



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Dois Primeiros Exemplos de Espaços de Banach de
Dimensão Infinita onde o Teorema de Peano Clássico
Falha**

Victor Carvalho de Oliveira

Teresina - 2015

Victor Carvalho de Oliveira

Dissertação de Mestrado:

**Dois Primeiros Exemplos de Espaços de Banach de Dimensão
Infinita onde o Teorema de Peano Clássico Falha**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Marcos Vinício Travaglia

Teresina - 2015

O48d

Oliveira, Victor Carvalho de
Dois primeiros exemplos de espaços de Banach de
dimensão infinita onde o teorema de Peano clássico falha /
Victor Carvalho de Oliveira, 2015.
80 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade
Federal do Piauí – UFPI, Mestrado em Matemática, 2015.
“Orientação: Prof. Dr. Marcos Vinício Travaglia”.

1. Teorema de Peano em dimensão infinita I. Título.

CDD: 517.98

A todos que acreditaram na realização deste trabalho.

Agradecimentos

Mesmo não sendo uma pessoa religiosa, gostaria de agradecer primeiramente a Deus pela realização deste trabalho, e por tudo mais que ele vêm fazendo de bom para mim.

Gostaria de agradecer ao apoio da minha família, que nunca deixou que nada me faltasse, em especial minha mãe Maria Ivete, minha tia/mãe Maria Barbosa, minha tias Francisca e Sílvia Regina, ao meu primo Francisco Antônio pelo imenso apoio dado, ao meu irmão/amigo Vinícius Carvalho, e meu irmão/amigo/editor gráfico Gilmar Júnior, e ao meu sobrinho Arthur Rodrigues, pelas horas de divertimento. A todos eles, meus mais sinceros agradecimentos.

Agradeço também a todos os professores que tive, desde a escola básica, até aos que contribuíram com a minha formação acadêmica na área que amo, em especial aos professores Alessandro Wilker, Pedro Júnior, José Arimatéa, Pitágoras Carvalho, Afonso Norberto, entre outros professores da Universidade Estadual do Piauí.

Gostaria de agradecer também aos professores a quem tive o prazer de ver darem aula na Universidade Federal do Piauí, em especial ao professor Xavier pelo empenho e dedicação que tem pelo departamento de Matemática, ao professor José Francisco, pelos ensinamentos e por aceitar fazer parte da banca, lendo e contribuindo com este trabalho, e ao professor Isaías Pereira, também pelos ensinamentos e pela contribuição durante a reta final até a apresentação deste trabalho.

Ainda em agradecimento aos professores que me deram aula durante o mestrado, quero agradecer mais especialmente ainda ao meu orientador, professor Marcos Viníciu Travaglia, a pessoa mais bondosa e paciente do qual tive o imenso prazer e satisfação de conhecer e ser orientado. A ele serei eternamente grato.

Agradeço as horas de estudo e diversão por todos os parceiros e colegas (e também alunos do mestrado) que estiveram comigo durante este tempo entre eles Atécio Alves, Elian-

derson, Jaciel, Joel Rabêlo, Antônio Aguiar, Fernando Gomes, Jhonata, Lucas Machado, Lívio, Raul, Ray, Sandoel.

Também gostaria de agradecer aos meus grandes amigos Alberone, Andreino, Andressa, Antônio Luiz, Jéferson, Ismael, Lucas Vidal, Lucas Quaresma, Pádua, Rafael Antunes, Rafael Emanuel e Thiago Esteves, pela ajuda nos estudos e nas diversões que encaramos durante todo o tempo que durou mestrado e que suas amizades levarei comigo sempre.

Agradeço aos meus amigos não-matemáticos pela compreensão e apoio que me deram, e por entenderem que a vida de aluno de matemática requer sacrifícios e abdições de prazeres mundanos. Agradeço também ao pessoal do projeto social QG da luta, pelo ensinamentos na arte suave (Jiu-Jitsu), em especial ao Coronel Oliveira, pela receptividade no projeto, e ao meu treinador Luís Ribeiro.

Por último, e mais especialmente, agradeço à minha (até então) namorada/amiga/companheira/amante Byanka Gomes, por me entender, e estar comigo durante os momentos mais tensos e decisivos, mais alegres e tristes, e sempre me dando apoio, carinho, atenção e tudo mais de bom que sua presença doce e angelical trouxe de bom na minha vida.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“Os obstáculos são as coisas assustadoras que você vê quando tira os olhos do seu objetivo”.

Henry Ford.

Resumo

O Teorema de Peano Clássico (TPC) garante a existência local de solução para o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = F(\mathbf{t}, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = 0$ com $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ contínua sob a hipótese de X ser um espaço (de Banach) de dimensão finita. Neste trabalho apresentamos em detalhes as provas dos resultados de J. Dieudonné (1950) e J. Yorke (1970) que estabelecem a falha do TPC nos espaços de Banach de dimensão infinita c_0 e ℓ^2 , respectivamente.

Abstract

The Classical Peano's Theorem (CPT) ensures the local existence of solutions to the initial value problem $\mathbf{x}' = F(\mathbf{t}, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = 0$ with $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ continuous under the hypothesis that X is a finite-dimensional (Banach) space. In this work we present in details the proofs of J. Dieudonné's and J. Yorke's results establishing the Failure of CPT in the infinite-dimensional Banach spaces \mathbf{c}_0 and ℓ^2 , respectively.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
1 Alguns Resultados acerca de Análise Funcional e Equações Diferenciais Ordinárias	5
1.1 Fatos Básicos de Análise Funcional	5
1.1.1 Principais Definições	5
1.2 Espaços de Dimensão Infinita	7
1.2.1 Espaços de Banach	8
1.2.2 Espaços de Hilbert	9
1.3 Alguns Teoremas Importantes de Análise Funcional	11
1.4 Fatos Básicos de Equações Diferenciais Ordinárias	12
1.4.1 Principais Definições	12
1.5 Sobre Teoremas de Ponto Fixo e de Existência de Solução de EDO	14
1.5.1 Teoremas de Ponto Fixo	14
1.5.2 Teoremas de Existência de Solução para Equações Diferenciais Ordinárias	15
1.6 O Lema de Gronwall	16
2 Formulação do Problema da Não-Existência e Estratégia Geral para Resolvê-lo	17
3 Inexistência de Solução Local em c_0 - Contra-Exemplo de Dieudonné	19
3.1 Funções de Dieudonné	19
3.2 Caracterização da Contradição	20

3.2.1	Outra forma de Mostar a Contradição para o TPC Usando a Função de Dieudonné	22
3.3	Observações Posteriores a Respeito da Função de Dieudonné	23
4	Inexistência de Solução Local em $\ell^2(\mathbb{N})$ - Contra-Exemplo de Yorke	26
4.1	Caminho de Yorke	27
4.2	Construção da Função de Yorke	32
4.3	Prova da Contradição	34
4.3.1	Qualquer suposta solução nunca se anula sobre $(0, \delta)$	35
4.3.2	Qualquer suposta solução é identicamente nula sobre $(0, \delta)$	37
5	Formulação Fraca para o Teorema de Peano	47
5.1	Definição das Classes \mathbb{P} e \mathbb{WP} de espaços de Banach	48
A	Demonstrações Omitidas no Capítulo 3	51
A.1	Demonstração da Proposição 3.1.1	51
B	Demonstrações Omitidas no Capítulo 4	53
B.1	Demonstração da Proposição 4.1.1	53
B.2	Demonstração da Proposição 4.1.2	55
B.3	Demonstração da Proposição 4.2.1	64
	Referências Bibliográficas	68

Índice de Símbolos

$F = F_{c_0}$	Função de Dieudonné.
$F = F_{\ell^2(\mathbb{N})}$	Função de Yorke.
$(-\delta, \delta)$	Intervalo onde a suposta solução (local) do P.V.I. exista.
$C^1((-\delta, \delta), X)$	Conjunto das funções $F : (-\delta, \delta) \rightarrow X$ continuamente diferenciáveis.
$B_r(x)$	Bola aberta de centro em x e raio r .
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	Conjunto das sequências de números reais.
$\ \cdot \ _{\infty}$	Norma do supremo.
c_0	Conjunto das sequências reais convergentes a zero com a norma $\ \cdot \ _{\infty}$.
$\ell^2(\mathbb{N})$	Espaço das sequências com quadrado somável.
$\ \cdot \ _2$	Norma em $\ell^2(\mathbb{N})$.
$\langle x, y \rangle$	Produto interno entre x e y .
$B(H)$	Conjunto dos operadores lineares limitados.
τ_{forte}	Topologia Forte em $B(H)$.
$s - \lim$	Convergência na Topologia Forte $B(H)$.
τ_{uniforme}	Topologia uniforme em $B(H)$.
$u - \lim$ ou \lim	Convergência na Topologia Uniforme de $B(H)$.
$\lceil x \rceil$	Menor inteiro maior que $x \in \mathbb{R}$.
N_{δ}	Menor natural n tal que $2^{-n} \leq \delta$, isto é, $N_{\delta} = \lceil -\log_2 \delta \rceil$.
$\dot{\cup}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	União disjunta de intervalos do tipo (\mathbf{a}, \mathbf{b}) .
\mathbb{O}	Operador nulo de H em H .

\mathbb{I}	Operador identidade de H em H .
\mathbb{I}_n	Projetor $\mathbb{I}_n(\mathbf{y}) = (0, \dots, y_n, 0, \dots)$ de H em H .
e	Função exponencial.
$\stackrel{\text{def.}}{=}$	Igual por definição.
$\stackrel{\text{Af.}}{=}$	Igual por Afirmação.
$\overline{\{x_n\}}$	Fecho do conjunto formado pelos termos da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
l_∞	$\left\{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{i \in \mathbb{N}} x_i < \infty \right\}$.
$E \oplus F$	$\{v = e + f : e \in E \text{ e } f \in F\}$, onde $E \cap F = \{0\}$.

Introdução

O Teorema de Peano Clássico TPC ([19], [18] e [20]) garante a existência de soluções para os Problemas de Valor Inicial (ou Problema de Cauchy) sem se preocupar com a unicidade de tais soluções. Mais precisamente, o enunciado do Teorema de Peano (sem perda de generalidade, através de uma translação nas condições iniciais) é o seguinte: Seja X um espaço de Banach de dimensão finita e considere a função $F : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Então, existe solução do problema de Cauchy correspondente a F com valores iniciais $x(0) = 0$, definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, com algum $\delta > 0$.

Neste trabalho apresentamos os dois primeiros resultados publicados que ajudaram a pôr um fim em uma discussão que perdurou entre os anos de 1950 a 1974, que trata da não validade em dimensão infinita para o Teorema de Peano. Apresentaremos dois exemplos de funções em dimensão infinita, creditadas, respectivamente, a Jean Dieudonné e James Yorke, que ajudam a provar que o Teorema de Peano de fato não possui validade em espaços de dimensão infinita.

Cronologicamente, Dieudonné [7] foi o primeiro a apresentar, em 1950, uma função contínua e autônoma em relação à variável temporal, que tem como espaço base o conjunto das sequências reais que convergem a zero c_0 (espaço não-reflexivo) onde o Teorema de Peano não é válido.

Após a contribuição de Dieudonné, o matemático americano James Yorke apresentou em [24], outra função, contínua, mas desta vez não-autônoma, que faz com que o Teorema de Peano não seja válido, desta vez no espaço de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ (espaço reflexivo).

Outros dois trabalhos ajudaram de forma mais abrangente a resolver de vez a questão sobre a não-validade do Teorema de Peano em espaços de dimensão infinita. No primeiro, datado de 1972, o matemático Arrigo Cellina [6] provou que o TPC não vale para espaços não-reflexivos, generalizando, portanto, o trabalho de Dieudonné [7]. E, por fim, para encerrar de vez qualquer questionamento que ainda pudesse existir, o matemático russo

A. N. Godunov [8], em 1974, provou que o clássico resultado de Peano de fato não vale em qualquer espaço de dimensão infinita.

Esta dissertação baseia-se fundamentalmente no trabalho de Vittorino Pata [17], que apresenta uma modo alternativo do resultado de Dieudonné [7], e no trabalho original de Yorke [24]. A contribuição desta dissertação consiste em apresentar os detalhes destes dois artigos.

Em resumo, o trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 listamos alguns resultados clássicos e fixamos algumas notações que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

No capítulo 2 apresentamos a formulação do problema da não-existência e a estratégia geral para atacá-lo. Este capítulo funciona como um guia para os capítulos 3 e 4, que são os capítulos principais deste trabalho.

No capítulo 3, apresentamos o primeiro resultado feito para mostrar a não-validade do Teorema de Peano, denominado de função de Dieudonné. Este capítulo foi baseado em [17]. Fizemos o Apêndice A para colocar a verificação rotineira da continuidade da Função de Dieudonné. Encerraremos o Capítulo 3 explicando o porquê da Função de Dieudonné não poder ser usada como contra-exemplo para o TPC se trocarmos o espaço c_0 pelo espaço ℓ^2 .

No capítulo 4 apresentamos o resultado da não-validade do Teorema de Peano segundo proposto no artigo de James Yorke [24]. Algumas demonstrações das passagens intermediárias deste capítulo foram colocados no Apêndice B, com o propósito de tornar a leitura mais direta e agradável.

Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos a formulação fraca para o Teorema de Peano.

Capítulo 1

Alguns Resultados acerca de Análise Funcional e Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Fatos Básicos de Análise Funcional

Neste capítulo fixaremos algumas notações e daremos definições ao desenvolvimento do trabalho. Para informações mais completas, indicamos ao leitor que veja [1], [2], [4], [12] e [13].

1.1.1 Principais Definições

Definição 1.1.1. *Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $(x, y) \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado de distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Neste caso, dizemos que o par (M, d) é um espaço métrico. Por um abuso de notação, trataremos o espaço métrico em questão apenas por “ M ”.

Observação 1.1.1. *Quando houver dois ou mais espaços métricos com métrica possivelmente diferentes, usaremos apenas a única notação “ d ” para denotar suas métricas.*

Definição 1.1.2. *Seja X um espaço vetorial. Uma norma em X é uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty) \subset \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $u \in X$ o número real $\|u\|$, chamado norma de u , de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $u, v \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$N1) \text{ Se } u \neq 0 \text{ então } \|u\| \neq 0;$$

$$N2) \|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \cdot \|u\|;$$

$$N3) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Neste caso o par $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de espaço vetorial normado.

Observação 1.1.2. *Todo espaço vetorial normado é também um espaço métrico com $d(x, y) = \|x - y\|$. Tal métrica é chamada de métrica induzida.*

Definição 1.1.3. *Seja X um espaço vetorial real. Um produto interno em X é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de vetores $u, v \in X$ um número real $\langle u, v \rangle$, chamado produto interno de u por v , de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para $u, v, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários:*

$$P1) \langle u + v, z \rangle = \langle u, z \rangle + \langle v, z \rangle;$$

$$P2) \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle;$$

$$P3) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle;$$

$$P4) u \neq 0 \implies \langle u, u \rangle > 0.$$

Definição 1.1.4. *Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Diz-se que $f : M \rightarrow N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.*

Definição 1.1.5. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função entre os espaços métricos X e Y . Se existir uma constante $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para quaisquer que sejam $x, y \in X$, dizemos então que f é uma aplicação lipschitziana, e c é a constante de Lipschitz.*

Proposição 1.1.1. *Toda aplicação lipschitziana é contínua.*

Demonstração. Com efeito, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ na definição de continuidade. □

Proposição 1.1.2. *Sejam X, Y espaços vetoriais normados. As seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear $f : X \rightarrow Y$ são equivalentes:*

1. f é contínua;
2. f é contínua no ponto $0 \in X$;
3. Existe $c > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq c \cdot \|x\|$ para todo $x \in X$;
4. Existe $c > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in X$.

Demonstração. Vide [13], pág. 56. □

Definição 1.1.6. *Dados os espaços normados X e Y , indicamos com a notação $\mathcal{L}(X; Y)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas de X em Y . Mostra-se que tal conjunto, munido com a norma*

$$\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| : x \in X, \|x\| = 1 \}.$$

é um espaço vetorial normado

Observação 1.1.3. *Por definição, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ em $\mathcal{L}(X; Y)$ significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$, o que equivale a dizer que $f_n \rightarrow f$ uniformemente.*

Observação 1.1.4. *Caso se tenha $Y = X$, o espaço vetorial $\mathcal{L}(X; Y)$ será denotado simplesmente por $B(X)$. No capítulo 4 será tratado o caso em que X representa um espaço de Hilbert (veja o exemplo 1.2.1 da seção seguinte).*

1.2 Espaços de Dimensão Infinita

Neste capítulo introduziremos a definição de espaço de dimensão infinita. Este tipo de espaço se faz presente nos capítulos principais desta dissertação e representam uma parte de extrema relevância na teoria de Análise Funcional.

Definição 1.2.1. *Seja X um espaço vetorial. Se para cada inteiro n existir um número n de elementos linearmente independentes em X , dizemos então que X é um espaço de dimensão infinita.*

Um pequeno fragmento do texto de Hamilton Prado Bueno [3] serve como motivação para o comentário que será dado a seguir:

“Na prática, raramente verificamos que um espaço vetorial tem dimensão infinita exibindo uma de suas bases. Na verdade, muito raramente podemos exibir uma base de um espaço X de dimensão infinita. A maioria dos exemplos de base em espaços de dimensão infinita ocorre em espaços de seqüências”.

O texto acima exprime bem a importância, e ao mesmo tempo a pequenez, dos espaços de seqüências dentro da teoria de espaços de dimensão infinita. Dois exemplos destes espaços são a seguir, referem-se aos Capítulos 3 e 4, respectivamente.

Exemplo 1.2.1. *O espaço c_0 denota o conjunto de todas as seqüências $(x = x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ de números reais tais que x_k converge para zero quando k tende a $+\infty$. É claro que c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de seqüências (operações coordenada a coordenada). É fácil mostrar que*

$$\|x\|_{c_0} = \sup \{|x_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

torna c_0 um espaço vetorial normado de dimensão infinita.

Exemplo 1.2.2. *O espaço das seqüências de quadrado somável, ou espaço ℓ^2 é o conjunto constituído por todas as seqüências $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ de números reais tais que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. É fácil mostrar que ℓ^2 é um espaço vetorial normado, com a norma*

definida por $\|x\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$.

1.2.1 Espaços de Banach

Trataremos nesta subseção sobre os espaços de Banach. Aqui faremos um resumo das principais definições e apresentaremos alguns exemplos sobre estes importantes tipos de espaços métricos.

Definição 1.2.2 (Seqüência de Cauchy). *Uma seqüência (x_n) em um espaço métrico X chama-se uma seqüência de Cauchy quando, para qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ sempre que $m, n > n_0$.*

Definição 1.2.3 (Espaço de Banach). *Seja X um espaço normado. Um subconjunto $F \subset X$ é dito completo, se toda seqüência de Cauchy de elementos de F convergir para um elemento de F . Neste caso, o espaço normado completo $(X, \|\cdot\|)$ é dito espaço de Banach.*

Exemplo 1.2.3. *Os espaços vetoriais $(c_0, \|\cdot\|_{c_0})$ e $(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$ são exemplos de espaços de Banach com as operações usuais de seqüência e com suas respectivas normas.*

Exemplo 1.2.4. *O espaço das funções contínuas reais definidas no intervalo $[0, 1]$ é um espaço de Banach com a norma do supremo: $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.*

Proposição 1.2.1. *Sejam X, Y espaços de Banach, e $\mathcal{L}(X; Y)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y . Para $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a expressão*

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad (1.1)$$

satisfaz as propriedades de norma.

A expressão 1.1 possui as seguintes propriedades extras:

- i. $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $x \in X$;*
- ii. $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$;*
- iii. $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ para todo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*
- iv. $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ é espaço de Banach.*

Demonstração. Vide [2].

□

1.2.2 Espaços de Hilbert

Faremos nesta seção um breve apanhado das principais definições e proposições a respeito dos espaço de Hilbert, que são de fundamental importancia na teoria da Análise Funcional devido à proximidade desses conjuntos com o espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Lembrando da definição de produto interno (veja Definição C.1.3), podemos dar prosseguimento às definições desta seção.

Definição 1.2.4. *O par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado de espaço com produto interno. Neste caso dizemos que a função*

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad (1.2)$$

é a norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Antes de provarmos que a função da Definição 1.2 acima é de fato uma norma, vejamos um resultado preliminar que ajudará na demonstração deste fato.

Proposição 1.2.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \quad (1.3)$$

para quaisquer \mathbf{x}, \mathbf{y} em X . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} são linearmente dependentes.

Demonstração. Vide [2], página 105. □

Com isso, vale o seguinte resultado:

Proposição 1.2.3. *Seja X um espaço com produto interno. A função definida na expressão (1.2) é uma norma em X .*

Proposição 1.2.4. *Sejam X um espaço com produto interno e $\mathbf{y} \in X$ um vetor fixado. Então as funções*

$$\mathbf{x} \in X \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R} \quad e \quad \mathbf{x} \in X \mapsto \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$$

são contínuas.

Definição 1.2.5 (Espaço de Hilbert). *Um espaço com produto interno que é completo na métrica induzida pela norma, que por sua vez foi induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert. Em particular, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.*

Exemplo 1.2.5. *Dadas as sequências numéricas $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{\infty}, \mathbf{y} = (y_j)_{j=1}^{\infty}$, a expressão*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

define um produto interno em ℓ^2 . A convergência da série acima decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz. A norma induzida coincide com a norma original $\|\cdot\|_2$ de ℓ^2 .

1.3 Alguns Teoremas Importantes de Análise Funcional

Apresentaremos agora alguns resultados importantes e básicos que ajudarão no entendimento dos Capítulos 3 e 4. Começemos com algumas definições.

Definição 1.3.1. *O dual algébrico de um espaço vetorial X é definido como sendo*

$$X^\# = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

Definição 1.3.2. *Um funcional linear $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é dito limitado se:*

$$\|f\| \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{x \in X: x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} < \infty.$$

Definição 1.3.3. *O espaço dual de um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é o subconjunto X^* do espaço $X^\#$ definido por:*

$$X^* = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})\}.$$

Definição 1.3.4. *Um espaço topológico (X, τ) é dito separável quando existe uma sequência x_n em X que é densa em X , ou seja, $\overline{\{x_n\}} = X$.*

Definição 1.3.5. *O espaço bidual X^{**} de um espaço normado X é o dual do espaço X^* .*

Definição 1.3.6. *Seja X um espaço de Banach, e considere o espaço bidual X^{**} . A injeção canônica de X em X^{**} é a aplicação $J : X \longrightarrow X^{**}$ definida por:*

$$J(x)(f) = f(x), \quad x \in X, \quad f \in X^*.$$

A principal propriedade da injeção canônica é a seguinte:

Proposição 1.3.1. *A injeção canônica J é uma isometria.*

Demonstração. Vide [1], página 59. □

Definição 1.3.7. *Um espaço de Banach X é dito reflexivo quando a injeção canônica for uma aplicação sobrejetiva, ou seja, $J(X) = X^{**}$.*

Exemplo 1.3.1. *O dual do espaço de Banach $\ell^p(\mathbb{N})$ é isomorfo ao espaço de Banach $\ell^q(\mathbb{N})$, onde q é o expoente conjugado de p , isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Vide [1].*

Teorema 1.3.1 (Teorema de Riesz-Fischer). *Todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo a ℓ^2 .*

Demonstração. Vide [2], página 124. □

Corolário 1.3.1. *Espaços de Hilbert separáveis são reflexivos.*

Demonstração. Vide [2], página 125. □

Teorema 1.3.2. *O dual de um espaço de Hilbert é também um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Vide [2], página 128. □

Corolário 1.3.2. *Espaços de Hilbert são reflexivos.*

Demonstração. Vide [2], página 128. □

1.4 Fatos Básicos de Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção apresentaremos alguns resultados básicos, mas de fundamental importância na teoria de Equações Diferenciais Ordinárias. Para informações mais completas, indicamos ao leitor que veja [3], [5], [10], [14], [15] e [23].

1.4.1 Principais Definições

Definição 1.4.1. *Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que contém uma variável independente t , uma variável dependente y e alguma de suas derivadas $y', y'' \dots, y^{(n)}, \dots$.*

Para as próximas definições, consideremos $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, X um espaço de Banach e uma função f de $I \times X$ em X dada por $f : I \times X \rightarrow X$.

Definição 1.4.2. *Uma função $\varphi : I \rightarrow X$ chama-se solução da equação*

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = f(t, x)$$

no intervalo I se:

1. O gráfico de φ em I está contido em $I \times X$;
2. $\frac{d\varphi}{dt}(t) = \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.

Definição 1.4.3. *Seja X um espaço de Banach e $V \subset X$ um conjunto aberto. Chamamos de campo de vetores contínuo em X qualquer aplicação contínua $g : V \rightarrow X$.*

Observação 1.4.1. *É óbvio que se temos um campo de vetores g , podemos definir uma aplicação $f : I \times X \rightarrow X$ dada por $f(t, x) \stackrel{\text{def.}}{=} g(x)$, na qual temos associada a EDO*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) = g(x).$$

Definição 1.4.4. *Qualquer equação diferencial dada por um campo (cuja expressão, portanto, não dependa da variável $t \in \mathbb{R}$) é chamada de autônoma. Caso contrário, a equação é chamada de não-autônoma.*

A próxima observação relaciona os sistemas do tipo autônomo com os do tipo não-autônomo, e este é de fundamental importância no que se diz respeito ao capítulo 4 desta dissertação, já que naquele capítulo a função usada para mostrar o contra-exemplo para o Teorema de Peano (Veja a definição 1.5.5) é não-autônoma.

Observação 1.4.2. *Notemos que toda Equação Diferencial Ordinária do tipo $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ pode também ser reduzida a uma equação autônoma. Para tanto, basta usar a substituição $y = (t, x)$, que associa à equação original uma equação autônoma particular (com dimensão mais alta): $\frac{dy}{dt} = (1, g(y))$. Desse modo, nosso modelo geral de Equação Ordinária são, afinal, as equações autônomas, já que qualquer outra pode ser reduzida a uma deste tipo.*

Definição 1.4.5 (Problema de Valor Inicial, ou problema de Cauchy). *Seja U um aberto contido em $I \times X$. Seja $f : U \rightarrow X$ uma aplicação pelo menos contínua. Fixado um par $(t_0, x_0) \in U$, chamado de valor inicial para a EDO, chamamos de problema de Cauchy associado a f com valor inicial (t_0, x_0) ao problema definido formalmente por:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x); \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Em outras palavras, dizemos que uma aplicação $\varphi : I \rightarrow X$ (onde $t_0 \in I$) é uma solução do problema de Cauchy dado por f , com valor inicial (t_0, x_0) se:

- 1) φ é solução da EDO (veja Definição C.4.2, item 1) associado a f e;
- 2) $\varphi(t_0) = x_0$.

Observação 1.4.3. *É justamente a condição 1 acima que é violada por qualquer suposta solução do PVI*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

com $X = \mathbf{c}_0$ e $f = f_{\mathbf{c}_0}$, como dado no Capítulo 3.

1.5 Sobre Teoremas de Ponto Fixo e de Existência de Solução de EDO

Nesta seção discutiremos sobre a teoria de ponto fixo, e sobre os importantes teoremas de existência em Equações Diferenciais Ordinárias, em especial sobre os Teoremas de Picard e o de Peano, que por sua vez servirá como motivação para os capítulos 3 e 4.

1.5.1 Teoremas de Ponto Fixo

Definição 1.5.1. *Um ponto fixo de uma função $T : X \rightarrow X$ é um ponto $x \in X$ tal que $T(x) = x$.*

Definição 1.5.2. *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma função $T : X \rightarrow X$ chama-se uma contração quando existe uma constante c , com $0 \leq c < 1$, tal que $d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in X$.*

Dadas as definições acima, apresentaremos agora de três dos primeiros teoremas que garantem a existência de um ponto fixo.

Teorema 1.5.1 (Ponto Fixos de Banach). *Sejam X um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ uma contração com constante de contração c . Então T possui um único ponto fixo em X . Além disto, tal ponto fixo x_{PF} é dado pelo limite $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0)$, é único, independente da escolha de $x_0 \in X$. Também vale a estimativa de erro da n -ésima iterada*

$$d(T^n(x_0), x_{PF}) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(T(x_0), x_0).$$

Demonstração. Vide [13], página 220. □

Teorema 1.5.2 (Ponto Fixo de Brouwer). *Seja X um espaço vetorial normado de dimensão finita e $B = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$. Consideremos um espaço métrico U homeomorfo a B . Então toda transformação contínua $T : U \rightarrow U$ possui pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Vide [10], páginas 156-159. □

Teorema 1.5.3 (Ponto Fixo de Schauder). *Seja X um espaço normado e U um subconjunto convexo (isto é, conjuntos nos quais quaisquer segmento de reta ligando dois de seus pontos está inteiramente contido no próprio conjunto) e compacto de X . Se $T : U \rightarrow U$ é uma transformação contínua, então T possui ao menos um ponto fixo.*

Demonstração. Vide [10], páginas 164-165. □

1.5.2 Teoremas de Existência de Solução para Equações Diferenciais Ordinárias

Os teoremas de existência de solução para um Problema de Valor Inicial dado são de extrema utilidade em Matemática. Trataremos nesta subseção de dois importantes teoremas que ajudam a garantir existência (mesmo que local) de solução. São eles os Teoremas de Picard e Teorema de Peano. Estes teoremas são consequência, respectivamente, dos Teoremas do ponto fixo de Banach e de Schauder acima.

Definição 1.5.3. *Uma aplicação $f : U \subset I \times X \rightarrow X$ (não necessariamente contínua) é dita localmente lipschitziana em relação à segunda variável (abreviada por Lip_2) se todo ponto de U possui uma vizinhança restrita à qual f é lipschitziana com respeito à segunda variável. Mais precisamente, dado $(t, x) \in U$, existe $J \times V \subset U$ vizinhança do ponto (t, x) e uma constante $K \geq 0$, tal que, para todo $x_i \in V$, com $i = 1, 2, \dots$ e $t \in I$ temos*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|.$$

A definição anterior é útil para enunciarmos o seguinte teorema:

Teorema 1.5.4 (Picard - versão para dimensões finita e infinita). *Seja X um espaço de Banach e $f : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_b(x_0)} \subset \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ uma aplicação contínua, limitada, e lipschitziana em relação à segunda variável (note que se X tem dimensão finita, a condição de limitada é redundante). Então, existe uma única solução para o problema de Cauchy associada a f com valores iniciais $x(t_0) = x_0$, definida no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha = \min \left\{ \alpha, \frac{b}{M} \right\}$ e $M = \sup \left\{ \|f(t, x)\|, (t, x) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_b(x_0)} \right\}$.*

Demonstração. Vide [5], página 44. □

Teorema 1.5.5 (Peano). *Seja X um espaço de Banach de dimensão finita. Considere $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b(x_0)} \subset \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Então, existe solução para o problema de Cauchy associado a f com valores iniciais $x(t_0) = x_0$, definida no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ e $M = \sup \left\{ \|f(t, x)\|, (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b(x_0)} \right\}$.*

Demonstração. Vide [5], página 48. □

1.6 O Lema de Gronwall

Apesar da relevância de se saber da continuidade das soluções em relação às condições iniciais e parâmetros, convém também obter cotas para a velocidade com que duas possíveis soluções possam se separar ao longo do tempo. Isso é obtido através de hipóteses adicionais sobre a aplicação f que expressa a equação diferencial. Um dos tipos de hipótese adicional são as do tipo desigualdade integrais.

Uma importante desigualdade deste tipo se encontra sob a forma do Lema de Gronwall, e é sobre ela que se trata esta seção. Aqui apresentaremos somente o enunciado, e a referência onde o leitor pode encontrar sua demonstração. O Lema de Gronwall proporciona a justificação e a ferramenta de muitas aproximações de soluções de equações diferenciais ordinárias. Em particular, é utilizado para demonstrar a especificidade de uma solução para o problema de Cauchy, por meio do Teorema de Cauchy-Lipschitz, e se encontra sob a forma integral e diferencial.

Lema 1.6.1 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam $u, \beta \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}^+]$ e C uma constante não-negativa. Suponhamos que se tenha a desigualdade*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s) ds,$$

com $t \geq t_0$. Então

$$u(t) \leq C \cdot e^{\int_{t_0}^t \beta(s) ds}$$

para $t \geq t_0$.

Demonstração. Vide [14]. □

Capítulo 2

Formulação do Problema da Não-Existência e Estratégia Geral para Resolvê-lo

O problema central deste trabalho possui a seguinte formulação:

Problema Central. Para cada espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ construa uma função $F_X : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ que seja contínua de modo que para todo $\delta > 0$ (independente do quão pequeno seja) não exista função diferenciável $\mathbf{y} : (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ satisfazendo o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = F_X(t, \mathbf{y}(t)), & t \in (-\delta, \delta), \\ \mathbf{y}(0) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Em outras palavras, dado X construa F_X de modo que o PVI somente seja verificado no “intervalo” de tempo degenerado $\{0\}$.

Observamos que, de modo similar à definição de diferenciabilidade em $X = \mathbb{R}^n$, dizemos que uma função à valores no espaço de Banach $\mathbf{y} : (-\delta, \delta) \rightarrow X$ é diferenciável no ponto $t \in (-\delta, \delta)$ caso exista $\mathbf{v} \in X$ satisfazendo $\lim_{s \rightarrow t} \left\| \frac{\mathbf{y}(s) - \mathbf{y}(t)}{s - t} - \mathbf{v} \right\| = 0$. Neste caso, mostra-se que tal \mathbf{v} é único e o denotamos por $\mathbf{y}'(t)$ (ou seja, a derivada da função \mathbf{y} no ponto t).

O modo de mostrarmos a não existência de soluções é feito por contradição. Mais precisamente temos a seguinte estratégia geral:

Estratégia Geral: Adota-se a seguinte estratégia para resolver o problema acima:

Passo 1. De acordo com o dado espaço de Banach X constrói-se uma função $F_X : \mathbb{R} \times X \rightarrow$

X de modo que esta função seja contínua em todos os pontos de seu domínio, e de modo que;

Passo 2. Ao supor que exista uma solução local, ou seja, uma função $x(t)$ – definida sobre um intervalo da forma $(-\delta, \delta)$ com $0 < \delta$, satisfazendo o PVI (2.1) – obtém-se uma contradição.

Resumimos abaixo os casos mais conhecidos de acordo com o espaço X e a função contínua F_X onde será impossível obter a contradição desejada, ou, equivalentemente, a existência de solução está garantida quando:

- I. O espaço X tem dimensão finita ou não e a função F_X satisfaz $F_X(t, \vec{0}) = \vec{0}$ para todo t em um intervalo aberto contendo o conjunto $(-\delta, \delta)$. Neste caso o PVI tem, por inspeção direta, como solução $x(t) \equiv 0$ sobre $(-\delta, \delta)$;
- II. O espaço X tem dimensão finita e a função F_X é lispchitz na segunda variável (Lip_2), ou seja, F_X satisfaz $\|F_X(t, \vec{y}) - F_X(t, \vec{x})\| \leq L\|\vec{y} - \vec{x}\|$ para uma constante $0 \leq L < \infty$ para todos os pontos (t, \vec{x}) e (t, \vec{y}) em alguma vizinhança do ponto $(0, \vec{0})$ em $\mathbb{R} \times X$. Neste caso a existência de solução segue do Teorema de Picard, cuja prova é baseada no Teorema do Ponto Fixo de Banach;
- III. O espaço X tem dimensão infinita, F_X é Lip_2 , e vale a condição adicional: existe uma vizinhança \mathcal{V} de $(0, \vec{0})$ em $\mathbb{R} \times X$ tal que $\sup_{(t, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}} \|F(t, \vec{x})\| < +\infty$. Neste caso, novamente, a existência segue do Teorema de Picard.
- IV. O espaço X tem dimensão finita e F_X é qualquer função contínua. Neste caso a existência segue do Teorema de Peano Clássico (Veja Teorema 1.5.5).

Devido ao item IV acima iremos considerar neste trabalho apenas o caso em que X possui dimensão infinita. Mais precisamente, apresentaremos em detalhes a solução do problema central acima para os seguintes casos:

1. Para o espaço $(X, \|\cdot\|) = (C_0, \|\cdot\|_\infty)$, cujo a prova foi feita por Dieudonné (1950);
2. Para o espaço $(X, \|\cdot\|) = (\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$, cujo a prova foi feita por J. A. Yorke (1970).

Capítulo 3

Inexistência de Solução Local em c_0 - Contra-Exemplo de Dieudonné

Em 1950, o matemático francês Jean Dieudonné (1906 - 1992) apresentou em [7] um contra-exemplo bem simples, em dimensão infinita, para o Teorema de Peano. Em seu trabalho, Dieudonné definiu uma função (aqui chamada de *função de Dieudonné*) que sai do espaço c_0 e chega nele próprio. Este foi, até então, o primeiro trabalho da época que oferecia uma resposta, mesmo que parcial, para a questão sobre a possível não-validade de solução para o problema de Cauchy em campos de vetores em espaços de dimensão infinita.

Neste capítulo, baseado fundamentalmente em [17], apresentaremos a função de Dieudonné, bem como a explicação do porquê esta função ser um contra-exemplo para o Teorema de Peano no espaço de dimensão infinita c_0 .

3.1 Funções de Dieudonné

Definição 3.1.1 (Função de Dieudonné). *Seja $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in c_0$. Defina a função $F_n : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$, com $\mathbf{n} = \{0, 1, 2, \dots\}$, por:*

$$F_n(\mathbf{y}) = \sqrt{|y_n|} + \frac{1}{1+n}.$$

A função de Dieudonné, denotada por $F_{c_0} : c_0 \rightarrow c_0$, é definida de modo que suas componentes são formadas pelas funções F_n acima. A função F_{c_0} é dada por:

$$F_{c_0}(\mathbf{y}) = (F_0(\mathbf{y}), F_1(\mathbf{y}), F_2(\mathbf{y}), \dots, F_n(\mathbf{y}), \dots).$$

Note que a função de Dieudonné é intuitivamente contínua. Mais precisamente, à medida que \mathbf{x} se aproxima de \mathbf{y} na norma de \mathbf{c}_0 , dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{c}_0$, temos que $F(\mathbf{x})$ se aproxima cada vez mais de $F(\mathbf{y})$. O seguinte resultado é válido:

Proposição 3.1.1. *A função de Dieudonné, $F : \mathbb{R} \times \mathbf{c}_0 \rightarrow \mathbf{c}_0$, dada por $(F(\mathbf{y}))_n = \sqrt{|\mathbf{y}_n|} + \frac{1}{n+1}$ é uniformemente contínua em todo o espaço \mathbf{c}_0 , ou seja, para $\varepsilon > 0$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{c}_0$ arbitrários, existe $\delta > 0$ tal que $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\|_{\mathbf{c}_0} < \varepsilon$ sempre que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbf{c}_0} < \delta$.*

Demonstração. Vide Apêndice A. □

3.2 Caracterização da Contradição

Seja $F_{\mathbf{c}_0}$ a Função de Dieudonné definida acima, e considere o Problema de Valor Inicial dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = F_{\mathbf{c}_0}(\mathbf{x}(t)), & \text{com } t \in (-\delta, \delta), \\ \mathbf{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Mostraremos que nenhuma suposta solução $\mathbf{y} \in C^1((-\delta, \delta), \mathbf{c}_0)$ para (3.1) pode existir.

Com efeito, seja $\mathbf{y} \in C^1((-\delta, \delta), \mathbf{c}_0)$ para algum $\delta > 0$, uma suposta solução para o problema (3.1). Em particular, cada componente \mathbf{y}_n é diferenciável em $(-\delta, \delta)$ e satisfaz o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'_n(t) = \sqrt{|\mathbf{y}_n(t)|} + \frac{1}{1+n}, & \text{com } t \in (-\delta, \delta), \\ \mathbf{y}_n(0) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Então $\mathbf{y}'_n(t) \geq \frac{1}{n+1} > 0$, ou seja, $\mathbf{y}'_n(t) > 0$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$ e, em particular, para $t \in [0, \delta)$. O fato de $\mathbf{y}'_n(t) > 0$ para $t \in [0, \delta)$ nos permite utilizar o método da separação das variáveis e integrar em ambos os lados da expressão (3.2), obtendo:

$$\int_{\mathbf{y}_n(0)}^{\mathbf{y}_n(t)} \frac{d\mathbf{y}_n}{\sqrt{\mathbf{y}_n} + \frac{1}{1+n}} = \int_0^t ds, \quad \text{com } t \in (0, \delta). \quad (3.3)$$

Fazendo a mudança da variável $\sqrt{\mathbf{y}_n}$ pela variável \mathbf{u} segue que $\mathbf{y}_n(t) = \mathbf{u}^2$, o que implica em $d\mathbf{y}_n = 2\mathbf{u} d\mathbf{u}$. Assim, devido à condição inicial $\mathbf{y}_n(0) = 0$ obtemos

$$\int_{\mathbf{y}_n(0)}^{\mathbf{y}_n(t)} \frac{d\mathbf{y}_n}{\sqrt{\mathbf{y}_n} + \frac{1}{1+n}} = \int_0^{\sqrt{\mathbf{y}_n(t)}} \frac{2\mathbf{u}}{\mathbf{u} + \frac{1}{1+n}} d\mathbf{u}, \quad \text{com } t \in [0, \delta).$$

Logo, a expressão (3.3) torna-se

$$\int_0^{\sqrt{\mathbf{y}_n(t)}} \frac{2\mathbf{u}}{\mathbf{u} + \frac{1}{1+n}} d\mathbf{u} = \int_0^t ds, \quad \text{com } t \in [0, \delta). \quad (3.4)$$

Fatorando o integrando do lado esquerdo da equação (3.4) resulta que:

$$\frac{2u}{u + \frac{1}{1+n}} du = \frac{2u}{\frac{(1+n)u+1}{1+n}} du = \frac{(1+n)2u}{(1+n)u+1} du$$

e substituindo em (3.4), obtemos:

$$\int_0^{\sqrt{y_n(t)}} \frac{(1+n)2u}{(1+n)u+1} du = \int_0^t ds,$$

ou seja,

$$2 \int_0^{\sqrt{y_n(t)}} \frac{(1+n)u+1-1}{(1+n)u+1} du = \int_0^t ds.$$

Daí

$$\begin{aligned} \int_0^t ds &= 2 \int_0^{\sqrt{y_n(t)}} \left[\frac{(1+n)u+1}{(1+n)u+1} - \frac{1}{(1+n)u+1} \right] du \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{y_n(t)}} \left[1 - \frac{1}{(1+n)u+1} \right] du \\ &= 2 \left\{ \sqrt{y_n(t)} - \int_0^{\sqrt{y_n(t)}} \frac{1}{(1+n) \left[u + \frac{1}{1+n} \right]} du \right\} \\ &= 2 \left\{ \sqrt{y_n(t)} - \left(\frac{1}{1+n} \right) \left[\ln \left| u + \frac{1}{1+n} \right| \right]_0^{\sqrt{y_n(t)}} \right\}. \end{aligned}$$

Ou seja, para todo $t \in (0, \delta)$, temos:

$$2 \left\{ \sqrt{y_n(t)} - \left(\frac{1}{1+n} \right) \left[\ln \left(\sqrt{y_n(t)} + \frac{1}{1+n} \right) - \ln \left(\frac{1}{1+n} \right) \right] \right\} = t,$$

isto é

$$\underbrace{2\sqrt{y_n(t)}}_{(a)} - \underbrace{\left(\frac{2}{1+n} \right) \ln \left(\sqrt{y_n(t)} + \frac{1}{1+n} \right)}_{(b)} + \underbrace{\left(\frac{2}{1+n} \right) \ln \left(\frac{1}{1+n} \right)}_{(c)} = \underbrace{t}_{(d)}. \quad (3.5)$$

Note que em (3.5), para todo $t \in (0, \delta)$, o termo (a) converge a zero quando fazemos $n \rightarrow \infty$ pois estamos assumindo que a suposta solução $y(t) \in c_0$ para todo $t \in (0, \delta)$. O termo (c) converge a zero quando $n \rightarrow \infty$ visto que $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \xi \ln \xi = 0$. Menos clara é a convergência de (b) para todo $t \in (0, \delta)$ quando $n \rightarrow \infty$. Para isto consideremos o seguinte resultado:

Lema 3.2.1. *Seja $g : (0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^+$ com $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} g(\xi) = 0$. Então $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \xi \ln(g(\xi) + \xi) = 0$.*

Demonstração. Primeiramente note que, para $\xi > 0$ suficientemente pequeno, temos:

$$\xi \ln(g(\xi) + \xi) \leq 0 \quad (3.6)$$

pois $g(\xi) \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow 0^+$. Agora,

$$\xi \ln(\xi) \leq \xi \ln(g(\xi) + \xi), \quad (3.7)$$

devido a função logarítmica ser crescente.

De (3.6) e (3.7), como $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \xi \ln(\xi) = 0$, então, pelo Teorema do Confronto, segue que

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \xi \ln(g(\xi) + \xi) = 0.$$

□

Tomando ξ e g no lema acima iguais a $\frac{1}{1+n}$ (que depende de n e não de t) e $\sqrt{y_n(t)}$, respectivamente, temos, pela conclusão do Lema 3.2.1 que a expressão (b) converge a zero sempre que $n \rightarrow \infty$.

Agora note que para todo $t \in (0, \delta)$ é verdade, para o lado esquerdo da expressão (3.4), que

$$\left[2\sqrt{y_n(t)} - \frac{2}{1+n} \left(\sqrt{y_n(t)} + \frac{1}{1+n} \right) + \frac{2}{1+n} \ln \left(\frac{1}{1+n} \right) \right] \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Já o lado direito de (3.4), que é igual t (e independe de n), será estritamente positivo em $(0, \delta)$. Com esta contradição concluímos que uma solução (local) para o problema não existe.

3.2.1 Outra forma de Mostar a Contradição para o TPC Usando a Função de Dieudonné

Agora mostraremos uma outra forma de obtermos contradição do Teorema de Peano Clássico à partir da Função de Dieudonné, diferente da usada na Seção 3.2. Com efeito, note que (3.5) pode ser reescrita como sendo:

$$\sqrt{y_n(t)} = \frac{t}{2} + \frac{1}{1+n} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{y_n(t)} + \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \right)$$

Veja que o argumento do logaritmo acima é maior ou igual a 1, e portanto seu valor será sempre não negativo, ou seja, temos a expressão:

$$2\sqrt{y_n(t)} \geq t,$$

o que implica em

$$y_n(t) \geq \left(\frac{t}{2}\right)^2. \quad (3.8)$$

Como o lado direito de (3.8) não depende de n , ao se tomar t positivo (por exemplo $t = \frac{\delta}{2}$), teremos

$$y_n\left(\frac{\delta}{2}\right) \not\rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

ou seja, a função y não é um elemento de c_0 , o que é uma contradição.

3.3 Observações Posteriores a Respeito da Função de Dieudonné

Esta seção tem o intuito de analisar algumas observações a respeito do contra-exemplo de Dieudonné mostrado na seção anterior.

Um questionamento que possa vir a ser feito sobre o contra-exemplo de Dieudonné é a possível escolha de outro espaço para o domínio e contra-domínio para a função de Dieudonné. De forma mais precisa, questiona-se sobre a validade do contra-exemplo ao se trocar o espaço c_0 pelo espaço das seqüências com quadrado somável ℓ^2 . Veremos que tal questionamento não é válido pois, primeiramente, ao trocarmos c_0 por ℓ^2 na Função de Dieudonné não temos sequer a boa definição para esta possível nova função. Mais precisamente, seu domínio não será todo o ℓ^2 , e mesmo que se restrinja seu domínio, não se tem a continuidade para a tal. Estes fatos são melhores esclarecidos sob a forma das seguintes observações:

Observação 3.3.1. *A função de Dieudonné deixa de ficar bem definida quando seu espaço base c_0 é trocado por ℓ^2 . Mais precisamente, para $y_* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{i+1}, \dots) \in \ell^2$ não se tem $F(y_*) \in \ell^2$, pois $(F(y_*))_i^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{i+1}} + \frac{1}{i+1}\right)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{1}{i+1}}\right)^2 = \frac{1}{i+1}$, donde segue, pelo teste da comparação, que $\sum_{i=1}^{\infty} (F(y_*))_i^2 = +\infty$, isto é, $F(y_*) \notin \ell^2$.*

Observação 3.3.2. *Mesmo que restrinjamos o espaço $X = c_0$ ao domínio $D = \{y \in \ell^2 : F(y) \in \ell^2\}$ afirm de que a “nova” função de Dieudonné $F : \mathbb{R} \times D \rightarrow \ell^2$ fique bem definida, a seguinte proposição mostra que F não é contínua.*

Proposição 3.3.1. *A função de Dieudonné $F : \mathbb{R} \times D \rightarrow \ell^2$ não é contínua no ponto $y = 0$.*

Demonstração. Tomemos primeiramente a sequência $\{\mathbf{y}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\mathbf{y}^{(k)} = \left(\underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{k \text{ termos}}, 0, 0, \dots \right).$$

Mostraremos que são verdadeiros os seguintes itens:

- a. $\mathbf{y} = 0 \in D$ e $\{\mathbf{y}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$;
- b. $\|\mathbf{y}^{(k)} - 0\|_{\ell^2} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$;
- c. $\|F(\mathbf{y}^{(k)}) - F(0)\|_{\ell^2} = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observemos que a descontinuidade da função F no ponto $\mathbf{y} = 0$ segue obviamente destes três itens.

(a.) Como $F(0) = (\sqrt{0} + 1, \sqrt{0} + \frac{1}{2}, \sqrt{0} + \frac{1}{3}, \dots, \sqrt{0} + \frac{1}{k}, \dots)$, tem-se que

$$\sum_{i=0}^{\infty} (F(0))_i^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i+1} \right)^2 < +\infty.$$

Logo $F(0) \in \ell^2$, donde $0 \in D$.

Como para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(y_i^{(k)} \right)^2 = k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}, \quad (3.9)$$

tem-se que $\mathbf{y}^{(k)} \in \ell^2$, e como

$$\sum_{i=1}^{\infty} (F(\mathbf{y}^{(k)}))_i^2 = \sum_{i=0}^k \left(\sqrt{\frac{1}{k}} + \frac{1}{i+1} \right)^2 + \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{i+1} \right)^2 \leq C_1(k) + C_2(k).$$

com $C_1(k)$ e $C_2(k)$ constantes finitas, segue que $F(\mathbf{y}^{(k)}) \in \ell^2$, donde concluímos que $\mathbf{y}^{(k)} \in D$.

(b.) Basta notarmos de (3.9) que se tem $\|\mathbf{y}^{(k)} - 0\|_{\ell^2}^2 = \|\mathbf{y}^{(k)}\|_{\ell^2}^2 = \frac{1}{k}$. Portanto $\|\mathbf{y}^{(k)} - 0\|_{\ell^2} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

(c.) Veja que

$$F(\mathbf{y}^{(k)}) = \left(\sqrt{\frac{1}{k}} + \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{k}} + \frac{1}{3}, \dots, \sqrt{\frac{1}{k}} + \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+3}, \dots \right),$$

e

$$F(0) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k+1}, \dots \right).$$

Portanto

$$\|F(\mathbf{y}^{(k)}) - F(0)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{i=1}^k \left(\sqrt{\frac{1}{k}} \right)^2 + 0 = k \cdot \frac{1}{k} = 1.$$

Desta forma temos que $\|F(\mathbf{y}^{(k)}) - F(0)\|_{\ell^2}^2$ não pode convergir a zero quando k tende para infinito.

□

Das Observações 3.3.1 e 3.3.2 acima podemos notar que a simplicidade do contra-exemplo usado por Dieudonné não é repassada quando ao invés de c_0 usarmos outro espaço, por exemplo, ℓ^2 , como visto na Proposição 3.3.1. Talvez por isso, um segundo contra-exemplo para o Teorema de Peano Clássico tenha sido feito 22 anos depois que Dieudonné apresentou seu artigo com a função mostrada neste capítulo. Este segundo contra-exemplo foi apresentado por James Yorke [24] em 1972. Em seu artigo, Yorke segue as mesmas linhas apresentadas por Dieudonné. Primeiramente é apresentada a função que caracteriza a contradição para o Teorema de Peano Clássico, e em seguida é usada a estratégia geral apresentada no Capítulo 2 para mostrar que de fato esta função gera o contradição desejada, só que desta vez bem mais complexo. O próximo capítulo consistirá na apresentação detalhada do contra-exemplo de Yorke ($X = \ell^2$).

Capítulo 4

Inexistência de Solução Local em $\ell^2(\mathbb{N})$ - Contra-Exemplo de Yorke

Após a contribuição de Dieudonné, o qual considera $X = c_0$, alguns matemáticos tiveram interesse em buscar contra-exemplos para a validade do Teorema de Peano em outros espaços de dimensão infinita. Em 1970, o matemático americano James A. Yorke [1941 -] apresentou em [24] um contra-exemplo para o problema, no qual considera $X = \ell^2$, isto é, o espaço das sequências reais com quadrado somável. Este contra-exemplo, por sua vez, é bem mais elaborado que o apresentado por Dieudonné em [7]. Em seu trabalho, Yorke constrói uma função (chamada de função de Yorke), denotada por F_{ℓ^2} , de tal modo que qualquer solução $x(t)$ que o Problema de Valor Inicial

$$(*) \begin{cases} x'(t) = F_{\ell^2}(t, x(t)), & t \in (-\delta, \delta), \text{ para algum } \delta > 0 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

vier a ter, estará em duas situações que se contradizem.

A primeira situação diz que a suposta solução nunca se anula sobre $(0, \delta)$, enquanto que a segunda, em contrapartida, nos diz que tal suposta solução é identicamente nula sobre este mesmo intervalo.

Observação 4.0.3. *A fim de se evitar duplos sentidos, e para que haja uma leitura agradável deste trabalho, durante este capítulo a função de Yorke será, na maioria dos casos, denotada simplesmente por F .*

Observação 4.0.4. *No decorrer deste capítulo, além da condição $\delta > 0$, iremos assumir que $\delta \leq 1$. Note que tal restrição não interfere na prova da não existência de solução, pois*

deseja-se apenas provar a não-existência local de solução. Como veremos, a motivação da suposição $\delta \leq 1$ está relacionada com o comportamento das componentes da função de Yorke F em intervalos do tipo $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$ (Veja a proposição 4.2.2).

Neste capítulo, denotaremos por H o espaço de Hilbert das sequências reais cujo quadrado é somável, ou seja, $H = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < +\infty \right\}$, com o produto interno usual $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i$. Tal espaço é denotado por $\ell^2(\mathbb{N})$ e é o modelo usual de espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Mais precisamente, o Teorema de Riez-Fischer (Veja Teorema 1.3.1) garante que todo espaço de Hilbert com as propriedades de ser separável e ter dimensão infinita é isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$. Devido a isto, uma vez provada a inexistência de solução (local) em $\ell^2(\mathbb{N})$, segue a inexistência em qualquer espaço de Hilbert com aquelas propriedades.

A seguir iniciaremos a construção da função de Yorke juntamente com a verificação da sua continuidade, e após, a prova da inexistência de solução (local). Tais tarefas, quando feitas em detalhes, acabam originando um texto longo. Devido a isto, alguns resultados tiveram suas demonstrações deixadas para o Apêndice B para que a leitura deste capítulo se torne mais eficiente e clara.

4.1 Caminho de Yorke

Nesta seção, e na seguinte, vamos definir certas funções cuja composição será a função-contrato-exemplo de Yorke. A primeira destas funções tem as características de ser linear e limitada de H em H .

Definição 4.1.1. Para cada $n = 1, 2, \dots$, denotamos por P_n o projetor $P_n : H \rightarrow H$, o qual é definido do seguinte modo. Para cada $\mathbf{y} \in H$ define-se

$$P_n(\mathbf{y}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ zeros}}, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots).$$

Define-se também o projetor \mathbb{I}_n de H em H como sendo $\mathbb{I}_n(\mathbf{y}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ zeros}}, y_n, 0, 0, \dots)$.

Tal sequência de operadores P_n é bem conhecida por fornecer um contra-exemplo para a não equivalência entre as topologias forte e uniforme no caso de H ter dimensão infinita (veja [11]).

Embora Yorke não faça comentário algum em seu artigo sobre tal sequência P_n , decidimos por acrescentar neste trabalho a proposição a seguir por suspeitarmos que tal proposição tenha importância na construção da função-contra-exemplo de Yorke.

Proposição 4.1.1. *A sequência P_n converge em $B(H)$ na topologia forte para o operador nulo \mathbb{O} mas não converge (para operador algum) na topologia uniforme.*

Demonstração. Vide Apêndice B, seção B.1. □

Definição 4.1.2. *Para cada $n = 1, 2, \dots$ definamos as funções $q_n : [2^{-n}, 2^{-n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo $q_n(t) = 2^n t - 1$.*

Observação 4.1.1. *Note que as funções q_n são (afim) lineares, possuem domínios disjuntos e o mesmo conjunto imagem, a saber, $[0, 1)$.*

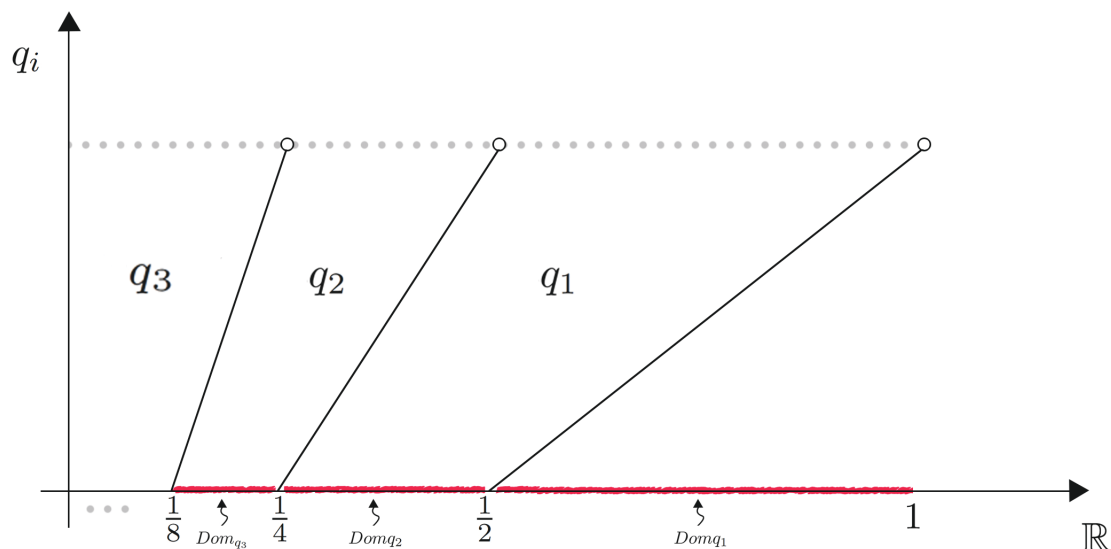


Figura 4.1: Gráficos das funções q_n para $n = 1, 2$ e 3 . Observamos aqui que estas funções são (afim) lineares, com domínios disjuntos e o intervalo $[0, 1)$ como conjunto imagem.

De posse das definições acima, constrói-se, primeiramente, o seguinte campo não-autônomo, linear e contínuo de vetores de H . Ou, equivalentemente, construiremos o seguinte caminho em $B(H)$ - conjunto dos operadores lineares e limitados (contínuos) de H em H :

Definição 4.1.3 (Caminho de Yorke). *Seja a função $P : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ definida por*

$$P(t, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \geq t; \\ (0, \dots, 0, q_n(t)y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots) & \text{se } t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}); \\ y & \text{se } 1 \leq t. \end{cases}$$

ou equivalentemente, podemos identificar a função P com um caminho em $B(H)$ escrevendo $\tilde{P}(t) = P(t, \cdot) : H \rightarrow H$. Nesta identificação, $\tilde{P} : \mathbb{R} \rightarrow B(H)$ é definida como:

$$\tilde{P}(t) = \begin{cases} \mathbb{O} & \text{se } 0 \geq t; \\ q_n(t)\mathbb{I}_n + P_n & \text{se } t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}); \\ \mathbb{I} & \text{se } 1 \leq t, \end{cases}$$

onde \mathbb{O} e \mathbb{I} são, respectivamente, os operadores nulo e identidade de $B(H)$.

A figura 4.2 abaixo mostra a representação matricial dos operadores $\tilde{P}(t)$ para alguns valores de $t \in \mathbb{R}$.

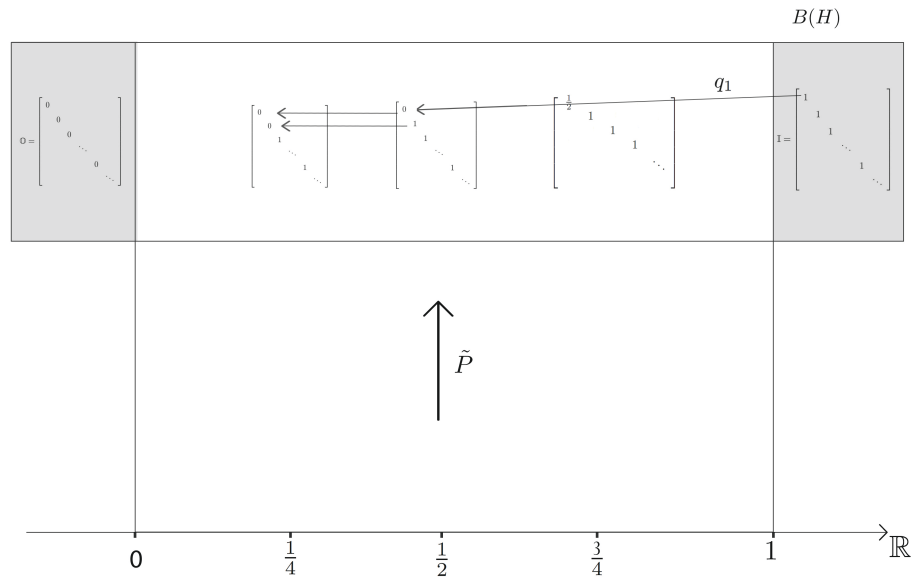


Figura 4.2: Representação matricial dos operadores $\tilde{P}(t)$ como função de $t \in \mathbb{R}$

Observação 4.1.2. *Segue diretamente das definições das funções q_n , P e \tilde{P} acima que estas, calculadas em $t = 2^{-n}$, nos fornecem $q_n(2^{-n}) = 0$, $P(2^{-n}, y) = P_n(y)$, para todo $y \in H$ e $\tilde{P}(2^{-n}) = P_n$.*

A proposição a seguir resume as principais propriedades das funções P e \tilde{P} .

Proposição 4.1.2. *As funções P e \tilde{P} têm as seguintes propriedades:*

- i. A função campo de vetores $P : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ é contínua em todos os pontos do seu domínio;*
- ii. A função caminho $\tilde{P} : \mathbb{R} \rightarrow (B(H), \tau_{\text{forte}})$ é contínua em todo \mathbb{R} ;*
- iii. A função caminho $\tilde{P} : \mathbb{R} \rightarrow (B(H), \tau_{\text{uniforme}})$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e descontínua no ponto $t = 0$. Mais precisamente, com relação aos limites laterais uniformes, temos $\lim_{t \rightarrow 0^-} \tilde{P}(t) = \mathbb{O}$, mas não existe o limite lateral $\lim_{t \rightarrow 0^+} \tilde{P}(t)$.*

Demonstração. Vide Apêndice B, seção B.2. □

Note que o fato de \tilde{P} ser descontínua no ponto $t = 0$ na topologia uniforme já era esperado devido a Observação 4.1.2 e Proposição 4.1.1. Mais claramente, basta tomar a sequência $t_n = 2^{-n}$, que satisfaz $t_n \rightarrow 0^+$, mas \tilde{P} não converge na topologia uniforme.

As figuras abaixo esquematizam, respectivamente, os “gráficos” da função \tilde{P} nas topologias forte e uniforme, e o “gráfico” da função P na topologia forte.

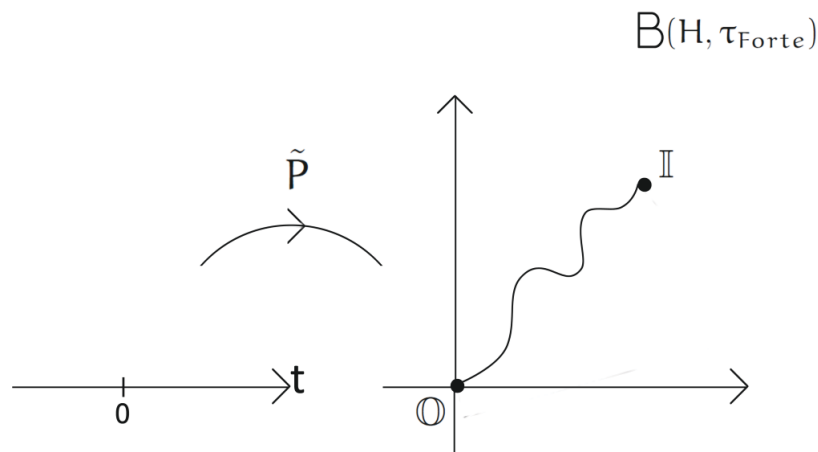


Figura 4.3: Representação geométrica da Função \tilde{P} na topologia forte.

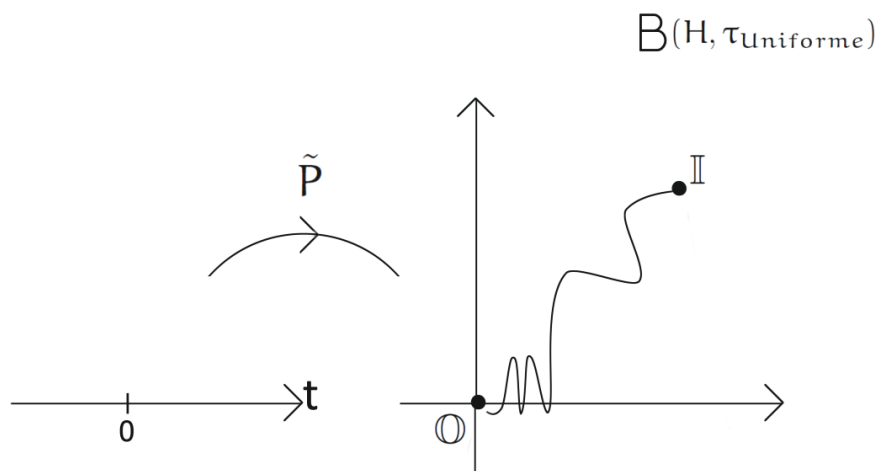


Figura 4.4: Representação geométrica da Função \tilde{P} na topologia uniforme. Observe que a oscilação da curva próxima ao operador \mathbb{O} representa a não-convergência.

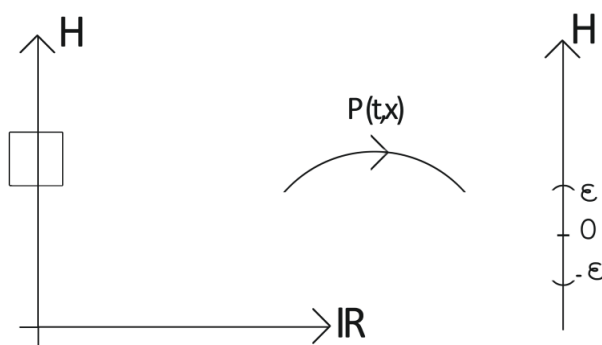


Figura 4.5: Representação geométrica da Função P e o esboço da prova da continuidade nos pontos do tipo $(0, y)$

4.2 Construção da Função de Yorke

Nesta seção iremos construir um campo de vetores contínuo e não autônomo de H em H mas desta vez não-linear. Tal campo será denominado *Função de Yorke* e será composto por outras funções contínuas G e A que aqui também serão definidas.

Definição 4.2.1. Definimos as funções $G : H \rightarrow H$, dada por

$$G(\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\|\mathbf{y}\|}} & \text{se } \mathbf{y} \neq 0; \\ 0 & \text{se } \mathbf{y} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

e $A : H \rightarrow H$, dada por

$$A(\mathbf{y}) = (\|\mathbf{y}_1\|, \|\mathbf{y}_2\|, \dots). \quad (4.2)$$

Observação 4.2.1. É interessante notarmos que, em contraste com a expressão (4.1), a escolha da função $G(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$ - Campo de vetores normalizado - nos daria uma função descontínua na origem.

Proposição 4.2.1. As seguintes propriedades são verificadas sobre as funções G e A :

- i. A função G é contínua em todos os pontos de H e é não-linear;
- ii. A função A é contínua em todos os pontos de H .

Demonstração. Vide Apêndice B, seção B.3. □

Definição 4.2.2. A função $r : \mathbb{R} \times H \rightarrow \mathbb{R}_+$ será definida por

$$r(t, \mathbf{y}) = r(t, \|\mathbf{y}\|) = \max \left\{ 0, \left(\frac{t}{2} \right)^2 - \|\mathbf{y}\| \right\}.$$

Finalmente, podemos agora definir a *Função-Contra-Exemplo de Yorke* para $X = \ell^2$.

Definição 4.2.3 (Função de Yorke). Sejam $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y} \in H$ e consideremos o vetor fixo $\mathbf{v} = (2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \dots)$ pertencente a H . Definimos a função de Yorke $F : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ por:

$$F(t, \mathbf{y}) = G(P(t, A(\mathbf{y}))) + r(t, \|\mathbf{y}\|) \cdot P\left(\frac{t}{2}, \mathbf{v}\right).$$

Observação 4.2.2. Note que $F(t, \mathbf{y})$ é claramente contínua por se tratar da composição das funções contínuas P , G e A que tiveram suas continuidades provadas nas proposições anteriores. Devido a continuidade de $P : H \rightarrow H$, as funções contínuas $q_n : [2^{-n}, 2^{-n+1}) \rightarrow$

\mathbb{R} com $q_n = 2^n \cdot t - 1$ podem ser estendidas para o novo domínio $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$, de modo que $P : \mathbb{R} \times H \rightarrow \mathbb{R}$ continua a ser contínua. Continuaremos a denotar por q_n as funções estendidas para o domínio $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$.

Observação 4.2.3. *É interessante ressaltar que $F(t, y)$, construída da forma acima, não se encontra em nenhum dos quatro casos listados no final do capítulo 3 que garantem a existência (ou até mesmo uma possível unicidade).*

Precisamos agora saber como cada componente $F_k(t, y)$, $k \in \mathbb{N}$ age sobre H de acordo com t pertencer a cada um dos conjuntos disjuntos $(-\infty, 0]$, $(0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [2^{-n}, 2^{-n+1})$ ou $[1, \infty)$. Para isto, considere primeiramente a seguinte função que se encontra na definição a seguir.

Definição 4.2.4. *Sejam $y \in H$, $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$. Definimos a função $Q : \mathbb{R} \times H \rightarrow \mathbb{R}_+$ por*

$$Q(t, y) = \|P(t, A(y))\|^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos a função $Q_n : [2^{-n}, 2^{-n+1}] \times H \rightarrow \mathbb{R}_+$ por:

$$Q_n(t, y) = \left((q_n(t) \cdot y_n)^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} y_i^2 \right)^{\frac{1}{4}},$$

com $t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]$.

Observe que, restringindo o domínio da função Q ao intervalo $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$, temos a função Q_n , ou seja, $Q|_{[2^{-n}, 2^{-n+1}]} = Q_n$.

Observação 4.2.4. *Devido a $(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2^{-n}, 2^{-n+1})$, segue que, para cada $t \in (0, 1)$, existe um único $n(t) \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [2^{-n(t)}, 2^{-n(t)+1})$. Mais precisamente, $n(t)$ é dado por $n(t) = \lceil -\log_2 t \rceil$.*

Segue das observações e definições anteriores (Funções $P(t, y)$, $G(y)$, $A(y)$ e $r(t, \|y\|)$, até aqui apresentadas neste capítulo) a seguinte expressão para as componentes de $F(t, y)$ (Veja Definição 4.2.3) de acordo com a localização de t no intervalo $(0, 1)$:

Proposição 4.2.2. *Seja $t \in (0, 1)$ e considere $n = n(t) = \lceil -\log_2 t \rceil$. Então:*

a) O valor da k -ésima componente de $F(t, 0)$ para $t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ é:

$$F_k(t, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq k \leq n; \\ \left(\frac{t}{2}\right)^2 \cdot q_{n+1}\left(\frac{t}{2}\right) \frac{1}{2^{n+1}} & \text{se } k = n + 1; \\ \left(\frac{t}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^k} & \text{se } k \geq n + 2. \end{cases} \quad (4.3)$$

b) O valor da k -ésima componente de $F(t, y)$ para $t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ e para $y \neq 0$, com $P(t, A(y)) = 0$ é:

$$F_k(t, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq k \leq n; \\ r(t, \|y\|) \cdot q_{n+1}(t) \frac{1}{2^{n+1}} & \text{se } k = n + 1; \\ r(t, \|y\|) \cdot \frac{1}{2^k}, & \text{se } k \geq n + 2. \end{cases} \quad (4.4)$$

c) O valor da k -ésima componente de $F(t, y)$ para $t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ e para $y \neq 0$, com $P(t, A(y)) \neq 0$ é:

$$F_k(t, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq k \leq n - 1; \\ \frac{q_n(t)|y_n|}{Q_n(t, y)} & \text{se } k = n; \\ \frac{|y_{n+1}|}{Q_n(t, y)} + r(t, \|y\|) q_{n+1}(t) \frac{1}{2^{k+1}} & \text{se } k = n + 1; \\ \frac{|y_k|}{Q_n(t, y)} + r(t, \|y\|) \frac{1}{2^k} & \text{se } k \geq n + 2. \end{cases} \quad (4.5)$$

Observação 4.2.5. De modo geral, a proposição 4.2.2 nos diz que a posição da primeira componente não nula de $F(t, y)$ vai crescendo à medida que t se aproxima de zero por valores positivos. Mais precisamente, caso $y \neq 0$, garantimos que as $n(t) - 1$ primeiras componentes são nulas, e caso $y = 0$, garantimos que as $n(t)$ primeiras componentes são nulas.

4.3 Prova da Contradição

Nesta seção mostraremos que, ao supormos a existência de uma possível solução $x(t)$ para o PVI (*) (definido abaixo) chegaremos a uma contradição. Para isto, estabeleceremos a seguinte estratégia, que será a forma como iremos “atacar” o problema.

ESTRATÉGIA: Suponha que exista uma solução $x(t)$, com $t \in [0, \delta)$, para o PVI

$$(*) \begin{cases} x'(t) = F_{\ell^2}(t, x(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

A ideia é mostrarmos que tal solução $x(t)$ irá satisfazer simultaneamente duas condições que contradizem uma a outra. Esquemáticamente temos:

$$x(t) \in C_1 \text{ e } x(t) \in C_2 \text{ com } C_1 \cap C_2 = \emptyset.$$

A primeira condição C_1 será que a solução irá satisfazer $x(t) \neq 0$ sobre $(0, \delta)$. Mais precisamente, mostraremos que para cada $t \in (0, \delta)$ existe $N_0(t) \in \mathbb{N}$ tal que a N_0 -ésima componente de $x(t)$ satisfaz $x_{N_0}(t) > 0$.

A segunda condição C_2 será que $x(t) \equiv 0$ sobre $[0, \delta)$. As condições C_1 e C_2 serão provadas nas seções 4.3.1 e 4.3.2, respectivamente. Isto prova que não existe solução $x(t) \in H$ com a condição inicial $x(0) = 0$, para o PVI (*).

4.3.1 Qualquer suposta solução nunca se anula sobre $(0, \delta)$

Os resultados obtidos nesta subseção tratam de mostrar que qualquer possível solução $x(t)$ realmente satisfaz a primeira condição suposta na estratégia apresentada no começo da Seção 4.3, isto é, iremos mostrar, com a ajuda dos resultados que previamente serão estabelecidos, que qualquer suposta solução que o PVI possa vir a ter nunca se anula sobre intervalo $(0, \delta)$.

Afirmção 4.3.1. *A função de Yorke $F(t, y)$ satisfaz as seguintes condições:*

- i. Todas as componentes de $F(t, y)$ são funções não negativas. Mais precisamente, para todo $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ e $y \in H$ vale que $F_k(t, y) \geq 0$.*
- ii. A função de Yorke restrita à origem de H nunca se anula para $t \in (0, 1)$. De forma mais precisa, para $t \in (0, 1)$, temos que $F_k(t, \vec{0}) > 0$ para todo $k \geq \lceil -\log_2 t \rceil + 2$.*

Demonstração. (i.) Segue imediatamente de (4.3), (4.4) e (4.5) da proposição 4.2.2, pois vê-se que para cada $k \in \mathbb{N}$, $t \in (0, 1)$ e $y \in H$ tem-se $F_k(t, y)$ não-negativo.

(ii.) Basta notar de (4.3) que para cada $t \in (0, 1)$ vale $F_k(t, \vec{0}) = \left(\frac{t}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^k} > 0$, desde que $k \geq 2 + \lceil -\log_2 t \rceil$.

□

Afirmção 4.3.2. *Para todo $t \in (0, \delta)$ as funções-componetes $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, de uma suposta solução $x(t)$ do PVI (*) satisfazem as condições:*

- i. $x'_k(t) \geq 0$;*

ii. $x_k(t) \geq 0$;

iii. $A(x(t)) = x(t)$.

Demonstração. (i.) Sendo $x(t)$ uma tal suposta solução do PVI (*), tem-se em $[0, \delta)$ que

$$x'(t) \stackrel{\text{em H}}{=} F(t, x(t)),$$

o que significa

$$x'_k(t) = F_k(t, x(t)), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Da afirmação 4.3.1, item i, temos que $F(t, x(t)) \geq 0$. Logo concluímos da equação diferencial acima que $x'_k(t) \geq 0$ para $k = 1, 2, \dots$.

(ii.) Basta usar o Teorema do Valor Médio para cada função componente $x_k(t)$, isto é,

$$x_k(t) - \underbrace{x_k(0)}_{=0} = x'_k(\xi)(t - 0), \quad \text{com } \xi \in (0, t), \quad t \in [0, \delta).$$

Logo $x_k(t) = x'_k(\xi)t$. Como $t > 0$ (pois $t \in (0, \delta)$ e $x'_k(\xi) \geq 0$ (item i desta afirmação)), temos que $x_k(t) \geq 0$ sobre $(0, \delta)$.

(iii.) Como $x_k(t) \geq 0$ (pelo item ii desta afirmação), temos que $x_k(t) = |x_k(t)|$, com $t \in (0, \delta)$. Disto, e da definição da função A (veja 4.2), temos que $A(x(t)) = x(t)$.

□

Afirmação 4.3.3. *Qualquer suposta solução $x(t)$ do PVI (*) nunca se anula sobre $(0, \delta)$, ou seja, para $t \in (0, \delta)$, vale $x(t) \neq 0_H$, ou ainda, $\|x(t)\|^2 > 0$ para todo $t \in (0, \delta)$.*

Demonstração. Suponhamos que exista $t_* \in (0, \delta)$ tal que $x(t_*) = 0_H$. Como $(0, \delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [2^{-n}, 2^{-n+1}]$, temos, em particular, que, para $n_* = n(t_*)$, a componente x_{n_*+2} é tal que

$$x_{n_*+2}(t_*) = 0. \tag{4.6}$$

Por outro lado, sendo $x(t)$ uma suposta solução do PVI (*) devemos ter

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad \text{para todo } t \in (0, \delta) \tag{4.7}$$

donde temos, devido a (4.3), que $x'_{n_*+2}(t_*) = F_{n_*+2}(t_*, x(t_*)) = F_{n_*+2}(t_*, 0) > 0$, onde $n_* = n(t_*) = \lceil -\log_2 t_* \rceil$. Com isso temos que,

$$x'_{n_*+2}(t_*) > 0. \tag{4.8}$$

Mas, pelo item ii da Afirmação 4.3.2, temos $x_k(t) \geq 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in (0, \delta)$. Em particular, para $k = n_* + 2$, obtemos:

$$x_{n_*+2}(t) \geq 0, \text{ para todo } t \in (0, \delta). \quad (4.9)$$

Agora, consideremos a função

$$\begin{aligned} g : (-t_*, 0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \frac{x_{n_*+2}(t_*+h)}{h}. \end{aligned}$$

□

Como a suposta solução $x(t)$ é assumida ser diferenciável e $x_{n_*+2}(t_*) = 0$ (vide 4.6) segue que,

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = x'_{n_*+2}(t_*), \quad (4.10)$$

pois $g(h) = \frac{x_{n_*+2}(t_*+h) - x_{n_*+2}(t_*)}{h}$. Devido à expressão (4.9) e pelo fato de que $h \in (-t_*, 0)$, tem-se que a imagem de função g está contida em $(-\infty, 0)$. Assim, temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} g(h) \in \overline{(-\infty, 0]} = (-\infty, 0]. \quad (4.11)$$

Combinando (4.10) e (4.11), temos que $x'_{n_*+2}(t_*) \in (-\infty, 0]$, o que contradiz (4.8).

4.3.2 Qualquer suposta solução é identicamente nula sobre $(0, \delta)$

Mostraremos que a suposta solução satisfaz a segunda condição estabelecida na estratégia acima, isto é, $x(t) \equiv 0$ sobre $(0, \delta)$. Isto, juntamente com a subseção 4.3.1, implicará na contradição desejada. Primeiramente vale o seguinte resultado:

Afirmação 4.3.4. *Considere $(0, \delta)$, com $0 < \delta \leq 1$, o intervalo à direita de uma suposta solução $x(t)$ do PVI (*).*

- a. Caso $n \in \mathbb{N}$ seja tal que $(0, 2^{-n}] \subset (0, \delta)$, então vale o seguinte para as primeiras n componentes de $x(t)$:
 - i. $x'_k(t) = 0$, para todo $t \in (0, 2^{-n}]$ e para $k = 1, 2, \dots, n$.
 - ii. $x_k(t) = 0$, para todo $t \in (0, 2^{-n}]$ e para $k = 1, 2, \dots, n$.
- b. Caso $n \in \mathbb{N}$ seja tal que $[2^{-n}, 2^{-n+1}] \subset (0, \delta)$, então vale o seguinte para as primeiras $n - 1$ componentes de $x(t)$:

iii. $x_k(t) = 0$, para todo $t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ e para $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Demonstração. (i.) Para $t_* \in (0, 2^{-n}]$, segue que existe $m \in \{n+1, n+2, \dots\}$ tal que $t_* \in [2^{-m}, 2^{-m+1}]$, pois

$$(0, 2^{-n}] = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} [2^{-m}, 2^{-m+1}].$$

Agora, se $t_* \in [2^{-m}, 2^{-m+1}]$ segue de (4.3), (4.4) e (4.5) da Proposição 4.2.2 que $F_k(t_*, y) = 0$ para $1 \leq k \leq m-1$ e para todo $y \in H$. Usando que $x(t)$ é solução temos que $x'(t_*) = F(t_*, x(t_*))$, donde concluímos, pelo fato de que $F_k(t_*, y) = 0$ mostrado acima, que

$$x'_k(t_*) = 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Como $m-1 \geq n$ e $1 \leq k \leq m-1$, segue que $x'_k(t_*) = 0$ para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, provando assim o item i.

(ii.) Pelo Teorema do Valor Médio temos

$$x_k(t) - x_k(0) = x'_k(\xi)(t - 0), \quad t \in (0, 2^{-n}] \text{ e } 0 < \xi < t. \quad (4.12)$$

Como $x_k(0) = 0$ devido a condição inicial do PVI (*), a equação (4.12), fica apenas $x_k(t) = x'_k(\xi) \cdot t$. Como $x'_k(\xi) = 0$, garantido pelo item i acima pois $\xi \in (0, 2^{-n})$, conclui-se que $x_k(t) \equiv 0$ sobre $(0, 2^{-n}]$ para $k = 1, \dots, n$, o que prova o item ii.

(iii.) Substituindo n por $n-1$ no item ii acima, tem-se que $x_k(t) = 0$ para $t \in (0, 2^{-(n-1)}] = (0, 2^{-n+1}] \subset (0, \delta)$, desde que $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Como $[2^{-n}, 2^{-n+1}] \subset (0, 2^{-n+1}]$ segue que $x_k(t) = 0$ para $t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ se $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

□

Afirmção 4.3.5. *Considere $(0, \delta)$, com $0 < \delta \leq 1$, o intervalo à direita de uma suposta solução $x(t)$ do PVI (*). Caso $n \in \mathbb{N}$ é tal que $[2^{-n}, 2^{-n+1}] \subset (0, \delta)$, então a função $\beta : [2^{-n}, 2^{-n+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\beta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = 2^{-n} \\ \frac{q_n(t)}{\left(q_n^2 \cdot x_n^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2(t) \right)^{\frac{1}{4}}}, & \text{se } t \in (2^{-n}, 2^{-n+1}]. \end{cases} \quad (4.13)$$

é contínua e assume valores não-negativos, ou seja, $\beta(t) \in C([2^{-n}, 2^{-n+1}], \mathbb{R}_+)$.

Demonstração. Inicialmente mostraremos que a função β está bem definida, isto é, seu denominador $q_n^2(t) \cdot x_n^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} x_n^2(t)$ não se anula no intervalo $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$.

Para isto, note que, para cada $t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ temos os seguintes casos para o valor de $q_n^2(t) \cdot x_n^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} x_n^2(t)$:

1º Caso: $x_n^2(t) = 0$ e $\sum_{k=n+1}^{\infty} x_n^2(t) = 0$.

Note que este caso não ocorre pois, pela Afirmação 4.3.4, item iii, a suposta solução $x(t)$ deve satisfazer $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_{n-1}(t) = 0$ sobre $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$, e pela Afirmação 4.3.2 tem-se $\sum_{k=1}^{\infty} x_n^2(t) > 0$ para todo $t \in (0, \delta)$.

2º Caso: $x_n^2(t) = 0$ e $\sum_{k=n+1}^{\infty} x_n^2(t) > 0$.

Neste caso o denominador de β não se anula e conseqüentemente β está bem definida.

3º Caso: $x_n^2(t) > 0$ e $\sum_{k=n+1}^{\infty} x_n^2(t) = 0$;

4º Caso: $x_n^2(t) > 0$ e $\sum_{k=n+1}^{\infty} x_n^2(t) > 0$.

Quanto à continuidade de β , precisamos apenas verificar que a expressão

$$\lim_{t \rightarrow 2^{-n+}} \frac{q_n(t)}{\left(q_n^2 \cdot x_n^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} x_n^2(t) \right)^{\frac{1}{4}}},$$

de fato ocorre, pois o denominador é contínuo e não se anula em $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ e $\lim_{t \rightarrow 2^{-n+}} q_n(t) = 0$ (veja definição de q_n , definida pela expressão 4.1.2). \square

Afirmação 4.3.6. *Considere $(0, \delta)$, com $0 < \delta \leq 1$, o intervalo à direita de uma suposta solução $x(t)$ do PVI (*). Caso $n \in \mathbb{N}$ é tal que $[2^{-n}, 2^{-n+1}] \subset (0, \delta)$, então $x_n(t)$ satisfaz o PVI abaixo:*

$$\begin{cases} x_n'(t) = \beta(t) \cdot x_n(t), & \text{se } t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]; \\ x_n(2^{-n}) = 0, \end{cases}$$

onde a função β é dada como em (4.13).

Demonstração. A verificação da condição inicial $x_n(2^{-n}) = 0$ segue da Afirmação 4.3.4.

Para a verificação da EDO, notemos primeiramente que, sendo $x(t)$ uma possível solução do PVI (*), tem-se que,

$$x'_n(t) = F_n(t, x(t)), \quad \text{para } t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}], \quad (4.14)$$

onde $F_n(t, y)$ é dado pelo item c da Proposição 4.2.2 ($k = n$ na expressão (4.5) pois $y = x(t)$ não se anula em $(0, \delta)$ devido a Afirmação 4.3.3 e $P(t, A(x(t))) \stackrel{\text{Af.4.3.2}}{=} P(t, x(t)) \stackrel{\text{Af.4.1.3}}{=} (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ zeros}}, q_n(t) \cdot x_n(t), x_{n+1}(t), \dots) \neq \vec{0}$ pois, como já visto, o denominador de β nunca se anula em $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$), ou seja,

$$F_n(t, x(t)) = \frac{q_n(t) \cdot |x_n(t)|}{\left(q_n^2(t) \cdot x_n^2(t) + \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2(t) \right)^{\frac{1}{4}}}, \quad t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}].$$

Devido a $x_n(t) \geq 0$ (veja Afirmação 4.3.2) temos:

$$F_n(t, x(t)) = \beta(t) \cdot x_n(t),$$

e como $q_n(2^{-n}) = 0$ temos

$$F_n(t, x(t)) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = 2^{-n}; \\ \beta(t) \cdot x_n(t), & \text{se } t \in (2^{-n}, 2^{-n+1}]. \end{cases} \quad (4.15)$$

Comparando (4.15) com a expressão de β em (4.13), temos (condição inicial) que $F_n(t, x(t)) = \beta(t) \cdot x_n(t)$. Isto combinado com a expressão (4.14) nos dá o resultado procurado. \square

Afirmação 4.3.7. *Qualquer solução que o PVI da Afirmação 4.3.6 vier a ter satisfaz $x_n(t) \equiv 0$ sobre $[2^{-n}, 2^{-n+1}] \subset (0, \delta)$.*

Demonstração. Segue da Afirmação 4.3.3 que $\beta(t)$ é contínua em $[2^{-n}, 2^{-n+1}] \subset (0, \delta)$, e como $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ é compacto, temos que existe $C_n < +\infty$ tal que

$$\beta(t) \leq C_n \quad \text{para } t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}].$$

Para isto basta tomar $C_n = \max_{t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]} \beta(t)$.

Assim obtemos que $x_n(t)$ satisfaz o seguinte PVI com desigualdade diferencial

$$\begin{cases} x'_n(t) \leq C_n x(t), & t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}] \\ x_n(2^{-n}) = 0 \end{cases}$$

Devido a desigualdade de Gronwall temos que,

$$x_n(t) \leq x_n(2^{-n}) \cdot e^{C_n(t_n - 2^{-n})}, \quad t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]. \quad (4.16)$$

Como $x_n(2^{-n}) = 0$ (pela Afirmação 4.3.4), então

$$x_n(t) \leq 0. \quad (4.17)$$

Combinando (4.17) com a Afirmação 4.3.2, item ii ($x_n(t) \leq 0$), temos que $x_n(t) \equiv 0$ sobre o intervalo $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$. \square

Afirmação 4.3.8. Para $t \in [0, \delta)$, a suposta solução $x(t)$ satisfaz:

i. $P(t, A(x(t))) = P(t, x(t));$

ii. $P(t, x(t)) = x(t).$

Demonstração. (i.) Segue da definição da Função A e da Afirmação 4.3.2.

(ii.) **Primeiro caso:** Observemos primeiramente que, se $t \in [2^{-n}, 2^{-n+1})$, então

$$P(t, A(x(t))) \stackrel{\text{Af. 4.3.2}}{=} P(t, x(t)) \stackrel{\text{def. } P}{=} (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ zeros}}, q_n(t)x_n(t), x_{n+1}(t), \dots).$$

Se $t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ temos, pelo item iii da Afirmação 4.3.4, que

$$x_1(t) \equiv 0$$

$$x_2(t) \equiv 0$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(t) \equiv 0.$$

Logo, seguem as equivalências:

$$q_n(t) \cdot x_n(t) \stackrel{\text{Af. 4.3.7}}{\equiv} q_n(t) \cdot 0 \equiv 0 \stackrel{\text{Af. 4.3.7}}{\equiv} x_n(t).$$

Portanto, quando $t \in [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ temos,

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ zeros}}, q_n(t)x_n(t), x_{n+1}(t), \dots) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ zeros}}, x_n(t), x_{n+1}(t), \dots) = x(t).$$

pois $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{n-1} \equiv 0$.

Segundo caso: O caso geral $t \in [0, \delta)$ segue do fato que $[0, \delta) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ e nele aplica-se o primeiro caso.

\square

Definição 4.3.1. *Seja $x(t)$ com domínio $[0, \delta)$ uma suposta solução do PVI (*). Definiremos a função $\rho : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^+$ por $\rho(t) = \|x(t)\|^2$.*

Afirmção 4.3.9. *A derivada da função $\rho(t)$ satisfaz a expressão*

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \rho'(t) \geq 2\rho(t)^{\frac{3}{4}},$$

para $t \in [0, \delta)$.

Demonstração. De fato, notemos inicialmente temos que $\rho(t) = \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$.

Assim, para $t \in [0, \delta)$, temos:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \langle x(t), x(t) \rangle' = \langle x'(t), x(t) \rangle + \langle x(t), x'(t) \rangle = 2 \langle x(t), x'(t) \rangle.$$

Usando que $x(t)$ é uma suposta solução e a definição de $F(t, y)$ segue que:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} &= 2 \langle x(t), F(t, x(t)) \rangle \\ &= 2 \left\langle x(t), \underbrace{G(P(t, A(x(t)))) + P\left(\frac{1}{2}, v\right) \max\left\{0, \frac{t^2}{4} - \|x(t)\|\right\}}_{\text{com componentes } \geq 0} \right\rangle. \end{aligned}$$

Como $P(t, A(x(t))) = P(t, x(t))$, pelo item i da Afirmção 4.3.8, então:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} \geq 2 \langle x(t), G(P(t, x(t))) \rangle.$$

Agora, pelo item ii da Afirmção 4.3.8, temos:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} \geq 2 \langle x(t), G(x(t)) \rangle.$$

Usando a definição da função G e o fato de que $x(t)$ nunca se anula (veja Afirmção 4.3.3), temos:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} \geq 2 \frac{\|x(t)\|^2}{\|x(t)\|^{\frac{1}{2}}} = 2\|x(t)\|^{\frac{3}{2}} = 2\rho(t)^{\frac{3}{4}}.$$

□

Observação 4.3.1. *Concluimos da Afirmção 4.3.8 que, para $t \in [0, \delta)$, $\rho(t)$ satisfaz o PVI com desigualdade diferencial*

$$\begin{cases} \rho'(t) \geq 2 \rho(t)^{\frac{3}{4}} & \text{com } t \in [0, \delta); \\ \rho(0) = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Afirmção 4.3.10 (Estimativa para a solução do PVI da expressão (4.18) com inequação diferencial). *A função ρ , definida por $\|x(t)\|^2$, para $t \in [0, \delta)$, satisfaz:*

$$\rho(t) \geq \left(\frac{t}{2}\right)^2, \quad \text{com } t \in [0, \delta).$$

Demonstração. Como $\rho(t) = \|x(t)\|^2 > 0$ em $(0, \delta)$ (já provado na Afirmção 4.3.3) tem-se $\rho(t) > 0$ sobre $t \in (0, \delta)$ o que permite dividir a desigualdade $\rho'(t) \geq 2\rho^{\frac{3}{4}}(t)$ por $\rho(t)$. Assim,

$$\frac{\rho'(t)}{\rho^{\frac{3}{4}}(t)} \geq 2, \quad \text{para todo } t \in (0, \delta).$$

Queremos agora encontrar o valor de $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tal que tenhamos

$$(b(\rho^a(t)))' = \frac{\rho'(t)}{\rho^{\frac{3}{4}}(t)}.$$

Para isto, observemos pela regra da cadeia que $(\rho^a(t))' = a\rho^{a-1}(t)\rho'(t)$ e daí temos que

$$ba\rho^{a-1}(t)\rho'(t) = \frac{\rho'(t)}{\rho^{\frac{3}{4}}(t)},$$

o que implica em

$$ba\rho^{a-1}(t) = \frac{1}{\rho^{\frac{3}{4}}(t)},$$

o que nos leva, por meio de um cálculo simples, ao valor procurado $a = \frac{1}{4}$ e $b = 4$.

Portanto

$$4\left(\rho^{\frac{1}{4}}(t)\right)' = \frac{\rho'(t)}{\rho^{\frac{3}{4}}(t)} \geq 2.$$

e, conseqüentemente,

$$\left(\rho^{\frac{1}{4}}(t)\right)' \geq \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } t \in (0, \delta),$$

o que nos faz concluir, para $0 < \varepsilon \leq \delta$, que

$$\begin{aligned} \left(\rho^{\frac{1}{4}}(t)\right)' - \frac{1}{2} \geq 0 &\Rightarrow \int_{\varepsilon}^t \left[\left(\rho^{\frac{1}{4}}(s)\right)' - \frac{1}{2}\right] ds \geq 0, \quad \text{com } 0 < \varepsilon \leq t \leq \delta \\ &\Rightarrow \rho^{\frac{1}{4}}(t) - \rho^{\frac{1}{4}}(\varepsilon) - \frac{1}{2}(t - \varepsilon) \geq 0. \end{aligned}$$

Em particular, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$ temos, para $t \in (0, \delta)$, que

$$\rho^{\frac{1}{4}}(t) \geq \frac{t}{2} \Rightarrow \rho(t) \geq \left(\frac{t}{2}\right)^4 \quad \text{para todo } t \in (0, \delta).$$

Já o caso $t = 0$ segue por inspeção direta que $\rho(0) = \left(\frac{0}{2}\right)^2$, pois $\rho(0) = \|x(0)\|^2 = 0$. \square

Observação 4.3.2. Como consequência da Afirmação 4.3.10 acima temos, para $t \in [0, \delta)$:

$$\|x(t)\| \geq \frac{t^2}{4},$$

o que implica

$$r(t, \|x(t)\|) = \max \left\{ 0, \frac{t^2}{4} - \|x(t)\| \right\} = 0, \text{ para todo } t \in [0, \delta). \quad (4.19)$$

Portanto nossa suposta solução $x(t)$ satisfaz, para $t \in (0, \delta)$, a seguinte condição:

Afirmação 4.3.11. Considere $[0, \delta)$, com $0 < \delta \leq 1$, o intervalo à direita contendo o $\vec{0}$ da suposta $x(t)$ do PVI (*). Então $x(t)$ satisfaz o PVI abaixo:

$$\begin{cases} x'(t) = G(x(t)), & \text{para } t \in [0, \delta); \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

onde $G : H \rightarrow H$ é definida como em (4.1).

Demonstração. Primeiramente notemos que $x(0) = 0$ pela condição inicial do PVI (*).

Para mostrar a outra igualdade (ou seja, a EDO), observemos que, para $0 \leq t < \delta$, vale:

$$x'(t) = F(t, x(t)) = G(P(t, A(x(t)))) + P\left(\frac{t}{2}, v\right) \max \left\{ 0, \frac{t^2}{4} - \|x(t)\| \right\},$$

donde concluímos (4.19) que:

$$x'(t) = G(P(t, A(x(t)))), \text{ com } t \in [0, \delta).$$

De (i) e (ii) da Afirmação 4.3.8 segue que

$$x'(t) = G(P(t, A(x(t)))) = G(x(t)) \text{ com } t \in [0, \delta).$$

□

Comentário. Resumiremos o que fizemos até aqui. Mostramos que no intervalo $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ as primeiras n componentes da suposta solução $x(t)$ se anulam. [Isto foi feito em duas etapas: na primeira etapa mostramos que as $n - 1$ primeiras componentes de $x(t)$ se anulam devido a Afirmação 4.3.4 item iii, e na segunda etapa mostramos que $x_n(t)$ se anula devido a Afirmação 4.3.7]. Falta, portanto, mostrarmos que $x_k(t)$ se anula em $[2^n, 2^{-n+1}]$ para $k \geq n + 1$. A afirmação 4.3.12 a seguir faz isto, e também, já consegue dar conta de contradizer.

C_1 : toda possível solução $x : (-\delta, \delta) \rightarrow H$ nunca se anula no intervalo $(0, \delta)$

pois esta afirmação concluirá que

\tilde{C}_2 : toda possível solução $x : (-\delta, \delta) \rightarrow H$ se anula em todos intervalos do tipo $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ contidos em $(0, \delta)$.

Portanto com \tilde{C}_2 poderíamos encerrar o Capítulo 4. Mas para reforçar esta dicotomia (por um lado nunca se anula, e por outro lado sempre se anula em um intervalo maior possível à direita, que é $(0, \delta)$) decidimos por colocar a Afirmação 4.3.13.

Afirmação 4.3.12. *Considere $(0, \delta)$ o intervalo à direita de uma suposta solução $x(t)$ do PVI(*). Então para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $[2^{-n}, 2^{-n+1}] \subset (0, \delta)$ a solução $x(t)$ se anula sobre $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$.*

Demonstração. Com efeito, resta apenas mostrar que $x_k(t)$ se anula em $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ para todo $k \geq n + 1$. De fato, da definição da função $G : H \rightarrow H$ segue da Afirmação 4.3.11 que,

$$x'_k(t) = \|x(t)\|^{-1/2} x_k(t), \quad t \in (0, \delta) \quad k = n + 1, n + 2, n + 3, \dots \quad (4.21)$$

Também temos, pela Afirmação 4.3.6 que,

$$x_k(2^{-k}) = 0, \quad k = n + 1, n + 2, n + 3, \dots \quad (4.22)$$

Note que os intervalos do tipo $[2^{-k}, 2^{-n+1}]$ para $k \geq n + 1$ são não degenerados, pois contêm o intervalo $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$. Iremos mostrar que $x_k(t)$ se anula em $[2^{-k}, 2^{-n+1}]$, e conseqüentemente, $x_k(t)$ se anula em $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ para todo $k \geq n + 1$. Para isto, definamos $C_{k,n} = \max\{\|x(t)\|^{-1/2} : t \in [2^{-k}, 2^{-n+1}]\}$. Note que para cada $k \geq n + 1$ tem-se $0 \leq C_{k,n} < \infty$, pois a suposta solução $x(t)$, de acordo com a Afirmação 4.3.3, nunca se anula em $(0, \delta)$ e é contínua. Como $x_k(t) \geq 0$ (veja Afirmação 4.3.2) tem-se de (4.21) que $x'_k(t) \leq C_{k,n} x_k(t)$ para todo $t \in [2^{-k}, 2^{-n+1}]$, o que nos dá, $x_k(t) \leq x_k(2^{-k}) + C_{k,n} \int_{2^{-k}}^t x_k(s) ds$. Aplicando a desigualdade de Gronwall, temos $x_k(t) \leq x_k(2^{-k}) \exp\{C_{k,n}(t - 2^{-k})\}$, $t \in [2^{-k}, 2^{-n+1}]$. Devido a (4.22) obtemos $x_k(t) \leq 0$, e da Afirmação 4.3.2, tem-se $x_k(t) = 0$ sobre $[2^{-k}, 2^{-n+1}]$. \square

Afirmação 4.3.13. *Considere $(0, \delta)$ o intervalo à direita de uma suposta solução $x(t)$ do PVI(*). Então $x(t)$ se anula sobre $(0, \delta)$.*

Demonstração. Dado $t \in (0, \delta)$ arbitrário, Mostraremos que $x(t) = 0$. Provaremos isto, considerando dois casos de acordo com a localização de t em $(0, \delta)$.

Caso 1: $t \in (0, 2^{-\underline{n}+1}]$, onde $\underline{n} \in \mathbb{N}$ é o menor natural de modo que $[2^{-\underline{n}}, 2^{-\underline{n}+1}] \subset (0, \delta)$;

Caso 2: $t \in [2^{-\underline{n}+1}, \delta)$. Para mostrarmos que $x(t)$ se anula para qualquer t no Caso 1, basta notar que $(0, 2^{-\underline{n}+1}] = \cup_{j=\underline{n}}^{\infty} [2^{-j}, 2^{-j+1}]$, ou seja, se $t \in (0, 2^{-\underline{n}+1}]$ então existirá $j(t) \in \{\underline{n}, \underline{n}+1, \underline{n}+2, \dots\}$ tal que $[2^{-j(t)}, 2^{-j(t)+1}] \subset (0, 2^{-\underline{n}+1}]$. Aplicando a Afirmação 4.3.12 para $j(t)$ no lugar de n obtemos que $x(t)$ se anula. Já para mostrarmos que $x(t)$ se anula para qualquer t no Caso 2, consideremos uma sequência real $\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de modo que δ_m seja estritamente crescente, $2^{-\underline{n}+1} < \delta_m < \delta$, e além disto, $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = \delta$. Mostraremos, a seguir, que para cada $m \in \mathbb{N}$ teremos que $x(t) = 0$ sobre o intervalo $[2^{-\underline{n}+1}, \delta_m]$. Deste fato, seguirá o Caso 2, já que $[2^{-\underline{n}+1}, \delta) = \cup_{m=1}^{\infty} [2^{-\underline{n}+1}, \delta_m]$. Com efeito, para mostrar que $x(t)$ se anula nos intervalos $[2^{-\underline{n}+1}, \delta_m]$, usaremos a Afirmação 4.3.11 da qual $x'(t) = \|x(t)\|^{-1/2} x(t)$, $t \in [2^{-\underline{n}+1}, \delta_m]$, e o fato de que pelo Caso 1 (já provado) temos $x(2^{-\underline{n}+1}) = 0$. Definamos $C_m = \max\{\|x(t)\|^{-1/2} : t \in [2^{-\underline{n}+1}, \delta_m]\}$. Note que $0 \leq C_m < \infty$, pois a suposta solução $x(t)$, de acordo com a Afirmação 4.3.3, nunca se anula em $(0, \delta)$ e é contínua. Como $x(t) \geq 0$ (veja Afirmação 4.3.10) tem-se $x'(t) \leq C_m x(t)$ para todo $t \in [2^{-\underline{n}+1}, \delta_m]$. Disto segue que $x(t) \leq x(2^{-\underline{n}+1}) + C_m \int_{2^{-\underline{n}+1}}^t x(s) ds$, $t \in [2^{-\underline{n}+1}, \delta_m]$. Aplicando a desigualdade de Gronwall, temos $x(t) \leq x(2^{-\underline{n}+1}) \cdot e^{\{C_m(t-2^{-\underline{n}+1})\}}$, $t \in [2^{-\underline{n}+1}, \delta_m]$. Devido a $x(2^{-\underline{n}+1}) = 0$ – já provado no Caso 1, obtemos $x(t) \leq 0$, e devido a Afirmação 4.3.10, tem-se finalmente que $x(t) = 0$ sobre $[2^{-\underline{n}+1}, \delta_m]$. \square

Conclusão. As ideias apresentadas nas afirmações 4.3.3 e 4.3.13 se opõem, forncendo a contradição procurada e provam, assim, que nenhuma solução (local) para o PVI (*) existe.

Capítulo 5

Formulação Fraca para o Teorema de Peano

No capítulo 2 citamos o Teorema de Peano Clássico para designar o Teorema 1.5.5 do Capítulo 1. A motivação para o termo “clássico” se dá, não somente pela importância deste teorema em Matemática, mas também devido a uma formulação mais fraca para este teorema, conhecida como *Formulação Fraca para o Teorema de Peano* (FFTP). O FFTP irá garantir a existência de uma solução para uma Equação Diferencial Ordinária apenas em algum intervalo. Mais precisamente, o problema da FFTP tem a seguinte estruturação:

Problema 5.0.1 (Formulação Fraca para o Teorema de Peano). *Sejam X um espaço de Banach de dimensão infinita, e $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Estabeleça condições sobre X para que a Equação Diferencial Ordinária*

$$x' = F(t, x)$$

possua solução em pelo menos algum intervalo.

Conforme já vimos na Introdução, o TPC não é válido em todos os espaços de Banach de dimensão infinita; resultado este provado por A. Godunov em [8]. Veremos neste capítulo que, mesmo com a apresentação de um resultado que consolida a não existência em dimensão infinita para o Teorema de Peano em sua versão Forte (ou clássica), a questão sobre uma possível não-validade para o mesmo teorema, só que desta vez em sua formulação fraca, é um problema que interessa a uma grande quantidade de matemáticos.

Este capítulo não tem como objetivo oferecer detalhes para as provas dos resultados nele apresentados, mas tão somente, terá o intuito de motivar o leitor a ler os artigos nele citados afim de procurar firmeza no estudo da formulação fraca para o Teorema de Peano, como uma espécie de guia, ou de forma mais coesa, este capítulo trata de um *estado do conhecimento* para o estudo do FFTP.

5.1 Definição das Classes \mathbb{P} e \mathbb{WP} de espaços de Banach

Nesta seção introduziremos as classes \mathbb{P} e \mathbb{WP} , que são uma maneira de contextualizar o problema da não validade do Teorema de Peano, seja em sua forma clássica (ou forte), quanto em sua forma fraca. De maneira geral, um espaço de Banach pertence à classe \mathbb{P} quando o Teorema de Peano é válido em X . Dizemos que o espaço X pertence à classe \mathbb{WP} quando o Teorema de Peano for válido em sua formulação fraca.

Consideraremos o espaço de Banach X e uma função $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ contínua para as duas definições seguintes.

Definição 5.1.1. Dizemos que X pertence à classe \mathbb{P} quando para toda função F e todo par $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$ o PVI

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

admite solução no intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ para algum $\delta > 0$.

Definição 5.1.2. Dizemos que X pertence à classe \mathbb{WP} se a equação diferencial

$$x' = F(t, x)$$

admite solução em algum intervalo de \mathbb{R} .

Devido a Definição 5.1.1 ser mais restritiva do que a Definição 5.1.2, temos obviamente a inclusão $\mathbb{P} \subset \mathbb{WP}$.

Na figura abaixo, além de ilustrarmos a inclusão $\mathbb{P} \subset \mathbb{WP}$, também incluímos os espaços c_0 , ℓ^2 , ℓ^∞ , confirmando a existência de espaços concretos fora de \mathbb{P} .

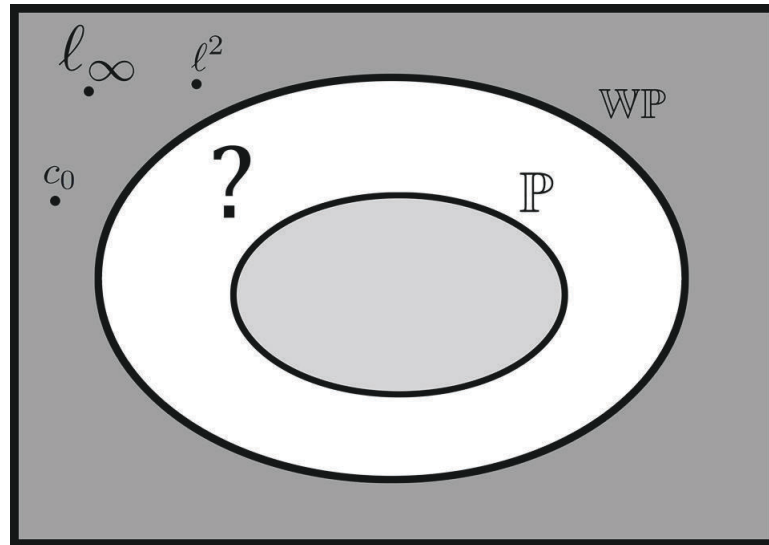


Figura 5.1: Representação por diagramas das classes \mathbb{P} e \mathbb{WP} .

Observação 5.1.1. *A existência de um espaço na parte branca do diagrama mostraria que a conjectura do quociente separável – todo espaço de Banach de dimensão infinita admite um quociente também de dimensão infinita separável (para mais detalhes, veja [21]) – teria uma resposta negativa.*

Com base nas definições 5.1.1 e 5.1.2 acima, podemos observar o seguinte. Sabemos do enunciado do Teorema de Peano que, se, um espaço de Banach X tem dimensão finita, então $X \in \mathbb{P}$. Então, em termos da classe \mathbb{P} , podemos dizer que Godunov provou em [8] a recíproca, ou seja, vale o seguinte resultado:

Teorema 5.1.1 (Godunov). *Se X pertence à classe \mathbb{P} , então X tem dimensão finita.*

Do Teorema 5.1.1 podemos inferir que os conjuntos que pertencem à classe \mathbb{P} são isomorfos ao espaço euclidiano n -dimensional. Em símbolos temos, $\mathbb{P} \cong \mathbb{R}^n$.

Embora já visto que o Teorema de Peano Clássico somente possui validade em espaços de dimensão finita, o problema agora consiste em tentar generalizar o mesmo raciocínio para a classe \mathbb{WP} , ou seja, mostrar sob quais condições sobre X tem-se $X \in \mathbb{WP}$.

Similarmente aos Capítulos 3 e 4, onde foi provado, respectivamente, que $c_0 \notin \mathbb{P}$ e $\ell^2 \notin \mathbb{P}$, mostrar que um espaço X não pertence à classe \mathbb{WP} consiste em construir uma função $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, contínua, que não admita solução em qualquer intervalo.

Mostraremos agora que o espaço das seqüências reais limitadas ℓ_∞ (o qual tem dimensão infinita) não pertence à classe \mathbb{WP} . Tal fato segue como consequência do seguinte

resultado mais geral, mostrado em 2010, pelos matemáticos checos Petr Hájek e Michal Johanis [9]:

Teorema 5.1.2. *Se X é um espaço de Banach com quociente¹ separável de dimensão infinita, então $X \notin \text{WP}$.*

A prova do Teorema 5.1.2 pode ser encontrada no próprio artigo [[9], Teorema 8] em que o problema da formulação fraca foi apresentado.

Proseguiremos com o resultado do matemático americano Haskell P. Rosenthal. Em 1968, Rosenthal provou em [22] que o espaço c_0 é *quase-complementado*² em ℓ_∞ . O resultado de Rosenthal somado ao teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrado em [[16], Teorema 2.5], nos garante que o espaço ℓ^∞ possui um quociente separável de dimensão infinita. Portanto, pelo Teorema 5.1.2, temos que $\ell^\infty \notin \text{WP}$.

Teorema 5.1.3. *Seja X um espaço de Banach. Então X tem um subespaço separável, de dimensão infinita, quase-complementado se, e somente se, X tem um quociente separável de dimensão infinita.*

¹Um quociente de um espaço de Banach X é um espaço (também de Banach) da forma X/N , onde N é um subespaço (fechado) de X .

²Ou seja, existe $N \subset \ell^\infty$, subespaço fechado, tal que $c_0 \cap N = \{0\}$ e $c_0 \oplus N$ é denso em ℓ_∞ .

Apêndice A

Demonstrações Omitidas no Capítulo 3

A.1 Demonstração da Proposição 3.1.1

Proposição 3.1.1: A função de Dieudonné, $F : \mathbb{R} \times \mathbf{c}_0 \rightarrow \mathbf{c}_0$, dada por $(F(\mathbf{y}))_n = \sqrt{|\mathbf{y}_n|} + \frac{1}{n+1}$ é uniformemente contínua em todo o espaço \mathbf{c}_0 , ou seja, considere $\varepsilon > 0$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{c}_0$ arbitrários. Então existe $\delta > 0$ tal que $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\|_{\mathbf{c}_0} < \varepsilon$ sempre que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbf{c}_0} < \delta$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como a aplicação $s \mapsto \sqrt{|s|}$ é uniformemente contínua, temos que existe $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ tal que $|\sqrt{|z|} - \sqrt{|w|}| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $|z - w| < \tilde{\delta}$ e $z, w \in \mathbb{R}$. Em particular, para $z \in \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ e $w \in \{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots\}$, temos, sempre que $|x_i - y_i| < \tilde{\delta}$:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{2} > \left| \sqrt{|x_1|} - \sqrt{|y_1|} \right| = \left| \sqrt{|x_1|} + \frac{1}{2} - \left(\sqrt{|y_1|} + \frac{1}{2} \right) \right| = |F(x_1) - F(y_1)|; \\ \frac{\varepsilon}{2} > \left| \sqrt{|x_2|} - \sqrt{|y_2|} \right| = \left| \sqrt{|x_2|} + \frac{1}{3} - \left(\sqrt{|y_2|} + \frac{1}{3} \right) \right| = |F(x_2) - F(y_2)|; \\ \frac{\varepsilon}{2} > \left| \sqrt{|x_3|} - \sqrt{|y_3|} \right| = \left| \sqrt{|x_3|} + \frac{1}{4} - \left(\sqrt{|y_3|} + \frac{1}{4} \right) \right| = |F(x_3) - F(y_3)|; \\ \vdots \\ \frac{\varepsilon}{2} > \left| \sqrt{|x_i|} - \sqrt{|y_i|} \right| = \left| \sqrt{|x_i|} + \frac{1}{i+1} - \left(\sqrt{|y_i|} + \frac{1}{i+1} \right) \right| = |F(x_i) - F(y_i)|; \\ \vdots \end{array} \right.$$

Agora, seja $\mathbf{a}_1 = |(F(\mathbf{x}))_1 - (F(\mathbf{y}))_1|$, $\mathbf{a}_2 = |(F(\mathbf{x}))_2 - (F(\mathbf{y}))_2|$, \dots , $\mathbf{a}_i = |(F(\mathbf{x}))_i - (F(\mathbf{y}))_i|$, \dots . Tomando o “ δ procurado” como sendo $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{2}$ temos que, se $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbf{c}_0} < \delta = \frac{\tilde{\delta}}{2}$,

ou seja, $\sup_{i=n} |x_i - y_i| < \delta = \tilde{\delta}$, segue-se então que $|x_i - y_i| < \sup_{i=n} |x_i - y_i| < \delta = \tilde{\delta}$, isto é $\underbrace{|x_i - y_i| < \tilde{\delta}}_{(\#)}$ para todo $i \in \mathbf{n}$.

Devido a expressão $(\#)$ segue de $(*)$ que $|(F(x))_i - (F(y))_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $i \in \mathbf{N}$. Assim $\sup_{i=n} |(F(x))_i - (F(y))_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Basta ver agora que $\sup_{i=n} |(F(x))_i - (F(i))_i| = \|F(x) - F(y)\|_{c_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, donde segue que $\|F(x) - F(y)\|_{c_0} < \varepsilon$, e consequentemente, segue a proposição. \square

Apêndice B

Demonstrações Omitidas no Capítulo 4

Neste capítulo apresentaremos as demonstrações omitidas dos resultados citados no capítulo 4 afim de tornar a leitura daquele capítulo mais direta e agradável.

B.1 Demonstração da Proposição 4.1.1

Proposição 4.1.1: A sequência P_n converge em $B(H)$ na topologia forte para o operador nulo \mathbb{O} mas não converge (para operador algum) na topologia uniforme.

Demonstração. Quanto à prova da convergência da sequência P_n na Topologia Forte, basta provar, por definição, que dado qualquer $\mathbf{y} \in H$ teremos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(\mathbf{y}) - \mathbb{O}(\mathbf{y})\| = 0$. Com efeito, pois

$$\|P_n(\mathbf{y}) - \mathbb{O}(\mathbf{y})\|^2 = \|\underbrace{(0, \dots, 0}_{n \text{ zeros}}, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots) - (0, \dots, 0, \dots)\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} y_i^2.$$

Como $H = \ell^2(\mathbb{N})$ vale que $\sum_{i=n+1}^{\infty} y_i^2$ converge para o número 0 quando n cresce indefinidamente, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} y_i^2 = 0$. Deste fato segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(\mathbf{y}) - \mathbb{O}(\mathbf{y})\| = 0$, o que significa que $P_n \xrightarrow{\text{forte}} \mathbb{O}$. Outra notação para isto é $s - \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \mathbb{O}$.

Já quanto a não-convergência na Topologia Uniforme, precisamos mostrar que para a sequência $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in B(H)$, não temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P\|_{B(H)} = 0$, onde $\|P_n - P\|_{B(H)} =$

$\sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{H} \setminus \{0\}} \frac{\|(\mathbf{P}_n - \mathbf{P})(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{y}\|}$ para qualquer que seja o operador $\mathbf{P} \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$. Suponha por absurdo que $\{\mathbf{P}_n\}$ convirja uniformemente para algum $\mathbf{P} \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$, ou seja, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Então, seria necessário que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n+1}\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})} = 0. \quad (\text{B.2})$$

A explicação de que (B.1) implica em (B.2) é a seguinte: De (B.1) segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{P}\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})} = 0. \quad (\text{B.3})$$

De (B.1) e (B.3) e da desigualdade triangular temos que,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n+1}\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})} &= \|\mathbf{P}_n - \mathbf{P} + \mathbf{P} - \mathbf{P}_{n+1}\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})} \\ &\leq \|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})} + \|\mathbf{P} - \mathbf{P}_{n+1}\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})}. \end{aligned}$$

Como as duas parcelas acima vão a zero por (B.1) e (B.3), respectivamente, segue a prova de (B.2).

Agora mostraremos que (B.2) não ocorre. Mais precisamente, definindo a expressão

$$\mathbf{a}_n = \|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n+1}\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})}, \quad (\text{B.4})$$

mostraremos que $\mathbf{a}_n \equiv 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dividiremos a prova em duas partes:

Primeira Parte: Mostraremos que $\mathbf{a}_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, pois, para $\mathbf{y} \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ temos,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_n(\mathbf{y}) - \mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{y})\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})}^2 &= \|(0, \dots, 0, \mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+2}, \dots) - (0, \dots, \mathbf{y}_{n+2}, \dots)\|^2 \\ &= \|(0, \dots, 0, \mathbf{y}_{n+1}, 0, \dots, 0, \dots)\|^2 \\ &= |\mathbf{y}_{n+1}|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{y}_i^2 \\ &= \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os termos por $\|\mathbf{y}\|^2$ temos que $\frac{\|\mathbf{P}_n(\mathbf{y}) - \mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{y})\|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Tomando o supremo sobre $\mathbf{y} \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ em cada lado desta

desigualdade, segue da definição de norma de $B(H)$ que $\|P_n - P_{n+1}\|_{B(H)}^2 \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\alpha_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Segunda Parte: Mostraremos que $\alpha_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $y_0 = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in H$ com “1” na n -ésima posição.

Desta forma,

$$\begin{aligned} \|P_n - P_{n+1}\|_{B(H)} &\stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{y \in H \setminus \{0\}} \frac{\|P_n(y) - P_{n+1}(y)\|}{\|y\|} \\ &\geq \frac{\|P_n(y_0) - P_{n+1}(y_0)\|}{\|y_0\|} \\ &= \frac{\|(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ termos}}, 1, 0, \dots) - (0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots)\|}{\|y_0\|} \\ &= \frac{\|(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ termos}}, 0, 1, 0, \dots)\|}{\|y_0\|} \\ &= \frac{\|y_0\|}{\|y_0\|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto $\alpha_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Segue da primeira e da segunda parte que $\alpha_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P_{n+1}\|_{B(H)} = 1,$$

o que contraria (B.2). Portanto a sequência P_n não converge (para operador algum) na Topologia Uniforme. \square

B.2 Demonstração da Proposição 4.1.2

Proposição 4.1.2: As funções P e \tilde{P} têm as seguintes propriedades:

- i. A função campo de vetores $P : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ é contínua em todos os pontos do seu domínio;
- ii. A função caminho $\tilde{P} : \mathbb{R} \rightarrow (B(H), \tau_{\text{forte}})$ é contínua em todo \mathbb{R} ;
- iii. A função caminho $\tilde{P} : \mathbb{R} \rightarrow (B(H), \tau_{\text{uniforme}})$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e descontínua no ponto $t = 0$. Mais precisamente, com relação aos limites laterais uniformes, temos $\lim_{t \rightarrow 0^-} \tilde{P}(t) = \mathbb{O}$, mas não existe o limite lateral $\lim_{t \rightarrow 0^+} \tilde{P}(t)$.

Demonstração. (i.) Dado $(s, x) \in \mathbb{R} \times H$, mostraremos que, para todo $\varepsilon > 0$, é possível encontrar $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, s, x) > 0$ e $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, s, x)$ tais que

$$\|P(t, y) - P(s, x)\| < \varepsilon,$$

sempre que o par $(t, y) \in \mathbb{R} \times H$ satisfizer $|t - s| < \delta_1$ e $\|y - x\|_H < \delta_2$.

Dividiremos a prova em casos, conforme o instante s pertencer aos seguintes subconjuntos de \mathbb{R} : $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$, $(2^{-n}, 2^{-n+1})$, $\{2^{-n}\}$, $\{0\}$, e $\{1\}$, onde $n \in \mathbb{N}$.

1º caso: $(s, x) \in \mathbb{R} \times H$ se $s \in (-\infty, 0)$:

Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta_1 = -s$ (o qual será positivo neste caso) e $\delta_2 > 0$ qualquer, pois, para (t, y) satisfazendo $|t - s| < -s$ temos:

$$\begin{aligned} |t - s| < -s &\Rightarrow s < t - s < -s \\ &\Rightarrow 2s < t < 0. \end{aligned}$$

Agora notemos que, pela definição de P (veja definição 4.1.3), tanto $P(s, x)$ como $P(t, y)$ são iguais a 0, pois $s < 0$ e $t < 0$, e portanto temos:

$$\|P(t, y) - P(s, x)\| < \varepsilon.$$

Isto encerra a prova do primeiro caso.

2º caso: $(s, x) \in \mathbb{R} \times H$ se $s \in (1, +\infty)$:

Dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta_1 = s - 1$ (o qual é positivo neste caso) e $\delta_2 = \varepsilon$, pois, para (t, y) satisfazendo $|t - s| < s - 1$, temos:

$$\begin{aligned} |t - s| < s - 1 &\Rightarrow 1 - s < t - s < s - 1 \\ &\Rightarrow 1 < t < 2s - 1, \end{aligned}$$

e $\|y - x\|_H < \varepsilon$. Com isto temos, de acordo com a definição de $P(t, y)$ (veja Definição 4.1.3), que $P(t, y) = y$, e que $P(s, x) = x$, e segue que:

$$\|P(t, y) - P(s, x)\| = \|y - x\|_H < \varepsilon.$$

Isto encerra a prova do segundo caso.

3º caso: $(s, x) \in \mathbb{R} \times H$ com $s \in (2^{-n}, 2^{-n+1})$, com $n = 1, 2, \dots$

Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e $s \in (2^{-n}, 2^{-n+1})$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos δ_1 como sendo: $\delta_1 = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\|x\|+1} \frac{1}{2^n}, s - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} - s \right\} > 0$ e $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4}$. Tomando $t \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$|t - s| < \delta_1$, segue da escolha deste δ_1 que $|t - s| < \min\{s - 2^{-n}, 2^{-n+1} - s\}$, e assim $t \in (2^{-n}, 2^{-n+1})$. Deste modo, para (t, \mathbf{y}) satisfazendo $|t - s| < \delta_1$ e $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta_2$, teremos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(s, \mathbf{x})\| &= \left\| \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1 \text{ zeros}}, q_n(t)y_n, y_{n+1}, \dots \right\rangle - \left\| \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1 \text{ zeros}}, q_n(s)x_n, x_{n+1}, \dots \right\rangle\| \\ &= \left\| \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1 \text{ zeros}}, q_n(t)y_n - q_n(s)x_n, y_{n+1} - x_{n+1}, \dots \right\rangle\| \\ &= \sqrt{(q_n(t)y_n - q_n(s)x_n)^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} (y_i - x_i)^2}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \alpha + \beta$, com $\alpha, \beta \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(s, \mathbf{x})\| &\leq |q_n(t)y_n - q_n(s)x_n| + \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} (y_i - x_i)^2} \\ &= |q_n(t)y_n - q_n(t)x_n + q_n(t)x_n - q_n(s)x_n| + \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} (y_i - x_i)^2} \\ &= |q_n(t)(y_n - x_n) + (q_n(t) - q_n(s))x_n| + \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} (y_i - x_i)^2} \\ &\leq |q_n(t)| \cdot |y_n - x_n| + |q_n(t) - q_n(s)| \cdot |x_n| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\mathbf{P}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(s, \mathbf{x})\| \leq |q_n(t)| \cdot |y_n - x_n| + |q_n(t) - q_n(s)| \cdot |x_n| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|. \quad (\text{B.5})$$

Assim, a expressão (B.5) fica, para (t, \mathbf{y}) tal que $|t - s| < \delta_1$ e $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta_2$, como:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(s, \mathbf{x})\| &\leq \underbrace{|q_n(t)|}_{\in [0,1]} \cdot |y_n - x_n| + |q_n(t) - q_n(s)| \cdot |x_n| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &\leq |y_n - x_n| + |q_n(t) - q_n(s)| \cdot |x_n| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &\leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + |q_n(t) - q_n(s)| \cdot |x_n| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &= |q_n(t) - q_n(s)| \cdot |x_n| + 2\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

Como $t, s \in (2^{-n}, 2^{-n+1})$, resulta que

$$\begin{aligned} |q_n(t) - q_n(s)| &= |(2^n t - 1) - (2^n s - 1)| \\ &= |2^n t - 1 - 2^n s + 1| \\ &= |2^n(t - s)| \\ &= 2^n |t - s|. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Usando (B.6), o fato de que $|x_n| \leq \|x\|$, e as escolhas de δ_1 e δ_2 , obtemos:

$$\begin{aligned} \|P(t, y) - P(s, x)\| &\leq |q_n(t) - q_n(s)| \cdot \|x\| + 2\|y - x\| \\ &\leq 2^n |t - s| \cdot \|x\| + 2\|y - x\| \\ &= 2^n \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\|x\| + 1} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \|x\| + 2\|y - x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso encerra a prova do terceiro caso.

4º caso: $(s, x) \in \mathbb{R} \times H$ com $s = 2^{-n}$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos que, para $\varepsilon > 0$ dado, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, se

$$|t - s| = |t - 2^{-n}| < \delta_1 \quad e \quad \|y - x\| < \delta_2, \tag{B.7}$$

então

$$\|P(t, y) - P(s, x)\| = \|P(t, y) - P(2^{-n}, x)\| < \varepsilon. \tag{B.8}$$

Dividiremos a explicação de que (B.7) implica em (B.8) em dois casos:

Subcaso 1: O parâmetro t se aproxima de $s = 2^{-n}$ pela direita: Para este subcaso consideremos $t \in (2^{-n}, 2^{-n} + \delta_1^+)$, onde δ_1^+ será escolhido como:

$$\delta_1^+ = \min \left\{ 2^{-n+1} - 2^{-n}, \frac{1}{2^n(\|x\| + 1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Tal escolha de δ_1^+ implica que $t \in (2^{-n}, 2^{-n+1})$, donde segue, por definição de $P(t, y)$, que

$$P(t, y) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ vezes}}, q_n(t)y_n, y_{n+1}, \dots).$$

Por outro lado, lembrando que $q_n(2^{-n}) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} P(2^{-n}, x) &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ vezes}}, q_n(2^{-n})x_n, x_{n+1}, \dots) \\ &= (\underbrace{0, \dots, 0, 0}_n \text{ vezes}, x_{n+1}, \dots). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|P(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - P(2^{-n}, \mathbf{x})\| &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ vezes}}, q_n(\mathbf{t})\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{x}_{n+2}, \dots) \\ &= \sqrt{(q_n(\mathbf{t})\mathbf{y}_n)^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)^2}. \end{aligned}$$

Devido à desigualdade $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \alpha + \beta$, com $\alpha, \beta \geq 0$ temos, para a escolha $\alpha = q_n(\mathbf{t}) \cdot |\mathbf{y}_n|$ e $\beta = \sum_{i=n+1}^{\infty} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)^2$ que,

$$\|P(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - P(2^{-n}, \mathbf{x})\| \leq q_n(\mathbf{t}) \cdot |\mathbf{y}_n| + \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)^2}.$$

Agora, devido a $\beta \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, temos:

$$\|P(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - P(2^{-n}, \mathbf{x})\| \leq q_n(\mathbf{t}) \cdot |\mathbf{y}_n| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Uma vez que $|\mathbf{y}_n| \leq |\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n| + |\mathbf{x}_n|$, $|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ e $|\mathbf{x}_n| \leq \|\mathbf{x}\|$, obtemos:

$$\|P(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - P(2^{-n}, \mathbf{x})\| \leq q_n(\mathbf{t}) \cdot \|\mathbf{x}\| + 2\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|. \quad (\text{B.9})$$

Como $q_n(\mathbf{t}) = 2^n \cdot \mathbf{t} - 1$ e $\mathbf{t} \in (2^{-n}, 2^{-n} + \delta_1^+)$, com $\delta_1^+ \leq \frac{1}{2^n(\|\mathbf{x}\|+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$, resulta que

$$q_n(\mathbf{t}) \leq 2^n \left(2^{-n} + \frac{1}{2^n(\|\mathbf{x}\|+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right) - 1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{B.10})$$

Substituindo (B.10) em (B.9), obtemos:

$$\|P(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - P(2^{-n}, \mathbf{x})\| \leq \frac{1}{\|\mathbf{x}\|+1} \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \frac{\varepsilon}{2} + 2\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|. \quad (\text{B.11})$$

Devido à escolha de $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4}$ e $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta_2$, segue que $\|P(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - P(2^{-n}, \mathbf{x})\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, o que prova a continuidade pela direita da função $P(\mathbf{t}, \mathbf{y})$ nos pontos do tipo $(2^{-n}, \mathbf{x})$, com \mathbf{x} arbitrário.

Subcaso 2: O parâmetro \mathbf{t} se aproxima de $s = 2^{-n}$ pela esquerda:

Para este subcaso temos que $\mathbf{t} \in (2^{-n} - \delta_1^-, 2^{-n})$, e escolheremos δ_1^- como sendo: $\delta_1^- = \min \left\{ 2^{-n} - 2^{-(n+1)}, \frac{1}{2^{n+1}(\|\mathbf{x}\|+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right\}$. Tal escolha de δ_1^- implica que $\mathbf{t} \in (2^{-(n+1)}, 2^{-n})$. Este último intervalo pode ser reescrito da seguinte forma: $\mathbf{t} \in (2^{-(n+1)}, 2^{-(n+1)+1}) = (2^{-(n+1)}, 2^{-(n+1)+1})$.

Segue, por definição da função $P(\mathbf{t}, \mathbf{y})$, que

$$P(\mathbf{t}, \mathbf{y}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ zeros}}, \mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t})\mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+2}, \dots).$$

Lembrando que $\mathbf{q}_n(2^{-n}) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} P(2^{-n}, \mathbf{x}) &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ zeros}}, \mathbf{q}_n(\mathbf{t})\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+2}, \dots) \\ &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ zeros}}, 0, \mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+2}, \dots). \end{aligned}$$

e portanto

$$\|P(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - P(2^{-n}, \mathbf{x})\| = \sqrt{(\mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1})^2 + \sum_{i=n+2}^{\infty} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)^2}. \quad (\text{B.12})$$

Devido à desigualdade $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \alpha + \beta$, com $\alpha, \beta \geq 0$ com a escolha de $\alpha = |\mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}|$ e $\beta = \sqrt{\sum_{i=n+2}^{\infty} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)^2}$ e acrescentando o termo “ $-\mathbf{q}_{n+1} \cdot \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{x}_{n+1}$ ” dentro do módulo da expressão de α , resulta que:

$$\alpha \leq \mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t}) \cdot |\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}| + (1 - \mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t})) \cdot |\mathbf{x}_{n+1}|,$$

e usando que $\beta \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, obtemos:

$$\|P(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - P(2^{-n}, \mathbf{x})\| \leq \mathbf{q}_{n+1} \cdot |\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}| + (1 - \mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t})) \cdot |\mathbf{x}_{n+1}| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Agora, devido às expressões $|\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, $\mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t}) \in [0, 1]$ e $|\mathbf{x}_{n+1}| \leq \|\mathbf{x}\|$, temos:

$$\|P(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - P(2^{-n}, \mathbf{x})\| \leq (1 - \mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t})) \cdot \|\mathbf{x}\| + 2\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Como $\mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t}) = 2^{n+1}\mathbf{t} - 1$ e $\mathbf{t} \in (2^{-n} - \delta_1^-, 2^{-n})$, segue que a função $1 - \mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t})$ é decrescente, e portanto,

$$1 - \mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t}) = 2 - 2^{n+1}\mathbf{t} < 2 - 2^{n+1}(2^{-n} - \delta_1^-) = 2 - 2 + 2^{n+1} \cdot \delta_1^- = 2^{n+1} \cdot \delta_1^-.$$

Como $\delta_1^- \leq \frac{1}{2^{n+1}(\|\mathbf{x}\|+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$, temos que $1 - \mathbf{q}_{n+1}(\mathbf{t}) < \frac{1}{\|\mathbf{x}\|+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, ao se tomar $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|P(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - P(2^{-n}, \mathbf{x})\| &\leq \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\| + 1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + 2\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2\delta_2, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(2^{-n}, \mathbf{x})\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto termina a prova da continuidade à esquerda da função $\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y})$ nos pontos do tipo $(2^{-n}, \mathbf{x})$, com \mathbf{x} arbitrário, e, conseqüentemente, termina a prova do quarto caso.

5º caso: $(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbf{H}$ com $\mathbf{s} = 0$.

Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{s} = 0$. Para $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta_1^+(\varepsilon, \mathbf{x}) > 0$ e $\delta_2 > 0$ tal que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta_2$, onde δ_2 qualquer. Analisaremos os casos em que \mathbf{t} se aproxima de $\mathbf{s} = 0$ pela esquerda, e o caso em que \mathbf{t} se aproxima de $\mathbf{s} = 0$ pela direita.

Para o caso em que \mathbf{t} se aproxima de $\mathbf{s} = 0$ pela esquerda, temos que $\mathbf{t} \in (-\delta_1^-, 0)$ e $\delta_1^- > 0$. Assim, para qualquer δ_1^- tomado, vale

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(\mathbf{s}, \mathbf{x})\| = \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(0, \mathbf{x})\| = \|0 - 0\| = 0 < \varepsilon.$$

Já para o caso em que \mathbf{t} se aproxima de $\mathbf{s} = 0$ pela direita, temos que, como $\mathbf{x} \in \mathbf{H} = \ell^2$, então existe $N_0(\varepsilon, \mathbf{x}) < \infty$ tal que

$$\sqrt{\sum_{i=N_0+1}^{\infty} x_i^2} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{B.13})$$

Tome $\delta_1^+(\varepsilon, \mathbf{x}) = 2^{-N_0(\varepsilon, \mathbf{x})}$ e $\delta_2(\varepsilon, \mathbf{x}) = \frac{\varepsilon}{2}$. Verifiquemos que, se $\mathbf{t} \in (0, \delta_1^+(\varepsilon, \mathbf{x}))$ então $\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(0, \mathbf{x})\| < \varepsilon$.

Para mostrarmos que isto de fato acontece, vamos primeiramente estimar o valor da expressão $\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(0, \mathbf{x})\|$ como sendo:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(0, \mathbf{x})\| &= \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) - \mathbf{P}(0, \mathbf{x})\| \\ &\leq \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{x})\| + \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) - \mathbf{P}(0, \mathbf{x})\| \\ &= \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{x})\| + \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{x})\|. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{z})$ é não expansivo (ou seja, a sua representação matricial na base canônica \mathbf{e}_i é uma matriz diagonal infinita com entradas entre 0 e 1 - Vide figura 4.2) para cada $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$, temos:

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Logo

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(0, \mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{x})\|. \quad (\text{B.14})$$

Por outro lado, como $\mathbf{t} \in (0, 2^{-N_0(\varepsilon, \mathbf{x})}) \supset (2^{-(N_0+1)}, 2^{-(N_0+1)+1})$, obtemos:

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{x})\| \leq \sqrt{(q_{N_0+1})^2(\mathbf{t})x_{N_0+1}^2 + \sum_{i=N_0+2}^{\infty} x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=N_0+1}^{\infty} x_i^2},$$

donde temos, por (B.13) que

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{x})\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{B.15})$$

Substituindo(B.15) em (B.14) temos que $\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(0, \mathbf{x})\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Isso encerra a prova do quinto caso.

6° caso: $(s, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbf{H}$ com $s = 1$.

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, queremos obter valores para $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ de modo que para (\mathbf{t}, \mathbf{y}) tais que $|\mathbf{t} - s| = |\mathbf{t} - 1| < \delta_1$ e $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta_2$, sempre teremos

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(s, \mathbf{x})\| < \varepsilon. \quad (\text{B.16})$$

Primeiramente notemos que, para $s = 1$ temos, pela expressão da função \mathbf{P} (veja definição 4.1.3) que $\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(s, \mathbf{x})\| = \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(1, \mathbf{x})\| = \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{x}\|$. Logo a expressão (B.16) torna-se

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{x}\| < \varepsilon. \quad (\text{B.17})$$

Feito isso, agora mostraremos a continuidade da função \mathbf{P} nos pontos (s, \mathbf{x}) com $s = 1$ e $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ arbitrário. Para isto, analisaremos os seguintes dois subcasos:

Subcaso 1: $s = 1$ e $\mathbf{t} \in (1, 1 + \delta_1)$.

Neste subcaso estamos tratando quando \mathbf{t} se aproxima de $s = 1$ pela direita.

Logo $\mathbf{t} > 1$ e, devido à definição 4.1.3, vale:

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{P}(1, \mathbf{x})\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta_2.$$

Portanto, para este subcaso, tomando $\delta_1 > 0$ qualquer e $\delta_2 = \varepsilon > 0$, garantimos a continuidade **pela direita** da função \mathbf{P} nos pontos da forma $(1, \mathbf{x})$, com \mathbf{x} arbitrário.

Subcaso 2: $s = 1$ e $\mathbf{t} \in (1 - \delta_1^-, 1)$. Neste subcaso estamos tratando quando \mathbf{t} se aproxima de s pela esquerda.

Tomando $\delta_1^- = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2(\|\mathbf{x}\|+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ e $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4}$, temos que $\mathbf{t} \in (\frac{1}{2}, 1)$. Logo $\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) = (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots)$. Estimando o lado direito da expressão (B.17) acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{x}\| &= \|(\mathbf{q}_1(\mathbf{t})\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dots) - (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots)\| \\ &= \|\mathbf{q}_1(\mathbf{t})\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_3 - \mathbf{x}_3, \dots\| \\ &= \sqrt{|\mathbf{q}_1(\mathbf{t})\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_1|^2 + \sum_{i=2}^{\infty} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)^2}. \end{aligned}$$

Devido a desigualdade $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \alpha + \beta$, com $\alpha, \beta > 0$, vale:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{x}\| &\leq |\mathbf{q}_1(\mathbf{t})\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_1| + \sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)^2} \\ &\leq |\mathbf{q}_1(\mathbf{t})\mathbf{y}_1 - \mathbf{q}_1(\mathbf{t})\mathbf{x}_1 + \mathbf{q}_1(\mathbf{t})\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1| + \sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)^2}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, e pelo fato de que $\sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)^2} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, temos:

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{x}\| \leq |\mathbf{q}_1(\mathbf{t})| \cdot |\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_1| + |\mathbf{q}_1(\mathbf{t}) - 1| \cdot |\mathbf{x}_1| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Como $\mathbf{q}_1(\mathbf{t}) \in [0, 1]$, $|\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_1| < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, $\mathbf{q}_1(\mathbf{t}) = 2\mathbf{t} - 1$ e $|\mathbf{x}_1| < \|\mathbf{x}\|$, segue que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{x}\| &\leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + |2\mathbf{t} - 2| \cdot \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &= 2|\mathbf{t} - 1| \cdot \|\mathbf{x}\| + 2\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

Uma vez que $\mathbf{t} \in (1 - \frac{1}{2}, 1)$, temos que $|\mathbf{t} - 1| = (1 - \mathbf{t})$, e como $\mathbf{t} > 1 - \delta_1^-$, segue que $1 - \mathbf{t} < \delta_1^-$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) - \mathbf{x}\| &\leq 2(1 - \mathbf{t})\|\mathbf{x}\| + 2\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &\leq 2\delta_1^-\|\mathbf{x}\| + 2\delta_1^- \\ &< 2 \cdot \frac{1}{2(\|\mathbf{x}\|+1)} \|\mathbf{x}\| \cdot \frac{\varepsilon}{2} + 2\delta_2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon, \end{aligned}$$

provando a continuidade pela esquerda da função \mathbf{P} nos pontos da forma $(1, \mathbf{x})$.

Como no subcaso 1 pode-se tomar $\delta_1^+ > 0$ arbitrário e $\delta_2 = \varepsilon$. Portanto podemos generalizar os dois subcasos tomando em cada um deles $\delta_1 = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2(\|\mathbf{x}\|+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ e $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4}$ para provar a continuidade de \mathbf{P} nos pontos da forma $(1, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}$.

Desta maneira finalizamos a prova do item i.

(ii.) Inicialmente notemos que a continuidade de $P : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ pode ser expressa por:

$$t_n \xrightarrow{\mathbb{R}} s \text{ e } y_n \xrightarrow{H} x \implies P(t_n, y_n) \xrightarrow{H} P(s, x).$$

Agora seja $t_n \rightarrow s$ e $z \in H$ fixado. Tomando a sequência constante em H , $y_n = z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$y_n \rightarrow z. \tag{B.18}$$

Segue da continuidade da função P no ponto $(s, z) \in \mathbb{R} \times H$ que

$$P(t_n, y_n) \xrightarrow{H} P(s, z), \text{ quando } t_n \rightarrow s,$$

ou, equivalentemente, por (B.18),

$$P(t_n, z) \xrightarrow{H} P(s, z), \text{ quando } t_n \rightarrow s. \tag{B.19}$$

Contudo, observemos que (B.19) nada mais é do que

$$\tilde{P}(t_n, z) \xrightarrow{H} \tilde{P}(s, z), \text{ quando } t_n \rightarrow s,$$

para cada $z \in H$ fixado, mas isto é dizer exatamente o mesmo que $\tilde{P}(t_n)$ converge fortemente para $\tilde{P}(s)$ o que prova o item ii.

(iii.) Para provar que a função \tilde{P} é descontínua em $t = 0$ na topologia uniforme, basta tomarmos a sequência $t_n = 2^{-n}$. Notemos que $t_n \rightarrow 0$ e, por outro lado, temos que $\tilde{P}(2^{-n}) = P_n$. Mas, já que foi provado que não existe o limite $u - \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ (veja Proposição 4.1.1). Logo também não existe o limite $u - \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{P}(2^{-n})$.

□

B.3 Demonstração da Proposição 4.2.1

Proposição 4.2.1: As seguintes propriedades são verificadas sobre as funções G e A :

- i. A função G é contínua em todos os pontos de H e é não-linear;
- ii. A função A é contínua em todos os pontos de H .

Demonstração. (i.) A prova de que G é contínua é dividida em duas partes:

Primeira Parte. (G é contínua em $\mathbf{y} = \vec{0}$): Para $\varepsilon > 0$ dado, basta tomar $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ e para $z \in B_{\delta(\varepsilon)}(0) \setminus \{0\}$, faz sentido $\frac{z}{\|z\|^{\frac{1}{2}}}$. Assim temos,

$$\|G(z) - G(0)\| = \|G(z) - 0\| = \left\| \frac{z}{\|z\|^{\frac{1}{2}}} - 0 \right\| = \|z - 0\|^{\frac{1}{2}} < \delta^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Para o caso $z = 0$ temos imediatamente que $\|G(z) - G(0)\| < \varepsilon$.

Segunda Parte (G é contínua em cada $\mathbf{y} \in H \setminus \{0\}$): Seja também $z \in H \setminus \{0\}$. Então vale a igualdade,

$$\|G(z) - G(\mathbf{y})\| = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}\|z\|^{\frac{1}{2}}} \left\| \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}z - \|z\|^{\frac{1}{2}}\mathbf{y} \right\|. \quad (\text{B.20})$$

Encontraremos uma cota inferior positiva para $\|z\|$, sempre que z esteja na bola $B_{\delta_1}(\mathbf{y})$, onde $\delta_1 = \delta_1(\|\mathbf{y}\|) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|$.

Sendo $z \in B_{\delta_1}(\mathbf{y})$ e usando a desigualdade triangular, obtemos:

$$\frac{\|\mathbf{y}\|}{2} > \|z - \mathbf{y}\| \geq \left| \|z\| - \|\mathbf{y}\| \right|,$$

donde

$$\frac{\|\mathbf{y}\|}{2} < \|z\| < \frac{3}{2}\|\mathbf{y}\|.$$

Logo,

$$\|z\| > \frac{\|\mathbf{y}\|}{2} \quad \text{para todo } z \in B_{\delta_1}(\mathbf{y}). \quad (\text{B.21})$$

Isto mostra que $B_{\delta_1}(\mathbf{y}) \subset H \setminus \{0\}$. Deste modo, a expressão (B.20) continua sendo válida para $\mathbf{y} \in H \setminus \{0\}$ e $z \in B_{\delta_1}(\mathbf{y})$.

Substituindo (B.21) em (B.20) temos, para $z \in B_{\delta_1}(\mathbf{y})$:

$$\|G(z) - G(\mathbf{y})\| \leq \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} \frac{\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}} \left\| \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}z - \|z\|^{\frac{1}{2}}\mathbf{y} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{\|\mathbf{y}\|} \left\| \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}z - \|z\|^{\frac{1}{2}}\mathbf{y} \right\| \quad (\text{B.22})$$

Agora vamos estimar o termo $\left\| \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}z - \|z\|^{\frac{1}{2}}\mathbf{y} \right\|$ de (B.22) para $z \in B_{\delta_1}(\mathbf{y})$:

$$\begin{aligned}
 \left\| \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}z - \|z\|^{\frac{1}{2}}\mathbf{y} \right\| &\leq \left\| \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}z - \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}\mathbf{y} \right\| + \left\| \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}\mathbf{y} - \|z\|^{\frac{1}{2}}\mathbf{y} \right\| \\
 &= \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|z - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\| \cdot \left| \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} - \|z\|^{\frac{1}{2}} \right| \\
 &= \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|z - \mathbf{y}\| + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} + \|z\|^{\frac{1}{2}}} \cdot \left| \|\mathbf{y}\| - \|z\| \right| \\
 &\leq \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|z - \mathbf{y}\| + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} + \|z\|^{\frac{1}{2}}} \cdot \|z - \mathbf{y}\| \\
 &= \left(\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} + \|z\|^{\frac{1}{2}}} \right) \|z - \mathbf{y}\|. \tag{B.23}
 \end{aligned}$$

Usando (B.21), vamos agora estimar o fator $\left[\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} + \|z\|^{\frac{1}{2}}} \right]$ da expressão (B.23). Para $z \in B_{\delta_1}(\mathbf{y})$, temos:

$$\begin{aligned}
 \left(\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} + \|z\|^{\frac{1}{2}}} \right) &= \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{\|z\|}{\|\mathbf{y}\|} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 &\stackrel{(B.21)}{\leq} \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \right) \\
 &= \frac{2\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}. \tag{B.24}
 \end{aligned}$$

Substituindo (B.24) em (B.23) e por sua vez em (B.22), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \|G(z) - G(\mathbf{y})\| &\leq \frac{\sqrt{2}}{\|\mathbf{y}\|} \left(\frac{2\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \right) \|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}} \|z - \mathbf{y}\| \\
 &= \left(\frac{4 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \right) \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}} \|z - \mathbf{y}\|. \tag{B.25}
 \end{aligned}$$

Com isso, concluímos de (B.25) que a escolha $\delta(\varepsilon, \mathbf{y}) = \min \left\{ \frac{\|\mathbf{y}\|}{2}, \frac{(\sqrt{2}+1)\|\mathbf{y}\|^{\frac{1}{2}}}{4+\sqrt{2}} \varepsilon \right\}$ faz com que $\|G(z) - G(\mathbf{y})\|$ fique menor que ε sempre que $\|z - \mathbf{y}\|$ é menor que $\delta(\varepsilon, \mathbf{y})$, o que prova a continuidade de G em $H \setminus \{0\}$, provando assim, a segunda (e última parte) do item i.

(ii.) Para a prova da continuidade da função A , vamos primeiramente estimar a diferença $\|A(z) - A(\mathbf{y})\|$ para $\mathbf{y}, z \in H$ arbitrários. Desta forma temos:

$$\begin{aligned}
 \|A(z) - A(\mathbf{y})\|^2 &= \left\| (|z_1|, |z_2|, \dots) - (|\mathbf{y}_1|, |\mathbf{y}_2|, \dots) \right\|^2 \\
 &= \left\| (|z_1| - |\mathbf{y}_1|, |z_2| - |\mathbf{y}_2|, \dots) \right\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} (|z_i| - |\mathbf{y}_i|)^2. \tag{B.26}
 \end{aligned}$$

Usando que $0 \leq |z_i| - |y_i| \leq |z_i - y_i|$ e que a função $f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $[0, +\infty)$, temos que $|z_i| - |y_i| \leq |z_i - y_i|$, ou, melhor ainda, temos

$$\left(|z_i| - |y_i|\right)^2 \leq (z_i - y_i)^2. \quad (\text{B.27})$$

Portanto, de (B.26) e (B.27), concluímos que:

$$\|\mathbf{A}(z) - \mathbf{A}(y)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} (z_i - y_i)^2 = \|z - y\|^2,$$

isto é,

$$\|\mathbf{A}(z) - \mathbf{A}(y)\| \leq \|z - y\|,$$

donde concluímos a continuidade da função \mathbf{A} .

□

Referências Bibliográficas

- [1] Barroso, S., *Análise Funcional: Uma introdução*. EMALCA da Amazônia, 2009.
- [2] Botelho, G., Pellegrino, D., Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] Bueno, H. P., *Notas de aula em Equações Diferenciais Ordinárias I*. Minas Gerais, 2001.
- [4] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Velary, 2011.
- [5] Castro Júnior, A. A., *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, 2009.
- [6] Cellina, A. *On the nonexistence of solutions of differential equations in nonreflexive spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. 78, 1069-1072 (1972).
- [7] Dieudonné, J., *Deux exemples singuliers d'equations differentielles*, Acta Sci. Math. (Szeged) 12B , 38-40 (1950).
- [8] Godunov, A. N. *The Peano theorem in Banach spaces*. (Russian) Funkcional. Anal. i Priložen. 9 , 59-60 (1974).
- [9] Hájek, P. and Johanis, M., *On Peano's Theorem in Banach spaces*, J. Differential Equations 249-255 (2010).
- [10] Honig, C. S. *Aplicações de Topologia à Análise*. IMPA, Projeto Euclide, Rio de Janeiro, 1976.
- [11] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library, New York, 1989.

- [12] Lima, E. L., *Álgebra linear*. 8.ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2014.
- [13] Lima, E. L., *Espaços métricos*. 5.ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2013.
- [14] Lizana, M., *Ecuaciones Diferenciales Ordinárias*. Mérida, Venezuela, 2013.
- [15] Minhós, F. M., *Equações Diferenciais Ordinárias*. Lisboa, Portugal, 2009.
- [16] Mujica, J., *Separable quotients of Banach spaces*, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, Volumen 10, nº 2, 299-330, (1997).
- [17] Pata, V., *Fixed point theorems and applications*. manuscript, vittorino@patapolimi.it.
- [18] Peano, G., *Démonstranston de l'integrabilité des équations différentialles ordinaires.*, Mathamatische Annalen, 37(2), 182-228, (1890).
- [19] Peano, G., *Opere Scelte.*, vol. 1 (Edizioni Cremonese, 1957).
- [20] Peano, G., *Sull'integrabilité delle equazione differenziale di primo ordine.*, Atti. Accod. Sci. Torino, vol. 21, 677-685 (1886)
- [21] Rebouças, M. P., *A Conjectura do quociente separável, uma conjectura sobre EDO's em espaços de Banach, uma teoria de aproximação de pontos fixos, e contribuições*, Tese de Doutorado, UFC,(2012).
- [22] Rosenthal, H., *On quasi-complemented subspaces of Banach spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci., 361-364, 59(1968).
- [23] Sotomayor, J., *Lições de equações diferenciais*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.
- [24] Yorke, J. A., *A continuous differential equation in Hilbert space without existence*. Funkcial. Ekvac. 13, 19-21 (1970).