_j|^p r^\theta dr}.$$

Portanto, como $v_j \rightharpoonup v$ e $1 = (\int_0^1 |v|^p r^\theta dr)^{\frac{1}{p}}$ então, v é uma autofunção associada ao autovalor λ_1 . Segue que, $v > 0$ ou $v < 0$. Iremos considerar o caso $v > 0$, o caso $v < 0$ é tratado de maneira inteiramente análoga. Aplicando o Teorema de Egorov's, temos que (v_j) converge uniformemente para v em um conjunto cujo complementar tem medida arbitrariamente pequena. Portanto, existe $I \subset (0, 1)$ onde a medida de $(0, 1) \setminus I$ é arbitrariamente pequena e $v_j > 0$ em I para j suficientemente grande, uma contradição com a mudança de sinal da autofunção. $\square$

4.3 Método da iteração monótona e princípio de comparação

O método iterativo monótono é uma ferramenta clássica utilizada na análise de equações diferenciais, em especial na obtenção de soluções para problemas não lineares. A ideia central consiste na construção de duas sequências (uma crescente e outra decrescente) que convergem monotonicamente para soluções mínimas e máximas de um determinado

problema. Iremos assegurar que o método iterativo monótono pode ser aplicado à classe de operadores L .

Considere o problema

$$\begin{cases} Lu = h(r, u), & \text{em } (0, 1) \\ u(1) = u'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

onde a função $h : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz:

(h_1): $h(r, \cdot)$ é contínua em q.t.p. $r \in (0, 1)$, e $h(\cdot, s)$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$ e limitada se s pertence a conjuntos limitadas.

(h_2): Existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e crescente tal que $g(0) = 0$, e a aplicação $s \mapsto h(r, s) + g(s)$ é não-decrescente q.t.p. se $r \in (0, 1)$.

Definição 4.1. A função $\underline{u} \in L^\infty \cap X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ é uma subsolução fraca de (4.15) se

$$\int_0^1 |\underline{u}'|^{p-2} \underline{u}' v' r^\alpha dr \leq \int_0^1 h(r, \underline{u}) v r^\theta dr, \quad \forall v \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta), \quad v \geq 0.$$

Similarmente, $\bar{u} \in L^\infty \cap X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ é dita ser uma supersolução fraca de (4.15) se

$$\int_0^1 |\bar{u}'|^{p-2} \bar{u}' v' r^\alpha dr \geq \int_0^1 h(r, \bar{u}) v r^\theta dr, \quad \forall v \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta), \quad v \geq 0.$$

Lema 4.4. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e não-decrescente tal que $g(0) = 0$.

Suponha que $u, v \in L^\infty \cap X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ satisfaçam

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |u'|^{p-2} u' \varphi' r^\alpha dr + \int_0^1 g(u) \varphi r^\theta dr \\ & \leq \int_0^R |v'|^{p-2} v' \varphi' r^\alpha dr + \int_0^1 g(v) \varphi r^\theta dr, \quad \forall \varphi \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \text{ com } \varphi \geq 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Então, $u \leq v$ q.t.p. em $(0, 1)$.

Demonstração. Sabemos que para $a, b \in \mathbb{R}$ e $p \geq 2$

$$2^{2-p} |b - a|^p \leq (|b|^{p-2} b - |a|^{p-2} a)(b - a). \quad (4.17)$$

Tomando $\varphi = (u - v)^+$ em (4.16), pela monotonicidade de g e da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} 0 & \geq \int_0^1 [|u'|^{p-2} u' - |v'|^{p-2} v'] ((u - v)^+)' r^\alpha dr + \int_0^1 [g(u) - g(v)] (u - v)^+ r^\theta dr \\ & \geq 2^{2-p} \int_{\{u \geq v\}} |u' - v'|^p r^\alpha dr + \int_{\{u \geq v\}} [g(u) - g(v)] (u - v)^+ r^\theta dr \\ & \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, temos a igualdade

$$2^{2-p} \int_{\{u \geq v\}} |u' - v'|^p r^\alpha dr + \int_{\{u \geq v\}} [g(u) - g(v)](u - v)^+ r^\theta dr = 0.$$

Veja que o integrando $|u' - v'|^p$ é não-negativo, o termo $[g(u) - g(v)](u - v)^+$ também é não-negativo, já que g é não-decrescente e, por hipótese, $u \geq v$. Desse modo, a soma de duas integrais não-negativas sendo igual a zero implica que cada uma delas é identicamente nula. Consequentemente, o conjunto $\{u \geq v\}$ possui medida nula. Daí, segue que $u \leq v$ q.t.p. no intervalo $(0, 1)$. $\square$

A demonstração do seguinte lema é semelhante à apresentada em [36, Lema 2.2], e iremos prová-lo aqui também para tornar a exposição mais completa e autossuficiente.

Lema 4.5. *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e crescente, tal que $g(0) = 0$. Para cada $f \in L_0^{p'}$, o problema*

$$\begin{cases} Lu + g(u) = f(r), & \text{em } (0, 1) \\ u(1) = u'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

possui uma única solução $u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. Além disso, o operador associado $T : L_0^{p'} \rightarrow X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$, $f \mapsto u$, é contínuo e não-decrescente.

Demonstração. Existência: Considere o funcional $\phi \in C^1(X_1^{1,p}(\alpha, \theta), \mathbb{R})$ definido por

$$\phi(u) := \frac{1}{p} \int_0^1 |u'|^p r^\alpha dr + \int_0^1 G(u) r^\theta dr - \int_0^1 f(r) u r^\theta dr,$$

onde $G(u) = \int_0^u g(t) dt$. Um ponto crítico $u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ de ϕ corresponde a uma solução fraca de (4.18), satisfazendo

$$\int_0^1 |u'|^{p-2} u' \varphi' r^\alpha dr + \int_0^1 g(u) \varphi r^\theta dr = \int_0^1 f(r) \varphi r^\theta dr, \quad \forall \varphi \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta).$$

Para demonstrar a existência de soluções, provaremos que ϕ admite um mínimo global. Primeiramente, mostremos que ϕ é coercivo. Pela desigualdade de Hölder e a continuidade da imersão $X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_0^p$ existe uma constante $c \geq 0$, tal que

$$\begin{aligned} \phi(u) &\geq \frac{1}{p} \int_0^1 |u'|^p r^\alpha dr - \left| \int_0^1 f(r) u r^\theta dr \right| \\ &\geq \frac{1}{p} \int_0^1 |u'|^p r^\alpha dr - \left(\int_0^1 |f(r)|^{p'} r^\theta dr \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^1 |u|^p r^\theta dr \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \frac{1}{p} \int_0^1 |u'|^p r^\alpha dr - C \left(\int_0^1 |f(r)|^{p'} r^\theta dr \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^1 |u'|^p r^\alpha dr \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Como $p > 1$, garantimos que $\phi(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\|_X \rightarrow +\infty$.

No que diz respeito à semicontinuidade inferior, observe que os funcionais

$$u \mapsto \int_0^1 |u'|^p r^\alpha dr \quad \text{e} \quad u \mapsto \int_0^1 f(r) u r^\theta dr$$

são contínuos. Por [8, Proposição 1.1], o funcional $u \mapsto \int_0^1 G(u) r^\theta dr$ é semicontínuo inferiormente. Portanto, ϕ é semicontínuo inferiormente e coercivo, logo existe um mínimo global em $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$.

Unicidade: Sejam $u_1, u_2 \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ soluções fracas de (4.18). Então,

$$\int_0^1 [(|u_1'|^{p-2} u_1' r^\alpha) - (|u_2'|^{p-2} u_2' r^\alpha)] \varphi' dr + \int_0^1 [g(u_1) - g(u_2)] \varphi r^\theta dr = 0.$$

Escolhendo $\varphi = (u_1 - u_2)^+$, sendo g crescente, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 [(|u_1'|^{p-2} u_1' r^\alpha) - (|u_2'|^{p-2} u_2' r^\alpha)] ((u_1 - u_2)^+)' dr + \int_0^1 [g(u_1) - g(u_2)] (u_1 - u_2)^+ r^\theta dr \\ &= \int_{u_1 \geq u_2} \frac{|u_1'|^{p-2} + |u_2'|^{p-2}}{2} |((u_1 - u_2)^+)'|^2 r^\alpha dr \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$+ \int_{u_1 \geq u_2} \frac{|u_1'|^{p-2} - |u_2'|^{p-2}}{2} (|u_1'|^2 - |u_2'|^2) r^\alpha dr \quad (4.20)$$

$$+ \int_{u_1 \geq u_2} [g(u_1) - g(u_2)] (u_1 - u_2)^+ r^\theta dr \geq 0. \quad (4.21)$$

Acima, utilizamos a seguinte identidade

$$|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b = \frac{|a|^{p-2} + |b|^{p-2}}{2} (a - b) + \frac{|a|^{p-2} - |b|^{p-2}}{2} (a + b),$$

bem como as igualdades

$$(u_1' - u_2') = ((u_1 - u_2)^+)', \quad \text{válida quando } u_1 \geq u_2,$$

e

$$(u_1' + u_2')(u_1' - u_2') = |u_1'|^2 - |u_2'|^2.$$

Portanto, $(u_1 - u_2)^+ = 0$ q.t.p. em $(0, 1)$, pois (4.19) e (4.20) são positivas e, como g crescente e $u_1 \geq u_2$, segue que $g(u_1) - g(u_2) \geq 0$. Daí, $u_1 \leq u_2$ q.t.p. em $(0, 1)$. Escolhendo $\varphi = (u_2 - u_1)^+$ e aplicando um argumento semelhante, obtemos $u_2 \leq u_1$ em $(0, 1)$. Portanto, o problema (4.18) admite uma única solução. Para a monotonicidade de T , sejam $f_1, f_2 \in L_\theta^{p'}$ tais que $f_1 \leq f_2$. Aplicando o Lema 4.4 às soluções correspondentes u_1, u_2 de (4.18) obtemos $u_1 \leq u_2$. $\square$

Lema 4.6. *Considere o problema (4.15) com h sob as condições (h_1) - (h_2) . Seja $\underline{u}, \bar{u} \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \cap L^\infty$ uma sub e supersolução do problema (4.15), respectivamente, com $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r)$ q.t.p. $(0, 1)$. Então, existe uma solução fraca mínima (respectivamente máxima) u_* (u^*) para o problema (4.15) no conjunto*

$$[\underline{u}, \bar{u}] = \{u \in L^\infty; \underline{u}(r) \leq u(r) \leq \bar{u}(r) \text{ q.t.p., em } (0, 1)\}.$$

Em particular, toda solução fraca $u \in [\underline{u}, \bar{u}]$ de (4.15) satisfaz $u_(r) \leq u(r) \leq u^*(r)$ q.t.p. em $(0, 1)$.*

Demonstração. Considere o conjunto $[\underline{u}, \bar{u}]$ dotado da convergência q.t.p. Defina o operador

$$Sv = h(\cdot, v(\cdot)) + g(v(\cdot)) \in L^\infty \subset L_{\theta}^{p'}, \quad \forall \quad v \in [\underline{u}, \bar{u}].$$

De (h_1) - (h_2) , S é não-decrescente e limitada. Além disso, para $v_n, v \in [\underline{u}, \bar{u}]$, temos

$$\|Sv_n - Sv\|_{L_{\theta}^{p'}}^{p'} = \int_0^1 |h(r, v_n) + g(v_n) - h(r, v) - g(v)|^{p'} r^{\theta} dr.$$

Portanto, se $v_n \rightarrow v$ q.t.p. em $(0, 1)$, então, pelo Teorema da Convergência Dominada temos $\|Sv_n - Sv\|_{L_{\theta}^{p'}}^{p'} \rightarrow 0$ e S é contínuo. Seja $F : [\underline{u}, \bar{u}] \rightarrow X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ definida por $F = T \circ S$ onde T é definida no Lema 4.5. Logo, F é um operador contínuo e não-decrescente. Para cada $v \in [\underline{u}, \bar{u}]$, $F(v)$ é a única solução fraca para o problema

$$\begin{cases} Lu + g(u) = h(r, v) + g(v), & \text{em } (0, 1) \\ u(1) = u'(0) = 0. \end{cases}$$

Seja $u_1 = F(\underline{u})$ e $u^1 = F(\bar{u})$. Para todo $\varphi \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$, $\varphi \geq 0$, temos

$$\int_0^1 |u_1'|^{p-2} u_1' \varphi' r^{\alpha} dr + \int_0^1 g(u_1) \varphi r^{\theta} dr \geq \int_0^1 |\underline{u}'|^{p-2} \underline{u}' \varphi' r^{\alpha} dr + \int_0^1 g(\underline{u}) \varphi r^{\theta} dr$$

e

$$\int_0^1 |(u^1)'|^{p-2} (u^1)' \varphi' r^{\alpha} dr + \int_0^1 g(u^1) \varphi r^{\theta} dr \leq \int_0^1 |\bar{u}'|^{p-2} \bar{u}' \varphi' r^{\alpha} dr + \int_0^1 g(\bar{u}) \varphi r^{\theta} dr.$$

Utilizando a monotonicidade de F e o Lema 4.4, obtemos $\underline{u} \leq F(\underline{u}) \leq F(u) \leq F(\bar{u}) \leq \bar{u}$ q.t.p. em $(0, 1)$ para todo $u \in [\underline{u}, \bar{u}]$. Repetindo esse argumento, obtemos sequências (u_n) e (u^n) com $u_0 = \underline{u}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, $u^0 = \bar{u}$ e $u^{n+1} = F(u^n)$, tais que se $u \in [\underline{u}, \bar{u}]$ então $u^{n+1} = F(u^n)$

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq u \leq u^n \leq \dots \leq u^1 \leq u^0, \quad \text{q.t.p. em } (0, 1).$$

Assim, existem $u_*, u^* \in [\underline{u}, \bar{u}]$ tais que $u_n \rightarrow u_*$, $u^n \rightarrow u^*$ e $u_* \leq u^*$ q.t.p. em $(0, 1)$.

Como F é contínua $u_* = F(u_*)$ e $u^* = F(u^*)$, isso conclui a prova. $\square$

4.4 Existência de mínimo local para E_λ , com λ pequeno

Nesta seção iremos mostrar que para λ suficientemente pequeno o problema (4.1) admite solução.

Lema 4.7. *Existe $\lambda_0 > 0$, $\rho > 0$, e $\delta > 0$ tal que $E_\lambda(u) \geq \delta$ para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$ e $\|u\|_X = \rho$.*

Demonstração. De (A1) e (A2), podemos escolher $C_1 > 0$ tal que

$$F(t) \leq C_1 + h(t)|t|e^{|t|^{p'}}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (4.22)$$

De (A4), tomando $\rho_0 > 0$ e $\epsilon > 0$ satisfazendo $1 + \epsilon - \mu_{\alpha, \theta} \rho_0^{p'} < 0$, para $s \in \mathbb{R}$ obtemos

$$h(s)|s|e^{|s|^{p'}} \leq C_2 e^{\mu_{\alpha, \theta} |\rho_0 s|^{p'}}, \text{ para algum } C_2 > 0. \quad (4.23)$$

Combinando (4.22) e (4.23) temos

$$F(s) \leq C_1 + C_2 e^{\mu_{\alpha, \theta} |\rho_0 s|^{p'}}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (4.24)$$

Portanto, para qualquer $u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$, temos

$$\int_0^1 F(u)r^\theta dr \leq C_1 \int_0^1 r^\theta dr + C_2 \int_0^1 e^{\mu_{\alpha, \theta} |\rho_0 u|^{p'}} r^\theta dr.$$

Assim, pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.9) e da estimativa obtida acima, segue que

$$\sup_{\|u\|_X \leq \frac{1}{\rho_0}} \int_0^1 F(u)r^\theta dr < C, \text{ para algum } C > 0.$$

Segue a seguinte estimativa

$$E_\lambda(u) \geq \frac{1}{p} \int_0^1 |u'|^p r^\alpha dr - \lambda C.$$

Dessa forma, se $\rho \in (0, \frac{1}{\rho_0})$, tem-se

$$\inf_{\|u\|_X = \rho} E_\lambda(u) \geq \frac{\rho^p}{p\omega_\alpha} - \lambda C,$$

e portanto, tomando $\lambda_0 = \frac{\rho^p}{2p\omega_\alpha C}$, temos

$$\inf_{\|u\|_X = \rho} E_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}.$$

□

Lema 4.8. *Se λ é suficientemente pequeno, E_λ possui um mínimo local próximo a origem de $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$.*

Demonstração. Sejam ρ , ρ_0 , λ_0 , e δ como no Lema 4.7. Utilizando (A3), se $u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$, $u \geq 0$, tem-se

$$F(tu) \geq \eta \int_0^{tu} s^\alpha ds$$

para algum $\eta > 0$ e para todo $t > 0$ suficientemente pequeno. De fato, temos

$$F(tu) = \int_0^{tu} h(s)e^{|s|^{p'}} ds \geq \int_0^{tu} s^\alpha e^{|s|^{p'}} ds \geq \eta \int_0^{tu} s^\alpha ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned} E_\lambda(tu) &\leq \frac{t^p}{p} \int_0^1 |u'|^p r^\alpha dr - \lambda \eta \int_0^1 \left(\int_0^{tu} s^\alpha ds \right) r^\theta dr \\ &= t^{a+1} \left[\frac{t^{p-(a+1)}}{p} \int_0^1 |u'|^p r^\alpha dr - \frac{\lambda \eta}{a+1} \int_0^1 u^{a+1} r^\theta dr \right]. \end{aligned}$$

Como $u \in L_\theta^{a+1}$ e $p-1 > a$, temos $E_\lambda(tu) < 0$ para t suficientemente pequeno. Em particular,

$$\inf_{\|u\|_X \leq \rho} E_\lambda(u) < 0,$$

e esse ínfimo é atingido por alguma função u_λ . Pelo Lema 4.7, devemos ter $\|u_\lambda\|_X < \rho$, e portanto, u_λ é um mínimo local de E_λ . Resta mostrar que o ínfimo é de fato atingido. Seja $(u_j) \subset X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$, $\|u_j\|_X \leq \rho$ uma sequência minimizante satisfazendo

$$u_j \rightharpoonup u_\lambda \text{ em } X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \text{ e } u_j(r) \rightarrow u_\lambda(r) \text{ q.t.p. em } (0, 1).$$

Como $\rho\rho_0 < 1$, podemos tomar $q > 1$ tal que $q(\rho\rho_0)^{p'} < 1$. Assim, usando (4.24), obtemos constantes positivas A e B satisfazendo

$$\int_0^1 F^q(u_j) r^\theta dr \leq A \int_0^1 r^\theta dr + B \int_0^1 e^{\mu_{\alpha,\theta} q |\rho_0 u_j|^{p'}} r^\theta dr, \quad \forall j \geq 1. \quad (4.25)$$

Como $\|u_j/\rho\|_X \leq 1$, pela desigualdade (2.9) temos

$$\sup_j \int_0^1 e^{\mu_{\alpha,\theta} q (\rho_0 \rho)^{p'} |\frac{u_j}{\rho}|^{p'}} r^\theta dr < C.$$

Segue de (4.25) que $F(u_j)$ é uniformemente integrável em $(0, 1)$ e do Teorema da Convergência de Vitali, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 F(u_j) r^\theta dr = \int_0^1 F(u_\lambda) r^\theta dr.$$

Pela semicontinuidade inferior da norma, temos $\|u_\lambda\|_X \leq \rho$, além disso,

$$\inf_{\|u\|_X \leq \rho} E_\lambda(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_\lambda(u_j) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \int_0^1 |u_j'|^p r^\alpha dr - \lambda \int_0^1 F(u_\lambda) r^\theta dr \geq E_\lambda(u_\lambda).$$

Assim, u_λ é um mínimo local de E_λ se $\lambda \in (0, \lambda_0)$. □

4.5 Não existência para λ grande

Pelo argumento da sessão anterior, o conjunto $A = \{\lambda > 0 ; (4.1) \text{ possui um solução}\}$ é não vazio.

Teorema 4.2. *Seja $\lambda^* = \sup A$. Então, $0 < \lambda^* < \infty$. Em particular, o problema (4.1) não admite solução para quaisquer $\lambda > \lambda^*$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.8 é claro que $\lambda^* > 0$. Resta verificar que λ^* é finito. Suponha, por absurdo, que exista uma sequência $\lambda_j \rightarrow \infty$ tal que, para cada $j \in \mathbb{N}$, o problema (4.1) com $\lambda = \lambda_j$ admita uma solução u_j . Seja λ_1 o primeiro autovalor dado por (4.6) e φ_1 sua correspondente autofunção. Fixando $\varepsilon \in (0, 1)$, de (A3)-(A4), podemos tomar $\bar{\lambda} > 0$ tal que $\lambda f(t) > (\lambda_1 + \varepsilon)t^{p-1}$, para todo $t > 0$ e $\lambda > \bar{\lambda}$. Note que para $\lambda_j > \bar{\lambda}$, u_j é uma supersolução fraca de

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = (\lambda_1 + \varepsilon)u^{p-1} \\ u > 0 \\ u(1) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{em } (0, 1) \quad (4.26)$$

e $\delta\varphi_1$ é uma subsolução se $\delta < \lambda_1 + \varepsilon$. Escolhendo δ suficientemente pequeno de modo que, $\delta\varphi_1(r) \leq u_j(r)$ q.t.p. em $(0, 1)$, do Lema 4.6 podemos encontrar uma solução $\varphi_\varepsilon > 0$ de (4.26) para todo $\varepsilon \in (0, 1)$. Isso contradiz o Lema 4.3. $\square$

Voltaremos agora nossa atenção para a demonstração da existência de solução fraca para o problema (4.1).

4.6 Existência de solução para E_λ , com $\lambda \in (0, \lambda^*)$

Lema 4.9. *Seja $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ contínua tal que $t^{1-p}f(t)$ é não-crescente. Suponha que $u_1, u_2 \in C^1[0, 1] \cap X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$, com $u_1, u_2 > 0$ em $(0, 1)$ são sub e supersolução do problema $Lu = f(u)$, respectivamente. Então, $u_1 \leq u_2$ q.t.p. em $(0, 1)$.*

Demonstração. Sejam u_1, u_2 funções positivas tais que

$$\frac{Lu_1}{u_1^{p-1}} \leq \frac{f(u_1)}{u_1^{p-1}} \quad \text{e} \quad -\frac{Lu_2}{u_2^{p-1}} \leq -\frac{f(u_2)}{u_2^{p-1}}.$$

Portanto, se $\varphi \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ com $\varphi \geq 0$, vale a desigualdade

$$\int_0^1 |u_1'|^{p-2} u_1' \left(\frac{\varphi}{u_1^{p-1}} \right)' r^\alpha dr - \int_0^1 |u_2'|^{p-2} u_2' \left(\frac{\varphi}{u_2^{p-1}} \right)' r^\alpha dr \leq \int_0^1 \left[\frac{f(u_1)}{u_1^{p-1}} - \frac{f(u_2)}{u_2^{p-1}} \right] \varphi r^\alpha dr.$$

Tomando $\varphi = (u_1^p - u_2^p)^+$, no conjunto $\{u_1 \geq u_2\}$, temos

$$\left(\frac{\varphi}{u_1^{p-1}}\right)' = \left(u_1 - \frac{u_2^p}{u_1^{p-1}}\right)' = u_1' - \left(\frac{u_2^p}{u_1^{p-1}}\right)'$$

e

$$\left(\frac{\varphi}{u_2^{p-1}}\right)' = \left(\frac{u_1^p}{u_2^{p-1}}\right)' - u_2'.$$

Assim,

$$\int_{\{u_1 \geq u_2\}} H(u_1, u_2) r^\alpha dr + \int_{\{u_1 \geq u_2\}} S(u_1, u_2) r^\alpha dr \leq \int_{\{u_1 \geq u_2\}} \left[\frac{f(u_1)}{u_1^{p-1}} - \frac{f(u_2)}{u_2^{p-1}} \right] (u_1^p - u_2^p) r^\alpha dr, \quad (4.27)$$

onde

$$H(u_1, u_2) = |u_1'|^p - |u_2'|^{p-2} u_2' \left(\frac{u_1^p}{u_2^{p-1}}\right)' \quad \text{e} \quad S(u_1, u_2) = |u_2'|^p - |u_1'|^{p-2} u_1' \left(\frac{u_2^p}{u_1^{p-1}}\right)'.$$

Argumentando como no Lema 4.2, temos $L(u_1, u_2)$ e $S(u_1, u_2)$ são não negativas. Utilizando a monotonicidade de $t^{1-p}f(t)$, a equação (4.27) nos dá

$$0 \leq \int_{\{u_1 \geq u_2\}} \left[\frac{f(u_1)}{u_1^{p-1}} - \frac{f(u_2)}{u_2^{p-1}} \right] (u_1^p - u_2^p) r^\alpha dr \leq 0.$$

□

Seja $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } t < t_* \\ f(t_*), & \text{se } t \geq t_*. \end{cases}$$

De (A1) e (A3), $t^{1-p}\tilde{f}(t)$ é uma função não-crescente e $\tilde{f}(0) = 0$. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} Lu = \lambda \tilde{f}(u) \\ u > 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad \text{em } (0, 1). \quad (4.28)$$

Como $\tilde{f}$ é limitada, o funcional associado $\tilde{E}_\lambda$ é coercivo. Além disso, devido ao mergulho compacto (2.4) e o Teorema da Convergência de Vitali, $\tilde{E}_\lambda$ é semicontínua inferiormente, assim (4.28) possui ao menos uma solução. A unicidade da solução para o problema (4.28) segue diretamente do Lema 4.9. De fato, sejam u_1 e u_2 em $C^1[0, 1] \cap X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ soluções positivas de (4.28), elas são ao mesmo tempo, subsolução e supersolução do problema.

Pelo Lema 4.9, temos que $u_1 \leq u_2$ e $u_2 \leq u_1$ quase sempre em $(0, 1)$, o que implica $u_1 = u_2$ q.t.p. em $(0, 1)$. Uma vez que u_1 e u_2 são funções contínuas em $[0, 1]$, segue que $u_1 \equiv u_2$ em todo o intervalo. Portanto, a solução de (4.28) é única. Portanto, tomando $\tilde{u}_\lambda$ como a única solução de (4.28) da condição $\theta > \alpha - 1$, temos $\tilde{u}_\lambda \in C^1[0, 1]$. De fato, tome (4.8) como função teste em (4.28). Vamos analisar o seguinte princípio de comparação.

Lema 4.10. *Sejam $f_1, f_2 : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $u_1, u_2 \in C^1([0, 1]) \cap C^2(0, 1)$ tal que $f^* = f_2(r, u_2) - f_1(r, u_1)$ satisfaz:*

$$f^* \geq 0 \text{ em } (0, 1) \text{ e } f^* \not\equiv 0. \quad (4.29)$$

Suponha u_1, u_2 são soluções fracas de,

$$\begin{cases} Lu_2 - f_2(r, u_2) \geq Lu_1 - f_1(r, u_1) & \text{em } (0, 1) \\ u_i(1) = u'_i(0) = 0, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (4.30)$$

Então, o seguinte princípio de comparação nos dá:

$$u_2 \geq u_1 \text{ em } (0, 1) \Rightarrow u_2 > u_1 \text{ em } (0, 1).$$

Além disso, podemos garantir a seguinte condição de fronteira $u'_1(1) > u'_2(1)$

Demonstração. De (4.30), segue que

$$\int_0^1 (|u'_2|^{p-2}u'_2 - |u'_1|^{p-2}u'_1)v'r^\alpha dr \geq \int_0^1 [f_2(r, u_2) - f_1(r, u_1)]r^\theta dr, \quad \forall v \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta), \quad v \geq 0.$$

Então, podemos escrever

$$\int_0^1 Gv'r^\alpha dr \geq \int_0^1 f^*vr^\theta dr, \quad (4.31)$$

onde $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$G = |u'_2|^{p-2}u'_2 - |u'_1|^{p-2}u'_1. \quad (4.32)$$

Utilizando a função teste (4.8), a desigualdade (4.31) nos dá que

$$-r^\alpha G(r) \geq \int_0^r f^*(s)s^\theta ds. \quad (4.33)$$

De (4.29), $G \leq 0$ em $(0, 1)$ e $G(1) < 0$. Além disso, de (4.17) segue que

$$2^{2-p}|u'_2 - u'_1|^p \leq G(r)(u'_2 - u'_1). \quad (4.34)$$

Defina $w = u_2 - u_1$. Afirmamos que $w > 0$ em $(0, 1)$. De fato, veja que $w \geq 0$, combinando (4.34) com $G \leq 0$, segue que w é uma função não-crescente. Assim, $w(\bar{r}) = 0$ nos dá que $\bar{r}$ é um mínimo global para w em $(0, 1)$ e $w \equiv 0$ em $(\bar{r}, 1]$. Consequentemente, G se anula em $(\bar{r}, 1]$, o que contradiz $G(1) < 0$. Finalmente, $G(1) < 0$ e (4.32) implica $u'_1(1) \neq u'_2(1)$, e assim, de (4.34) temos $u'_1(1) > u'_2(1)$. $\square$

Seja $C_0([0, 1]) = \{u \in C([0, 1]); u(1) = 0\}$ e $\mathcal{C} = C^1([0, 1]) \cap C_0([0, 1])$. Para $u \in \mathcal{C}$, considere $\|u\|_{\mathcal{C}} = \|u\|_{C^1}$.

Lema 4.11. $E_\lambda|_{\mathcal{C}}$ possui um mínimo local para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Demonstração. Fixando $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Temos que (4.1) possui uma solução, digamos $\hat{u}$, para algum $\tilde{\lambda} \in (\lambda, \lambda^*)$. Utilizando as hipóteses (A3)-(A4) temos $\bar{\lambda} > 0$ satisfazendo

$$0 < \bar{\lambda} < \lambda \inf_{t>0} f(t)t^{-\alpha}. \quad (4.35)$$

Seja $\bar{u}$ a única solução para o problema

$$\begin{cases} Lu = \bar{\lambda}u^\alpha \\ u > 0 \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad \text{em } (0, 1) \quad (4.36)$$

Então, temos que $\tilde{u}$ é uma supersolução de (4.36). Utilizando o Lema 4.9, obtemos $\tilde{u} \geq \bar{u}$ em $(0, 1)$. Defina $f^* = \lambda f(\tilde{u}) - \bar{\lambda} \bar{u}^\alpha$, utilizando (4.35) temos $f^* > 0$ em $(0, 1)$. Veja que

$$L\tilde{u} - \lambda f(\tilde{u}) \geq L\tilde{u} - \tilde{\lambda} f(\tilde{u}) = 0 = L\bar{u} - \bar{\lambda} \bar{u}^\alpha.$$

Podemos aplicar o princípio de comparação do Lema 4.10, o que nos dá $\bar{u} < \tilde{u}$ em $(0, 1)$ e $\tilde{u}'(1) > \bar{u}'(1)$. Por (A2), podemos definir $g : (0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(r, t) = \begin{cases} f(\bar{u}(r)), & \text{se } t < \bar{u}(r) \\ f(t), & \text{se } \bar{u}(r) \leq t \leq \tilde{u}(r) \\ f(\tilde{u}(r)), & \text{se } t > \tilde{u}(r) \end{cases}.$$

Seja $G(r, u) = \int_0^u g(r, t)dt$. Defina o funcional auxiliar $I_\lambda : X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p} \int_0^1 |u'|^p r^\alpha dr - \lambda \int_0^1 G(r, u) r^\theta dr.$$

Temos que I_λ é limitado inferiormente em $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ e semicontínuo inferiormente. Seja u_λ o mínimo global de I_λ . Em particular, u_λ satisfaz fracamente

$$Lu_\lambda - \lambda g(r, u_\lambda) = 0 \quad \text{em } (0, 1).$$

Afirmamos que $u_\lambda \in C^1([0, 1]) \cap C_0([0, 1])$. De fato, tomando a função teste v_ε como em (4.8), usando o fato de que u_λ é um mínimo de I_λ , e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, temos

$$-u'_\lambda(r) = \left(\frac{\lambda}{r^\alpha} \int_0^r g(s, u_\lambda) s^\theta ds \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

pela regra de L'Hospital

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{r^\alpha} \int_0^r g(s, u_\lambda) s^\theta ds = \lim_{r \rightarrow 0^+} \lambda g(r, u_\lambda(r)) r^{\theta-\alpha+1} = 0$$

onde o [18, Lema 6] é utilizado para garantir que a validade do limite acima e supomos que $\theta > \alpha - 1$. Podemos então definir $u'_\lambda(0) = 0$. Assim, a afirmação está provada. Logo, $u_\lambda > 0$ e $u_\lambda \in C^1([0, 1]) \cap C_0([0, 1])$. Veja que

$$\bar{\lambda} \bar{u}^\alpha < \lambda f(\bar{u}) = \lambda g(r, \bar{u}) \leq \lambda g(r, u_\lambda) \leq \lambda g(r, \tilde{u}) = \lambda f(\tilde{u}) \leq \tilde{\lambda} f(\tilde{u}) \quad \text{em } (0, 1).$$

Portanto, podemos aplicar o Lema 4.10 e concluir que $\bar{u} < u_\lambda < \tilde{u}$ em $(0, 1)$ e $\bar{u}'(1) > u'_\lambda(1) > \tilde{u}'(1)$. Dado que u_λ é uma solução da equação (4.1), podemos encontrar $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que, se $v \in \mathcal{C}$ e $\|u_\lambda - v\|_{\mathcal{C}} < \delta$, então $\bar{u} < v < \tilde{u}$ em $(0, 1)$. Como $E_\lambda \equiv I_\lambda$ em $\{v \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta) : \bar{u} < v < \tilde{u}, \text{ em } (0, 1)\}$, temos u_λ é um mínimo local para $E_\lambda|_{\mathcal{C}}$. $\square$

Iremos aplicar um argumento semelhante ao de [26] para demonstrar que u_λ é um mínimo local para o funcional E_λ .

Teorema 4.3. *Para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, a função u_λ do Lema 4.11 é um mínimo local para E_λ em $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$.*

Demonstração. A função u_λ é um mínimo local de E_λ em $\mathcal{C}$ (resp. $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$) se, e só se, 0 é um mínimo local de $v \mapsto E_\lambda(v + u_\lambda)$. Suponha que 0 não é um mínimo local $E_\lambda(\cdot + u_\lambda)$ em $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$, então existe $(v_j) \subset X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ tal que

$$\|v_j\|_X < \frac{1}{j} \quad \text{e} \quad E_\lambda(u_\lambda + v_j) < E_\lambda(u_\lambda), \quad \forall j \geq 1. \quad (4.37)$$

Seja $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(s) = |s|^{q+1}e^{|s|^{p'}}$, com $q > 1$. Para $\varepsilon \in (0, 1)$ definamos o conjunto $\mathcal{C}_\varepsilon = \{u \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta); k(u) = \|G(u)\|_{L_0^1} < \varepsilon\}$. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_0^1 G(v_j) r^\theta dr = \int_0^1 |v_j|^{q+1} e^{|v_j|^{p'}} r^\theta dr \leq \left(\int_0^1 |v_j|^{(q+1)2} r^\theta dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 e^{2|v_j|^{p'}} r^\theta dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Também pelo mergulho (2.4), temos

$$\left(\int_0^1 |v_j|^{2(q+1)} r^\theta dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 e^{2|v_j|^{p'}} r^\theta dr \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_0^1 |v_j|^p r^\alpha dr \right)^{\frac{q+1}{p}} \left(\int_0^1 e^{2|v_j|^{p'}} r^\theta dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando a desigualdade de Trudinger-Moser e a estimativa $\|v_j\|_X^{q+1} < \left(\frac{1}{j}\right)^{q+1}$ para j suficientemente grande, obtemos que $k(v_j) \rightarrow 0$. Consequentemente, $\mathcal{C}_\varepsilon \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$. Portanto, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $(v_j) \subset \mathcal{C}_\varepsilon$ para todo $j > N_\varepsilon$.

Afirmamos que existem $C_1 > 0$, $C_2 > 1$ tais que, para todo $t > 0$ e $C \in \mathbb{R}$,

$$e^{C+t|^{p'}} \leq C_1 e^{C_2 t|^{p'}}, \text{ para } t > 0 \text{ e qualquer } C \in \mathbb{R}. \quad (4.38)$$

De fato,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{C+t|^{p'}}}{e^{C_2 t|^{p'}}} = e^{C|^{p'}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{C+t|^{p'}}}{e^{C_2 t|^{p'}}} = 0.$$

Pelo cálculo acima a afirmação está provada, pois a função $t \mapsto e^{C+t|^{p'}}/e^{C_2 t|^{p'}}$ é limitada.

Por (A5), $f(s) \leq (1 + |s|^q) e^{|s|^{p'}}$ e, então

$$\begin{aligned} |F(u_\lambda + v)| &\leq \int_0^{u_\lambda + v} |f(s)| ds \leq |(f(u_\lambda + v)(u_\lambda + v))| \\ &\leq |(1 + |u_\lambda + v|)^q e^{|u_\lambda + v|^{p'}} (u_\lambda + v)| \\ &\leq (|u_\lambda + v| + |u_\lambda + v|^{q+1}) e^{|u_\lambda + v|^{p'}} \\ &\leq |C(1 + |u_\lambda + v|^{q+1} e^{|u_\lambda + v|^{p'}})| \\ &\leq C_1 + C_2 |v|^{q+1} e^{C_3 |v|^{p'}}, \end{aligned}$$

na última desigualdade utilizamos (4.38) e que $u_\lambda \in \mathcal{C}$.

Para $v \in \mathcal{C}_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} E_\lambda(u_\lambda + v) &= \frac{1}{p} \int_0^1 |(u_\lambda + v)'|^p r^\alpha dr - \lambda \int_0^1 F(u_\lambda + v) r^\theta dr \\ &\geq \frac{1}{p} \int_0^1 |(u_\lambda + v)'|^p r^\alpha dr - \lambda \left(\int_0^1 C_1 r^\theta dr - \varepsilon C_2 \right) \\ &\geq \frac{1}{p} \int_0^1 |(u_\lambda + v)'|^p r^\alpha dr - C_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Veja que $\mathcal{C}_\varepsilon$ é convexo pois, $G(s)$ é convexa, e pela desigualdade de Trudinger-Moser, o conjunto $\mathcal{C}_\varepsilon$ é fechado em $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$. Portanto, por (4.37) e utilizando que $v_j \in \mathcal{C}_\varepsilon$ para algum j podemos encontrar $v_\varepsilon \in \mathcal{C}_\varepsilon$ tal que $v_\varepsilon \neq 0$ e

$$\inf_{u \in \mathcal{C}_\varepsilon} E_\lambda(u_\lambda + v) = E_\lambda(u_\lambda + v_\varepsilon) < E_\lambda(u_\lambda), \quad \varepsilon \in (0, 1). \quad (4.40)$$

De (4.39) e (4.40), temos que v_ε é limitada em $X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ para todo $\varepsilon \in (0, 1)$. Como $k(v_\varepsilon) \leq \varepsilon$ temos que $k(u_\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ temos $u_\varepsilon \rightarrow 0$ q.t.p. em $(0, 1)$.

Utilizando multiplicadores de Lagrange, existe $\mu_\varepsilon \leq 0$, tal que

$$E'_\lambda(u_\lambda + v_\varepsilon) = \mu_\varepsilon k'(v_\varepsilon). \quad (4.41)$$

De fato, caso $\mu_\varepsilon > 0$ para algum $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\rho \in X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ tal que $E'_\lambda(u_\lambda + v_\varepsilon)\rho < 0$ (o que é possível desde que $k'(v_\varepsilon) \neq 0$) o que nos dá também que $k'(v_\varepsilon)\rho < 0$. Para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, $k(v_\varepsilon + \tau\rho) < k(v_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Assim, $v_\varepsilon + \tau\rho \in \mathcal{C}_\varepsilon$ para $\tau > 0$ suficientemente pequeno. Assim, $E'_\lambda(u_\lambda + v_\varepsilon)\rho < 0$, e temos $E_\lambda(v_\lambda + u_\varepsilon + \tau\rho) < E_\lambda(u_\lambda + v_\varepsilon)\rho < 0$. Uma contradição com (4.40). Agora iremos utilizar uma argumentação semelhante a presente no Capítulo 2, para garantir que as sequencias u_ε são limitadas.

Em (4.41), seja $\varphi(s) = T_k(s) = (s + k)\chi_{(-\infty, -k]} + (s - k)\chi_{[k, \infty)}$ com $k > 0$. Defina $\Omega_k = \{r \in [0, 1]; |v_\varepsilon| \geq k\}$. Assim, como $\mu_\varepsilon \leq 0$, temos

$$\int_0^1 (|u'_\lambda + v'_\varepsilon|^{p-2}(u'_\lambda + v'_\varepsilon) - |u'_\lambda|^{p-2}u'_\lambda)T'(v_\varepsilon)r^\alpha dr \leq \lambda \int_0^1 [f(u_\lambda + v_\varepsilon) - f(u_\lambda)]T(v_\varepsilon)r^\theta dr.$$

Iremos estimar agora o lado direito. Considere $\gamma = \beta\eta$, $\beta > 1$ e $\eta = \frac{p+1}{\beta-1}$, como $f(u) \leq (1 + |u|)^q e^{|u|^{\frac{p}{p-1}}} = \phi(u)$ (com $q > 1$), ϕ é uma função convexa e, pela desigualdade de Trudinger-Moser, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [f(u_\lambda + v_\varepsilon) - f(u_\lambda)]T(v_\varepsilon)r^\theta dr \\ & \leq \left(\int_0^1 |f(u_\lambda + v_\varepsilon) - f(u_\lambda)|^\beta r^\theta dr \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int_0^1 |T_k(v_\varepsilon)|^\gamma r^\theta dr \right)^{\frac{1}{\gamma}} |\Omega_k|_\theta^{\frac{\gamma-1-\eta}{\gamma}} \\ & \leq \left[\left(\int_0^1 |f(u_\lambda + v_\varepsilon)|^\beta r^\theta dr \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\int_0^1 |f(u_\lambda)|^\beta r^\theta dr \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \|T(v_\varepsilon)\|_{L_\theta^\gamma} |\Omega_k|_\theta^{\frac{\gamma-1-\eta}{\gamma}} \\ & \leq C \|T(v_\varepsilon)\|_{L_\theta^\gamma} |\Omega_k|_\theta^{\frac{\gamma-1-\eta}{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Agora, vamos estimar o lado esquerdo. Pela desigualdade (4.17),

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (|u'_\lambda + v'_\varepsilon|^{p-2}(u'_\lambda + v'_\varepsilon) - |u'_\lambda|^{p-2}u'_\lambda)T'(v_\varepsilon)r^\alpha dr \\ & \geq C \int_0^1 |T'_k(v_\varepsilon)|^p r^\alpha dr \\ & \geq C \left(\int_0^1 |T_k(v_\varepsilon)|^\gamma r^\theta dr \right)^{\frac{p}{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Por (4.43) e (4.42),

$$\left(\int_0^1 |\mathcal{T}_k(\mathbf{v}_\varepsilon)|^\gamma r^\theta dr \right)^{\frac{p}{\gamma}} \leq C \left(\int_0^1 |\mathcal{T}_k(\mathbf{v}_\varepsilon)|^\gamma r^\theta dr \right)^{\frac{1}{\gamma}} |\Omega_k|_\theta^{\frac{\gamma-1-\eta}{\gamma}}.$$

Com isso,

$$\int_0^1 |\mathcal{T}_k(\mathbf{v}_\varepsilon)|^\gamma r^\theta dr \leq C |\Omega_k|_\theta^{\frac{\gamma-1-\eta}{\gamma} \frac{\gamma}{p-1}} = C |\Omega_k|_\theta^{\frac{p}{p-1}}. \quad (4.44)$$

Veja que,

$$\int_0^1 |\mathcal{T}_k(\mathbf{v}_\varepsilon)|^\gamma r^\theta dr = \int_{\Omega_k} (|\mathbf{v}_\varepsilon| - k)^\gamma r^\theta dr \geq \int_{\Omega_h} (|\mathbf{v}_\varepsilon| - k)^\gamma r^\theta dr \geq (h - k)^\gamma |\Omega_h|_\theta. \quad (4.45)$$

Se $0 < k < h$, temos $|\mathcal{T}_k(s)| = (|s| - k)(\chi_{[-k,k]}(s))$ para $s \in \mathbb{R}$, $\Omega_h \subset \Omega_k$. Seja $\psi(k) = |\Omega_k|_\theta$ então, utilizando (4.44), (4.45),

$$\psi(h) \leq C(h - k)^{-\gamma} \psi(k)^{p'}. \quad (4.46)$$

Defina $d = 2^p C^{\frac{1}{\gamma}} |[0, 1]|_\theta^{\frac{1}{(p-1)\gamma}}$ e a sequência σ_j por $\sigma_0 = 0$ e $\sigma_j = \sigma_{j-1} + \frac{d}{2^j}$, $j = 1, 2, \dots$.

Por indução em (4.46) temos

$$\psi(\sigma_j) \leq 2^{-j\gamma(p-1)} \psi(0) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

De fato, para $j = 1$, temos

$$\psi(\sigma_1) \leq C(\sigma_1 - \sigma_0)^{-\gamma} \psi(0)^{p'} = C\left(\frac{2}{d}\right)^\gamma \psi(0)^{p'} = 2^{\gamma(1-p)} \psi(0).$$

Suponha que a desigualdade seja verdadeira para j . Então,

$$\begin{aligned} \psi(\sigma_{j+1}) &\leq C(\sigma_{j+1} - \sigma_j)^{-\gamma} \psi(\sigma_j)^{p'} \\ &= C \frac{2^{(j+1)\gamma}}{d^\gamma} \psi(\sigma_j)^{p'} \\ &\leq C \frac{2^{(j+1)\gamma}}{(2^p C^{\frac{1}{\gamma}} |[0, 1]|_\theta^{\frac{1}{(p-1)\gamma}})^\gamma} (2^{j\gamma(1-p)})^{p'} \psi(0)^{p'} \\ &= 2^{(j+1)\gamma(1-p)} \psi(0). \end{aligned}$$

Como $\sigma_j \rightarrow d$ e ψ é não-crescente, tem-se $\psi(d) = 0$. Logo,

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1)} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq d. \quad (4.47)$$

Veja que

$$\int_0^1 |\mathbf{u}'_\lambda + \mathbf{v}'_\varepsilon|^{p-2} (\mathbf{u}'_\lambda + \mathbf{v}'_\varepsilon) \mathbf{w}' r^\alpha dr - \int_0^1 f(\mathbf{u}'_\lambda + \mathbf{v}'_\varepsilon) \mathbf{w} r^\theta dr = \mu_\varepsilon \int_0^1 G'(\mathbf{v}_\varepsilon) \mathbf{w} r^\theta dr. \quad (4.48)$$

Note que $G'(s) = e^{|s|^{p'}}((q+1)|s|^{q-1}s + p's|s|^{q+p'-1})$. Em (4.48) w é dada por

$$w_{\tilde{\varepsilon}}(s) = \begin{cases} 1 & 0 < s \leq r \\ 1 + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}(r-s) & r \leq s \leq r + \tilde{\varepsilon} \\ 0 & s > r + \tilde{\varepsilon} \end{cases} . \quad (4.49)$$

Tomando o limite $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$, obtemos

$$|u'_{\lambda}(r) + v'_{\varepsilon}(r)|^{p-2}(u'_{\lambda}(r) + v'_{\varepsilon}(r)) = \frac{1}{r^{\alpha}}[\mu_{\varepsilon} \int_0^r G'(v_{\varepsilon})r^{\theta} dr + \int_0^r f(u_{\lambda} + v_{\varepsilon})r^{\theta} dr].$$

Seja $h(t) = |t|^{\frac{2-p}{p-1}}t$ a função inversa de $t \mapsto |t|^{p-2}t$. Então,

$$v'_{\varepsilon}(r) = h\left(\frac{1}{r^{\alpha}}[\mu_{\varepsilon} \int_0^r G'(v_{\varepsilon})s^{\theta} ds + \int_0^r f(u_{\lambda} + v_{\varepsilon})s^{\theta} ds]\right) - u'_{\lambda}(r)$$

observe que v'_{ε} é uma função contínua em $(0, 1]$. Pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^{\alpha}} \int_0^r f(u_{\lambda} + v_{\varepsilon})s^{\theta} ds = \lim_{r \rightarrow 0} \alpha f(u_{\lambda}(r) + v_{\varepsilon}(r))r^{\theta-\alpha+1} = 0,$$

onde utilizamos que $v_{\varepsilon} \in L^{\infty}$. Observe que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^{\alpha}} \int_0^r G'(v_{\varepsilon})s^{\theta} ds = \lim_{r \rightarrow 0} \alpha G'(v_{\varepsilon}(r))r^{\theta-\alpha+1}.$$

sando que G' é uma função contínua e a limitação de v_{ε} , temos $v_{\varepsilon} \in \mathcal{C}$. Isso contradiz o fato de u_{λ} ser mínimo local em $\mathcal{C}$. □

Apêndice

Reuniremos a seguir alguns resultados necessários, de modo a tornar este trabalho mais autocontido.

Definição 1. *Será denotado por $W(a, b)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis, positivas e finitas q.t.p. em (a, b) .*

Definição 2. *i) Para $1 < p \leq q < \infty$, $v, w \in W(a, b)$ defina a função $F_R(a, b) \rightarrow [0, \infty]$ por*

$$F_R(r) = \left(\int_a^r w(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_r^b v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \quad (50)$$

e ainda $B_R \in [0, \infty]$ por

$$B_R = \sup_{a < r < b} F_R(r).$$

ii) Para $1 < q < p < \infty$ e $v, w \in W(a, b)$, defina $A_R \in [0, \infty]$ por

$$A_R = \left(\int_a^b \left[\left(\int_a^r w(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_r^b v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{q'}} \right]^m v^{1-p'(r)} dr \right)^{\frac{1}{m}}$$

onde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \quad e \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Seja $H_R : L^p(a, b; v) \rightarrow L^q(a, b; w)$ definido por

$$H_R(f)(r) = \int_r^b f(s) ds.$$

Teorema 1. *Seja $1 < p \leq q < \infty$, $v, w \in W(a, b)$. O operador $H_R : L^p(a, b; v) \rightarrow L^q(a, b; w)$ é compacto se, e somente se*

- $B_R < \infty$,
- $\lim_{r \rightarrow a^+} F_R(r) = \lim_{r \rightarrow b^-} F_R(r) = 0$.

Caso $1 < q < p < \infty$ o operador é compacto se, e somente se, $A_R < \infty$. Veja [42, Teorema 7.4].

Teorema 2. Para todo $q \geq 1$ e $\varepsilon > 0$ vale o seguinte

$$(x + y)^q \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{q-1}{q}} x^q + (1 - (1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{q}})^{1-q} y^q, \quad x, y \geq 0.$$

Veja [13, Teorema 2.1].

Definição 3. Diz-se que uma sequência de funções mensuráveis $(f_n)_{n=1}^\infty$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uniformemente integrável em Ω se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo conjunto mensurável $A \subset \Omega$ com $|A| < \delta$, tem-se

$$\int_A |f_n| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $|A|$ denota a medida de Lebesgue de A em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que $1 < p < \infty$. Se (f_n) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$, então (f_n) é uniformemente integrável em Ω . Veja [48, Corolário 2]

Teorema 4 (Convergência de Vitali). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável com medida de Lebesgue finita, e seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em Ω . Suponha que:

1. $f_n \rightarrow f$ quase em todo ponto de Ω ;
2. A sequência (f_n) é uniformemente integrável em Ω .

Então, $f_n \rightarrow f$ em $L^1(\Omega)$. Veja [48, pág 98].

Os resultados a seguir são referentes ao Capítulo 1.

Definição 4 (Nível de concentração). Defina

$$I_\mu^\delta(0) = \sup_{(w_n) \subset H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)} \{\limsup I_\mu(w_n) : w_n \text{ concentra em } x = 0\}$$

Teorema 5 (Estimativa do nível de concentração). Para $\beta \in [0, 1)$ tem-se que

$$I_{\mu_\beta}^\delta(0) \leq |B|(1 + e).$$

Veja [46, Lema 9].

Teorema 6. *Existem $\beta^* \in (0, 1)$ e $u_{\mu_\beta} \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)$, $\|u_{\mu_\beta}\|_{w_0} \leq 1$ tal que*

$$I_{\mu_\beta}(u_{\mu_\beta}) = \sup_{\|u\|_{w_0} \leq 1; u \in H_{0,\text{rad}}^1(B, w_0)} I_{\mu_\beta}(u)$$

para todo $\beta \in [0, \beta^*)$. Veja [47, Teorema 1.3].

Definição 5 (Nível de concentração). *Defina*

$$I_\mu^\delta(0) = \sup_{(w_n) \subset X_{1,w_0}^{1,p}} \{\limsup I_\mu(w_n) : w_n \text{ concentra em } x = 0\}.$$

Teorema 7 (Estimativa do nível de concentração). *Para $\beta \in [0, 1)$ tem-se que*

$$I_{\mu_\beta}^\delta(0) \leq \frac{\omega_\theta}{\theta + 1} (1 + e^{\gamma + \Psi(p)}),$$

onde $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ e $\gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^j \frac{1}{k} - \ln j)$ é a constante de Euler. Veja [46, Lema 9].

Teorema 8. *Existem $\beta^* \in (0, 1)$ e $u_{\alpha,\theta,\beta} \in X_{1,w_0}^{1,p}$ tal que*

$$I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u_{\alpha,\theta,\beta}) = \sup_{\|u\|_{X_{w_0}} \leq 1; u \in X_{1,w_0}^{1,p}} I_{\mu_{\alpha,\theta,\beta}}(u)$$

para todo $\beta \in (0, \beta^*)$. Veja [53, Teorema 1.4].

Teorema 9. *Seja $\alpha \geq 1$, $\theta \geq 0$ e $p \geq 2$ sob a condição de Trudinger-Moser. Seja $(u_j) \subset X_1^{1,p}(\alpha, \theta)$ tal que*

$$\|u'_j\|_{L_\alpha^p} \leq 1 \text{ e } u_j \rightharpoonup u \text{ em } X_1^{1,p}(\alpha, \theta) \text{ com } u \neq 0. \quad (51)$$

Então,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{p\mu_{\alpha,\theta}|u_j|^{\frac{p}{p-1}}} \lambda_\theta = \begin{cases} < \infty & \text{se } p < P \\ = \infty & \text{se } p \geq P, \end{cases}$$

onde

$$P = \begin{cases} \left(1 - \int_0^1 |u'|^p d\lambda_\alpha\right)^{-\frac{1}{p-1}} & \text{se } \|u'_j\|_{L_\alpha^p} < 1, \\ \infty & \text{se } \|u'_j\|_{L_\alpha^p} = 1. \end{cases}$$

veja [16, Teorema 1].

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, D.R.: A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives, *Ann. Math.* v.128, p.385–398, 1988.
- [2] ADIMURTHI, DRUET, O.: Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger–Moser inequality. *Commun. Part. Differ. Equ.* v.29, p.295–322, 2005.
- [3] BAIRD, P., FARDOUN, A., REGBAOUI, R.: Q-curvature flow on 4-manifolds, *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* v.27, p.75–104, 2006.
- [4] CALANCHI, M., RUF, B.: On Trudinger–Moser type inequalities with logarithmic weights. *J. Differential Equations*, v. 258, p. 1967-1989, 2015.
- [5] CALANCHI, M., RUF, B.: Trudinger–Moser type inequalities with logarithmic weights in dimension N. *Nonlinear Anal.*, v.121, p.403-411, 2015.
- [6] CARLESON, L., CHANG, S.Y.A.: On The Existence of an extremal function for an inequality of J. Moser. *Bull. Sci. Math.*, v. 110, n. 2, p. 113-127, 1986.
- [7] CLEMENTE, R., DO Ó, J.M., SA SILVA, E., SHAMAROVA, E. Touchdown solutions in general MEMS models. *Advances in Nonlinear Analysis*, 2023.
- [8] CLÉMENT, P., de FIGUEIREDO, D. G., MITIDIERI, E.: Quasilinear elliptic equations with critical exponents. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, v. 9, p.133-170, 1996.
- [9] DA SILVA PAIVA, R. D. ; DE OLIVEIRA, J.F.: Maximizers for the logarithmic Trudinger-Moser functional beyond the critical threshold. *J. Anal. Math.*, 2025.
- [10] DE FIGUEIREDO, D.G., DO Ó, J.M., RUF, B.: On an inequality by N. Trudinger and J. Moser and related elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.* v.55, p.135–152, 2002.

- [11] DE MARCHIS, F., MALCHIODI, A., MARTINAZZI, L., THIZY, P. D.: Critical points of the Moser–Trudinger functional on closed surfaces. *Invent. Math.*, v. 230, p. 1165-1248 2022.
- [12] DENG, S.; MUSSO, M.: Critical points of the Trudinger-Moser trace functional with high energy levels. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, v. 32, 2015.
- [13] DE OLIVEIRA, J.F., DO Ó, J.M.: Equivalence of critical and subcritical sharp Trudinger–Moser inequalities in fractional dimensions and extremal functions. *Rev. Mat. Iberoam.*, v.39, p.1073–1096, 2023.
- [14] DE OLIVEIRA, J.F., MACEDO, A.: Estimate for concentration level of the Adams functional and extremals for Adams-type inequality. *J. Funct. Anal.*, v.283, 109633, 2022.
- [15] DE OLIVEIRA, J.F., DO Ó, J.M.: On a sharp inequality of Adimurthi–Druet type and extremal functions, *Calc. Var.*, v.62, 162 2023
- [16] DE OLIVEIRA, J.F., DO Ó, J.M.: Concentration-compactness principle and extremal functions for a sharp Trudinger-Moser inequality. *Calc. Var.*, v. 52, n. 1-2, p. 125-163, 2015.
- [17] DE OLIVEIRA, J.F., DO Ó, J.M., PONCIANO, R. C.: Trudinger-Moser type inequalities for the Hessian equation with logarithmic weights, Apr. 2025, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/2504.09295>
- [18] DE OLIVEIRA, J.F., DO Ó, J.M., RUF, B.: Extremal for a k -Hessian inequality of Trudinger–Moser type. *Math. Z.*, v. 295, n. 3, p. 1683-1706, 2020.
- [19] DE OLIVEIRA, J.F., DO Ó, J.M.: Trudinger-Moser type inequalities for weighted Sobolev spaces involving fractional dimensions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 142, n. 8, p. 2813-2828, 2014.
- [20] DEL PINO, M., MUSSO, M., RUF, B.: Beyond the Trudinger-Moser supremum. *Calc. Var. Partial Differential Equations*. v. 44, n. 3, p. 543-576, 2012.
- [21] DIENING, L., HARJULEHTO, P., HÄSRÖ, P. RUZICKA, M.: *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011.

- [22] DO Ó, J. M., DA SILVA, E. Quasilinear elliptic equations with singular nonlinearity. *Advanced Nonlinear Studies*, v. 16, n. 2, p. 363-379, 2016.
- [23] ESPOSITO, E., GHOUSSEUB, N., GUO, Y.: *Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS*, Courant Lect. Notes Math. 20, American Mathematical Society, Providence, 2010.
- [24] FLUCHER, M.: Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions. *Comment. Math. Helv.*, v. 67, n. 1, p. 471-497, 1992.
- [25] FONTANA, L., MORPURGO, C.: Sharp Moser-Trudinger inequalities for the Laplacian without boundary conditions, *J. Funct. Anal.*, 262 2231–2271, 2012.
- [26] GIACOMONI, J., PRASHANTH, S., SREENADH, K.: $W^{1,N}$ versus C^1 local minimizers for elliptic functionals with critical growth in $\mathbb{R}^N$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, v. 347, n. 5-6, p. 255-260, 2009.
- [27] GIACOMONI, J., PRASHANTH, S., SREENADH, K.: A global multiplicity result for N-Laplacian with critical nonlinearity of concave-convex type. *J. Differential Equations*, v. 232, n. 2, p. 544-572, 2007.
- [28] HEMPEL, J.A., MORRIS, G.R., TRUDINGER, N.S.: On the sharpness of a limiting case of the Sobolev imbedding theorem. *Bull. Aust. Math. Soc.*, v.3, p.369-373, 1970.
- [29] JACOBSEN, J., & SCHMITT, K.: Radial solutions of quasilinear elliptic differential equations. In *Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations* v. 1, p. 359-435, 2004.
- [30] LAM, N., LU, G. and ZHANG, L.: Existence and nonexistence of extremal functions for sharp Trudinger–Moser inequalities. *Adv. Math.* v.352, p.1253–1298, 2019
- [31] LAM, L., LU, G.: Sharp Moser-Trudinger inequality on the Heisenberg group at the critical case and applications. *Adv. Math.*, v.231, p.3259–3287, 2012.
- [32] LIN, K.C.: Extremal functions for Moser’s inequality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 348, n. 7, p. 2663-2671, 1996.

- [33] LI, Y.; LIU, P. A Moser-Trudinger inequality on the boundary of a compact Riemann surface. *Math. Z.* v. 250, n. 2, p. 363–386, 2005.
- [34] MALCHIODI, A., MARTINAZZI, L.: Critical points of the Moser-Trudinger functional on a disk. *J. Eur. Math. Soc.*, v. 16, n. 5, p. 893–908, 2014.
- [35] MALCHIODI, A., MARTINAZZI, L., THIZY, P. D.: Critical points of arbitrary energy for the Trudinger-Moser functional in planar domains. *Adv. Math.*, v. 442, 109548 2024.
- [36] MARQUES, I.: Existence and asymptotic behavior of solutions for a class of non-linear elliptic equations with Neumann condition. *Nonlinear Anal.*, v. 61, n. 1-2, p. 21-40, 2005.
- [37] MONAHAM, J. P.: Numerical Solution of a Non-Linear Boundary-Value Problem (Doctoral dissertation, Department of Physics). 1971
- [38] MOSER, J.: A sharp form of an inequality by N. Trudinger. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 20, n. 11, p. 1077-1092, 1971.
- [39] NGUYEN, V. H.: Improved Moser–Trudinger inequality of Tintarev type in dimension n and the existence of its extremal functions. *Ann. Global Anal. Geom.*, v.54, p. 237-256, 2018.
- [40] NGUYEN, V.: Remarks on the Moser–Trudinger type inequality with logarithmic weights in dimension N . *Proc. Amer. Math. Soc.*, v.147, p.5183-5193, 2019.
- [41] NGÔ, Q. A., NGUYEN, V. H.: Supercritical Moser–Trudinger inequalities and related elliptic problems. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2020.
- [42] OPIC, B., KUFNER, A.: Hardy–type Inequalities, Pitman Res. Notes in Math., vol. 219, Longman Scientific and Technical, Harlow, 1990.
- [43] PELESKO, J. A., BERNSTEIN, D. H.: Modeling mems and nems. CRC press. 2002.
- [44] PEETRE, J.: Espaces d’interpolation et théorème de Soboleff. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, v. 16, p.279-317, 1966.

- [45] POHOZAEV S. I.: The Sobolev embedding in the case $p_l = n$. Proceedings of the technical scientific conference on advances of scientific research., p.158-170, 1964.
- [46] ROY, P.: Extremal function for Moser–Trudinger type inequality with logarithmic weight. *Nonlinear Anal.*, v.135, p.194-204, 2016.
- [47] ROY, P.: On attainability of Moser-Trudinger inequality with logarithmic weights in higher dimensions, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, v. 39, p.5207-5222, 2019
- [48] ROYDEN, H.L.: *Real Analysis*, 4th edition, Prentice Hall, New york, 2010.
- [49] STRUWE, M.: Critical points of embeddings of $H_0^{1,n}$ into Orlicz spaces. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, v. 5, p. 425-464, 1988.
- [50] TINTAREV, C.: Trudinger–Moser inequality with remainder terms. *J. Funct. Anal.*, v.266, p.55–66, 2014.
- [51] TRUDINGER, N.S.: On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. *J. Math. Mech.*, v.17, p.473–483, 1967.
- [52] TIAN,G.-T., WANG,X.-J.: Moser–Trudinger type inequalities for the Hessian equation. *J.Funct.Anal.*, v.259, p.1974–2002 2010.
- [53] XUE, J., ZHANG, C., & ZHU, M.: Trudinger–Moser type inequalities with logarithmic weights in fractional dimensions. *Adv. Nonlinear Stud.*, vol. 25, p. 152-170 2025.
- [54] YANG, Y.: A sharp form of Moser–Trudinger inequality in high dimension. *Internat. J. Math.*, v.239, p. 100-126 2006.
- [55] YANG, Y.: Extremal functions for a sharp Moser–Trudinger inequality. *Int. J. Math.* v.17, p.331–338 2006.
- [56] YUDOVICH, V.I.: Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 138 (1961) 805–808; Translated in *Soviet Math. Dokl.* v.2, p.746–749, 1961.
- [57] YU, P., ZHU, X.: Extremal Functions for a Trudinger-Moser Inequality with a Sign-Changing Weight. *Potential Anal.*, p. 1-19, 2024.

-
- [58] ZUBAIR, M., MUGHAL, M.J., NAQVI, Q.A.: Electromagnetic Fields and Waves in Fractional Dimensional Space, Springer, Berlin, 2012.