Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Desigualdade de Trudinger-Moser na Forma Singular e Aplicações

Jéferson Nascimento Silva

Teresina - 2015

Jéferson Nascimento Silva

Dissertação de Mestrado:

Desigualdade de Trudinger-Moser na Forma Singular e Aplicações

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira

Teresina - 2015

FICHA CATOLOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Setorial do CCN

S586d Silva, Jéferson Nascimento.

Desigualdade de Trudinger-Moser na forma singular e aplicações. / Jéferson Nascimento Silva. – Teresina, 2015.

70f.

Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Piauí, 2015.

Orientador: Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira

1. Análises. 2. Equações Diferenciais. 3. Equações Elípticas. 4. Desigualdade de Trudinger-Moser. I. Título

CDD 515.353

Aos meus amados pais, Ana Célia e Francisco Jean;

Às amadas avós, Alice e Maria Moreira;

Aos meus queridos irmãos, Jean Paulo e Ana Jéssica;

À Nayara Caroline, meu amor.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por está sempre me acompanhando e dando força para concretizar meus sonhos.

Aos meus pais Ana Célia e Francisco Jean pelo amor imensurável concedido, apoio e compreensão. Aos meus irmãos, Jean Paulo e Ana Jéssica, pelos momentos de convivência e amizade. A todos membros de minha família, em especial, às avós Alice e Maria Moreira, às tias Dolores, Ângela e Nalda, aos primos Ana Rebeca, Bianko, Breno, Bruna, Bruno, Carlos Ándre, Dielly, Jhonata, Tayná, Tawane e Vinicius, e aos cunhados Deyse e Maylson.

À Nayara Caroline, pela compreensão, confiança e amor.

A meu orientador, professor Dr. José Francisco Alves de Oliveira, pelo ensinamento, atenção e orientação.

Aos Professores da Pós-Graduação em Matemática da UFPI, em especial, Humberto, Jurandir, José Francisco, Isaías, Marcondes Clack e Kelton por compartilharem seus conhecimentos e ao professor Alexandro Marinho pela orientação na graduação e incentivo.

Aos Professores Alexandro Marinho Oliveira e Isaías Pereira de Jesus por aceitarem participar da banca examinadora.

Aos amigos e colegas de curso do Progama de Pós-Graduação em Matemática da UFPI, em particular, Alberone, Andressa Gomes, Antônio Aguiar, Antônio de Pádua, Antônio Luís, Atécio Alves, Eliandeson, Ismael Carlos, Jaciel, Jhonata, Lucas Machado, Lucas Vidal, Rafael Emanuel, Raul Kazan, Ray, Sandoel, Thiago Esteves e Victor.

Aos membros da REFEBRO.

Enfim, a CAPES pelo apoio financeiro.

"Não existe um caminho para a felicidade.
A felicidade é o caminho..."

Mahatma Gandhi

Resumo

Neste trabalho estudaremos a desigualdade de Trudinger-Moser clássica e algumas extensões. Além disso, investigaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas para uma classe de problemas elípticos não-homogêneos e singulares.

Palavras-chave: Desigualdade de Trudinger-Moser, Crescimento Crítico, Equações Elípticas, Métodos Variacionais.

Abstract

In this work we will study the classical Trudinger-Moser inequality and some extensions. Furthermore, we investigate the existence and multiplicity of weak solutions to a class of singular and non-homogeneous elliptic problems.

Key words: Trudinger-Moser inequality, Critical growth, Elliptic equations, Variational methods.

Sumário

Notações

As simbologias abaixo são utilizadas no decorrer do texto.

- $C, C_0, C_1, C_2, ...$ são constantes positivas, nem sempre iguais;
- B_R é a bola aberta de raio $R > 0$ e centrada na origem;
- $\bar{B}_R$ é a bola fechada de raio $R > 0$ e centrada na origem;
- X^* é o dual topológico do espaço de Banach X;
- $\langle ., . \rangle$ denota o par de X^* e X;
- A convergência forte em X será denotada por " $\rightarrow$ ", enquanto a convergência fraca será " $\rightharpoonup$ ";
- supp(u) é o suporte da função u;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ é o gradiente da função u;
- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano da função u;
- Escrevemos

  $$f = o(g), \ \text{quando} \ x \to x_0,$$

  se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$;
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \Big| \text{ mensurável} \quad \text{e} \quad \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}$, $1 \leqslant p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, denota o espaço de Lebesgue, com a norma

  $$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}};$$

- $L^1_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} :$ mensurável e $\int_K |u|\, dx < \infty, \ \forall K \subset \Omega$ compacto$\}$;

- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \,\big|$ mensurável e limitadas quase sempre em $\Omega\}$, com a norma

$$||u||_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leqslant C \text{ quase sempre em } \Omega\} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess } |u(x)|;$$

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções com suporte compacto e de classe C^∞.

- Para $1 \leqslant p < \infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_i \in L^p(\Omega); \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i = 1, 2, ..., n \Big\}$$

é o espaço de Sobolev, com a norma dada por

$$||u||_{1,p} = (||u||_p + ||\nabla u||_p)^{\frac{1}{p}};$$

- $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ e seu dual $(H^1(\Omega))^* = H^{-1}(\Omega)$;

- $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com relação a norma de $W^{1,p}(\Omega)$. Para $p = 2$, $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$;

Introdução

Nesse trabalho estudaremos a desigualdade de Trudinger-Moser clássica e algumas extensões. Além disso, investigaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas para uma classe de problemas elípticos não-homogêneos e singulares que envolve crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser.

No Capítulo 1, trataremos dos resultados preliminares para a compreensão deste trabalho.

No Capítulo 2, discutiremos a desigualdade de Trudinger-Moser clássica. Entretanto, daremos uma prova curta dessa desigualdade devido à Marshall [23] que difere da demonstração original feita por Moser [24]. No caso ilimitado, apresentaremos extensões devido a Cao [8], J. M. do Ó [13] e Adachi-Tanaka [1].

No Capítulo 3, mostraremos a versão singular da desigualdade de Trudinger-Moser clássica proposta por Adimurthi-Sandeep [2] e uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser com peso singular para subdomínios ilimitados em $\mathbb{R}^2$ devido M. de Souza [11].

No Capítulo 4, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas de uma classe de problemas singulares, trabalhada por J. M. do Ó e M. de Souza [15], da seguinte forma:

$$-\Delta u + V(x)u = \frac{f(u)}{|x|^a} + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

onde $a \in [0,2), h \in \left(H^1(\mathbb{R}^2)\right)^* = H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ é uma pequena pertubação com $h \not\equiv 0$ e $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo:

(V_1) existe uma constante V_0 tal que $V(x) \geqslant V_0 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^2$;

(V_2) a função $\left[V(x)\right]^{-1}$ pertence $L^1(\mathbb{R}^2)$;

(V_3) V é radialmente simétrica, ou seja, $V(x) = V(x')$ quando $|x| = |x'|$;

(V_4) a função $V(x)$ é coerciva, ou seja, $V(x) \to \infty$ se $|x| \to \infty$.

Estaremos interessados no caso que a não-linearidade $f(s)$ tem o máximo crescimento sobre s que torna possível tratar o problema (1) variacionalmente num espaço de funções adequado. Devido a presença da singularidade $|x|^{-a}$ em (1) devemos usar uma versão singular da desigualdade de Trudinger-Moser. Além disso, assumiremos condições sobre o termo não-linear $f(s)$:

(f_0) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $f(0) = 0$;

(f_1) existem constantes $\theta > 2$ e $s_1 > 0$ tal que para todo $|s| \geqslant s_1$ tem-se:

$$0 < \theta F(s) := \theta \int_0^s f(t)dt \leqslant sf(s);$$

(f_2) existem constantes positivas R_0 e M_0 tais que para todo $|s| \geqslant R_0$ tem-se:

$$0 < F(s) \leqslant M_0|f(s)|.$$

Para aplicar os métodos variacionais, considera-se o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u \nabla v + V(x)uv]dx, \quad u, v \in E,$$

para o qual corresponde a norma

$$\|u\|_E = \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx \right\}^{1/2}, \quad u \in E.$$

Assumiremos, ainda uma condição adicional próximo da origem:

(f_3) $\limsup_{s \to 0} \dfrac{2F(s)}{s^2} < \lambda_1$.

Os principais resultados desse capítulo garantem a existência de soluções fracas em (1) para a não-linearidade com crescimento subcrítico e crítico. As demonstrações desses resultados requerem os resultados desenvolvidos no Capítulo 3, o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Os resultados deste capítulo serão usados nesse trabalho.

1.1 Análise Funcional

1.1.1 Espaço de Banach

Seja X um espaço vetorial real.

Definição 1.1.1. *Uma aplicação* $\|\,.\,\| : X \to [0, +\infty)$ *é chamada de norma se:*

i. $\|u\| \geqslant 0$ *para todo* $u \in X$ *e* $\|u\| = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$*;*

ii. $\|\lambda u\| = \lambda\|u\|$, $\forall u \in X$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

iii. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ *para todo* $u, v \in X$.

A desigualdade (iii) é chamada de desigualdade triângular.

Assumiremos que X é um espaço vetorial normado.

Definição 1.1.2. *Diremos que uma sequência* $(u_n) \subset X$ *converge para* $u \in X$ *se*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Neste caso dizemos que u *é o limite da sequência* (u_n) *e escrevemos* $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ *ou* $u_n \to u$.

Definição 1.1.3. *i. Uma sequência* $(u_n) \subset X$ *é chamada sequência de Cauchy se dado* $\varepsilon > 0$ *existir* $n_0 > 0$ *tal que*

$$\|u_k - u_l\| < \varepsilon, \quad \text{se } k, l > n_0.$$

ii. X *é completo se toda sequência de Cauchy em* X *converge, ou seja, se* (u_n) *é sequência de Cauchy em* X *então existe* $u \in X$ *tal que* $u_n \to u$.

iii. Quando X *for um espaço vetorial normado e completo chamaremos de espaço de Banach.*

Exemplo 1. *São espaços de Banach:*

a. Espaço $L^p(\Omega)$ *com* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*, ver Teorema 4.8 em [6].*

b. Os espaços de Sobolev $W^{1,n}(\Omega)$ *e* $W_0^{1,n}(\Omega)$*, ver Proposição 9.1 [6].*

c. O espaço $E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx < \infty \right\}$*, com o norma*

$$\|u\|_E = \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u^2 + V(x)u^2] dx, \quad u \in E.$$

Ver Proposição 1.2.1 *em [3].*

1.1.2 Espaço de Hilbert

Seja H um espaço vetorial real.

Definição 1.1.4. *Uma aplicação* $(\ ,\ ) : H \times H \to \mathbb{R}$ *é chamada de produto interno se:*

i. $(u, v) = (v, u)$ *para todo* $u, v \in H$*;*

ii. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$ *para todo* $u, v \in H$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

iii. $(u + w, v) = (u, v) + (w, v)$ *para quaisquer* $u, v, w \in H$*;*

iv. $(u, u) \geqslant 0$ *para todo* $u \in H$ *e* $(u, u) = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$.

Seja H é um espaço vetorial com produto interno $(\ ,\ )$. Para cada $u \in H$, definiremos

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

O resultado a seguir é chamado desigualdade de Cauchy-Schwarz e implica que a correspondência $u \in H \mapsto \sqrt{(u, u)}$ é uma norma para H.

Proposição 1.1.1. *Seja* H *um espaço vetorial com produto interno. Então,*

$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \,.\, \|v\|$$

para quaisquer $u, v \in H$.

Demonstração. Ver proposição 5.1.2. em [5]. □

Definição 1.1.5. *Um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com produto interno o qual induz a norma do espaço.*

Exemplo 2. *São espaços de Hilbert:*

a. O espaço $L^2(\Omega)$ *com*

$$(u, v) = \int_\Omega uv \, dx.$$

b. O espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ *com*

$$(u, v) = \int_\Omega [\nabla u \nabla v + uv] \, dx.$$

c. O espaço $E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u^2 dx < \infty \right\}$, *com o produto interno*

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u \nabla v + V(x) uv] dx, \quad u, v \in E.$$

1.1.3 Operadores lineares limitados

Sejam X e Y dois espaços de Banach.

Definição 1.1.6. *i. Uma aplicação* $I : X \to Y$ *é um operador linear se:*

$$I[\lambda u + \mu v] = \lambda \, Iu + \mu \, Iv, \ \text{ para quaisquer } u, v \in X, \ \text{ e } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

ii. Um operador linear $I : X \to Y$ *é limitado se:*

$$\|I\| := \sup_{\|u\|_X \leqslant 1} \|Iu\|_Y < \infty.$$

Na literatura é conhecido que todo operado linear limitado $I : X \to Y$ é contínuo. Quando $Y = \mathbb{R}$ em (ii) dizemos que I é um fucional linear limitado em X. Denotaremos X^* o dual de X, isto é, o conjunto de todos os funcionais $I : X \to \mathbb{R}$ lineares limitados. Além disso, escrevemos $\langle I, u \rangle$ para denotar o número real Iu onde $I \in X^*$ e $u \in X$.

Agora, suponha que H um espaço de Hilbert real com produto interno $(\ ,\ )$.

Teorema 1.1.1 (Teorema da Representação de Riez)**.** *Seja* $I \in \mathsf{H}^*$. *Então, existe um único* $u \in \mathsf{H}$ *tal que*

$$\langle I, v \rangle = (v, u), \quad \forall v \in \mathsf{H}.$$

Além disso, $\|I\|_{\mathsf{H}^*} = \|u\|_{\mathsf{H}}$.

Demonstração. Ver Teorema 5.5.2 em [5]. □

Suponha que X e Y são espaços de Banach.

Definição 1.1.7. *Um operado linear* $I : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ *é chamado de compacto se toda sequência limitada* (u_n) *em* X*, a sequência* (Iu_n) *tem subsequência convergente em* Y.

1.1.4 Convergência fraca

Seja X um espaço de Banach real.

Definição 1.1.8. *Diremos que uma sequência* $(u_n) \subset \mathsf{X}$ *converge fraco para* $u \in \mathsf{X}$*, e escrevemos* $u_n \rightharpoonup u$*, se*

$$\langle I, u_n \rangle \longrightarrow \langle I, u \rangle, \ \ \forall I \in \mathsf{X}^*.$$

É fácil verificar que se $u_n \to u$ em X então $u_n \rightharpoonup u$ em X.

Proposição 1.1.2. *i. Se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* X*, então* $(\|u_n\|)$ *é limitada e* $\|u\| \leqslant \liminf_n \|u_n\|$.

ii. Se $u_n \rightharpoonup u$ *em* X *e* $I_n \to I$ *em* X^**, então* $\langle I_n, u_n \rangle \to \langle I, u \rangle$.

Demonstração. Ver proposição 6.2.5 em [5]. □

Agora, assumiremos que H é um espaço de Hilbert real.

Proposição 1.1.3. *Seja* $(u_n) \subset \mathsf{H}$ *limitada. Então existe subsequência* $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ *e* $u \in \mathsf{H}$ *tal que*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u.$$

Demonstração. Ver proposição 6.5.4 em [5]. □

Proposição 1.1.4. *Seja* (u_n) *uma sequência em* H*. Se* $u_n \rightharpoonup u$ *e* $\|u_n\| \to \|u\|$*, então* $u_n \to u$.

Demonstração. Ver proposição 6.6.7 em [5]. □

1.2 Resultados Básicos

Os resultados a seguir constam em [6].

Proposição 1.2.1 (Lema de Fatou)**.** *Seja* (f_n) *uma sucessão de funções de* $L^1(\Omega)$ *satisfazendo:*

a. $f_n \geqslant 0$ *quase sempre, para todo* n*;*

b. $\sup\limits_n \int f_n < \infty$.

Para cada $x \in \Omega$*, seja* $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant +\infty$*. Então,* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Proposição 1.2.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *satisfazendo:*

a. $f_n(x) \to f(x)$ *quase sempre em* Ω*;*

b. existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *quase sempre em* Ω*, para todo* n*.*

Então, $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Proposição 1.2.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $q = p/(p-1)$*. Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Proposição 1.2.4. *Sejam* f_n *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $\|f_n - f\|_p \to 0$*. Então, existem subsequência* (f_{n_k}) *e função* $g \in L^p(\Omega)$ *tais que*

i. $|f_{n_k}(x)| \leqslant g(x)$ *quase sempre em* Ω*, para todo* k*;*

ii. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *quase sempre em* Ω*.*

Denotaremos $C_0(\Omega)$ o conjunto das funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto, ou seja, se $K \subset \Omega$ é compacto tem -se:

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) : \ f(x) = 0 \text{ se } x \in \Omega \setminus K\}$$

Proposição 1.2.5. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto. Então, o espaço* $C_0(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$ *para todo* p*,* $1 \leqslant p < \infty$.

Proposição 1.2.6. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tais que*

$$\int fu = 0, \ \ \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

O próximo resultado é conhecido como Lema de Brezis-Lieb para o espaço L^p. Entretando, o Lema de Brezis-Lieb vale em condições mais gerais, por exemplo, veja o Teorema 2 em [7].

Teorema 1.2.1 (Lema de Brezis-Lieb)**.** *Sejam* $(\Omega, \sum, \mu)$ *um espaço de medida e* (f_n) *uma sequência de funções mensuraveis com valores complexos em* $L^p = L^p(\Omega, \sum, \mu)$. *Suponha que* $f_n \to f$ *quase sempre e* $\|f_n\|_p \leqslant C < \infty$ *para todo* n *com* $0 < p < \infty$. *Então,*

$$\lim_{n\to\infty} \{\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p\} = \|f\|_p^p.$$

Demonstração. Ver em [7]. □

Proposição 1.2.7 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* a *e* b *números reais positivos. Se* $p, q > 1$ *tais que* $1/p + 1/q = 1$*, então*

$$a^{\frac{1}{p}} \, . \, b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b.$$

Demonstração. Ver Teorema 1.2.1 em [5]. □

A proposição a seguir é uma recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para o espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Proposição 1.2.8. *Seja* (u_n) *sequência em* $H^1(\mathbb{R}^2)$ *fortemente convergente. Então, existe uma subsequência* (u_{n_k}) *de* (u_n) *e* $g \in H^1(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $|u_{n_k}| \leqslant g(x)$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Ver Lema 2.7 em [14]. □

Proposição 1.2.9. *A inclusão* $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ *é contínua para todo* q*,* $n \leqslant q < \infty$.

Demonstração. Ver corolário 9.11 em [6]. □

1.3 Sequência de Palais-Smale

Definição 1.3.1. *Seja* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Dado* $c \in \mathbb{R}$, *diremos que* I *satisfaz a condição Palais-Smale no nível* c *(ou, simplesmente que* I *satisfaz* $(PS)_c$*) quando gozar da condição:*

Se existe uma sequência $(u_n) \subset X$ *tal que* $I(u_n) \to c$ *e* $I'(u_n) \to 0$ *(em* X^**), então* c *é um valor crítico (isto é, existe* $u \in X$ *tal que* $I(u) = c$ *e* $I'(u) = 0$*).*
Além disso, diremos que I *satisfaz a condição de Palais-Smale (ou, simplemente que* I *satisfaz* (PS)*) quando* I *gozar da condição* $(PS)_c$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

A seguir enuciaremos o Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz.

Teorema 1.3.1 (Teorema do Passo da Montanha)**.** *Sejam* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Suponha que:*

i. $I(0) = 0$;

ii. existem $\varepsilon, \gamma > 0$ *tais que* $I(u) \geqslant \gamma$ *para* $\|u\|_X = \varepsilon$;

iii. existe $u_0 \in X$ *tal que* $\|u_0\|_X > \varepsilon$ *e* $I(u_0) < \gamma$.

Sejam $\Gamma = \{g \in C([0,1], X) : g(0) = 0, g(1) = u_0\}$ *e*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \geqslant \gamma.$$

Se I *satisfaz* $(PS)_c$, *então* c *é um valor crítico de* I.

Demonstração. Ver Teorema 2.5.2 em [9]. □

O corolário a seguir é uma consequência direta do teorema anterior.

Corolário 1.3.1. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Suponha que:*

i. $I(0) = 0$;

ii. existem $\varepsilon, \gamma > 0$ *tais que* $I(u) \geqslant \gamma$ *para* $\|u\|_X = \varepsilon$;

iii. existe $u_0 \in X$ *tal que* $\|u_0\|_X > \varepsilon$ *e* $I(u_0) < \gamma$.

Se I *satisfaz* (PS), *então existe* $c \geqslant \gamma$ *e* $u \in X$ *tais que* $I(u) = c$ *e* $I'(u) = 0$.

O resultado a seguir é uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale.

Teorema 1.3.2. *Seja* X *um espaço de Banach real e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Suponha que existe uma vizinhança* U *de* 0 *em* X *e* $\delta > 0$ *que satisfazem as seguinte condições:*

i. $I(0) = 0$;

ii. $I(u) \geqslant \delta$ *na fronteira de* U;

iii. existe $e \notin U$ *tal que* $I(e) < \delta$.

Então, para o número c *definido por:*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \geqslant \delta$$

existe uma seqüência (u_n) *em* E *tal que*

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'(u_n) \to 0 \ \text{ em } \ X^*,$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1], X) : g(0) = 0, g(1) = e\}$.

Demonstração. Ver Teorema 5.1 [16]. □

Teorema 1.3.3 (Princípio Variacional de Ekeland)**.** *Sejam* (Γ, d) *um espaço métrico completo e* $I \in C(\Gamma, \mathbb{R})$ *limitada inferiormente. Se*

$$c = \inf_{u \in \Gamma} I(u),$$

então para cada $\varepsilon > 0$, *existe* $u_\varepsilon \in \Gamma$ *tal que*

$$c \leqslant I(u_\varepsilon) \leqslant c + \varepsilon,$$

e

$$I(u) - I(u_\varepsilon) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon) \geqslant 0,$$

para todo $u \in \Gamma$.

Demonstração. ver Lema 2.5.4 em [9]. □

Capítulo 2

Desigualdade de Trudinger-Moser e Variantes

2.1 Introdução

Nesse capítulo discutiremos a desigualdade de Trudinger-Moser clássica e duas extensões para $\Omega = \mathbb{R}^n$ com $n \geqslant 2$. No caso ilimitado discutiremos extensões devido a Cao [8] para $n = 2$ e J. M. do Ó [13] para $n \geqslant 3$ e ainda uma versão invariante por escalar apresentada por Adachi-Tanaka [1].

2.2 Desigualdade de Trudinger-Moser Clássica

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto limitado. Quando $n > p \geqslant 1$, a desigualdade clássica de Sobolev (ver em [6]) garante que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para $1 \leqslant q \leqslant p^* = \frac{pn}{n-p}$. Considerando Ω suave, logo existe uma constante positiva C tal que $\|u\|_q \leqslant C\|\nabla u\|_p$ para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Desta forma,

$$\sup_{\|\nabla u\|_p \leqslant 1} \int_\Omega |u|^q dx \leqslant \sup_{\|\nabla u\|_p \leqslant 1} C^q \|\nabla u\|_p^q \leqslant C^q.$$

Portanto,

$$\sup_{\|\nabla u\|_p \leqslant 1} \int_\Omega |u|^q dx < \infty \text{ para } 1 \leqslant q \leqslant p^*. \tag{2.1}$$

Além disso, o supremo em (2.1) não existe para $q > p^*$. No caso em que $n = p$, tem-se formalmente $p^* = \infty$. Assim, é natural esperar a inclusão $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, no entanto, esta não é verdadeira como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 3. *Seja* $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^n, n > 1$ *a bola aberta unitária centrada na origem. Defina* $u(x) = \ln\ln\frac{e}{|x|}$ *para* $x \neq 0$.

É claro que $u \notin L^\infty(B_1)$ porque u não é limitada próximo da origem. Por outro lado, é suficiente verificar $\|\nabla u\|_n < \infty$ para que $u \in W_0^{1,n}(B_1)$. É fácil verificar que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\frac{x_i}{\ln(\frac{e}{|x|})|x|^2}, \quad \text{com } i = 1, 2, ..., n.$$

Assim, integrando diretamente

$$\|\nabla u\|_n^n = \int_{B_1} |\nabla u|^n dx = \int_{B_1} |x|^{-n}(\ln\frac{e}{|x|})^{-n} dx = \omega_{n-1}\lim_{s\to 0}\int_s^1 (\ln\frac{e}{r})^{-n} r^{-1} dr,$$

onde ω_{n-1} é o área da superfície esférica unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Fazendo a mudança $w = \ln\frac{e}{r}$ temos

$$\|\nabla u\|_n^n = \omega_{n-1}\lim_{s\to\infty}\int_1^s w^{-n} dw = \omega_{n-1}\lim_{s\to\infty}\left.\frac{w^{1-n}}{1-n}\right|_1^s = \frac{\omega_{n-1}}{n-1}.$$

Neste contexto, surge o problema de encontrar uma função g com crescimento máximo possível tal que $g(u) \in L^1(\Omega)$ sempre que $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$. N. Trudinger [26] provou que o crescimento exponencial é permitido. Resutados similares foram obtidos de forma independente por Yudovich [27] e Pohozaev [25]. Mais tarde, Trudinger et al. [18] mostraram que o crescimento máximo permitido é exponencial. Introduzindo a técnica de simetrização de Schwarz, Moser [24] reduziu a questão para um problema unimensional e obteve resultados mais precisos. A seguir discutiremos o resultado obtido por Moser [24], conhecido atualmente como a *desigualdade de Trudinger-Moser clássica*. Enfatizamos que as estimativas para o caso crítico apresentadas aqui são devidos à Marshall [23] (ver também, A. Cianchi et al. [10]) e difere daquela apresentada originalmente por Moser [24].

Teorema 2.2.1 (Desigualdade de Trudinger-Moser Clássica)**.** *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado e* $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$, *com* $n \geqslant 2$. *Então para todo* $\alpha > 0$ *tem-se* $e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}} \in L^1(\Omega)$. *Além disso, existe constante* $C = C(n) > 0$ *tal que*

$$\sup_{\|\nabla u\|_n \leqslant 1}\int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx \begin{cases} < C|\Omega|, & se \quad \alpha \leqslant \alpha_n \\ = \infty, & se \quad \alpha > \alpha_n, \end{cases}$$

onde $|\Omega|$ *é a medida de Lebesgue de* Ω *em* $\mathbb{R}^n$, $\alpha_n = n\,\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$ *e* ω_{n-1} *é a área da superfície esférica unitária* $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos trocar u por $|u|$ e consideramos $u \geqslant 0$. Também, é suficiente provar o Teorema 2.2.1 para um conjunto de funções u que são densas na bola unitária de $W_0^{1,n}(\Omega)$. Portanto, podemos supor que u tem suporte compacto e é de classe $C^\infty(\Omega)$.

A técnica de simetrização de Schwarz (ver [19]) nos garante que para cada $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ existe uma função radial simétrica $u^* \in W_0^{1,n}(B_R)$ onde $B_R \subseteq \mathbb{R}^n$ é a bola centrada na origem e raio R com $|B_R| = |\Omega|$. Por construção,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : u^*(x) < \rho\}| = |\{x \in \Omega : u(x) < \rho\}|, \quad \text{para cada } \rho \geqslant 0.$$

Além disso, u^* é positiva e não-crescente definida em B_R e para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mensurável tal que $f \geqslant 0$ ou $f(u) \in L^1(\Omega)$ vale

$$\int_{B_R} f(u^*)dx = \int_\Omega f(u)dx.$$

Em particular,

$$\int_{B_R} e^{\alpha|u^*|^{\frac{n}{n-1}}}\,dx = \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}}\,dx. \tag{2.2}$$

Além disso, a desigualdade de Pólya-Szegö assegura que

$$\int_{B_R} |\nabla u^*|^n\,dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^n\,dx, \quad \forall u \in W_0^{1,n}(\Omega). \tag{2.3}$$

Usando (2.2) e (2.3), é suficiente mostrar que

$$\sup_{\|\nabla u^*\|_n \leqslant 1} \int_{B_R} e^{\alpha|u^*|^{\frac{n}{n-1}}}\,dx \begin{cases} \leqslant C\,|\Omega|, & \text{se } \alpha \leqslant \alpha_n \\ = \infty, & \text{se } \alpha > \alpha_n. \end{cases} \tag{2.4}$$

Defina $w(t) = n^{\frac{n-1}{n}}\omega_{n-1}^{\frac{1}{n}}u^*(x)$ onde $e^{-t} = |x|^n/R^n$. Então $w \in C^1(0,+\infty)$, $w(0) = 0$, $w'(t) \geqslant 0$. Além disso, um cálculo direto usando o Teorema de Mudança de Variável mostra que

$$\int_0^\infty w'(t)^n dt = \int_{B_R} |\nabla u^*|^n dx \tag{2.5}$$

e

$$\int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{\alpha_n}w(t)^{\frac{n}{n-1}}-t}dt = |\Omega|^{-1}\int_{B_R} e^{\alpha|u^*|^{\frac{n}{n-1}}}dx. \tag{2.6}$$

De (2.2) e (2.6), para mostrar que $e^{\alpha u^{\frac{n}{n-1}}} \in L^1(\Omega)$ para todo $\alpha > 0$ é suficiente provar que

$$\int_0^\infty e^{\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}} - t} dt < \infty, \text{ com } \beta = \frac{\alpha}{\alpha_n}. \tag{2.7}$$

De fato, para todo $\varepsilon > 0$ existe $T(\varepsilon) = T$ tal que

$$\int_T^\infty w'(t)^n dt < \varepsilon.$$

Para todo $t > T$, teremos

$$\begin{aligned} w(t) - w(T) &= \int_T^t w'(s) ds \\ &\leqslant (t - T)^{\frac{n-1}{n}} \Big(\int_T^t w'(s)^n ds \Big)^{\frac{1}{n}} \\ &< (t - T)^{\frac{n-1}{n}} \varepsilon^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{w(t)}{t^{\frac{n-1}{n}}} < \frac{w(T)}{t^{\frac{n-1}{n}}} + \varepsilon^{\frac{1}{n}} (1 - \frac{T}{t})^{\frac{n-1}{n}}.$$

Fazendo $t \to \infty$ e usando que ε é arbitrário concluímos que $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{w(t)}{t^{\frac{n-1}{n}}} = 0$. Assim, $\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}} < \frac{t}{2}$ para todo $t \geqslant t_0$ onde t_0 é suficientemente grande. Desta forma,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}} - t} dt &= \int_0^{t_0} e^{\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}} - t} dt + \int_{t_0}^\infty e^{\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}} - t} dt \\ &\leqslant \int_0^{t_0} C dt + \int_{t_0}^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt \\ &= t_0 C - 2e^{-\frac{t}{2}} \Big|_{t_0}^\infty \\ &= t_0 C + 2e^{-\frac{t_0}{2}}, \end{aligned}$$

onde C é uma constante que limita a função contínua $e^{\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}} - t}$ no intervalo $[0, t_0]$. Isso prova (2.7).

De (2.5) e (2.6) reduzimos o problema (2.4) para a análise (com $\beta = \frac{\alpha}{\alpha_n}$)

$$\sup_{w \in H} \int_0^\infty e^{\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}} - t} dt \begin{cases} \leqslant C, \text{ se } & \beta \leqslant 1 \\ \infty, \text{ se } & \beta > 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $H = \{w \in C^1[0, +\infty) \; : \; w(0) = 0, \int_0^\infty w'(t)^n dt \leqslant 1, w' \geqslant 0\}$.

O caso $\beta < 1$ segue pelo Teorema Fundamental do Cálculo e desigualdade de Hölder. De fato,

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^t w'(s)ds \\ &\leqslant \left(\int_0^t 1ds\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_0^t w'(s)^n ds\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant t^{\frac{n-1}{n}} 1^{\frac{1}{n}} \\ &= t^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_0^\infty e^{\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}} - t} dt \leqslant \int_0^\infty e^{(\beta-1)t} dt = \left.\frac{e^{(\beta-1)t}}{\beta - 1}\right|_0^\infty = \frac{1}{1-\beta}.$$

O caso $\beta = 1$ não é tão simples. Fazendo uso da definição de integral em [21, pág.14], temos:

$$\int_0^\infty e^{w(t)^{\frac{n}{n-1}} - t} dt = \int_0^\infty |\{t \in (0, \infty) : e^{w(t)^{\frac{n}{n-1}} - t} \geqslant \lambda\}| d\lambda. \tag{2.9}$$

Afirmação 1. *Para cada função mensurável g: (0, ∞) $\longrightarrow \mathbb{R}$ segue que*

$$\int_0^\infty e^{-g(s)} ds = \int_{-\infty}^\infty |\{s > 0 : g(s) \leqslant t\}| e^{-t} dt.$$

De fato, pela definição de integral teremos,

$$\int_0^\infty e^{-g(s)} ds = \int_0^\infty |\{s > 0 : e^{-g(s)} \geqslant t\}| dt.$$

Observemos que para $t > 0$,

$$e^{-g(s)} \geqslant t \iff -g(s) \geqslant \ln t \iff g(s) \leqslant \ln \frac{1}{t}.$$

Logo,

$$\{s > 0 : e^{-g(s)} \geqslant t\} = \{s > 0 : g(s) \leqslant \ln \frac{1}{t}\}.$$

Portanto,

$$\int_0^\infty e^{-g(s)} ds = \int_0^\infty |\{s > 0 : g(s) \leqslant \ln \frac{1}{t}\}| dt. \tag{2.10}$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = \ln \frac{1}{t}$ para cada $t \in (0, \infty)$, obteremos

$$\int_0^\infty |\{s > 0 : g(s) \leqslant \ln \frac{1}{t}\}| dt = \int_{-\infty}^\infty |\{s > 0 : g(s) \leqslant \tau\}| e^{-\tau} d\tau. \tag{2.11}$$

De (2.10) e (2.11) segue a Afirmação 1.

Pela Afirmação 1 podemos reescrever (2.9) como

$$\int_0^\infty e^{w(t)^{\frac{n}{n-1}}-t}dt = \int_{-\infty}^\infty |E_\lambda|e^{-\lambda}d\lambda, \tag{2.12}$$

onde $E_\lambda = \{t > 0 : t - w(t)^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \lambda\}$. Note que

$$w(t) \leqslant t^{\frac{n-1}{n}} \;\Leftrightarrow\; t - w(t)^{\frac{n}{n-1}} \geqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Então $E_\lambda = \varnothing$ se $\lambda < 0$. Portanto, podemos reescrever (2.12) como

$$\int_0^\infty e^{w(t)^{\frac{n}{n-1}}-t}dt = \int_0^\infty |E_\lambda|e^{-\lambda}d\lambda. \tag{2.13}$$

Afirmação 2. *Para cada* $\lambda > 0$ *temos* $|E_\lambda| \leqslant (c_n + 2)\lambda$*, onde* $c_n = \dfrac{7}{1-(1+2^{1-n})^{\frac{1}{1-n}}}$.

Analisaremos dois casos.

Caso 1: se $E_\lambda \subseteq [0, 2\lambda]$, então

$$|E_\lambda| = \int_{E_\lambda} 1 d\lambda \leqslant \int_0^{2\lambda} 1 d\lambda = 2\lambda.$$

Daí, $|E_\lambda| \leqslant (c_n + 2)\lambda$.

Caso 2: se $E_\lambda \nsubseteq [0, 2\lambda]$ temos a decomposição $E_\lambda = \big(E_\lambda \cap [0, 2\lambda]\big) \bigcup \big(E_\lambda \cap \{t > 0 : t > 2\lambda\}\big)$. Assim,

$$|E_\lambda| \leqslant \int_{E_\lambda\cap[0,2\lambda]} 1 d\lambda + \int_{E_\lambda\cap\{t>0:t>2\lambda\}} 1 d\lambda.$$

Portanto, é suficiente mostramos que $s_2 - s_1 \leqslant c_n\lambda$ para todo s_1, $s_2 \in E_\lambda$ tal que $2\lambda \leqslant s_1 < s_2$.

Com efeito, pela definição de E_λ e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} s_1 - \lambda \leqslant w(s_1)^{\frac{n}{n-1}} &\\ &= \left(\int_0^{s_1} w'(r)dr\right)^{\frac{n}{n-1}} \\ &\leqslant s_1\left(\int_0^{s_1} w'(r)^n dr\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\leqslant s_1\left(1 - \int_{s_1}^\infty w'(r)^n dr\right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Dividindo por s_1, obtemos

$$1 - \frac{\lambda}{s_1} \leqslant \left(1 - \int_{s_1}^\infty w'(r)^n dr\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Daí, segue que

$$\int_{s_1}^{\infty} w'(r)^n dr \leqslant 1 - \big(1 - \frac{\lambda}{s_1}\big)^{n-1}. \tag{2.14}$$

Pela definição de E_λ, a desigualdade de Hölder e (2.14), temos

$$\begin{aligned}
s_2 - \lambda &\leqslant \left(\int_0^{s_2} w'(r)dr\right)^{\frac{n}{n-1}} \\
&\leqslant \left[s_1^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_0^{s_1} w'(r)^n dr\right)^{\frac{1}{n}} + (s_2 - s_1)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{s_1}^{s_2} w'(r)^n dr\right)^{\frac{1}{n}} \right]^{\frac{n}{n-1}} \\
&\leqslant \left[s_1^{\frac{n-1}{n}} + (s_2 - s_1)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{s_1}^{\infty} w'(r)^n dr\right)^{\frac{1}{n}} \right]^{\frac{n}{n-1}} \\
&\leqslant \left(s_1^{\frac{n-1}{n}} + (s_2 - s_1)^{\frac{n-1}{n}} \big(1 - (1 - \frac{\lambda}{s_1})^{n-1}\big)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{s_2}{s_1} - \frac{\lambda}{s_1} \leqslant \left[1 + \big(\frac{s_2}{s_1} - 1\big)^{\frac{n-1}{n}} \big(1 - (1 - \frac{\lambda}{s_1})^{n-1}\big)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{n}{n-1}},$$

ou equivalentemente,

$$M(1-z) + z \leqslant \left[1 + M^{\frac{n-1}{n}} (1-z)^{\frac{n-1}{n}} (1 - z^{n-1})^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{n}{n-1}}, \tag{2.15}$$

onde $M = \frac{s_2 - s_1}{\lambda}$ e $z = 1 - \frac{\lambda}{s_1}$. Note que $\frac{1}{2} \leqslant z < 1$, porque $s_1 > 2\lambda$.
A convexidade da função $\psi(\tau) = \tau^{\frac{n}{n-1}}$ nos garante que

$$\psi(x\theta + (1-\theta)y) \leqslant \psi(x)\theta + \psi(y)(1-\theta), \text{ para todo } \theta \in [0,1].$$

Escolhendo $x = \theta^{-1} M^{\frac{n-1}{n}} (1-z)^{\frac{n-1}{n}} (1 - z^{n-1})^{\frac{1}{n}}$ e $y = (1-\theta)^{-1}$ teremos,

$$\left[1 + M^{\frac{n-1}{n}} (1-z)^{\frac{n-1}{n}} (1 - z^{n-1})^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{n}{n-1}} \leqslant (1-\theta)^{-\frac{1}{n-1}} + \theta^{-\frac{1}{n-1}} M(1-z)(1-z^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}. \tag{2.16}$$

De (2.15) e (2.16), segue que:

$$M(1-z) + z \leqslant (1-\theta)^{-\frac{1}{n-1}} + \theta^{-\frac{1}{n-1}} M(1-z)(1-z^{n-1})^{\frac{1}{n-1}},$$

e portanto,

$$M \leqslant \frac{(1-\theta)^{-\frac{1}{n-1}} - z}{(1-z)\big[1 - \theta^{-\frac{1}{n-1}} (1 - z^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\big]}.$$

Fazendo $\theta = 1 - z^{2(n-1)}$, temos

$$\begin{aligned}
M &\leqslant \frac{z^{-2} - z}{(1-z)\left[1 - (1 - z^{2(n-1)})^{\frac{1}{1-n}}(1 - z^{n-1})^{-\frac{1}{1-n}}\right]} \\
&= \frac{(1-z)(z^{-2} + z^{-1} + 1)}{(1-z)\left[1 - \left(\frac{1-z^{2(n-1)}}{1-z^{n-1}}\right)^{\frac{1}{1-n}}\right]} \\
&= \frac{z^{-2} + z^{-1} + 1}{1 - (1 + z^{n-1})^{\frac{1}{1-n}}} \\
&\leqslant c_n.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos a Afirmação 2.

Pela Afirmação 2 e (2.13), temos

$$\int_0^\infty |E_\lambda| e^{-\lambda} \leqslant (c_n + 2) \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda} d\lambda = c_n + 2.$$

Então,

$$\int_0^\infty e^{w(t)^{\frac{n}{n-1}} - t} dt \leqslant c_n + 2.$$

Se $\beta > 1$ mostraremos que o supremo em (2.8) não existe. Para isso usaremos uma sequência de funções de Moser. Sejam $\eta_l(s) = \min\{s, 1\}$ e $w_l(t) = l^{\frac{n-1}{n}} \eta_l(\frac{t}{l})$ com $l > 0$. Temos,

a) $w_l(0) = 0$, pois $\eta_l(0) = 0$;

b) $w_l'(t) \geqslant 0$, pois $w_l'(t) = l^{-\frac{1}{n}} \eta'(\frac{t}{l})$ para todo $l > 0$;

c) $\int_0^\infty w_l'(t)^n dt = \int_0^\infty l^{-1} \eta_l'(\frac{t}{l})^n dt = \int_0^l l^{-1} dt = 1$, para todo $l > 0$.

Então, $w_l \in H$. Além disso,

$$\int_0^\infty e^{\beta w(t_l)^{\frac{n}{n-1}} - t} dt = \int_0^\infty e^{\beta l \eta_l(\frac{t}{l}) - t} dt > \int_l^\infty e^{\beta l - t} dt = e^{(\beta - 1) l}.$$

Fazendo $l \to \infty$ temos $e^{(\beta-1)l} \to \infty$ já que $\beta > 1$. Portanto, o supremo não existe. □

Em comparação entre o caso Sobolev e a desigualdade de Trudinger-Moser, podemos chamar o número real α_n de *constante crítica* no caso Trudinger-Moser.

2.3 Desigualdade de Trudinger-Moser: Caso Ilimitado

Iniciaremos a abordagem da desigualdade de Trudinger-Moser para domínios ilimitados. Cao [8], J. M. do Ó [13] e Adachi-Tanaka [1] propõem *desigualdades do tipo Trudinger-Moser* quando $\Omega = \mathbb{R}^n$. Para simplificar a notação, denotaremos

$$S_{n-2}(\alpha, u) = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\alpha^j}{j!} |u|^{\frac{n}{n-1}j}, \text{ com } \alpha > 0 \text{ e } u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n).$$

O resultado a seguir se encontra em [4] e usaremos no decorrer do texto.

Lema 2.3.1 (Lema Radial). *Seja* $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *com* $1 \leqslant p < \infty$. *Se* u *é uma função radial não-crescente, isto é,* $0 \leqslant u(x) \leqslant u(y)$ *se* $|x| \geqslant |y|$, *então*

$$|u(x)| \leqslant |x|^{-\frac{n}{p}} \left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} \|u\|_p, \quad \forall x \neq 0.$$

Demonstração. Para cada $r > 0$, onde $r := |x|$, temos:

$$\begin{aligned} \|u\|_p^p &\geqslant \int_{B_r} u^p \\ &= \omega_{n-1} \int_0^r [u(s)]^p s^{n-1} ds \\ &\geqslant \omega_{n-1} [u(r)]^p \int_0^r s^{n-1} ds \\ &= \omega_{n-1} [u(r)]^p \frac{r^n}{n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\|_p \geqslant r^{\frac{n}{p}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{p}} u(r).$$

O lema segue da desigualdade acima. □

O resultado a seguir é devido J. M. do Ó [13].

Teorema 2.3.1. *Seja* $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ *com* $n \geqslant 2$. *Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[e^{\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}} - S_{n-2}(\alpha, u) \right] < \infty, \ \forall \alpha > 0. \tag{2.17}$$

Além disso, se $\|\nabla u\|_n^n \leqslant 1, \|u\|_n \leqslant M < \infty$ *e* $\alpha < \alpha_n$ *então existe constante* $C = C(n, M, \alpha)$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[e^{\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}} - S_{n-2}(\alpha, u) \right] \leqslant C. \tag{2.18}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos trocar u por $|u|$ e considerar $u \geqslant 0$. Dada $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, seja u^* a simetrizada de Schwarz associada a função u. Então $u^* \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^n \, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^n \, dx, \tag{2.19}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} G\big(u^*(x)\big) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} G\big(u(x)\big) \, dx, \tag{2.20}$$

onde $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é contínua e crescente tal que $G(0) = 0$. Em particular,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big[e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}} - S_{n-2}(\alpha, u)\Big] \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Big[e^{\alpha|u^*|^{\frac{n}{n-1}}} - S_{n-2}(\alpha, u^*)\Big] \, dx.$$

Seja $r > 1$ um número real a ser determinado. Podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Big[e^{\alpha|u^*|^{\frac{n}{n-1}}} - S_{n-2}(\alpha, u^*)\Big] \, dx &= \int_{|x|<r} \Big[e^{\alpha|u^*|^{\frac{n}{n-1}}} - S_{n-2}(\alpha, u^*)\Big] \, dx \\
&\quad + \int_{|x|\geqslant r} \Big[e^{\alpha|u^*|^{\frac{n}{n-1}}} - S_{n-2}(\alpha, u^*)\Big] \, dx \\
&\leqslant \underbrace{\int_{|x|<r} e^{\alpha|u^*|^{\frac{n}{n-1}}} \, dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{|x|\geqslant r} \Big[e^{\alpha|u^*|^{\frac{n}{n-1}}} - S_{n-2}(\alpha, u^*)\Big] \, dx}_{\mathrm{II}}.
\end{aligned}$$

Reduzimos o problema para a analise das integrais em (I) e (II).

Estimando (I): precisaremos de duas desigualdedes elementares.

d.1 Para todo $u, v \geqslant 0$ tem-se que $(u+v)^{\frac{n}{n-1}} \leqslant u^{\frac{n}{n-1}} + Au^{\frac{1}{n-1}}v + v^{\frac{n}{n-1}}$.

Com efeito, se $u = 0$ ou $v = 0$ nada a fazer. Suponhamos que $v \neq 0$ e seja $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \dfrac{(t+1)^{\frac{n}{n-1}} - t^{\frac{n}{n-1}} - 1}{t^{\frac{1}{n-1}}}$. Note que existe constante $A = A(n) > 0$ tal que $|h(t)| \leqslant A$ $\forall t > 0$, pois h é contínua, e $\lim\limits_{t\to 0} h(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)$ existem. Então,

$$\begin{aligned}
At^{\frac{1}{n-1}} &\geqslant (t+1)^{\frac{n}{n-1}} - t^{\frac{n}{n-1}} - 1 \\
&= v^{-\frac{n}{n-1}}(tv+v)^{\frac{n}{n-1}} - t^{\frac{n}{n-1}} - 1.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $v^{\frac{n}{n-1}}$ obtemos $A(tv)^{\frac{1}{n-1}}v \geqslant (tv+v)^{\frac{n}{n-1}} - (tv)^{\frac{n}{n-1}} - v^{\frac{n}{n-1}}$ e fazendo $u = tv$ segue (d.1).

d.2 Se $\gamma, \gamma' > 0$ tais que $\gamma + \gamma' = 1$, então para qualquer $\varepsilon > 0$ tem-se que

$$u^{\gamma}v^{\gamma'} \leqslant \varepsilon u + \varepsilon^{-\frac{\gamma}{\gamma'}} v \quad \forall u, v \geqslant 0.$$

Com efeito, pela desigualdade de Young temos,

$$ab \leqslant \gamma a^{\frac{1}{\gamma}} + \gamma' b^{\frac{1}{\gamma'}}, \quad \forall a, b \geqslant 0.$$

Fazendo $a = (\varepsilon u)^{\gamma}$, $b = \varepsilon^{-\gamma} v^{\gamma'}$ e notando que $\gamma' < 1$ segue (d.2).

Seja $v(x) = u^*(x) - u^*(rx_0)$ onde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $|x_0| = 1$. Note que se x pertence a fronteira de B_r então $v(x) = 0$ porque u^* é radial. Portanto, $v \in W_0^{1,n}(B_r)$. Por (d.1) e (d.2), temos

$$|u^*(x)|^{\frac{n}{n-1}} = |v(x) + u^*(rx_0)|^{\frac{n}{n-1}} \leqslant u^*(rx_0)^{\frac{n}{n-1}} + Au^*(rx_0)v(x)^{\frac{1}{n-1}} + v(x)^{\frac{n}{n-1}}$$

e

$$\begin{aligned} u^*(rx_0)v(x)^{\frac{1}{n-1}} &= \left(u^*(rx_0)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(v(x)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant \left(\frac{\varepsilon}{A}\right)^{\frac{1}{1-n}} u^*(rx_0)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{\varepsilon}{A}\right) v^{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |u^*(x)|^{\frac{n}{n-1}} &\leqslant u^*(rx_0)^{\frac{n}{n-1}} + \varepsilon^{\frac{1}{1-n}} A^{-\frac{n}{1-n}} u^*(rx_0)^{\frac{n}{n-1}} + \varepsilon v(x)^{\frac{n}{n-1}} + v(x)^{\frac{n}{n-1}}. \\ &= K(\varepsilon, n) u^*(rx_0)^{\frac{n}{n-1}} + (1+\varepsilon) v(x)^{\frac{n}{n-1}}, \end{aligned}$$

onde $K(\varepsilon, n) = 1 + \varepsilon^{\frac{1}{1-n}} A^{\frac{n}{n-1}}$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{|x|<r} e^{\alpha |u^*|^{\frac{n}{n-1}}}\, dx &\leqslant \int_{|x|<r} e^{K(\varepsilon,n)u^*(rx_0)^{\frac{n}{n-1}} + (1+\varepsilon)v(x)^{\frac{n}{n-1}}}\, dx \\ &= e^{K(\varepsilon,n)u^*(rx_0)^{\frac{n}{n-1}}} \int_{|x|<r} e^{(1+\varepsilon)v(x)^{\frac{n}{n-1}}}\, dx. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Pelo Teorema 2.2.1 segue que

$$\int_{|x|<r} e^{\alpha |u^*|^{\frac{n}{n-1}}}\, dx < \infty, \quad \forall u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \text{ e } \forall \alpha > 0. \tag{2.22}$$

Escolha $\varepsilon > 0$ tal que $(1+\varepsilon)\alpha < \alpha_n$ e pelo Teorema 2.2.1 temos

$$\int_{|x|<r} e^{(1+\varepsilon)v(x)^{\frac{n}{n-1}}}\, dx < |B_r| C.$$

Combinando com (2.21) temos

$$\begin{aligned} \int_{|x|<r} e^{\alpha |u^*|^{\frac{n}{n-1}}}\, dx &\leqslant C \frac{\omega_{n-1} r^n}{n} e^{K(\varepsilon,n)u^*(rx_0)^{\frac{n}{n-1}}} \\ &\leqslant C \frac{\omega_{n-1} r^n}{n} e^{\left[\left(\frac{nM^n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{K(\varepsilon,n)}{r^{\frac{n}{n-1}}}\right]}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

para toda $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|\nabla u\|_n^n \leqslant 1$ e $\|u\|_n \leqslant M$, onde a última desigualdade foi obtida usando o Lema Radial o qual garante

$$|u^*(x)| \leqslant |x|^{-1}\Big(\frac{n}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{1}{n}}\|u^*\|_n, \quad \forall x \neq 0.$$

Estimando (II): pela definição de S_{n-2} e a expansão em série de Taylor da função exponencial, temos

$$\int_{|x|\geqslant r}\Big[e^{\alpha|u^*|^{\frac{n}{n-1}}} - S_{n-2}(\alpha, u^*)\Big]\,dx = \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\int_{|x|\geqslant r}|u^*|^n\,dx + \sum_{j=n}^{\infty}\frac{\alpha^j}{j!}\int_{|x|\geqslant r}|u^*|^{\frac{n}{n-1}j}\,dx. \tag{2.24}$$

Note que

$$\int_{|x|\geqslant r}|u^*|^n\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|u^*|^n\,dx = \|u^*\|_n^n < \infty, \tag{2.25}$$

já que $u^* \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$. Agora, estimaremos

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant r}\frac{1}{|x|^{\frac{n}{n-1}j}}dx &= \omega_{n-1}\int_r^{\infty}\frac{s^{n-1}}{s^{\frac{n}{n-1}j}}ds\\ &= \left(\frac{\omega_{n-1}}{\frac{n}{n-1}j - n}\right)r^{n-\frac{n}{n-1}j}\\ &\leqslant \omega_{n-1}r^{n-\frac{n}{n-1}j}, \quad \forall j \geqslant n.\end{aligned}$$

Usando o Lema Radial, temos

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{\alpha^j}{j!}\int_{|x|\geqslant r}|u^*|^{\frac{n}{n-1}j}\,dx \leqslant \omega_{n-1}r^n\sum_{j=n}^{\infty}\frac{\alpha^j}{j!}\left[\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\|u^*\|_n}{r}\right)\right]^{\frac{n}{n-1}j}. \tag{2.26}$$

Tomando $r > \alpha^{\frac{n-1}{n}}\|u^*\|_n\big(\frac{n}{\omega_{n-1}}\big)^{\frac{1}{n}}$ temos $\sum_{j=n}^{\infty}\frac{\alpha^j}{j!}\left[\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\|u^*\|_n}{r}\right)\right]^{\frac{n}{n-1}j} < \infty$ para todo $\alpha > 0$. Portanto, a existência da integral em (2.17) segue de (2.23), (2.24), (2.25) e (2.26). Por fim, desde que $\|\nabla u\|_n \leqslant 1$, $\|u\|_n \leqslant M$ e $\alpha < \alpha_n$, escolha $r = M\big(\frac{n}{\omega_{n-1}}\big)^{\frac{1}{n}}$. Temos

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{\alpha^j}{j!}\left[\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\|u^*\|_n}{r}\right)\right]^{\frac{n}{n-1}j} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha^j}{j!}\left[\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\|u^*\|_n}{r}\right)\right]^{\frac{n}{n-1}j} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha_n)^j}{j!} = e^{\alpha_n}.$$

Logo

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{\alpha^j}{j!}\int_{|x|\geqslant r}|u^*|^{\frac{n}{n-1}j}\,dx \leqslant Mn^n e^{\alpha_n}. \tag{2.27}$$

Então, de (2.23), (2.24) e (2.27) segue (2.18). $\square$

2.4 Desigualdade de Trudinger-Moser Invariante Por Escalar

Adachi-Tanaka [1] mostra uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser no $\mathbb{R}^n$ a qual tem a propriedade invariante por escalar. Para simplificar a notação, denotaremos

$$\Psi_n(\xi) = e^{\xi} - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\xi^j}{j!}.$$

Teorema 2.4.1 (Desigualdade do Tipo Trudinger-Moser Invariante Por Escalar)**.** *Se $n \geqslant 2$, então para cada $\alpha \in [0, \alpha_n)$ existe uma constante positiva C_α tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_n\left(\alpha\Big(\frac{|u(x)|}{\|\nabla u\|_n}\Big)^{\frac{n}{n-1}}\right)dx \leqslant C_\alpha \frac{\|u\|_n^n}{\|\nabla u\|_n^n}, \text{ para } u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}. \tag{2.28}$$

Demonstração. Usando o argumento de simetrização é suficiente provar (2.28) para funções que são não-negativas, decrescente, radialmente simétrica e com suporte compacto. Assim, podemos tomar $u(|x|) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u \geqslant 0$, $u' \leqslant 0$.
Seja $w : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $w(t) = n^{\frac{n-1}{n}} \omega_{n-1}^{\frac{1}{n}} u(e^{-\frac{t}{n}})$ com $|x|^n = e^{-t}$. Então w satisfaz:

1. $w(t) \geqslant 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, já que u é não-negativa.

2. $w'(t) \geqslant 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, já que $w'(t) = -n^{-\frac{1}{n}} \omega_{n-1}^{\frac{1}{n}} u'(e^{-\frac{t}{n}}) e^{-\frac{t}{n}}$ e u é não-decrescente.

3. Existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $w(t_0) = 0$, já que u tem suporte compacto.

4. $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^n dx = \int_{-\infty}^{\infty} |w'(t)|^n dt$.
   De fato,
   $$\int_{-\infty}^{\infty} |w'(t)|^n dt = \omega_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left|u'(e^{-\frac{t}{n}})\right|^n n^{-1} e^{-t} dt.$$
   Fazendo $s = e^{-\frac{t}{n}}$ implica que $-s^{n-1} ds = n^{-1} e^{-t} dt$. Então,
   $$\omega_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left|u'(e^{-\frac{t}{n}})\right|^n n^{-1} e^{-t} dt = \omega_{n-1} \int_0^{\infty} |u'(s)|^n s^{n-1} ds = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^n dx.$$

5. $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_n\big(\alpha u^{\frac{n}{n-1}}\big) dx = \frac{\omega_{n-1}}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n\big(\frac{\alpha}{\alpha_n} w(t)^{\frac{n}{n-1}}\big) e^{-t} dt$.
   De fato,
   $$\frac{\omega_{n-1}}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n\big(\frac{\alpha}{\alpha_n} w(t)^{\frac{n}{n-1}}\big) e^{-t} dt = \frac{\omega_{n-1}}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n\big(\alpha u(e^{-\frac{t}{n}})^{\frac{n}{n-1}}\big) e^{-t} dt.$$

Fazendo $s = e^{-\frac{t}{n}}$ implica que $-s^{n-1}ds = n^{-1}e^{-t}dt$. Então,

$$\frac{\omega_{n-1}}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_n\big(\alpha u(e^{-\frac{t}{n}})^{\frac{n}{n-1}}\big)e^{-t}dt = \omega_{n-1}\int_0^{\infty}\Psi_n\big(\alpha u(s)^{\frac{n}{n-1}}\big)s^{n-1}ds = \int_{\mathbb{R}^n}\Psi_n\big(\alpha u^{\frac{n}{n-1}}\big)dx.$$

6. $\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(x)|^n dx = \dfrac{1}{n^n}\int_{-\infty}^{\infty}|w(t)|^n e^{-t}dt$.

De fato,

$$\frac{1}{n^n}\int_{-\infty}^{\infty}|w(t)|^n e^{-t}dt = \omega_{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}|u(e^{-\frac{t}{n}})|^n n^{-1}e^{-t}dt.$$

Fazendo $s = e^{-\frac{t}{n}}$ implica que $-s^{n-1}ds = n^{-1}e^{-t}dt$. Então,

$$\omega_{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}|u(e^{-\frac{t}{n}})|^n n^{-1}e^{-t}dt = \omega_{n-1}\int_0^{\infty}|u(s)|^n s^{n-1}ds = \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(x)|^n dx.$$

Dos itens 4, 5 e 6 é suficiente mostrar que para todo $\beta \in (0,1)$ existe uma constante $C_\beta > 0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_n\big(\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}}\big)e^{-t}dt \leqslant C_\beta\int_{-\infty}^{\infty}|w(t)|^n e^{-t}dt \tag{2.29}$$

para toda função $w(t)$ satisfazendo os itens 1, 2, 3 e a condição

$$\|\nabla w\|_n^n = \int_{-\infty}^{\infty}|w'(t)|^n dt = 1. \tag{2.30}$$

Seja $w(t)$ satisfazendo os itens 1, 2, 3 e (2.30) e considere

$$T_0 = \sup\{t \in \mathbb{R} : w(t) \leqslant 1\} \in (-\infty, \infty].$$

Note que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_n\big(\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}}\big)e^{-t}dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{T_0}\Psi_n\big(\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}}\big)e^{-t}dt}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{T_0}^{\infty}\Psi_n\big(\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}}\big)e^{-t}dt}_{\mathrm{II}}. \tag{2.31}$$

Faremos estimativas em (I) e (II) para a conclusão de (2.29).

No caso $t \in (-\infty, T_0]$. Usando que u é contínua, $w(T_0) \leqslant 1$ e w sendo não-decrescente segue que $w(t) \in [0,1]$. Observando que $\Psi(\xi) = \xi^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{\xi^j}{(j+n-1)!}$, podemos achar $k_n > 0$ tal que $\Psi(\xi) \leqslant k_n\xi^{n-1}$ para todo $\xi \in [0,1]$. Escolhendo $\xi = \beta w(t)^{\frac{n}{n-1}}$, logo $\Psi_n(\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}}) \leqslant k_n\beta^{n-1}w(t)^n$. Assim,

$$\int_{-\infty}^{T_0}\Psi_n\big(\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}}\big)e^{-t}dt \leqslant k_n\int_{-\infty}^{T_0}w(t)^n e^{-t}dt. \tag{2.32}$$

No caso $t \in [T_0, \infty)$. Pela definição T_0 segue que $w(T_0) = 1$ e para $t \geqslant T_0$ temos

$$\begin{aligned} w(t) &= w(T_0) + \int_{T_0}^{t} w'(s)ds \\ &\leqslant 1 + (t - T_0)^{\frac{n-1}{n}} \Big(\int_{T_0}^{\infty} w'(s)ds\Big)^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant 1 + (t - T_0)^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Note que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$1 + s^{\frac{n-1}{n}} \leqslant ((1+\varepsilon)s + C_\varepsilon)^{\frac{n-1}{n}}, \ \forall\ s \geqslant 0.$$

Assim, fazendo $s = t - T_0$ segue

$$|w(t)|^{\frac{n}{n-1}} \leqslant (1+\varepsilon)(t - T_0) + C_\varepsilon, \ \forall\ t \geqslant T_0.$$

Desde que $\beta \in (0,1)$ e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\beta(1+\varepsilon) < 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{\infty} \Psi_n\big(\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}}\big)e^{-t}dt &\leqslant \int_{-\infty}^{T_0} e^{\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}} - t}dt \\ &\leqslant \int_{T_0}^{\infty} e^{\beta[(1+\varepsilon)(t-T_0)+C_\varepsilon]-t}dt \\ &= e^{\beta C_\varepsilon - T_0} \int_{T_0}^{\infty} e^{[\beta(1+\varepsilon)-1](t-T_0)} \\ &= \frac{e^{\beta C_\varepsilon - T_0}}{1 - \beta(1+\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Por outro lado, $t \geqslant T_0$ implica que $w(t) \geqslant 1$. Assim,

$$\int_{T_0}^{\infty} |w(t)|^n e^{-t}dt \geqslant \int_{T_0}^{\infty} e^{-t}dt = e^{-T_0}. \tag{2.34}$$

De (2.33) e (2.34) concluímos que

$$\int_{T_0}^{\infty} \Psi_n\big(\beta w(t)^{\frac{n}{n-1}}\big)e^{-t}dt \leqslant \frac{e^{\beta C_\varepsilon}}{1 - \beta(1+\varepsilon)} \int_{T_0}^{\infty} |w(t)|^n e^{-t}dt. \tag{2.35}$$

De (2.31), (2.32), (2.35) e escolhendo $C_\beta = \max\{k_n, \dfrac{e^{\beta C_\varepsilon}}{1 - \beta(1+\varepsilon)}\}$ obteremos (2.29). $\square$

Mostraremos a propriedade invariante por escalar no Teorema 2.4.1, isto é, para cada $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda > 0$, definindo $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_n\bigg(\alpha\Big(\frac{|u_\lambda(x)|}{\|\nabla u_\lambda\|_n}\Big)^{\frac{n}{n-1}}\bigg)dx \leqslant C_\alpha \frac{\|u_\lambda\|_n^n}{\|\nabla u_\lambda\|_n^n}.$$

De fato, a função u_λ satisfaz:

a. $\|\nabla u_\lambda\|_n = \|\nabla u\|_n$;

b. $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_n\left(\alpha\left(\frac{|u_\lambda(x)|}{\|\nabla u_\lambda\|_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)dx = \lambda^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_n\left(\alpha\left(\frac{|u(x)|}{\|\nabla u\|_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)dx$;

c. $\|u_\lambda\|_n^n = \lambda^{-n}\|u\|_n^n$.

Os itens (a), (b) e (c) são fáceis de provar. Basta aplicar o Teorema de Mudança de Variável. Agora, usando o item (b), o Teorema 2.4.1, e os itens (a) e (c) nessa ordem, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_n\left(\alpha\left(\frac{|u_\lambda(x)|}{\|\nabla u_\lambda\|_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)dx &= \lambda^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_n\left(\alpha\left(\frac{|u(x)|}{\|\nabla u\|_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)dx \\
&\leqslant \lambda^{-n} C_\alpha \frac{\|u\|_n^n}{\|\nabla u\|_n^n} \\
&= C_\alpha \frac{\|u_\lambda\|_n^n}{\|\nabla u_\lambda\|_n^n}.
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

Desigualdades de Trudinger-Moser na Forma Singular

3.1 Introdução

Apresentaremos versões singulares da desigualdade Trudinger-Moser. No caso limitado, abordaremos a forma singular do Teorema 2.2.1 provada por Adimurthi-Sandeep [2]. E já no caso ilimitado, faremos uma extensão da desigualdade de Trudinger-Moser feita por M. de Souza [11]. A importância deste último resultado será percebida no estudo sobre a existência e multiplicidade de soluções fracas para uma classe de problemas elípticos singulares.

3.2 Desigualdade de Trudinger-Moser com Peso Singular

Adimurthi-Sandeep [2] por meio do argumento de simetrização e densidade estabeleceram a seguinte variante da desigualdade Trudinger-Moser incluindo um peso singular.

Teorema 3.2.1 (Desigualdade de Trudinger-Moser com Peso Singular). *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio limitado contendo a origem e $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$, com $n \geqslant 2$. Então, para cada $\alpha > 0$ e $a \in [0, n)$ tem-se que*

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^a} dx < \infty. \tag{3.1}$$

Além disso,

$$\sup_{\|\nabla u\|_n \leqslant 1} \int_\Omega \frac{e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^a} dx < \infty \tag{3.2}$$

se,e somente se, $\frac{\alpha}{\alpha_n} + \frac{a}{n} \leqslant 1$.

Demonstração. Para mostrar (3.1), escolha $t > 1$ tal que $at < n$. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^a} dx \leqslant \underbrace{\left[\int_\Omega e^{\frac{t}{t-1}\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx\right]^{\frac{t-1}{t}}}_{\mathrm{I}} \underbrace{\left[\int_\Omega |x|^{-ta} dx\right]^{\frac{1}{t}}}_{\mathrm{II}}.$$

A integral em (I) é finita devido ao Teorema 2.2.1. Já a integral em (II) é finita devido a uma estimativa simples usando o Teorema da Mudança de Variável. De fato, temos

$$\int_\Omega |x|^{-ta} dx \leqslant \underbrace{\int_{\Omega\cap B_1} |x|^{-ta} dx}_{\mathrm{II}_1} + \underbrace{\int_{\Omega\cap B_1^c} |x|^{-ta} dx}_{\mathrm{II}_2}.$$

Se $x \in \Omega \cap B_1^c$ temos $|x| \geqslant 1$ implicando que $|x|^{-at} \leqslant 1$, portanto, a integral em (II_2) é menor ou igual que $|\Omega \cap B_1^c|$. Resta verificar que a integral em (II_1) é finita. De fato,

$$\int_{\Omega\cap B_1} |x|^{-ta} dx \leqslant \int_{B_1} |x|^{-ta} dx = \omega_{n-1} \lim_{s\to 0} \int_s^1 r^{n-1-at} dr.$$

Como $at < n$ implica que $-1 < n - 1 - at$ e assim,

$$\omega_{n-1} \lim_{s\to 0} \int_s^1 r^{n-1-at} dr = \omega_{n-1} \lim_{s\to 0} \left.\frac{r^{n-at}}{n-at}\right|_s^1 = \frac{\omega_{n-1}}{n-at}.$$

Suponha $\frac{\alpha}{\alpha_n} + \frac{a}{n} \leqslant 1$. Dividiremos a demonstração de (3.2) em dois casos:

Caso 1: $\frac{\alpha}{\alpha_n} + \frac{a}{n} < 1$. Escolhendo $t > 1$ tal que $\frac{\alpha}{\alpha_n} + \frac{at}{n} = 1$ e usando da desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^a} dx \leqslant \left[\int_\Omega e^{\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx\right]^{\frac{\alpha}{\alpha_n}} \underbrace{\left[\int_\Omega |x|^{-\frac{n}{t}} dx\right]^{\frac{at}{n}}}_{\mathrm{III}}.$$

De modo similar à estimativa da integral em (II), concluímos que a integrtal em (III) é finita, isto é, limitada por uma constante positiva C. Passando o supremo na desigualdade acima, temos

$$\sup_{\|\nabla u\|_n \leqslant 1} \int_\Omega \frac{e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^a} dx \leqslant C \underbrace{\sup_{\|\nabla u\|_n \leqslant 1} \left[\int_\Omega e^{\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}}} dx\right]^{\frac{\alpha}{\alpha_n}}}_{\mathrm{IV}}.$$

Note que (IV) é finito devido ao Teorema 2.2.1, já que $\frac{\alpha}{\alpha_n} < 1$.

Caso 2: $\frac{\alpha}{\alpha_n} + \frac{a}{n} = 1$. Denotando $\beta = \frac{\alpha}{\alpha_n}$ tem-se que $\frac{a}{n} = 1 - \beta$; assim para provar (3.2) é equivalente mostrar,

$$\sup_{\|\nabla u\|_n \leqslant 1} \int_\Omega \frac{e^{\beta \alpha_n |u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^{(1-\beta)n}} dx < \infty.$$

As ferramentas de simetrização e densidade, permitem tomar B_R bola de raio R e centro na origem em vez de Ω e u uma função positiva, suave e radial. Pelo Teorema da Mudança de Variável, temos

$$\int_{B_R} |\nabla u|^n \, dx = \omega_{n-1} \int_0^R [u'(r)]^n r^{n-1} dr \tag{3.3}$$

e

$$\int_{B_R} \frac{e^{\beta \alpha_n u^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^{(1-\beta)n}} dx = \omega_{n-1} \int_0^R e^{\beta \alpha_n u^{\frac{n}{n-1}}} r^{\beta n - 1} dr. \tag{3.4}$$

Defina, $v(r) = \beta^{\frac{n-1}{n}} u(r^{\frac{1}{\beta}})$ com $r \in [0, R^\beta]$. A seguir mostraremos algumas propriedades da relação entre as funções u e v.

Afirmação 3. *Vale a igualdade:*

$$\int_0^{R^\beta} [v'(r)]^n r^{n-1} dr = \int_0^R [u'(r)]^n r^{n-1} dr.$$

De fato, calculando a derivada de v tem-se que $v'(r) = \beta^{\frac{n-1}{n}} u'(r^{\frac{1}{\beta}}) \beta^{-1} r^{\beta^{-1}-1}$. Logo,

$$\int_0^{R^\beta} [v'(r)]^n r^{n-1} dr = \int_0^{R^\beta} [\beta^{\frac{n-1}{n}} u'(r^{\frac{1}{\beta}}) \beta^{-1} r^{\beta^{-1}-1}]^n r^{n-1} dr = \int_0^{R^\beta} [u'(r^{\frac{1}{\beta}})]^n \beta^{-1} r^{\frac{n}{\beta}-1} dr.$$

Fazendo $r^{\frac{1}{\beta}} = s$ implica que $r^{\frac{n}{\beta}} = s^n$, e consequentemente, $\beta^{-1} r^{\frac{n}{\beta}-1} dr = s^{n-1} ds$. Então

$$\int_0^{R^\beta} [u'(r^{\frac{1}{\beta}})]^n \beta^{-1} r^{\frac{n}{\beta}-1} dr = \int_0^R [u'(s)]^n s^{n-1} ds.$$

Afirmação 4. *Vale a igualdade:*

$$\frac{1}{\beta} \int_0^{R^\beta} e^{\alpha_n v^{\frac{n}{n-1}}} r^{n-1} dr = \int_0^R e^{\alpha_n \beta u^{\frac{n}{n-1}}} r^{\beta n - 1} dr.$$

De fato, usando a definição de v tem-se que

$$\frac{1}{\beta} \int_0^{R^\beta} e^{\alpha_n v^{\frac{n}{n-1}}} r^{n-1} dr = \frac{1}{\beta} \int_0^{R^\beta} e^{\alpha_n [\beta^{\frac{n-1}{n}} u(r^{\frac{1}{\beta}})]^{\frac{n}{n-1}}} r^{n-1} dr = \frac{1}{\beta} \int_0^{R^\beta} e^{\alpha_n \beta [u(r^{\frac{1}{\beta}})]^{\frac{n}{n-1}}} r^{n-1} dr$$

Fazendo $r^{\frac{1}{\beta}} = s$ implica que $r^n = s^{\beta n}$, e consequentemente, $r^{n-1} dr = \beta s^{\beta n - 1} ds$. Então

$$\frac{1}{\beta} \int_0^{R^\beta} e^{\alpha_n \beta [u(r^{\frac{1}{\beta}})]^{\frac{n}{n-1}}} r^{n-1} dr = \int_0^R e^{\alpha_n \beta u(s)^{\frac{n}{n-1}}} s^{\beta n - 1} ds.$$

De (3.3), Afirmação 3 e usando o Teorema Mudança de Variável, concluímos que

$$\int_{B_R} |\nabla u|^n = \int_{B_{R\beta}} |\nabla v|^n. \tag{3.5}$$

Pela Afirmação 4, (3.4) e o Teorema Mudança de Variável, concluímos que

$$\int_{B_R} \frac{e^{\beta\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^{(1-\beta)n}} = \frac{1}{\beta}\int_{B_{R\beta}} e^{\alpha_n|v|^{\frac{n}{n-1}}}. \tag{3.6}$$

De (3.5), (3.6) e usando o Teorema 2.2.1 em v, temos que

$$\sup_{\|\nabla u\|_n\leqslant 1}\int_{B_R} \frac{e^{\beta\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^{(1-\beta)n}} \leqslant \frac{1}{\beta}\sup_{\|\nabla v\|_n\leqslant 1}\int_{B_{R\beta}} e^{\alpha_n|v|^{\frac{n}{n-1}}} < \infty.$$

Por fim, se vale (3.2) então $\frac{\alpha}{\alpha_n}+\frac{a}{n}\leqslant 1$, ou seja, se $\frac{\alpha}{\alpha_n}+\frac{a}{n}>1$ então não vale (3.2). De fato, escolhendo $R>0$ tal que $B_R\subseteq\Omega$, e para cada $l\in(0,R)$ define a função de Moser:

$$u_l(x) = \frac{1}{(\omega_{n-1})^{\frac{1}{n}}}\begin{cases} (\ln\frac{R}{l})^{\frac{n-1}{n}}, & \text{se} \quad 0\leqslant|x|\leqslant l\\ \dfrac{\ln\frac{R}{|x|}}{(\ln\frac{R}{l})^{\frac{1}{n}}}, & \text{se} \quad l\leqslant|x|\leqslant R\\ 0, & \text{se} \quad |x|>R. \end{cases}$$

Afirmação 5. *Vale a igualdade*

$$\int_\Omega |\nabla u_l|^n = 1.$$

De fato, calculando as derivadas parciais da função de Moser com relação a i-éssima coordenada do ponto $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, temos que

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0\leqslant|x|\leqslant l\\ -\dfrac{x_i}{|x|^2}(\omega_{n-1}\ln\frac{R}{l})^{-\frac{1}{n}}, & \text{se} \quad l<|x|<R\\ 0, & \text{se} \quad |x|\geqslant R. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} |\nabla u_l(x)| &= \Big[\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\ &= \Big[\Big(\omega_{n-1}\ln\frac{R}{l}\Big)^{-\frac{2}{n}}\sum_{i=1}^n\Big(-\frac{x_i}{|x|^2}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\ &= \Big(\omega_{n-1}\ln\frac{R}{l}\Big)^{-\frac{1}{n}}\Big(\frac{x_1^2+x_2^2+...x_n^2}{|x|^4}\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &= \Big(\omega_{n-1}\ln\frac{R}{l}\Big)^{-\frac{1}{n}}|x|^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $|\nabla u_l(x)|^n = \left(\omega_{n-1}\ln\frac{R}{l}\right)^{-1}|x|^{-n}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_l(x)|^n dx &= \int_{B_R} |\nabla u_l(x)|^n dx - \int_{B_l} |\nabla u_l(x)|^n dx \\
&= \left(\omega_{n-1}\ln\frac{R}{l}\right)^{-1}\left(\int_{B_R} |x|^{-n} dx - \int_{B_l} |x|^{-n} dx\right) \\
&= \left(\omega_{n-1}\ln\frac{R}{l}\right)^{-1}\left(\omega_{n-1}\lim_{s\to 0}\int_s^R r^{-1}dr - \omega_{n-1}\lim_{s\to 0}\int_s^l r^{-1}dr\right) \\
&= \left(\ln\frac{R}{l}\right)^{-1}\lim_{s\to 0}\left(\ln r\Big|_s^R - \ln r\Big|_s^l\right) \\
&= \left(\ln\frac{R}{l}\right)^{-1}\left(\ln R - \ln l\right) \\
&= \left(\ln\frac{R}{l}\right)^{-1}\left(\ln\frac{R}{l}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Agora, usaremos a família $\{u_l\}$ para mostrarmos que o supremo em (3.2) não existe. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{e^{\alpha u_l^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^a} dx &\geqslant \int_{B_l} \frac{e^{\alpha u_l^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^a} dx \\
&= e^{\alpha u_l^{\frac{n}{n-1}}} \int_{B_l} |x|^{-a} dx \\
&= e^{\alpha\left[(\omega_{n-1})^{-\frac{1}{n}}(\ln\frac{R}{l})^{\frac{n-1}{n}}\right]^{\frac{n}{n-1}}}\left(\frac{\omega_{n-1}l^{n-a}}{n-a}\right) \\
&= e^{(\ln\frac{R}{l})\alpha(\omega_{n-1})^{-\frac{1}{n-1}}}\left(\frac{\omega_{n-1}l^{n-a}}{n-a}\right) \\
&= \left(\frac{R}{l}\right)^{\alpha(\omega_{n-1})^{-\frac{1}{n-1}}}\left(\frac{\omega_{n-1}l^{n-a}}{n-a}\right) \\
&= \left(\frac{R^{\frac{n\alpha}{\alpha_n}}}{l^{\frac{n\alpha}{\alpha_n}}l^{a-n}}\right)\left(\frac{\omega_{n-1}}{n-a}\right) \\
&= \left(\frac{R^{\frac{n\alpha}{\alpha_n}}}{l^{n(\frac{\alpha}{\alpha_n}+\frac{a}{n}-1)}}\right)\left(\frac{\omega_{n-1}}{n-a}\right).
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Fazendo $l \to 0$ em (3.7) temos

$$
\int_\Omega \frac{e^{\alpha u_l^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^a} dx \to \infty,
$$

porque $\frac{\alpha}{\alpha_n} + \frac{a}{n} > 1$. Portanto, o supremo em (3.2) não existe. □

Note que as formulações dadas nos Teoremas 2.2.1 e 3.2.1 não são aplicadas para domínios não limitados, pelo fato das desigualdades serem estimadas pela medida do domínio.

3.3 Uma Desigualdade Singular do Tipo Trudinger-Moser Sobre Subdomínios do $\mathbb{R}^2$

M. de Souza motivado pelos trabalhos [1], [2], [8] e [12] mostrou em [11] a seguinte versão da desigualdade de Trudinger-Moser, $n = 2$. Mais precisamente,

Teorema 3.3.1. *Sejam Ω um domínio suave em $\mathbb{R}^2$ contendo a origem, $\alpha > 0$, $a \in [0, 2)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então,*

$$\frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a} \in L^1(\Omega). \tag{3.8}$$

Além disso, se $\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{a}{2} < 1$ e $\|u\|_2 \leqslant M$, então existe uma constante positiva $C = C(M, \alpha)$ tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_\Omega \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a} dx < C(M, \alpha). \tag{3.9}$$

Temos ainda que o supremo em (3.9) é $+\infty$ quando $\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{a}{2} > 1$.

Demonstração. Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha w^2} - 1)}{|x|^a} dx,$$

onde $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $w(x) = u(x)$ se $x \in \Omega$ e $w(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \Omega$, isto é, w é a função extensão de u. Portanto, é suficiente provarmos o resultado para $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

O método de simetrização de Schwarz garante que é suficiente provarmos a desigualdade pretendida para funções não-negativas, radialmente simétricas e decrescente $u(x) = u(|x|)$. Seja $r > 0$ um número real a ser escolhido depois. Temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a} dx = \int_{|x|<r} \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a} dx + \int_{|x|\geqslant r} \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a} dx. \tag{3.10}$$

Para estimar a primeira integral em (3.10), considere $v(s) = u(s) - u(r)$ se $0 \leqslant s \leqslant r$ e $v(s) = 0$ se $s \geqslant r$. Assim, $v \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$. Então,

d.1 $u(s)^2 = v(s)^2 + 2v(s)u(r) + u(r)^2$, para todo $s \geqslant 0$. Com efeito,

$$u(s)^2 = (v(s) + u(r))^2 = v(s)^2 + 2v(s)u(r) + u(r)^2.$$

d.2 Para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que $u(s)^2 \leqslant (1 + \varepsilon)v(s) + (1 + C_\varepsilon)u(r)^2$.

Com efeito, pela desigualdade de Young temos:

$$v(s)u(r) = \left(v(s)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}u(r)\right) \leqslant \frac{\left(v(s)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)^2}{2} + \frac{\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}u(r)\right)^2}{2} = \frac{v(s)^2\varepsilon}{2} + \frac{u(r)^2\varepsilon^{-1}}{2}.$$

Daí, obtemos $2v(s)u(r) \leqslant v(s)^2\varepsilon + u(r)^2 C_\varepsilon$ onde $C_\varepsilon = \varepsilon^{-1}$ e combinando com (d.1) segue (d.2).

d.3 $u(s)^2 \leqslant (1+\varepsilon)v(s)^2 + \dfrac{1+C_\varepsilon}{\pi r^2}\|u\|_2^2$.

Com efeito, pelo Lema Radial temos que $|u(s)| \leqslant \pi^{-\frac{1}{2}}\|u\|_2 s^{-1}$ para todo $s > 0$. Elevando ao quadrado com $s = r$ e combinado com (d.2) segue (d.3).

Escolhendo $r^2 \geqslant \dfrac{1+C_\varepsilon}{\pi}$ em (d.3) temos

$$u(s)^2 \leqslant (1+\varepsilon)v(s)^2 + \|u\|_2^2. \tag{3.11}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{|x|<r} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}dx &\leqslant \int_{|x|<r} \frac{e^{\alpha[(1+\varepsilon)v^2+\|u\|_2^2]}}{|x|^a}dx - \int_{|x|<r} |x|^{-a}dx \\ &\leqslant \int_{|x|<r} \frac{e^{\alpha[(1+\varepsilon)v^2+\|u\|_2^2]}}{|x|^a}dx \\ &= e^{\alpha\|u\|_2^2}\int_{|x|<r} \frac{e^{\alpha(1+\varepsilon)v^2}}{|x|^a}dx. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Como $v \in H_0^1(B_r)$, obtemos por (3.12) e pelo Teorema 3.2.1 que

$$\int_{|x|<r} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}dx < \infty, \tag{3.13}$$

$\forall\alpha > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Além disso, note que $\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 dx \leqslant 1$ implica que

$$\int_{|x|<r} |\nabla v|^2 dx = \int_{|x|<r} |\nabla u|^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx \leqslant 1$$

e se $\|u\|_2^2 \leqslant M$ podemos reescrever (3.12) como

$$\int_{|x|<r} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}dx \leqslant e^{\alpha M^2}\int_{|x|<r} \frac{e^{\alpha(1+\varepsilon)v^2}}{|x|^a}dx. \tag{3.14}$$

Assim, escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $\dfrac{(1+\varepsilon)\alpha}{4\pi} + \dfrac{a}{2} < 1$, pelo Teorema 3.2.1 e a estimativa (3.14), obtemos uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_{|x|<r} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}dx \leqslant e^{\alpha M^2} C_1. \tag{3.15}$$

Agora, estimaremos a segunda integral em (3.10). Note que $|x| \geqslant 1$ implica que $\frac{1}{|x|^a} \leqslant 1$ para $a \in [0,2)$. Então, para $r \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant r} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}dx &\leqslant \int_{|x|\geqslant r} (e^{\alpha u^2}-1)dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2}-1)dx. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Portanto, por (3.16) e Teorema 2.3.1 segue que:

$$\int_{|x|\geqslant r} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}dx < \infty \tag{3.17}$$

$\forall\alpha > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Além disso, se $\|u\|_2^2 \leqslant M$ e $\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{a}{2} < 1$(implica que $\alpha < 4\pi$), então pelo Teorema 2.3.1 e por (3.16) segue a existência de uma constante $C_2(\alpha, M) > 0$ tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2\leqslant 1} \int_{|x|\geqslant r} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}dx < C_2(\alpha, M). \tag{3.18}$$

Escolhendo $r = \max\left\{1, \sqrt{\dfrac{1+C_\varepsilon}{\pi}}\right\}$, então (3.8) segue de (3.10), (3.13) e (3.17), e (3.9) segue de (3.10), (3.15) e (3.18).

Por fim, mostraremos que o supremo em (3.9) não existe quando $\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{a}{2} > 1$. De fato, considere as funções de Moser:

$$u_l(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \begin{cases} (\ln l)^{\frac{1}{2}}, & \text{se} \quad 0 \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{l} \\ \dfrac{\ln \frac{1}{|x|}}{(\ln l)^{\frac{1}{2}}}, & \text{se} \quad \frac{1}{l} \leqslant |x| \leqslant 1 \\ 0, & \text{se} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Portanto, $u_l \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp}(u_l) = \bar{B}_1$ e $\|\nabla u_l\|_2 = 1$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha u_l^2}-1)}{|x|^a}dx \geqslant \int_{B_{\frac{1}{l}}} \frac{(e^{\alpha u_l^2}-1)}{|x|^a}dx = \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(l^{2(\frac{\alpha}{4\pi}+\frac{a}{2}-1)} - \frac{1}{l^{2-a}}\right).$$

Fazendo $l \to \infty$ implica que $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha u_l^2}-1)}{|x|^a}dx \to \infty$ já que $\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{a}{2} > 1$. □

Em [22, Teorema I.6], Lions mostrou que a constante crítica α_n na desigualdade de Trudinger-Moser (Teorema 2.2.1) pode ser melhorada ao longo de certas sequências. Mais recentemente, J. M. do Ó, E. Medeiros e U. B. Severo [14] mostraram uma extensão do resultado de Lions para $\Omega = \mathbb{R}^2$. Mais precisamente, se (w_n) é uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|w_n\|_{1,2} = 1$, $w_n \rightharpoonup w_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\|w_0\|_{1,2} < 1$ então para todo $0 < p < 4\pi(1 - \|w_0\|_{1,2}^2)^{-1}$ temos

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} (e^{pw_n^2} - 1)dx < \infty.$$

A seguir estabeleceremos uma versão singular deste resultado devido J. M. do Ó e M. de Souza [15].

Proposição 3.3.1. *Seja* (w_n) *em* $H^1(\mathbb{R}^2)$ *com* $\|w_n\|_{1,2} = 1$ *e suponha que* $w_n \rightharpoonup w_0$ *em* $H^1(\mathbb{R}^2)$ *com* $\|w_0\|_{1,2} < 1$. *Então, para todo* $0 < p < 2\pi(2-a)(1-\|w_0\|_{1,2}^2)^{-1}$ *e* $a \in [0, 2)$, *tem-se que*

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{pw_n^2} - 1)}{|x|^a} dx < \infty.$$

Demonstração. Por hipótese, $w_n \rightharpoonup w_0$ e $\|w_n\|_{1,2} = 1$. Logo

$$\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 = \|w_n\|_{1,2}^2 - 2\langle w_n, w_0\rangle + \|w_0\|_{1,2}^2 \to 1 - \|w_0\|_{1,2}^2 < \frac{2\pi(2-a)}{p}.$$

Daí, para n suficientemente grande, temos

$$\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 < \frac{2\pi(2-a)}{p}.$$

Multiplicando por $\frac{p}{4\pi}$, obtemos

$$\frac{p\|w_n - w_0\|_{1,2}^2}{4\pi} + \frac{a}{2} < 1.$$

Tomando $q > 1$ (próximo de 1) e $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$\frac{q(1+\varepsilon^2)p\|w_n - w_0\|_{1,2}^2}{4\pi} + \frac{a}{2} < 1.$$

Tome $v_n = \frac{w_n - w_0}{\|w_n - w_0\|_{1,2}}$ temos $\|v_n\|_{1,2} = 1$, consequentemente, $\|v_n\|_2 \leqslant 1$ e $\|\nabla v_n\|_2 \leqslant 1$. Portanto, sabendo que $H^1(\mathbb{R}^2) = H_0^1(\mathbb{R}^2)$ e aplicando o Teorema 3.3.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{q(1+\varepsilon^2)p(w_n - w_0)^2} - 1)}{|x|^a} dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left[e^{q(1+\varepsilon^2)p\|w_n - w_0\|_{1,2}^2\left(\frac{w_n - w_0}{\|w_n - w_0\|_{1,2}}\right)^2} - 1\right]}{|x|^a} dx < C_1.$$

Além disso, desde que

$$pw_n^2 \leqslant p(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2 + p(1 + \frac{1}{\varepsilon^2})w_0^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} e^{pw_n^2} - 1 &\leqslant e^{p(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2} e^{p(1+\frac{1}{\varepsilon^2})w_0^2} - 1 \\ &\leqslant \frac{1}{q}\left(e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2} - 1\right) + \frac{1}{r}\left(e^{rp(1+\frac{1}{\varepsilon^2})w_0^2} - 1\right), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade foi obtida usando a desigualdade

$$ab - 1 \leqslant \frac{1}{q}(a^q - 1) + \frac{1}{r}(b^r - 1), \;\; a, b > 0 \text{ e } q^{-1} + r^{-1} = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(e^{pw_n^2}-1)}{|x|^a}dx &\leqslant \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n-w_0)^2}-1)}{|x|^a}dx+\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(e^{rp(1+1/\varepsilon^2)w_0^2}-1)}{|x|^a}dx\\ &\leqslant \frac{1}{q}C_1+\frac{1}{r}C_2\\ &\leqslant C,\end{aligned}$$

onde $C=\max\{C_1,C_2\}$ e $C_2>0$ é obtida aplicando o Teorema 3.3.1 na segunda integral.

□

Vejamos uma consequência útil do Teorema 3.3.1.

Lema 3.3.1. *Sejam* $\beta>0$ *e* $r>1$*. Então, para cada* $\alpha>r$ *existe uma constante positiva* $C=C(\alpha)$ *tal que para todo* $s\in\mathbb{R}$ *tem-se que*

$$(e^{\beta s^2}-1)^r\leqslant C(e^{\alpha\beta s^2}-1).$$

Em particular, se $u\in H^1(\mathbb{R}^2)$ *e* $a\in[0,2)$ *então*

$$\frac{(e^{\beta u^2}-1)^r}{|x|^a}\in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Demonstração. Se $r>1$, obtemos pela regra de L'Hôpital que

$$\lim_{s\to 0}\frac{(e^{\beta s^2}-1)^r}{e^{\alpha\beta s^2}-1}=\lim_{s\to 0}\frac{r(e^{\beta s^2}-1)^{r-1}e^{\beta s^2}}{\alpha e^{\alpha\beta s^2}}=0$$

e por outro lado, colocando em evidência os termos $e^{r\beta s^2}$ e $e^{\alpha\beta s^2}$,

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{(e^{\beta s^2}-1)^r}{e^{\alpha\beta s^2}-1}=\lim_{|s|\to\infty}\frac{e^{r\beta s^2}(1-e^{-\beta s^2})^r}{e^{\alpha\beta s^2}(1-e^{-\alpha\beta s^2})}=0,$$

já que $\alpha>r$. Daí, o resultado segue.

Em particular,

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(e^{\beta u^2}-1)^r}{|x|^a}\leqslant C\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(e^{\alpha\beta u^2}-1)}{|x|^a}<\infty,$$

onde está última parcela foi estimada pelo Teorema 3.3.1. □

Observação 3.3.1. *Sejam* $\beta>0$*,* $q>0$ *e* $a\in[0,2)$*. Então,*

$$|u|^q\frac{(e^{\beta u^2}-1)}{|x|^a}\in L^1(\mathbb{R}^2)\quad \forall u\in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Demonstração. Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e escolhendo $r > 1$(próximo de 1) tal que $ar < 2$, pela desigualdade Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q \frac{(e^{\beta u^2} - 1)}{|x|^a} dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{q\frac{r}{r-1}} dx \right)^{\frac{r-1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta u^2} - 1)^r}{|x|^{ar}} dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Pelo Lema 3.3.1 temos que para cada $\alpha > r$ existe uma constante positiva C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q \frac{(e^{\beta u^2} - 1)}{|x|^a} dx \leqslant C^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{q\frac{r}{r-1}} dx \right)^{\frac{r-1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta \alpha u^2} - 1)}{|x|^{ar}} dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Note que se $r \to 1$ então $q\frac{r}{r-1} \to \infty$, assim, podemos supor que $q\frac{r}{r-1} \geqslant 2$. Usando que $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^2)$ para todo $t \geqslant 2$ concluímos que a primeira integral existe e a segunda integral existe devido ao Teorema 3.3.1. $\square$

Capítulo 4

Uma Classe de Problemas Elípticos Singulares

4.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos uma classe de problemas elípticos não-homogêneos e singulares com o propósito de investigar a existência e multiplicidade de soluções fracas. Este problema foi estudado por J. M. do Ó e M. de Souza [15]. As principais dificuldades são a falta de compacidade devido a ilimitação do domínio, ausência da condição de (PS) por causa de uma não linerialidade crítica e a presença da sigunlaridade $|x|^{-a}$. As ferramentas necessárias para tal propósito são o Teorema 3.3.1, o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland.

4.2 Descrição do Problema

Investigaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas para uma classe de problemas singulares da forma:

$$-\Delta u + V(x)u = \frac{f(u)}{|x|^a} + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{4.1}$$

onde $a \in [0,2), h \in \left(H^1(\mathbb{R}^2)\right)^* = H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ é uma pequena pertubação com $h \not\equiv 0$ e $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo:

(V_1) existe uma constante V_0 tal que $V(x) \geqslant V_0 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^2$;

(V_2) a função $\left[V(x)\right]^{-1}$ pertence $L^1(\mathbb{R}^2)$;

(V_3) V é radialmente simétrica, ou seja, $V(x) = V(x')$ quando $|x| = |x'|$;

(V_4) a função $V(x)$ é coerciva, ou seja, $V(x) \to \infty$ se $|x| \to \infty$.

Definindo o potêncial $V(x) = e^{|x|}$, é fácil verificar que as condições $(V_1) - (V_4)$ são satisfeitas.

Estaremos interessados no caso que a não-linearidade $f(s)$ tem o máximo crescimento sobre s que torna possível tratar o problema (4.1) variacionalmente num espaço de funções adequado, ou seja, o crescimento subcrítico e crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser.

Definição 4.2.1. *Diremos que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tem crescimento subcrítico em* $+\infty$ *se para todo* $\alpha > 0$ *tem-se:*

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = 0.$$

Definição 4.2.2. *Diremos que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tem crescimento crítico em* $+\infty$ *se existe* $\alpha_0 > 0$ *tal que:*

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0, & se \quad \alpha > \alpha_0 \\ +\infty, & se \quad \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

Analogamente definimos crescimento subcrítico e crítico em $-\infty$. Note que devido a presença da singularidade $|x|^{-a}$ em (4.1) devemos usar uma versão singular da desigualdade Trudinger-Moser, por isso aplicaremos o Teorema 3.3.1 em vez da desigualdade clássica. Suporemos as seguintes condições sobre a não-linearilidade de $f(s)$:

(f_0) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $f(0) = 0$;

(f_1) existem constantes $\theta > 2$ e $s_1 > 0$ tal que para todo $|s| \geqslant s_1$ tem-se:

$$0 < \theta F(s) := \theta \int_0^s f(t)dt \leqslant sf(s);$$

(f_2) existem constantes positivas R_0 e M_0 tais que para todo $|s| \geqslant R_0$ tem-se:

$$0 < F(s) \leqslant M_0|f(s)|.$$

Para aplicarmos os métodos variacionais, definiremos o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u \nabla v + V(x)uv] dx, \quad u, v \in E, \tag{4.2}$$

para o qual corresponde a norma

$$\|u\|_E = \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) dx \right\}^{1/2}, \quad u \in E.$$

Definição 4.2.3. *Diremos que* $u \in E$ *é solução fraca de* (4.1) *se*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u)}{|x|^a} v dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv dx = 0, \quad \forall v \in E.$$

Mostraremos no decorrer desse capítulo que as soluções fracas de (4.1) são pontos críticos do funcional energia $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(u)}{|x|^a} - \int_{\mathbb{R}^2} hu dx.$$

A condição (V_1) implica na imersão contínua $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$. Com efeito,

$$\|u\|_E^2 \geqslant C\|u\|_{1,2}^2,$$

onde $C = \max\{1, V_0\}$. Este fato junto com a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para $q \in [2, \infty)$ acarreta na imersão contínua $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para $q \in [2, \infty)$.
A condição (V_2) implica na imersão contínua $E \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^2)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} V(x)^{-\frac{1}{2}} V(x)^{\frac{1}{2}} |u| dx \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x)^{-1} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x)^{-1} dx \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_E. \end{aligned}$$

As condições (V_1) e (V_2) garantem a imersão contínua

$$E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2), \quad 1 \leqslant q < \infty. \tag{4.3}$$

Com efeito, para cada $q \in (1,2)$ temos que $1/q \in (1/2, 1)$. Logo, existe $\theta \in [0,1]$ tal que $1 = q\theta + q(1-\theta)/2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|u\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}^2} u^{q\theta + q(1-\theta)}\, dx \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} u\, dx\right)^{q\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2\, dx\right)^{\frac{q(1-\theta)}{2}} \\
&= \|u\|_1^{q\theta} \|u\|_2^{q(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

Daí, $\|u\|_q \leqslant \|u\|_1^{\theta} \|u\|_2^{(1-\theta)}$. Usando as imersões contínuas $E \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^2)$ e $E \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, concluímos o desejado.

É conhecido na literatura que a condição (V_2) garante que a imersão em (4.3) é compacta (ver em [20]). Além disso,

$$\lambda_1 := \inf_{u \in E\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) dx}{\int_{\mathbb{R}^2} u^2/|x|^a dx} > 0. \tag{4.4}$$

O problema

$$-\Delta u + V(x)u = \frac{\lambda_1 u + 2ue^{u^2}}{|x|^a} + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

não tem solução positiva se $h \geqslant 0$ (ver em [11]). Portanto, é natural considerarmos a seguinte condição adicional próximo da origem:

(f_3) $\limsup_{s\to 0} \dfrac{2F(s)}{s^2} < \lambda_1$.

Observação 4.2.1. *A condição* (f_2) *é mais forte que a condição* (f_1)*, ou seja,* (f_2) *implica em* (f_1)*.*

Demonstração. Com efeito, pela condição (f_1) segue

$$\frac{\theta}{s} \leqslant \frac{f(s)}{F(s)}, \quad |s| \geqslant s_1 \text{ e } \theta \geqslant 2.$$

Integrando de s_1 até s, temos

$$C_1|s|^\theta \leqslant F(s),$$

onde $C_1 = F(s_1)/|s_1|^\theta$ e $|s| \geqslant s_1$. Além disso, usando o fato de que a função $g_1(x) = C_1|x|^\theta$ é limitada em todo intervalo compacto, porque é contínua, então existe constante C_2 tal que

$$C_1|s|^\theta - C_2 \leqslant 0, \quad |s| \leqslant s_1.$$

Assim,

$$C_1|s|^\theta - C_2 \leqslant F(s), \quad |s| \leqslant s_1.$$

Portanto, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$F(s) \geqslant C_1|s|^{\theta} - C_2, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Por outro lado, para fixar a ideia considere $s > 0$ e $f(s) > 0$. Pela condição (f_2), temos

$$F(s) \leqslant Mf(s), \quad |s| \geqslant M,$$

onde $M = \text{máx}\{M_0, R_0\}$. Integrando de M até s, temos

$$e^{s/M}C_1 \leqslant F(s),$$

onde $C_1 = F(M)/e$ e $|s| \geqslant M$. Além disso, usando o fato de que a função $g_2(x) = C_1 e^{\frac{|x|}{M}}$ é limitada em todo intervalo compacto, porque é contínua, então existe constante C_2 tal que

$$C_1 e^{|s|/M} - C_2 \leqslant 0, \quad |s| \leqslant M.$$

Assim,

$$C_1 e^{|s|/M} - C_2 \leqslant F(s).$$

Portanto, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$F(s) \geqslant C_1 e^{|s|/M} - C_2, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

De (4.5) e (4.6) segue a observação 4.2.1. $\square$

4.3 Resultados Preliminares

4.3.1 Formulação Variacional

Pela condição (f_3), temos que

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1.$$

Se $f(s)$ tem crescimento subcrítico em $+\infty$ e $-\infty$, temos que

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2} - 2} = 0, \quad \forall \alpha > 0.$$

Assim, sendo $f(s)$ contínua, então para cada $\alpha > 0$, existem constantes b_1, $b_2 > 0$ tais que

$$|f(s)| \leqslant b_1|s| + b_2(e^{\alpha s^2} - 1), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Analogamente, assumindo (f_3) e f contínua com crescimento crítico em $+\infty$ e $-\infty$, então para cada $\alpha > \alpha_0$, existem constantes c_1, $c_2 > 0$ tais que

$$|f(s)| \leqslant c_1|s| + c_2(e^{\alpha s^2} - 1), \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Afirmação 6. *O funcional energia* $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *está bem definido.*

De fato, é suficiente mostrar que $F(u)|x|^{-a} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Pela condição (f_3), existem $\varepsilon, \mu_1 > 0$ tais que

$$|F(s)| \leqslant \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2}|s|^2 \quad \text{com} \quad |s| \leqslant \mu_1.$$

Como f tem crescimento subcrítico (ou crítico), então

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2} - 2} = 0, \qquad \forall \alpha > 0 \text{ (ou } \forall \alpha > \alpha_0),$$

isto é, existem constantes $C_1, \mu_2 > 0$ tais que $|f(s)| \leqslant C_1(e^{\alpha s^2} - 2)$, para todo $|s| \geqslant \mu_2$. Desde que f é contínua no intervalo compacto de extremos μ_1 e μ_2, então existe constante $C_2 > 0$ tal que $|f(s)| \leqslant C_2$ com $s \in [\mu_1, \mu_2]$. Assim, se $|s| \geqslant \mu_1$ temos que

$$|f(s)| \leqslant C_3(e^{\alpha s^2} - 1),$$

onde $C_3 = \text{máx}\{C_1, C_2\}$.

Pela condição (f_1), existe $q > 2$ tal que $0 < q|F(s)| \leqslant |s||f(s)|$ para todo $|s| \geqslant \mu_1$. Consequentemente, $|F(s)| \leqslant |s||f(s)|$ para todo $|s| \geqslant \mu_1$. Desta forma,

$$|F(s)| \leqslant |s||f(s)| \leqslant C_3|s|(e^{\alpha s^2} - 1) = \frac{C_3}{|s|^{q-1}}|s|^q(e^{\alpha s^2} - 1).$$

Portanto,

$$|F(s)| \leqslant C|s|^q(e^{\alpha s^2} - 1) \quad \text{para todo} \quad |s| \geqslant \mu_1,$$

onde $C = \frac{C_3}{|\mu_1|^{q-1}}$. Desta forma,

$$|F(s)| \leqslant \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2}|s|^2 + C|s|^q(e^{\alpha s^2} - 1) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4.9}$$

e consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|F(u)|}{|x|^a}dx \leqslant \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^2}{|x|^a}dx + C\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q \frac{|e^{\alpha u^2} - 1|}{|x|^a}dx.$$

Portanto, a Afirmação 6 segue da imersão $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geqslant 2$ e pela Observação 3.3.1.

O funcional energia $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 com

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u)}{|x|^a} v dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv dx, \quad \text{para} \quad u, v \in E.$$

A demonstração desse fato consiste em usar a derivada de Fréchet combinando com a proposição 1.2.8 (veja por exemplo em [4, Teorema A. VII] ou em [11]). Portanto, os pontos críticos do funcional energia I são as soluções fracas de (4.1).

4.3.2 Geometria do Funcional I

Os lemas a seguir garantem que o funcional I satisfaz a condição geométrica do Teorema do Passo da Montanha [ver Teorema 1.3.1, Apêndice].

Lema 4.3.1. *Se* $v \in E$, $\beta > 0$, $q > 0$ *e* $\|v\|_E \leqslant M$ *com* $\beta M^2/4\pi + a/2 < 1$, *então existe constante* $C = C(\beta, M, q) > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta v^2} - 1)}{|x|^a} |v|^q dx \leqslant C\|v\|_E^q.$$

Demonstração. Consideremos $r > 1$ (próximo de 1) tal que $r\beta M^2/4\pi + ra/2 < 1$ e $sq \geqslant 1$, onde $s = r/(r-1)$. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta v^2} - 1)}{|x|^a} |v|^q dx &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta v^2} - 1)^r}{|x|^{ar}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v|^{qs} dx\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta v^2} - 1)^r}{|x|^{ar}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \|v\|_{qs}^q. \end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha > r$(próximo de r) tal que $\alpha\beta M^2/4\pi + ra/2 < 1$ e $sq \geqslant 1$. Pelo Lema 3.3.1 e $\|v\|_E \leqslant M$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta v^2} - 1)^r}{|x|^{ar}} dx \leqslant C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha\beta v^2} - 1)}{|x|^{ar}} dx \leqslant C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left[e^{\alpha\beta M^2\left(\frac{v}{\|v\|_E}\right)^2} - 1\right]}{|x|^{ar}} dx.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta v^2} - 1)}{|x|^a} |v|^q dx \leqslant C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left[e^{\alpha\beta M^2\left(\frac{v}{\|v\|_E}\right)^2} - 1\right]}{|x|^{ar}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \|v\|_{qs}^q.$$

Usando o Teorema 3.3.1 e a imersão contínua $E \hookrightarrow L^{sq}(\mathbb{R}^2)$ segue o lema. □

Lema 4.3.2. *Suponhamos que* $f(s)$ *satisfaz* (f_0), (f_1) *(ou* (f_2)*),* (f_3) *e tenha crescimento subcrítico (ou crítico) em* $+\infty$ *e* $-\infty$. *Então, existe* $\delta_1 > 0$ *tal que para cada* $h \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ *com* $\|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} < \delta_1$, *existe* $\rho_h > 0$ *tal que*

$$I(u) > 0, \quad \text{se} \ \|u\|_E = \rho_h.$$

Demonstração. Para estimar $I(u)$ usaremos (4.9), o Lema 4.3.1, a imersão compacta (4.3) e (4.4). Com efeito,

$$\begin{aligned}
I(u) &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \frac{(\lambda_1-\varepsilon)}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|u|^2}{|x|^a}dx - C\int_{\mathbb{R}^2}|u|^q\frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}dx - \int_{\mathbb{R}^2}hudx\\
&\geqslant \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \frac{(\lambda_1-\varepsilon)}{2}\frac{\|u\|_E^2}{\lambda_1} - C\|u\|_E^q - \int_{\mathbb{R}^2}hudx\\
&\geqslant \frac{1}{2}\Big[1-\frac{(\lambda_1-\varepsilon)}{\lambda_1}\Big]\|u\|_E^2 - C\|u\|_E^q - \|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)}\|u\|_E.
\end{aligned}$$

Pondo a norma de u em E em evidência,

$$I(u) \geqslant \|u\|_E\Big\{\frac{1}{2}\Big[1-\frac{(\lambda_1-\varepsilon)}{\lambda_1}\Big]\|u\|_E - C\|u\|_E^{q-1} - \|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)}\Big\}. \tag{4.10}$$

Considere o polinômio

$$p(\rho) = \frac{1}{2}\Big[1-\frac{(\lambda_1-\varepsilon)}{\lambda_1}\Big]\rho - C\rho^{q-1}.$$

Note que

$$\frac{1}{2}\Big[1-\frac{(\lambda_1-\varepsilon)}{\lambda_1}\Big]-C\rho^{q-2} \longrightarrow \frac{1}{2}\Big[1-\frac{(\lambda_1-\varepsilon)}{\lambda_1}\Big] > 0 \quad \text{se} \quad \rho\to 0.$$

Então, podemos escolher $\rho > 0$ tal que

$$p(\rho) > 0,$$

desde que $\varepsilon > 0$ e $q > 2$. Assim, escolhendo $\|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)}$ suficientemente pequeno, existe $\rho_h > 0$ tal que $I(u) > 0$ se $\|u\|_E = \rho_h$. □

Lema 4.3.3. *Suponha que* $f(s)$ *satisfaz* (f_1) (*ou* (f_2)). *Então, existe* $e \in E$ *com* $\|e\|_E > \rho_h$ *tal que*

$$I(e) < \inf_{\|u\|_E=\rho_h} I(u).$$

Demonstração. Integrando a condição (f_1) (ou (f_2)), para cada $\theta > 2$, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$F(u) \geqslant C_1|u|^\theta - C_2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)\setminus\{0\}.$$

Seja $K = \operatorname{supp}(u)$. Então

$$I(tu) \leqslant \frac{t^2}{2}\|u\|_E^2 - C_1t^\theta\int_K\frac{|u|^\theta}{|x|^a}dx + C_2\int_K\frac{dx}{|x|^a} - t\int_K hudx.$$

Como $\theta > 2$, então $I(tu)\to-\infty$ quando $t\to\infty$. Portanto, o lema segue quando $e := tu$ com t suficientemente grande. □

Com o propósito de achar uma bola adequada para usar o argumento de minimização, precisamos do seguinte resultado:

Lema 4.3.4. *Se* $f(s)$ *é contínua e tem crescimento subcrítico (ou crítico) em* $+\infty$ *e* $-\infty$, *então existem* $\eta > 0$ *e* $v \in E$ *com* $\|v\|_E = 1$ *tal que* $I(tv) < 0$ *para todo* $0 < t < \eta$. *Em particular,*

$$\inf_{\|u\|_E \leqslant \eta} I(u) < 0.$$

Demonstração. Seja $\tilde{v} \in E$. Para cada $h \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$, considere o problema

$$-\Delta\tilde{v} + V(x)\tilde{v} = h, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Aplicando o Teorema de Representação de Riesz para o espaço Hilbert E com o produto interno (4.2), obtemos uma única solução $\tilde{v}$ em E tal que

$$\langle u, \tilde{v}\rangle_E = \int_{\mathbb{R}^2} hu dx, \quad \forall u \in E.$$

Em particular, escolhendo $u = \tilde{v}$ temos,

$$\int_{\mathbb{R}^2} h\tilde{v}dx = \|\tilde{v}\|_E^2 > 0 \quad \text{para cada} \quad h \neq 0.$$

Defina $v = \tilde{v}/\|\tilde{v}\|_E$, logo $v \in E$ e $\|v\|_E = 1$. Como

$$I(tv) = \frac{t^2}{2}\|v\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(tv)}{|x|^a}\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} htv\, dx,$$

então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(tv) &= t - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(tv)}{|x|^a}w\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv\, dx \\ &= t - \|\tilde{v}\|_E^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(tv)}{|x|^a}\tilde{v}\, dx - \|\tilde{v}\|_E^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} h\tilde{v}\, dx \\ &= t - \|\tilde{v}\|_E^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(tv)}{|x|^a}\tilde{v}\, dx - \|\tilde{v}\|_E. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Fazendo $t \to 0$ e usando a condição (f_0), existe $\eta > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}I(tv) < 0, \quad t \in (0, \eta).$$

Usando que $I(0) = 0$, devemos ter $I(tv) < 0$ para todo $t \in (0, \eta)$.

Em particular, escolhendo $u = tv$, temos

$$\inf_{\|u\|_E \leqslant \eta} I(u) < 0.$$

□

4.3.3 Condição de Palais-Smale

Para provar que uma sequência Palais-Smale converge para uma solução do problema (4.1) necessitaremos do lema a seguir.

Lema 4.3.5. *Assumiremos que vale* (f_1) (*ou* (f_2)) *e* $f(s)$ *tem crescimento subcrítico (ou crítico) em* $+\infty$ *e* $-\infty$. *Seja* (u_n) *em* E *tal que* $I(u_n) \to c$ *e* $I'(u_n) \to 0$. *Então*

$$\|u_n\|_E \leqslant C, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(u_n)u_n|}{|x|^a} dx \leqslant C \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(u_n)}{|x|^a} dx \leqslant C.$$

Demonstração. Das hipóteses $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$, temos

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(u_n)}{|x|^a}\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n\,dx = c + o_n(1), \tag{4.12}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_n \nabla \varphi + V(x)u_n\varphi)dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a}\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} h\varphi dx = o_n(\|\varphi\|_E), \tag{4.13}$$

para toda $\varphi \in E$. Em particular, fazendo $\varphi = u_n$ em (4.13), multiplicando (4.12) por $\theta > 2$ e (4.13) por -1, em seguida somando ambos, obtemos

$$(\frac{\theta}{2} - 1)\|u_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\theta F(u_n) - f(u_n)u_n}{|x|^a} dx - (\theta - 1)\int_{\mathbb{R}^2} hu_n\,dx = \theta(c + o_n(1)) - o_n(\|u_n\|_E).$$

Fazendo $C_1 = \theta(c + o_n(1))$ e usando que $\int_{\mathbb{R}^2} hu_n\,dx \leqslant \|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)}\|u_n\|_E$, podemos escrever

$$\begin{aligned}(\frac{\theta}{2} - 1)\|u_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\theta F(u_n) - f(u_n)u_n}{|x|^a} dx &\leqslant C_1 - \|u_n\|_E o_n(1) + (\theta - 1)\|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)}\|u_n\|_E \\ &= \|u_n\|_E C_2 + C_1,\end{aligned}$$

onde $C_2 = [(\theta - 1)\|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} - o_n(1)]$. Pela condição (f_1)(ou (f_2)), existe $s_1 > 0$ tal que $\theta F(s) - sf(s) \leqslant 0$ para $|s| \geqslant s_1$, então

$$\int_{\{x:|u_n(x)| \geqslant s_1\}} \frac{\theta F(u_n) - u_n f(u_n)}{|x|_a} dx \leqslant 0.$$

Portanto,

$$(\frac{\theta}{2} - 1)\|u_n\|_E^2 - \int_{\{x:|u_n(x)|<s_1\}} \frac{\theta F(u_n) - f(u_n)u_n}{|x|^a} dx \leqslant \|u_n\|_E C_2 + C_1.$$

Usando (f_0) e a regra de L'Hôpital, segue que

$$\lim_{s\to 0} \frac{\theta F(s) - sf(s)}{s} = \theta \lim_{s\to 0} \frac{F(s)}{s} - \lim_{s\to 0} f(s) = \theta \lim_{s\to 0} f(s) = 0,$$

consequentemente, $(\theta F(s) - sf(s)) \leqslant C_3 s$ para todo $|s| \leqslant s_1$. Então,

$$\int_{\{x:|u_n(x)|<s_1\}} \frac{\theta F(u_n) - f(u_n)u_n}{|x|^a} dx \leqslant C_3 \int_{\{x:|u_n(x)|<s_1\}} \frac{|u_n|}{|x|^a} dx.$$

Escolhendo $r > 1$ tal que $ar < 2$, usando a desigualdade de Hölder e a imersão contínua $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geqslant 1$, concluímos que

$$\int_{\{x:|u_n(x)|<s_1\}} \frac{|u_n|}{|x|^a} dx \leqslant C_4 \|u_n\|_E.$$

Portanto,

$$(\frac{\theta}{2} - 1)\|u_n\|_E^2 - C_5\|u_n\|_E \leqslant \|u_n\|_E C_2 + C_1.$$

Esta desigualdade implica que existe $C > 0$ tal que $\|u_n\|_E \leqslant C$. As outras estimativas seguem de (4.12) e (4.13). $\square$

Para mostrar que o limite fraco de uma sequência de Palais-Smale em E é uma solução fraca de (4.1), vamos utilizar o seguinte resultado de convergência, que é uma versão para $\mathbb{R}^2$ do Lema 2.1 em [17].

Lema 4.3.6. *Seja* (u_n) *uma sequência de Palais-Smale para* I. *Então,* (u_n) *tem subsequência, ainda denotada por* (u_n)*, tal que*

$$\frac{f(u_n)}{|x|^a} \longrightarrow \frac{f(u)}{|x|^a} \quad \textit{em} \quad L^1(\mathbb{R}^2).$$

Demonstração. É suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(u_n)|}{|x|^a} dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(u)|}{|x|^a} dx.$$

Pelo Lema 4.13 sabemos que $\|u_n\|_E \leqslant C_1$, e consequentemente, a menos de subsequência existe $u \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E. Por (4.3), temos que

$$\|u_n - u\|_q \leqslant \|u_n - u\|_E, \ \ 1 \leqslant q < \infty.$$

Usando $u_n \rightharpoonup u$ em E, concluímos que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^2), \quad 1 \leqslant q < \infty.$$

Além disso,

$$\frac{f(u_n)}{|x|^a} \in L^1(\mathbb{R}^2), \ \ \frac{f(u)}{|x|^a} \in L^1(\mathbb{R}^2) \ \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(u_n)u_n|}{|x|^a} dx \leqslant C_2.$$

Desde que $|u|/|x|^a$, $f(u)/|x|^a \in L^1(\mathbb{R}^2)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo subconjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$\int_A \frac{|u|}{|x|^a}dx < \varepsilon \quad \text{e} \quad \int_A \frac{|f(u)|}{|x|^a}dx < \varepsilon \quad \text{se} \quad |A| \leqslant \delta. \tag{4.14}$$

De $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$, existe $M_1 > 0$ tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^2 : |u(x)| \geqslant M_1\}| \leqslant \delta. \tag{4.15}$$

Seja $M = \text{máx}\{M_1, C_2/\varepsilon\}$. Escreveremos,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(u_n)|}{|x|^a}dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(u)|}{|x|^a}dx \int \right| \leqslant I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n},$$

onde

$$I_{1,n} = \int_{[|u_n| \geqslant M]} \frac{|f(u_n)|}{|x|^a}dx,$$

$$I_{2,n} = \left| \int_{[|u_n| < M]} \frac{|f(u_n)|}{|x|^a}dx - \int_{[|u| < M]} \frac{|f(u)|}{|x|^a}dx \int \right|,$$

e

$$I_{3,n} = \int_{[|u| \geqslant M]} \frac{|f(u)|}{|x|^a}dx.$$

Estimaremos cada integral separadamente. Note que

$$I_{1,n} = \int_{[|u_n| \geqslant M]} \frac{|f(u_n)u_n|}{|x|^a|u_n|}dx \leqslant \frac{1}{M}\int_{[|u_n| \geqslant M]} \frac{|f(u_n)u_n|}{|x|^a}dx \leqslant \frac{C_2}{M} \leqslant \varepsilon.$$

De (4.14) e (4.15), obtemos $I_{3,n} \leqslant \varepsilon$. Agora, mostraremos que $I_{2,n} \to 0$ quando $n \to +\infty$. De fato, denotando χ a função característica,

$$\begin{aligned} I_{2,n} &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{[|u_n|<M]}|f(u_n)| - \chi_{[|u|<M]}|f(u)|}{|x|^a}dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{[|u_n|<M]}|f(u_n)| - \chi_{[|u_n|<M]}|f(u)| + \chi_{[|u_n|<M]}|f(u)| - \chi_{[|u|<M]}|f(u)|}{|x|^a}dx \right| \\ &\leqslant \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{[|u_n|<M]}(|f(u_n)| - |f(u)|)}{|x|^a}dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\chi_{[|u_n|<M]} - \chi_{[|u|<M]})|f(u)|}{|x|^a}dx \right|. \end{aligned}$$

Das condições (f_0) e (f_3), existe constante $C_3 > 0$ tal que $|f(s)| \leqslant C_3|s|$ para todo $|s| \leqslant M$ e por (4.3), a menos de subsequência, podemos assumir que $u_n \to u$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ e $|u_n|/|x|^a \leqslant g_0$, para alguma $g_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Consequentemente, $\chi_{[|u_n|<M]}(|f(u_n)| - |f(u)|) \to 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ e pelo Teorema da Convergênia Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\chi_{[|u_n|<M]}(|f(u_n)| - |f(u)|)}{|x|^a}dx \right| \longrightarrow 0, \quad \text{se} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Além disso, note que

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : |u_n(x)| < M\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 : |u(x)| < M\} \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : |u(x)| \geqslant M\}.$$

Por (4.14),

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\chi_{[|u_n|<M]} - \chi_{[|u|<M]})|f(u)|}{|x|^a} dx \right| \leqslant \int_{[u \geqslant M]} \frac{|f(u)|}{|x|^a} dx < \varepsilon,$$

completando a demonstração. □

Corolário 4.3.1. *Seja* (u_n) *uma sequência de Palais-Smale para* I*. Então,* (u_n) *tem subsequência, ainda denotada por* (u_n)*, convergindo fracamente para uma solução não trivial de* (4.1)*.*

Demonstração. Usando o Lema 4.3.5, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em E. Agora, tomando o limite fraco em (4.13) e usando o Lema 4.3.6, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla \varphi + V(x) u \varphi) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u)}{|x|^a} \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em E, concluímos que u é solução fraca de (4.1). Por fim, suponhamos, por absurdo, que $u \equiv 0$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in E.$$

o que implica $h \equiv 0$, contrariando a hipótese. □

4.4 Principais Resultados

A fim de obtermos uma solução com energia negativa, observemos, pelo Lema 4.3.4, que

$$-\infty < c_0 \equiv \inf_{\|u\|_E \leqslant \eta} I(u) < 0. \tag{4.16}$$

4.4.1 O Caso Subcrítico

Nesta subseção vamos supor que V satisfaz (V_1) e (V_2), e $f(s)$ tem crescimento subcrítico e satisfaz (f_0), (f_1) (ou (f_2)) e (f_3). Para provar a existência de uma solução do tipo mínimo local, vamos utilizar o princípio variacional de Ekeland [ver Teorema 1.3.3, Apêndice].

Lema 4.4.1. *O funcional* I *satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência (PS). Pelo Lema 4.3.5 temos que (u_n) é limitada. Assim, a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u_0$ em E e por (4.3) acarreta que $u_n \to u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geqslant 1$. Consequentemente, $u_n(x) \to u_0(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{[f(u_n) - f(u_0)]}{|x|^a}(u_n - u_0)dx \longrightarrow 0, \quad \text{se} \quad n \longrightarrow \infty. \tag{4.17}$$

De fato, para todo $\alpha > 0$ e usando a desigualdade em (4.7), temos

$$\begin{aligned}|f(u_n) - f(u_0)||u_n - u_0| &\leqslant (|f(u_n)| + |f(u_0)|)|u_n - u_0| \\ &\leqslant C_1\big[|u_n| + |u_0| + (e^{\alpha u_n^2} - 1) + (e^{\alpha u_0^2} - 1)\big]|u_n - u_0|.\end{aligned}$$

Este fato junto com a desigualdade de Hölder, o Teorema 3.3.1 e o Lema 3.3.1 garantem a afirmação. Agora, fazendo a diferença entre $\langle I'(u_n), u_n - u_0\rangle$ e $\langle I'(u_0), u_n - u_0\rangle$, obtemos:

$$\|u_n - u_0\|_E^2 = \langle I'(u_n) - I'(u_0), u_n - u_0\rangle + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[f(u_n) - f(u_0)]}{|x|^a}(u_n - u_0)dx.$$

Portanto, $u_n \to u_0$ em E e o resultado segue. □

Pelos Lemas 4.3.2, 4.3.3 e 4.4.1, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha para obtermos o seguinte resultado:

Proposição 4.4.1. *Se existe $\eta_1 > 0$ tal que $\|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} \leqslant \eta_1$, então o funcional I tem ponto crítico u_M no nível minimax*

$$c_M = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)) > 0,$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1]) : g(0) = 0,\ g(1) = e\}.$$

Proposição 4.4.2. *Para cada $h \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ com $h \neq 0$, a equação (4.1) tem solução do tipo mínima u_0 com $I(u_0) = c_0 < 0$, onde c_0 é definido em (4.16).*

Demonstração. Seja $\rho_h > 0$ do Lema 4.3.2. Desde que a bola fechada de raio ρ_h e centrada na origem $\bar{B}_{\rho_h}$ é um espaço métrico completo com a norma de E, convexo e o funcional I é de classe C^1 e limitado inferiormente sobre $\bar{B}_{\rho_h}$, então pelo principio variacional de Ekeland (Teorema 1.3.3, Apêndice), para cada $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in \bar{B}_{\rho_h}$ tal que

i. $c_0 \leqslant I(u_\varepsilon) \leqslant c_0 + \varepsilon$, onde $c_0 = \inf\limits_{\|u\|_E \leqslant \rho_h} I(u)$.

ii. $I(u) - I(u_\varepsilon) + \varepsilon\|u - u_\varepsilon\|_E \geqslant 0$, para todo $u \in \bar{B}_{\rho_h}$.

Fazendo $\varepsilon \to 0$ no item (i) segue que $I(u_\varepsilon) \to c_0$. Além disso, escolhendo $u = u_\varepsilon + tv$, onde $t > 0$ e $v \in E$ qualquer. Então,

$$I(u_\varepsilon) - I(u_\varepsilon + tv) \leqslant \varepsilon t\|v\|_E.$$

Dividindo por t e fazendo $t \to 0$, obtemos

$$-\langle I'(u_\varepsilon), v\rangle \leqslant \varepsilon\|v\|_E, \text{para cada } v \in E.$$

Fazendo o mesmo argumento para $-v$, obtemos

$$\langle I'(u_\varepsilon), v\rangle \leqslant \varepsilon\|v\|_E.$$

Portanto, $|\langle I'(u_\varepsilon), v\rangle| \leqslant \varepsilon\|v\|_E$ para todo $v \in E$. Então,

$$\|I'(u_\varepsilon)\|_{E^*} = \sup_{v \in E\setminus\{0\}} \frac{|\langle I'(u_\varepsilon), v\rangle|}{\|v\|_E} \leqslant \varepsilon,$$

donde concluímos que $\|I'(u_\varepsilon)\|_{E^*} \to 0$ e o resultado segue do Lema 4.4.1 combinado com o Corolário 4.3.1. □

Portanto, segue das Proposições 4.4.1 e 4.4.2, o seguinte resultado:

Teorema 4.4.1. *Se $f(s)$ tem crescimento subcrítico em $+\infty$ e $-\infty$, e que (V_1), (V_2), (f_0), (f_1) (ou (f_2)), (f_3) são satifeitas, então existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} < \delta_1$, o problema (4.1) tem pelo menos duas soluções fracas, uma com energia positiva e a outra com energia negativa.*

A seguir mostraremos um exemplo que satisfaz as condições (f_0), (f_1), (f_3) e tem crescimento subcrítico em $+\infty$ e $-\infty$.

Exemplo 4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \lambda(2s\cos(s^2) + 2se^s + s^2e^s)$ com $0 < \lambda < \lambda_1/4$.*

A condição (f_0) é óbvio. Pela definição de F segue que $F(s) = \lambda(\sin(s^2) + s^2e^s)$. Assim, para provar (f_1) é suficiente que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(s)}{sf(s)} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{\sin(s^2) + s^2e^s}{s(2s\cos(s^2) + 2se^s + s^2e^s)} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{\sin(s^2)s^{-2}e^{-s} + 1}{2\cos(s^2)e^{-s} + 2 + s} = 0.$$

Vejamos que (f_3) é satisfeita. De fato,

$$\limsup_{s\to 0} \frac{2F(s)}{s^2} = 2\lambda \lim_{s\to 0} \frac{\sin(s^2)+s^2e^s}{s^2} = 4\lambda < \lambda_1.$$

Para o crescimento subcrítico de f, note que

$$0 \leqslant \lim_{|s|\to\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} \leqslant \lambda \left\{ \lim_{|s|\to\infty} \frac{2|s||\cos(s^2)|}{e^{\alpha s^2}} + \lim_{|s|\to\infty} 2|s|e^{|s|(1-\alpha|s|)} + \lim_{|s|\to\infty} s^2 e^{|s|(1-\alpha|s|)} \right\} = 0,$$

porque o cosseno é limitado e $|s|(1-\alpha|s|) \to -\infty$ quando $|s| \to \infty$. Então,

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = 0, \quad \text{para cada } \alpha > 0.$$

4.4.2 O Caso Crítico

Nessa subseção admitiremos que f tem crescimento crítico e satisfaz as condições (f_0), (f_1) (ou, (f_2)), (f_3) e (f_4^+). A principal dificuldade desse caso é que o funcional I não satisfaz a condição de Palais-Smale em geral, apenas em certas situações. O próximo lema fornece um critério para que o funcional I satisfaça a condição de Palais-Smale.

Lema 4.4.2. *Se* (u_n) *é uma sequência* (PS) *para* I *em qualquer nível com*

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_E^2 < \frac{2\pi(2-a)}{\alpha_0},$$

então (u_n) *possui uma subsequência convergindo fortemente para uma solução fraca* u_0 *de* (4.1).

Demonstração. Pelo Lema 4.3.5, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em E e por (4.3) temos que $u_n \to u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ $1 \leqslant q < \infty$. Consequentemente, $u_n(x) \to u_0(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Além disso, pelo Lema 4.3.6,

$$\frac{f(u_n)}{|x|^a} \longrightarrow \frac{f(u_0)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad L^1_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Fazendo $n \to \infty$ em (4.13), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0 \nabla \varphi + V(x) u_0 \varphi)dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)}{|x|^a} \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} h\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in E,$$

ou seja, u_0 é solução fraca de (4.1).

Agora, verificaremos que $u_n \to u_0$ em E. Defina $w_n = u_n - u_0$. Assim, $w_n \rightharpoonup 0$ em E. Além disso, $w_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ $1 \leqslant q < \infty$. Pelo Lema de Brezis-Lieb [ver Lema 1.2.1, Apêndice], obtemos

$$\|u_n\|_E^2 = \|u_0\|_E^2 + \|w_n\|_E^2 + o_n(1). \tag{4.18}$$

Provaremos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} u_0 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)}{|x|^a} u_0 dx. \tag{4.19}$$

Com efeito, desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em E, para todo $\tau > 0$ existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $||\varphi - u_0||_E < \tau$. Usando a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)}{|x|^a} u_0 dx\right| &\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} (u_0 - \varphi) dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}_2} \frac{f(u_0)}{|x|^a} (u_0 - \varphi)\, dx\right| \\ &+ ||\varphi||_\infty \int_{supp\,\varphi} \frac{|f(u_n) - f(u_0)|}{|x|^a} dx. \end{aligned}$$

Desde que u_n é uma sequência (PS) para I em qualquer nível, temos que

$$|\langle I'(u_n), u_0 - \varphi\rangle| \leqslant \tau_n ||u_0 - \varphi||_E, \tag{4.20}$$

onde $\tau_n \to 0$. Usando a desigualdade triangular na primeira integral, obtemos

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} (u_0 - \varphi) dx\right| &\leqslant |\langle I'(u_n), u_0 - \varphi\rangle| + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n \nabla (u_0 - \varphi)|\, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} |V(x) u_n \nabla (u_0 - \varphi)|\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} |h(u_0 - \varphi)|\, dx. \end{aligned}$$

Por (4.20) e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} (u_0 - \varphi)\, dx\right| &\leqslant \tau_n ||u_0 - \varphi||_E + \left(\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (u_0 - \varphi)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x) u_n^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x) \nabla (u_0 - \varphi)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} + ||h||_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} ||u_0 - \varphi||_E. \end{aligned}$$

Completando a norma em E nas integrais acima e em seguida usando o Lema 4.3.5, obtemos

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} (u_0 - \varphi) dx\right| &\leqslant C ||u_0 - \varphi||_E \\ &< C\tau, \end{aligned}$$

onde C é uma constante independente de n e τ. De modo similar, usando o fato que $\langle I'(u_0), u_0 - \varphi\rangle = 0$ (porque u_0 é solução fraca de (4.1)), obtemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}_2} \frac{f(u_0)}{|x|^a} (u_0 - \varphi)\, dx\right| < C\tau.$$

A estimativa da última integral segue do fato de que $f(u_n)/|x|^a \to f(u_0)/|x|^a$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} u_0\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)}{|x|^a} u_0\, dx\right| < 2C\tau.$$

Isto implica em (4.19), já que τ é arbitrário.

De (4.18), temos

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = \|u_0\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} u_0\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_0\, dx + \|w_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} w_n\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} hw_n\, dx.$$

Por (4.19) podemos escrever

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = \langle I'(u_0), u_0\rangle + \|w_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} w_n\, dx + o_n(1),$$

ou seja,

$$\|w_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} w_n\, dx + o_n(1) = 0. \tag{4.21}$$

De (4.8), temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} w_n\, dx\right| \leqslant b_1 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_n|}{|x|^a} |w_n|\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha u_n^2} - 1)}{|x|^a} |w_n|\, dx, \qquad \forall \alpha > \alpha_0. \tag{4.22}$$

Escolhendo $r > 1$ tal que $ar < 2$ e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} w_n dx\right| &\leqslant b_1 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_n|^2}{|x|^a} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|w_n|^2}{|x|^a} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ b_2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha u_n^2} - 1)^r}{|x|^{ar}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |w_n|^{r'} dx\right)^{\frac{1}{r'}},\end{aligned}$$

onde $r' = (r-1)/r$. Pela desigualdade de Hölder e o Lema 3.3.1, obtemos:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} w_n dx\right| &\leqslant b_1 (C_1 \|u_n\|_{2s}^2 + \|u_n\|_2^2)^{\frac{1}{2}} (C_2 \|w_n\|_{2t}^2 + \|w_n\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ &+ b_2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\mu\alpha \|u_n^2\| (u_n/\|u_n\|_E)^2} - 1)}{|x|^{ar}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \|w_n\|^{r'},\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde $t, s > 1$ tais que $at, as < 2$ e $\mu > r$. Pelas convergências fortes $w_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ e $u_n \to u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $1 \leqslant q < \infty$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} b_1 (C_1 \|u_n\|_{2s}^2 + \|u_n\|_2^2)^{\frac{1}{2}} (C_2 \|w_n\|_{2t}^2 + \|w_n\|_2^2)^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{4.24}$$

Por hipótese, para n suficientemente grande, vale:

$$\alpha \|u_n\|_E^2 < 2\pi(2-a) \quad \text{com} \quad \alpha > \alpha_0.$$

Dividindo por 4π e multiplicando por μ, obtemos

$$\frac{\mu\alpha \|u_n\|_E^2}{4\pi} + \frac{a\mu}{2} < 1.$$

Desde que $\mu > r$, temos

$$\frac{\mu\alpha \|u_n\|_E^2}{4\pi} + \frac{ar}{2} < 1$$

e desde que $u_n/\|u_n\|_E = 1$ temos $\|u_n/\|u_n\|_E\|_2 \leqslant 1$. Então, pelo Teorema 3.3.1, segue

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\mu\alpha\|u_n^2\|(u_n/\|u_n\|_E)^2} - 1)}{|x|^{ar}} dx < \infty.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} b_2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\mu\alpha\|u_n^2\|(u_n/\|u_n\|_E)^2} - 1)}{|x|^{ar}} dx \right)^{\frac{1}{r}} \|w_n\|^{r'} = 0. \tag{4.25}$$

De (4.23), (4.24) e (4.25) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} w_n dx \longrightarrow 0.$$

Esse fato juntamente com (4.21) implica que $\|w_n\|_E \to 0$. □

O lema a seguir prova a existência de solução do tipo mínima.

Lema 4.4.3. *Para cada* $h \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ *com* $0 < \|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} < \delta_1$*, o problema* (4.1) *tem uma solução do tipo mínima* u_0 *com* $I(u_0) = c_0 < 0$*, onde* c_0 *é definido em* (4.16).

Demonstração. Seja $\rho_h > 0$ do Lema 4.3.2 e tome $\|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)}$ suficientemente pequeno tal que $\rho_h < ((2-a)2\pi/\alpha_0)^{\frac{1}{2}}$. Desde que a bola fechada de raio ρ_h e centrada na origem $\bar{B}_{\rho_h}$ é um espaço métrico completo com a norma de E, convexo e o funcional I é de classe C^1 e limitado inferiormente sobre $\bar{B}_{\rho_h}$, então pelo Teorema 1.3.3, existe sequência $(u_n) \in \bar{B}_{\rho_h}$ tal que

i. $I(u_n) \longrightarrow c_0$;

ii. $\|I'(u_n)\|_{E^*} \longrightarrow 0$,

onde

$$c_0 = \inf_{\|u\|_E \leqslant \rho_h} I(u).$$

Note que $\|u_n\|_E^2 \leqslant \rho_h^2 < ((2-a)2\pi/\alpha_0)$, e pelo Lema 4.4.2, existe uma subsequência (u_n) convergindo forte para uma solução u_0 de (4.1). Pela continuidade de I segue $I(u_0) = c_0 < 0$. □

O lema acima prova o resultado a seguir:

Teorema 4.4.2. *Supondo que* $f(s)$ *tem crescimento crítico em* $+\infty$ *e* $-\infty$*, e que* (V_1)*,* (V_2)*,* (f_0)*,* (f_2)*,* (f_3) *são satisfeitas. Então existe* $\delta_1 > 0$ *tal que se* $0 < \|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} < \delta_1$*, o problema* (4.1) *tem uma solução fraca com energia negativa.*

No decorrer dessa subseção buscaremos uma segunda solução fraca para (4.1).

Lema 4.4.4. *Se* $\|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} < \delta_1$ *e assumindo as condições* (V_1), (V_2), (f_2), (f_3) *e* (f_4^+), *então o problema* (4.1) *tem uma solução do tipo passo da montanha* u_M.

Demonstração. Pelos Lemas 4.3.2 e 4.3.3 temos que I tem a geometria do Teorema do Passo da Montanha. Assim, pelo Teorema 1.3.2, existe uma sequência (v_n) em E satisfazendo:

$$I(v_n) \longrightarrow c_M > 0 \quad \text{e} \quad \|I'(v_n)\|_{E^*} \longrightarrow 0,$$

onde c_M é nível do passo da montanha. Pelo Corolário 4.3.1, $v_n \rightharpoonup u_M$ em E, onde u_M é uma solução fraca de (4.1). $\square$

As informações sobre a solução fraca u_M não garante que $u_M \neq u_0$. Portanto, devemos obter informações sobre o nível minimax c_M.

Lema 4.4.5. *Para todo* $p > 2$ *temos que* S_p *é atingido por uma função não-negativa* $u_p \in E \setminus \{0\}$.

Demonstração. Observe que

$$S_p := \inf_{u \in E\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_E}{\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^p}{|x|^a}\right)^{\frac{1}{p}}} = \inf_{v \in E\setminus\{0\}} \left\{ \|v\|_E : \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v|^p}{|x|^a}\right)^{\frac{1}{p}} = 1 \right\}.$$

Assim, podemos escolher $(u_k) \subset E$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_k|^p}{|x|^a} = 1 \quad \text{e} \quad \|u_k\|_E \longrightarrow S_p.$$

Daí, $(\|u_k\|_E)$ é limitada, portanto, a menos de subsequência temos

i. existe $u_p \in E$ tal que $u_k \rightharpoonup u_p$ em E;

ii. $u_k \longrightarrow u_p$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $1 \leqslant q < \infty$;

iii. $u_k(x) \longrightarrow u_p$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_k|^p}{|x|^a} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_p|^p}{|x|^a}.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_p|^p}{|x|^a} = 1.$$

Consequentemente, $S_p \leqslant \|u_p\|_E$. Por outro lado, desde que $u_k \rightharpoonup u_p$ em E temos

$$\|u_p\|_E \leqslant \lim_{k\to\infty} \inf \|u_k\|_E = S_p.$$

Portanto,

$$\|u_p\|_E = S_p.$$

Por fim, trabalhando com a sequência $(|u_k|)$ em vez de (u_k) obtemos que $u_p \geqslant 0$. □

Desta forma, obtemos:

Lema 4.4.6. *Seja* $\Psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Psi(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \big(|\nabla u_p|^2 + V(x)u_p^2\big)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(tu_p)}{|x|^a}\,dx.$$

Suponha que (f_4^+) *é válida. Então*

$$\max_{t\geqslant 0} \psi(t) < \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.4.5, existe $u_p \in E$ tal que

$$S_p = \|u_p\|_E \ \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_p|^p}{|x|^a} = 1. \tag{4.26}$$

Pela condição (f_4^+), temos

$$F(tu_p) = \int_0^{tu_p} f(s)ds \geqslant \int_0^{tu_p} C_p s^{p-1} ds = \frac{C_p t^p}{p} u_p.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &\leqslant \frac{t^2}{2}\|u_p\|_E^2 - \frac{C_p t^p}{p} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u_p^p}{|x|^a}dx \\
&= \frac{t^2}{2}S_p^2 - \frac{C_p t^p}{p} \\
&\leqslant \max_{t\geqslant 0}\Big(\frac{t^2}{2}S_p^2 - \frac{C_p t^p}{p}\Big).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Consideremos o polinômio $\mu(t) = t^2 \frac{S_p^2}{2} - t^p \frac{C_p}{p}$ com $t \geqslant 0$. Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem, obtemos:

$$\mu'(t) = tS_p^2 - t^{p-1}C_p \ \text{ e } \ \mu''(t) = S_p^2 - (p-1)t^{p-2}C_p.$$

Logo, $t_0 = S_p^{2/(p-2)}/C_p^{1/(p-2)}$ é ponto crítico e $\mu''(t_0) < 0$. Assim,

$$\max_{t\geqslant 0}\mu(t) = \mu(t_0) = \frac{p-2}{2p}\frac{S_p^{2p/(p-2)}}{C_p^{2/(p-2)}}.$$

Esse fato combinado com (4.27), acarreta que

$$\Psi(t) \leqslant \frac{p-2}{2p}\frac{S_p^{2p/(p-2)}}{C_p^{2/(p-2)}}.$$

Por outro lado, a condição (f_4^+) implica que

$$\frac{S_p^{2p/(p-2)}}{C_p^{2/(p-2)}} < \frac{2p(2-a)\pi}{\alpha_0(p-2)}.$$

Portanto,

$$\Psi(t) < \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}$$

e o lema segue. □

Corolário 4.4.1. *Se* $\|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)}$ *é suficientemente pequeno e assumindo as condições* (V_1), (V_2), (f_2), (f_3) *e* (f_4^+). *Então,*

$$\max_{t\geqslant 0} I(tu_p) = \max_{t\geqslant 0}\left\{\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\|u_p\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2}\frac{F(tu_p)}{|x|^a}dx - t\int_{\mathbb{R}^2}hu_p dx\right\} < \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

Demonstração. Observe que

$$I(tu_p) = \Psi(t) - t\|hu_p\|_1 \ \text{ e } \ \|hu_p\|_1 \leqslant \|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)}\|u_p\|_E.$$

Assim, tomando $\|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)}$ suficientemente pequeno e usando o Lema 4.4.6 segue o resultado. □

De modo a obter resultados de convergência, precisamos melhorar a estimativa do Corolário 4.4.1.

Corolário 4.4.2. *Assumindo as condições* (f_2), (f_3) *e* (f_4^+), *temos que existe* $\delta_2 > 0$ *tal que para todo* $h \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ *com* $0 < \|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} < \delta_2$, *teremos* u_p *satisfazendo*

$$I(tu_p) < c_0 + \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Demonstração. Podemos aumentar o ínfimo c_0, porque c_0 cresce quando $\|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)}$ decresce e $c_0 \to 0$ quando $\|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} \to 0$. Assim, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} < \delta_2$. Então pelo Corolário 4.4.1 , temos

$$\max_{t\geqslant 0} I(tu_p) < c_0 + \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

□

Observação 4.4.1. *Do Corolário* 4.4.2, *segue que*

$$0 < c_M < c_0 + \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

No caso crítico precisaremos usar o seguinte resultado de convergência:

Lema 4.4.7. *Assumamos que* $f(s)$ *satisfaz* (f_2), (f_3) *e tem crescimento crítico. Se* $(v_n) \subset E$ *é uma sequência* (PS) *para* I *e* u_0 *é seu limite fraco, então a menos de subsequência, temos*

$$\frac{F(v_n)}{|x|^a} \longrightarrow \frac{F(u_0)}{|x|^a} \quad em \quad L^1(\mathbb{R}^2).$$

Demonstração. Pelos Lemas 4.3.5 e 4.3.6, obtemos

$$\frac{f(v_n)}{|x|^a} \longrightarrow \frac{f(u_0)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad L^1(\mathbb{R}^2).$$

Assim, existe $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $|f(v_n)|/|x|^a \leqslant g_1$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Além disso, desde que $v_n \rightharpoonup u_0$ em E e usando (4.3) concluímos que $v_n \to u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $1 \leqslant q < \infty$. Então, a menos de subsequência existe $g_2 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $|v_n|^2/|x|^a \leqslant g_2$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ e $v_n(x) \to u_0(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Das condições (f_2) e (f_3), obtemos

$$|F(v_n)| \leqslant C|v_n|^2 + M_0|f(v_n)| \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\frac{F(v_n)}{|x|^a} \longrightarrow \frac{F(u_0)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad L^1(\mathbb{R}^2).$$

□

Nesse momento, temos condições de provar o seguinte teorema:

Teorema 4.4.3. *Sob as mesmas condições do Teorema* 4.4.2, *se acrescentarmos a condição*

(f_4^+) *existem constantes* $p > 2$ *e* C_p *tais que*

$$f(s) \geqslant C_p s^{p-1}, \quad \forall s \geqslant 0,$$

onde

$$C_p > \left[\frac{\alpha_0(p-2)}{2p(2-a)\pi}\right]^{(p-2)/2} S_p^p,$$

e

$$S_p := \inf_{u \in E\setminus\{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^p}{|x|^a}dx\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Então, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} < \delta_2$, o problema (4.1) *tem uma segunda solução fraca.*

Demonstração. Pelos Lemas 4.4.3 e 4.4.4 existem soluções fracas u_0 e u_M para (4.1). Assim, é suficiente mostrar que $u_0 \neq u_M$. A demonstração do teorema segue da afirmação abaixo.

Afirmação 7. *Se $\delta_1 > 0$ é suficientemente pequeno, então as soluções de* (4.1) *obtidas pelos lemas* 4.4.3 *e* 4.4.4 *são distintas.*

De fato, pelos Lemas 4.4.3 e 4.4.4, existem sequências (u_n) e (v_n) em E tais que

$$u_n \longrightarrow u_0, \;\; I(u_n) \longrightarrow c_0 < 0, \;\; \langle I'(u_n), u_n\rangle \longrightarrow 0, \tag{4.28}$$

e

$$v_n \rightharpoonup u_M, \;\; I(v_n) \longrightarrow c_M > 0, \;\; \langle I'(v_n), v_n\rangle \longrightarrow 0. \tag{4.29}$$

Suponhamos, por contradição, que $u_0 = u_M$. Assim, $v_n \rightharpoonup u_0$ em E, isto é, (v_n) é limitada em E. Desde que $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$, segue (v_n) é limitada no espaço Hilbert $H^1(\mathbb{R}^2)$. Então, a menos de subsequência, existe $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, e usando a definição de convergência fraca podemos concluir que $v_0 = u_0$. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,2} \geqslant \|u_0\|_{1,2} > 0,$$

porque $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,2}$ existe. Definindo

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{1,2}} \;\text{ e }\; w_0 = \frac{u_0}{\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,2}},$$

temos:

a. $\|w_n\|_{1,2} = 1$;

b. $w_n \rightharpoonup w_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

De fato, para todo $\rho \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \rho(w_n) &= \lim_{n\to\infty} \rho\Big(\frac{v_n}{||v_n||_{1,2}}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\rho(v_n)}{||v_n||_{1,2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \rho(v_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} ||v_n||_{1,2}} \\
&= \frac{\rho(u_0)}{\lim\limits_{n\to\infty} ||v_n||_{1,2}} \\
&= \rho\Big(\frac{u_0}{\lim\limits_{n\to\infty} ||v_n||_{1,2}}\Big) \\
&= \rho(w_0).
\end{aligned}$$

Agora, analisaremos as possibilidades:

i. $||w_0||_{1,2} = 1$;

ii. $||w_0||_{1,2} < 1$.

Se acontece o item (i), temos

$$\lim_{n\to\infty} ||v_n||_{1,2} = ||u_0||_{1,2}.$$

Isto juntamente com a convergência fraca de v_n para u_0 em $H^1(\mathbb{R}^2)$ implica que

$$v_n \longrightarrow u_0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

Pela Proposição 1.2.8, existe $g \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $|v_n| \leqslant g$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Isto junto com (4.8) implica que

$$\frac{|f(v_n)v_n|}{|x|^a} \leqslant c_1\frac{|g|^2}{|x|^a} + c_2\frac{|g|(e^{\alpha g^2}-1)}{|x|^a} \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2,$$

para cada $\alpha > \alpha_0$. Pela Observação 3.3.1 e a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geqslant 2$, obtemos

$$\left\{c_1\frac{|g|^2}{|x|^a} + c_2\frac{|g|(e^{\alpha g^2}-1)}{|x|^a}\right\} \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(v_n)v_n}{|x|^a}dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)u_0}{|x|^a}dx.$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)u_n}{|x|^a} dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)u_0}{|x|^a} dx,$$

já que $u_n \to u_0$ fortemente em E. Por (4.28) e (4.29), segue que

$$\lim_{n\to\infty} \big[\langle I'(u_n), u_n\rangle - \langle I'(v_n), v_n\rangle\big] = 0,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} (\|u_n\|_E^2 - \|v_n\|_E^2) - \lim_{n\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)u_n}{|x|^a} dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(v_n)v_n}{|x|^a} dx\right] - \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} h(u_n - v_n) = 0,$$

donde concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_E^2 = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_E^2.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_E = \|u_0\|_E.$$

Isto juntamente com a convergência fraca de v_n para u_0 em E implica que

$$v_n \longrightarrow u_0 \text{ em } E.$$

Consequentemente, $I(v_n) \to I(u_0) = c_0$. Assim, por (4.28) e (4.29) teríamos a seguinte contradição $c_0 = c_M$.

Agora, suponhamos que ocorre o item (ii). Neste caso,

$$\|u_0\|_{1,2} < \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,2}.$$

Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 \leqslant \frac{(2-a)2\pi}{1 - \|w_0\|_{1,2}^2} - \delta \tag{4.30}$$

para n grande. De fato, pela Observação 4.4.1, temos

$$\alpha_0 < \frac{(2-a)\pi}{c_M - I(u_0)}.$$

Assim, podemos tomar $\mu > 1$ suficientemente próximo de 1 e $\delta > 0$ tais que

$$\mu\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 \leqslant \frac{(2-a)\pi}{c_M - I(u_0)} \|v_n\|_{1,2}^2 - \delta. \tag{4.31}$$

Observemos que

$$I(v_n) = \frac{1}{2}\|v_n\|_{1,2}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2\, dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} v_n^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(v_n)}{|x|^a} dx - \int_{\mathbb{R}^2} h v_n\, dx. \tag{4.32}$$

Usando que $v_n \rightharpoonup u_0$ (ou seja, (v_n) é limitada em E) e a imersão compacta dada em (4.3), a menos de subsequência, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} v_n^2 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} u_0^2 dx \ \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} h v_n dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} h u_0 dx.$$

Este fato junto com (4.29) e Lema 4.4.7 implica que (4.32) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2}\|v_n\|_{1,2}^2 = c_M - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{F(u_0)}{|x|^a} + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\right]dx + o_n(1). \quad (4.33)$$

Assim, por (4.31) e (4.33) segue que

$$\begin{aligned}\mu\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2 \leqslant \frac{(2-a)2\pi}{c_M - I(u_0)}\Bigg\{c_M &- \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{F(u_0)}{|x|^a} + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\right]dx + o_n(1)\Bigg\} - \delta, \quad (4.34)\end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Seja

$$A = \left\{c_M - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{F(u_0)}{|x|^a} + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\right]dx\right\}(1 - \|w_0\|_{1,2}^2).$$

Então,

$$\begin{aligned}A &= c_M - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{F(u_0)}{|x|^a} + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\right]dx - \|w_0\|_{1,2}^2\left[\frac{1}{2}\|v_n\|_{1,2}^2 - o_n(1)\right] \\ &= c_M - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2 dx - I(u_0) + \frac{1}{2}\|u_0\|_{1,2}^2 - \|w_0\|_{1,2}^2\left[\frac{1}{2}\|v_n\|_{1,2}^2 - o_n(1)\right] \\ &\leqslant c_M - I(u_0) + \frac{1}{2}\|u_0\|_{1,2}^2\frac{1}{2}\|v_n\|_{1,2}^2\|w_0\|_{1,2}^2 + o_n(1)\|w_0\|_{1,2}^2 \\ &< c_M - I(u_0) + \frac{1}{2}\|u_0\|_{1,2}^2 - \frac{1}{2}\|v_n\|_{1,2}^2\|w_0\|_{1,2}^2 + o_n(1),\end{aligned}$$

desde que

p.1 $\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{F(u_0)}{|x|^a} + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\right]dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2 dx - I(u_0) + \frac{1}{2}\|u_0\|_{1,2}^2$;
Com efeito, desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade, usando a definição do funcional I e a norma do espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$, obtemos o lado direito da igualdade.

p.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2 dx$
Com efeito, usando que $v_n \rightharpoonup u_0$ em E (ou seja, (v_n) é limitada em E) e a imersão compacta dada em (4.3), a menos de subsequência, podemos assumir que

$$V(x)v_n^2(x) \longrightarrow V(x)u_0^2(x) \ \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2$$

e usando o Lema de Fatou segue p.2.

Fazendo $n \to \infty$ e usando a definição de w_0, obtemos

$$A \leqslant c_M - I(u_0).$$

Este fato juntamente com (4.34) implica em (4.30) para n grande. Assim,

$$\mu\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2 < \frac{(2-a)2\pi}{1-\|w_0\|_{1,2}^2},$$

e podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$(\mu+\varepsilon)\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2 < \frac{(2-a)2\pi}{1-\|w_0\|_{1,2}^2}.$$

Tomando $p = (\mu+\varepsilon)\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2$ na Proposição 3.3.1, segue

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left(e^{(\mu+\varepsilon)\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2|w_n|^2}-1\right)}{|x|^a}dx < \infty,$$

e desde que $a < a(\mu+\varepsilon)$, implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left(e^{(\mu+\varepsilon)\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2|w_n|^2}-1\right)}{|x|^{a(\mu+\varepsilon)}}dx \leqslant C. \tag{4.35}$$

Agora, mostraremos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(v_n)(v_n-u_0)}{|x|^a}dx\right| \longrightarrow 0. \tag{4.36}$$

De fato, por (4.8) e a desigualdade de Hölder, segue

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(v_n)(v_n-u_0)}{|x|^a}dx\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(v_n)||v_n-u_0|}{|x|^a}dx \\
&\leqslant b_1\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v_n||v_n-u_0|}{|x|^a}dx + b_2\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha v_n^2}-1)|v_n-u_0|}{|x|^a}dx \\
&\leqslant b_1\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v_n|^2}{|x|^a}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v_n-u_0|^2}{|x|^a}dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ b_2\left(\int_{\mathbb{R}^2} |v_n-u_0|^{\mu'}dx\right)^{\frac{1}{\mu'}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha v_n^2}-1)^{\mu}}{|x|^{a\mu}}dx\right)^{\frac{1}{\mu}},
\end{aligned} \tag{4.37}$$

onde $\mu > 1$ tal que $a\mu < 2$, $\mu' = \mu/(\mu-1)$ e para cada $\alpha > \alpha_0$. Vejamos que

- $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v_n|^2}{|x|^a}dx < \infty$;

  Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v_n|^2}{|x|^a}dx &= \int_{|x|\leqslant 1} \frac{|v_n|^2}{|x|^a}dx + \int_{|x|>1} \frac{|v_n|^2}{|x|^a}dx \\
&\leqslant \left(\int_{|x|\leqslant 1} |v_n|^{2q'}dx\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_{|x|\leqslant 1} |x|^{-aq}dx\right)^{\frac{1}{q}} + \int_{|x|>1} |v_n|^2dx \\
&\leqslant \left(\int_{|x|\leqslant 1} |v_n|^{2q'}dx\right)^{\frac{2}{2q'}}\left(\int_{|x|\leqslant 1} |x|^{-aq}dx\right)^{\frac{1}{q}} + \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^2dx \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

onde $q > 1$ tal que $aq < 2$ e $q' = q/(q-1)$, e (4.3) implica que $v_n \in L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $1 \leqslant q < \infty$.

- $\int_{\mathbb{R}^2} \dfrac{|v_n - u_0|^2}{|x|^a} dx \leqslant \|v_n - u_0\|_{2\tau}^2 C + \|v_n - u_0\|_2^2$;
Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v_n - u_0|^2}{|x|^a} dx &\leqslant \int_{|x|<1} \frac{|v_n - u_0|^2}{|x|^a} dx + \int_{\mathbb{R}^2} |v_n - u_0|^2 dx \\
&\leqslant \left(\int_{|x|<1} |v_n - u_0|^{2\tau} dx \right)^{\frac{1}{\tau}} \left(\int_{|x|<1} |x|^{-a\tau'} dx \right)^{\frac{1}{\tau'}} + \|v_n - u_0\|_2^2 \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v_n - u_0|^{2\tau} dx \right)^{\frac{2}{2\tau}} \left(\int_{|x|<1} |x|^{-a\tau'} dx \right)^{\frac{1}{\tau'}} + \|v_n - u_0\|_2^2,
\end{aligned}$$

onde $\tau' > 1$ tal que $a\tau' < 2$ e $\tau = \tau'/(\tau'-1)$.

- $\int_{\mathbb{R}^2} \dfrac{(e^{\alpha v_n^2} - 1)^{\mu}}{|x|^{a\mu}} dx < \infty$.
Com efeito, pela definição de w_n tem-se que $|v_n|^2 = \|v_n\|_{1,2}^2 |w_n|^2$ e pelo Lema 3.3.1, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha v_n^2} - 1)^{\mu}}{|x|^{a\mu}} dx &\leqslant C \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta \alpha \|v_n\|_{1,2}^2 |w_n|^2} - 1)}{|x|^{a\mu}} dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{k \alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 |w_n|^2} - 1)}{|x|^{a\mu}} dx,
\end{aligned}$$

para cada $\beta > \mu$ e $k = \beta\alpha/\alpha_0$. Escolhendo α e β suficientemente próximos de α_0 e μ, respectivamente, tais que $k = \mu + \varepsilon$, o resultado segue de (4.35).

Das estimativas acima e por (4.37), existem constantes C_1, C_2 e C_3 tais que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(v_n)(v_n - u_0)}{|x|^a} dx \right| \leqslant C_1 (C_2 \|v_n - u_0\|_{2\tau} + \|v_n - u_0\|_2)^{\frac{1}{2}} + C_3 \|v_n - u_0\|_{\mu'}.$$

A desigualdade acima juntamente com $v_n \to u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $1 \leqslant q < \infty$, implicam em (4.36). A convergência em (4.36) juntamente com o fato de que $I'(v_n)(v_n - u_0) \to 0$ mostra-nos que

$$(v_n, v_n - u_0) \longrightarrow 0,$$

e desde que $v_n \rightharpoonup u_0$ em E, temos

$$(u_0, v_n - u_0) \longrightarrow 0.$$

Então,

$$(v_n, v_n - u_0) - (u_0, v_n - u_0) \longrightarrow 0,$$

ou equivalentemente,

$$\|v_n - u_0\|_E^2 \longrightarrow 0.$$

Portanto, $v_n \to u_0$ em E. Assim, $I(v_n) \to I(u_0) = c_0$. Este fato, contradiz (4.28) e (4.29). □

As seguir mostraremos um exemplo que satisfaz as condições (f_0), (f_2), (f_3) e (f_4^+) com crescimento crítico.

Exemplo 5. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(s) = \begin{cases} 0, & se \quad s \in (-\infty, 0) \\ C_p s^{p-1} + 2s(e^{s^2} - 1), & se \quad s \in [0, 1] \\ C_p s^{p-1} + (e-1)[(2s-1)e^{s^2-s} + s], & se \quad s \in (1, +\infty). \end{cases}$$

A condição (f_0) é óbvia. Note que para $s > 1$ existe $A > 0$ tal que

$$F(s) = A + \frac{C_p}{p}(s^p - 1) + (e^{s^2-s}) + \frac{(s^2-1)}{2}.$$

Assim a condição (f_2) é satisfeita, isto é,

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(s)}{f(s)} = 0.$$

Para (f_3), note que

$$\limsup_{s\to 0} \frac{2F(s)}{s^2} = 2\lim_{s\to 0} \frac{C_p p^{-1} s^p + (e^{s^2} - 1) - s^2}{s^2} = 0 < \lambda_1.$$

Além disso, a condição (f_4^+) segue pela definição de f.

Por fim, para verificar o crescimento crítico em $+\infty$, note que $\alpha_0 = 1$.

4.4.3 Dependência do Sinal

A pertubação feita em h, embora pequena, tem influência direta sobre as soluções fracas obtidas nos Teoremas 4.4.1 e 4.4.3. Os resultados a seguir retratam tal dependência.

Teorema 4.4.4. *Sob as mesmas condições do Teorema* 4.4.1*, se* $h(x) \geqslant 0$ $(h(x) \leqslant 0)$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^2$*, então as soluções obtidas no Teorema* 4.4.1 *são não-negativas (não-positivas), respectivamente.*

Teorema 4.4.5. *Sob as mesmas condições do Teorema* 4.4.3*, se* $h(x) \geqslant 0$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^2$*, então as soluções obtidas no Teorema* 4.4.3 *são não-negativas. Além disso, se* $h(x) \leqslant 0$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^2$ *e* $f(s)$ *satisfaz a condição:*

(f_4^-) $|f(s)| \geqslant C_p|s|^{p-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$

então as soluções são não-positivas.

No caso em que $h(x) \geqslant 0$, redefinimos $f(s) = 0$ se $s < 0$. Assim, no caso subcrítico (f_1) vale para $s \geqslant s_1$ e no caso crítico (f_2) vale para $s \geqslant R_0$. Observemos que as condições (f_1) e (f_2) foram necessárias para verificar algumas propriedades das sequêcias de Palais-Smale e os Lema 4.3.3, 4.3.5 e 4.4.7, ainda são válidos para essa não-linearidade modificada.

As demonstrações dos Teoremas 4.4.4 e 4.4.5 são consequências dos dois corolários a seguir.

Corolário 4.4.3. *Se* $h(x) \geqslant 0$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^2$*, então as soluções fracas de* (4.1) *são não-negativas.*

Demonstração. Seja $u \in E$ uma solução fraca de (4.1). Definamos,

$$u^+ = \text{máx}\{u, 0\} \text{ e } u^- = \text{máx}\{-u, 0\}.$$

Note que

a. se $u(x) > 0$, então $u^+ = u$;

b. se $u(x) < 0$, então $u^- = -u$;

c. se $u(x) = 0$, então $u^+ = u = u^-$.

Escolhendo $v = u^-$ na definição de solução fraca do problema (4.1), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla u^- + V(x)uu^-)dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u)}{|x|^a} u^- dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu^- dx = 0.$$

Suponhamos, por contradição, que $u < 0$. Então, $u(x) = -u^-(x)$ e $f(u) = 0$. Portanto,

$$\|u^-\|_E^2 = -\int_{\mathbb{R}^2} hu^- dx \leqslant 0.$$

Assim, $u^- = 0$, contradizendo a suposição. Portanto, $u \geqslant 0$. □

Agora, no caso em $h(x) \leqslant 0$, precisaremos definir:

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} -f(-s), & \text{se} \quad s \leqslant 0 \\ f(s), & \text{se} \quad s \geqslant 0. \end{cases}$$

Corolário 4.4.4. *Se* $h(x) \leqslant 0$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^2$ *e assumindo que* (f_4^-) *é válida, então existe pelo menos duas soluções fracas não-positivas de* (4.1).

Demonstração. Considere o funcional $\tilde{I} : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{F}(u)}{|x|^a}\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} (-h)u\,dx,$$

onde $\tilde{F}$ é a primitiva de $\tilde{f}$. Usando a definição $\tilde{f}$ e as condições sobre f, podemos concluir que $\tilde{f}$ satisfaz as mesmas hipóteses de f. Assim,

$(\tilde{f}_0)$ $\tilde{f} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\tilde{f}(0) = 0$;

$(\tilde{f}_1)$ existem $\theta > 2$ e s_1 tais que $|s| > s_1$, tem-se:

$$0 < \theta\tilde{F}(s) = \theta\int_0^s \tilde{f}(t)dt \leqslant s\tilde{f}(s);$$

$(\tilde{f}_2)$ existem constantes positivas R_0 e M_0 tais que para todo $|s| \geqslant R_0$ tem-se:

$$0 < \tilde{F}(s) \leqslant M_0|\tilde{f}(s)|;$$

$(\tilde{f}_3)$ $\limsup_{s\to 0} \dfrac{2\tilde{F}(s)}{s^2} < \lambda_1$;

$(\tilde{f}_4^+)$ existem constantes $p > 2$ e C_p tais que

$$\tilde{f}(s) \geqslant C_p s^{p-1}, \quad \forall s \geqslant 0;$$

$(\tilde{f}_4^-)$ $|\tilde{f}(s)| \geqslant C_p|s|^{p-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

Da hipótese de que $h(x) \leqslant 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ implica que $-h(x) \geqslant 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Pelo Corolário 4.4.3, $\tilde{I}(u)$ tem dois pontos críticos não-triviais e não-negativos. Digamos que $\tilde{u}$ seja um desses pontos críticos, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla\tilde{u}\nabla v + V(x)\tilde{u}v)dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{f}(\tilde{u})v}{|x|^a}\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} hv dx = 0, \;\; v \in E.$$

Desde que $\tilde{u} \geqslant 0$ implica que $\tilde{f}(\tilde{u}) = -f(\tilde{u})$ e tomando $-v$ em vez de v, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla(-\tilde{u})\nabla v + V(x)(-\tilde{u})v)dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(-\tilde{u})v}{|x|^a}\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv dx = 0, \;\; v \in E.$$

Daí, concluímos que $-\tilde{u}$ é uma solução fraca não-positiva de (4.1). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] ADACHI S.; TANAKA, K. *Trudinger type inequalities in* $\mathbb{R}^n$ *and their best exponents*, Proc. Am. Math. Soc. 128, 2051 – 2057 (2000).

[2] ADIMURTHI; SANDEEP, K. *A singular Moser-Trudinger embedding and its applications*, NoDEA, Nonlinear Differ. Equ.Appl. 13, 585 – 603 (2007).

[3] ALBUQUERQUE, F. *Uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser em espaços de Sobolev com peso e aplicações*, Tese de Dotorado, UFPB/UFCG: João Pessoa, 2014.

[4] BERESTYCKI, H.; LIONS, P. L. *Nonlinear scalar field equations, I. Existence of ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983), 313 – 346.

[5] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, 2002.

[6] BRÉZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[7] BRÉZIS, H.; LIEB, E. *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Am. Math. Soc. 88, 486 – 490 (1983).

[8] CAO, D. M. *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Differential Equations 17, 407 – 435 (1992).

[9] CAZENAVE, T. *An introduction to semilinear elliptic equations*, UFRJ: Rio de Janeiro, 2008.

[10] CIANCHI, A.; LUTWAK, E.; YANG, D.; ZHANG, G. *Affine Moser-Trudinger and Morrey-Sobolev inequalities.* Calc. Var. Partial Differential Equations 36 (2009), no. 3, 419 – 436. (Reviewer: Cristina Tarsi) 46E35 (46E30).

[11] DE SOUZA, M. X. *Multiplicidade de soluções para problemas elípticos singulares envolvendo crescimento crítico*, Tese de Dotorado, Universidade Federal de Pernambuco: Recife, 2010.

[12] DO Ó, J. M. *Semilinear Dirichlet problems for the N-laplaciano in* $\mathbb{R}^n$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Differential Integral Equations 5 (1996), 967 – 979.

[13] DO Ó, J. M. , *N−Laplacian equations in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth*, Abstr. Appl. Anal. 2, 301 – 315 (1997).

[14] DO Ó, J. M.; MEDEIROS, E.; SEVERO, U. B. *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two*, J. Math. Anal. Appl. 345 (2008) 286 – 304.

[15] DO Ó, J. M.; DE SOUZA, M. X. *On a class of singular Trudinger-Moser type inequalities and its applications.* (English summary) Math. Nachr. 284 (2011), no. 14-15, 1754 – 1776.

[16] FIGUEIREDO, D. G. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics Vol. 81 (Springer-Verlag, Bombay, 1989).

[17] FIGUEIREDO, D. G.; MIYAGAKI, O. H.; RUF, B. *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. 4, 139 – 153 (1995).

[18] HEMPEL, J. A.; MORRIS, G. R.; TRUDINGER, N. S. *On the sharpness of a limiting case of the Sobolev imbedding theorem.* Bull. Austral. Math. Soc. 3 1970 369 – 373.

[19] KESAVAN, S. *Symmetrization and Applications,Series in Analysis*, Volume 3, World Scientific, 2006.

[20] KONDRAT'EV, V.; SHUBIN, M. *Discreteness of spectrum for the Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry, Operator Theory.* Adv. Appl., 110 (Birkhäuser, Basel, 1999).

[21] LIEB, E. H.; LOSS, M. *Analysis*, 2ª edição, Math. Associantion of America, 2001.

[22] LIONS, P. L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, Part I*, Revista Matemática Iberoamericana 1 (1985), 145 – 201.

[23] MARSHALL, D. E. *A new proof of a sharp inequality concerning the Dirichlet integral*, Ark. Math. 27 (1989), 131 - 137.

[24] MOSER, J. *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Ind. Univ. Math. J. 20, 1077 – 1092 (1971).

[25] POHOZAEV, S.I. *The Sobolev embedding in the case $pl = n$.* In: Proceedings of the Technical Scientific Conference on Advances of ScientificResearch 1964 – 1965. Mathematics Section, Moscov. Energet. Inst., pp. 158 – 170 (1965)

[26] TRUDINGER, N. S. *On the embedding into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. 17, 473 – 483 (1967).

[27] YUDOVICH, V.I. *Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations.* Dok. Akad. Nauk. SSSR 138, 804 – 808 (1961). [English translation in Soviet Math. Doklady 2 (1961), 746 – 749]