Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Controlabilidade Exata para o Sistema de Timoshenko

Antonio Luiz Pereira

Teresina - 2015

Antonio Luiz Pereira

Dissertação de Mestrado:

Controlabilidade Exata para o Sistema de Timoshenko

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Setorial do CCN

P436c Pereira, A. L.

Controlabilidade Exata para o Sistema de Timoshenko./
Antonio Luiz Pereira – Teresina: 2015.

42f.

Dissertação (Mestrado) Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal do Piauí, 2015.

Orientador: Prof. Dr.Marcondes Rodrigues Clark.

1. Análise/ Equações Diferenciais Parciais. 3.
Sistema de Timoshenco. I. Título

CDD 515.353

A minha mãe Isabel, ao meu pai Manoel, e toda minha familia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por essa vitoria.

Aos meus pais, pois sem a ajuda deles não teria conseguido manter os meus estudos.

Ao professor Dr. Alexandro Marinho pelo incentivo ao ingresso no mestrado.

Ao meu orientador professor Dr. Marcondes Clark, pelo apoio nessa dissertação.

Aos meus professores da pós-graduação em Matemática da UFPI.

Aos meus amigos do mestrado que muito me apoiaram e incentivaram. Não irei citá-los pois são muitos e não quero arriscar esquecer de algum.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"Deitar-me faz em verdes pastos, guia-me mensamente a águas tranguilas.".

Salmo 23.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a controlabilidade exata para o sistema de Timoshenko

$$\left| \begin{array}{l} y'' - ay_{xx} - z_x + y = 0 \text{ em } Q, \\ z'' - bz_{xx} + y_x = 0 \text{ em } Q, \end{array} \right. \tag{1}$$

$$\left| \begin{array}{l} y(0,t) = v(t), \quad y(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \\ z(0,t) = w(t), \quad z(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} y(x,0) = y^0(x), \quad y'(x,0) = y^1(x) \text{ em } \Omega, \\ z(x,0) = z^0(x), \quad z'(x,0) = z^1(x) \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{3}$$

o qual é motivado por questões de elasticidade unidimensional. Tomamos uma barra de comprimento L, onde $z = z(x,t)$ é a deformação da curva, $0 \leqslant x \leqslant 1$ e $0 \leqslant t \leqslant T$, com $T > 0$ e $y = y(x,t)$ é a inclinação da deformação da curva, sendo *a* e *b* constantes. Representamos por $\Omega = [0,1]$ e por Q o cilindro $Q = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^2$. A controlabilidade exata para (1) é formulada como segue: Dado $T > 0$, encontrar um espaço de Hilbert H tal que para qualquer conjuntos de valor inicial $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\}$ em H, existe um par de controles $v(t)$ e $w(t)$ em $L^2(0,T)$ tal que a solução $y = y(x,t)$, $z = z(x,t)$ de (1), (2) e (3) satisfaça a condição:

$$\left| \begin{array}{l} y(x,T) = 0, \quad y'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1), \\ z(x,T) = 0, \quad z'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1), \end{array} \right. \tag{4}$$

onde para conseguimos essa controlabilidade será usado o método de Faedo-Galerkin, no problema aproximado.

Abstract

In this paper we study the controllability shall keep to the Timoshenko system

$$\left| \begin{array}{l} y'' - a y_{xx} - z_x + y = 0 \text{ in } Q, \\ z'' - b z_{xx} + y_x = 0 \text{ in } Q, \end{array} \right. \tag{5}$$

$$\left| \begin{array}{l} y(0,t) = v(t), \quad y(1,t) = 0 \text{ in } (0,T), \\ z(0,t) = w(t), \quad z(1,t) = 0 \text{ in } (0,T), \end{array} \right. \tag{6}$$

$$\left| \begin{array}{l} y(x,0) = y^0(x), \quad y'(x,0) = y^1(x) \text{ in } \Omega, \\ z(x,0) = z^0(x), \quad z'(x,0) = z^1(x) \text{ in } \Omega. \end{array} \right. \tag{7}$$

Which is motivated by questions of one dimensional elasticity. Note that a and b are positive constants. We suppose the beam of lenght $L = 1$. The transverse displacement of the point x, for $0 \leqslant x \leqslant 1$ at the instant t, $0 \leqslant t \leqslant T$, that is , the deformation curve, is represented by $z = z(x,t)$. We denote by $y = y(x,t)$ the slope of the deformation curve $z = z(x,t)$. Let us represent by Ω the segment $[0,1]$ of the line $\mathbb{R}$, which represents beam in equilibrium. By Q we represent the rectangle $\Omega \times (0,T)$ of the plane $\mathbb{R}^2$, where T is a positive real number. The exact controllability for (1) is formulated as follows: given $T > 0$ find a Hilbert space H such that for every set $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\}$ em H, there exists a pair of controls $v(t), w(t) \in L^2(0,T)$ such that the solution $y = y(x,t)$, $z = z(x,t)$ of (5), (6) and (8) satisfy the condition:

$$\left| \begin{array}{l} y(x,T) = 0, \quad y'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1), \\ z(x,T) = 0, \quad z'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1), \end{array} \right.$$

where we got to this controllability it will be used the Faedo - Galerkin method , the approximate problem.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudarmos o seguinte resultado.

Teorema.{Controlabilidade Exata para o Sistema de Timoshenko}. Sejam a e b números reais, onde

$$\min\{a, b\} > 1 \ \text{ e } \ \alpha = \max\left\{\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right\},$$

com $T > 2\alpha$. Então para cada conjunto de valor inicial $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$, existem um par de controles $v(t), w(t) \in L^2(0,T)$ tal que $\{y(t), z(t)\}$ é solução de (8), (9) e (10), satisfazendo (11).

$$\left| \begin{array}{l} y'' - a y_{xx} - z_x + y = 0 \text{ em } Q, \\ z'' - b z_{xx} + y_x = 0 \text{ em } Q, \end{array} \right. \tag{8}$$

$$\left| \begin{array}{l} y(0,t) = v(t), \quad y(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \\ z(0,t) = w(t), \quad z(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \end{array} \right. \tag{9}$$

$$\left| \begin{array}{l} y(x,0) = y^0(x), \quad y'(x,0) = y^1(x) \text{ em } \Omega, \\ z(x,0) = z^0(x), \quad z'(x,0) = z^1(x) \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{10}$$

$$\left| \begin{array}{l} y(x,T) = 0, \quad y'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1), \\ z(x,T) = 0, \quad z'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1), \end{array} \right. \tag{11}$$

onde representamos por Ω o intervalo $[0,1]$, e por Q o cilindro $Q = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^2$, com $T > 0$. Este trabalho será dividido em 3 capítulos da seguinte forma:

No Capítulo 1 enunciamos os resultados básicos a serem utilizados no decorrer trabalho.

No Capítulo 2 estudaremos a desigualdade de energia associada ao sistema acima, as desigualdades direta e inversa. Também será estudado a solução forte e solução fraca desse sistema, onde usaremos o método de Faedo-Galerkin.

No Capítulo 3, será demonstrado o teorema acima usando o Teorema da Representação de Riesz.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as definições, notações básicas de Equações Diferenciais Parciais e os resultados preliminares que serão utilizadas nesse trabalho.

1.1 Resultados Básicos de Distribuições Escalares e Espaço de Sobolev

Ao longo desse trabalho denotaremos por Ω um aberto limitado do R^n. Denomina-se suporte de uma função real $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, contínua em Ω, ao fecho do conjunto dos pontos de Ω onde ϕ não é nula e é representado por:

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}}.$$

Denotemos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω.
Um multi-indice é uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de números naturais. Escreveremos $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e representamos D^α como:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}}$$

Definiremos a noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ que o tornará um espaço vetorial topológico. Nesse sentido, dizemos que uma sequência $(u_n)_{n\in N}$ converge para $u \in C_0^\infty(\Omega)$ quando vale as condições abaixo:

a) Todas as u_n possuírem suporte em um compacto $K \subset \Omega$;

b) A sequência $(u_n)_{n\in N}$ converge para u uniformemente em K juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido com as propriedades $a)$ e $b)$ será denotado por $D(\Omega)$. Uma distribuição sobre Ω é uma forma linear e contínua sobre $D(\Omega)$, isto é, uma aplicação $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que

1. $T(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T(\phi) + \beta T(\psi), \forall\, \phi, \psi \in D(\Omega), \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2. Se $\varphi_n \to \varphi$ em $D(\Omega)$, então $T\varphi_n \to T\varphi$ em $\mathbb{R}$.

O valor de T aplicado numa função φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$. Agora, definimos uma noção de convergência para esse funcionais. Dizemos que $T_n \to T$ em $D(\Omega)$ quando $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall \varphi \in D(\Omega)$.

O espaço das distribuições sobre Ω com essa noção de convergência será representado por $D'(\Omega)$. Definimos também a derivada distribucional de ordem α de T como sendo a forma linear $D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall\, \varphi \in D(\Omega).$$

Dado $p \in [1, \infty)$ e $m \in \mathbb{N}$, representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant m$, isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\, |\alpha| \leqslant m\}.$$

Observação. Se $\alpha = (0, 0, \cdots, 0)$ definimos $D^0 u = u$, para toda função u.

A norma em $W^{m,p}(\Omega)$ será denotada por:

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u|^p_{L^p} \Big)^{1/p}.$$

Com essa norma, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach (Ver [2] e [12]). Esses espaços são chamados de espaços de Sobolev. Quando $p = 2$ representamos esse espaço por $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, o qual é o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, das funções $u \in L^2(\Omega)$ tais que as derivadas $\frac{d^s u}{dx^s}$, $s = 1, 2, \cdots, m$ pertencem a $L^2(\Omega)$. Podemos mostrar que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

onde $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$(ver [9]) e $((\cdot, \cdot)) = ((\cdot, \cdot))_{H_0^1(\Omega)}$ é o produto interno em $H_0^1(\Omega)$.

Quando $p = 2$, temos:

$$W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega),$$

onde $H_0^m(\Omega)$, é definido por:

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega; u' \in L^2(\Omega), u(0) = u(T) = 0\}.$$

A norma e o produto escalar em $L^2(0,T)$, são dadas respectivamente, por:
$|u|_{L^2(0,T)} = \int_0^T u^2 dx$ e $(u, v)_{L^2(0,T)} = \int_0^T uv dx$.
Para ver mais detalhes sobre $W_0^{m,2}(\Omega)$ (veja [7] ou [5]).
Seja $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções de Ω em $\mathbb{R}$ localmente integráveis, ou seja, se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ então u é integrável a Lesbesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. Note que $T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx$$

é uma aplicação linear contínua, e assim uma distribuição escalar sobre Ω. Temos ainda a seguinte cadeia de imersões contínuas:

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega).$$

Agora, apresentaremos alguns resultados de Análise Funcional e Equações Diferenciais Ordinárias, os quais passamos a descrevê-los sem demonstração.

Lema 1.1.1. *(Du Bois Raymond). Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\phi(x) = 0 \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração. Vide [11]. □

Seja Ω um conjunto compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as **condições de Carathéodory** sobre Ω se:

a) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixo;

b)$f(t, x)$ é contínua em x para cada t fixo;

c) Para cada compacto μ em Ω existe uma função real integrável $m_\mu(t)$ tal que

$$|f(t, x)| \leqslant m_\mu(t), \forall (t, x) \in \mu.$$

Considere o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leqslant a, |x - a| \leqslant b\}$ com $a, b > 0$.

Teorema 1.1.1. *(Carathéodory) Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* R, *e considere o problema de valor inicial*

$$\left|\begin{array}{l} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Então existe uma solução $x(t)$ *de* (1.1) *sobre algum intervalo* $|t - t_0| \leqslant \beta$, $(\beta > 0)$.

Demonstração. Vide [9]. □

Corolário 1.1.1. *Sejam* Ω *um conjunto aberto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* f *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* Ω. *Então o problema de valor inicial tem solução para qualquer* $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Demonstração. Vide [9]. □

Corolário 1.1.2. *Sejam* $[0, w] \times B$, *com* $0 < w < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leqslant b\}$, $b > 0$ *e* f *nas condições de Carathéodory. Seja* ϕ *uma solução de*

$$\left|\begin{array}{l} x' = f(x,t) \\ x(0) = x_0, \quad |x_0| \leqslant b. \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Suponha que em qualquer intervalo I *onde* ϕ *está definida se tenha* $|\phi(t)| \leqslant M$, *para todo* $t \in I$, M *independente de* t *e* $M < b$. *Então* ϕ *tem um prolongamento até* $[0, w]$.

Demonstração. Vide [9]. □

Definição 1.1.1. *Seja* X *um espaço de Banach. Uma sequência* (u_n) *é fortemente limitada quando é limitada na norma do seu espaço, ou seja, quando existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|u_n\|_X \leqslant C, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.1.2. *(Convergência forte) Seja* X *um espaço de Banach. Uma sequência* (u_n) *é dita fortemente convergente para o vetor* u, *em* X *quando:*

$$\|u_n\|_X \longrightarrow \|u\|_X.$$

Notação: $u_n \longrightarrow u$ *em X.*

Definição 1.1.3. *(Convergência fraca) Sejam* X *um espaço de Banach e* X' *o espaço dual de X. Uma sequência* (u_n) *é dita fracamente convergente para o vetor* u, *quando*

$$f(u_n) \longrightarrow f(u), \ \forall\, f \in X',$$

Notação: $u_n \rightharpoonup u$ *em X.*

Teorema 1.1.2. *Sejam* X *um espaço de Banach e* (x_n) *uma sequência pertencente a* X*, que convergente fracamente para* $x \in X$*. Então* x *é único.*

Demonstração. Vide [3]. □

Definição 1.1.4. *(Convergência fraca-$*$). Seja* X *um espaço de Banach com dual* X'*. Dizemos que uma sequência* (f_n) *de* X' *convergente fraco-$*$ para f em* X' *se*

$$f_n(x) \longrightarrow fx), \forall x \in X.$$

Notação: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Teorema 1.1.3. *(Banach-Alaoglu-Boubarki). Sejam* X *um espaço de Banach separável e* $(f_n)_n$ *uma sequência fortemente limitada em* X'*. Então* $(f_n)_n$ *tem uma subsequência* (f_{nk}) *que converge fraco estrela para* $f \in X'$*, ou seja,*

$$f_{nk} \overset{*}{\rightharpoonup} f.$$

Demonstração. Vide [2] e [12]. □

1.2 Resultados sobre Distribuições Vetoriais

Dado o intervalo aberto $(0,T)$, $T > 0$ da reta real $\mathbb{R}$ e um espaço de Banach real X, representamos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leqslant p < \infty$, o espaço vetorial das aplicações $u : (0,T) \to X$ tais que, para cada $s \in (0,T)$, o vetor $u(s) \in X$ é fortemente mensurável em $(0,T)$ com a norma $||u(s)||_X \in L^P(0,T)$. Em $L^p(0,T;X)$ definimos a norma:

$$||u||^p_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T ||u(s)||_X ds, \tag{1.3}$$

para $1 \leqslant p < \infty$ e para $p = \infty$

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} = \text{ess} \sup_{0<s<T} ||u(s)||_X. \tag{1.4}$$

Sejam u em $L^p(0,T;X)$ e $\phi \in D(0,T)$, onde $D(0,T)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis em $(0,T)$. Associamos a cada u a aplicação $f_u : D(0,T) \to X$, definida por:

$$\langle f_u, \phi \rangle = \int_0^T u(s)\phi(s)ds.$$

A aplicação f_u, definida acima, é linear e contínua em $D(0,T)$. Portanto, f_u é uma distribuição em $(0,T)$, chamada distribuição vetorial em (0,T), definida por $u \in L^p(0,T;X)$, com valor em X, isto é, $f_u \in \mathcal{L}(D(0,T),X)$, onde $\mathcal{L}(D(0,T),X)$ é chamado de espaço das distribuições vetoriais de $(0,T)$ com valores em X. O espaço de todas as distribuições definidas em $(0,T)$ com valores em X é representado por $D'(0,T;X)$. Quando $p=2$ e X for um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt, \ \forall u,v \in L^2(0,T;X).$$

Os espaços $L^p(0,T;X)$ e $L^\infty(0,T;X)$ são espaços de Banach munido com a norma (1.3) e (1.4), respectvamente.(Vide [6].)

1.3 Problema Variacional Abstrato

Seja V um espaço de Hilbert, cujo produto escalar é representado por $((,))$ e norma por $||\cdot||$. Uma forma bilinear $a(u,v)$, contínua em V, é uma função numérica $a(u,v)$, definida em $V\times V$, linear em cada coordenada. A continuidade equivale a dizer que existe uma constante $M>0$, tal que

$$|a(u,v)| \leqslant M||u||\cdot||v|| \quad \forall u,v \in V.$$

Seja f uma forma linear e contínua em V, isto é, uma função numérica linear e contínua f definida em V. A continuidade equivale a dizer que existe uma constante $C>0$ tal que:

$$\left|\left\langle f,v\right\rangle\right| = C\left|\left|v\right|\right| \quad \forall v \in V.$$

Problema Variaciona Abstrato: Consiste em encontrar $u \in V$, tal que

$$a\big(u,v\big) = \big\langle f,v\big\rangle \ \ \forall v \in V$$

Dizemos que uma forma bilinear $a(u,v)$, para $u,v \in V$, é coerciva, quando existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geqslant \alpha||v||^2 \quad \forall v \in V.$$

O seguinte e importante teorema, resolve o Problema Variacional, sob certas condições sobre $a(u,v)$ e f.

Teorema 1.3.1. *(Lax - Milgram) Seja* V *um espaço de Hilbert. Se* $a(u,v)$ *é uma forma bilinear, contínua e coerciva em* $V\times V$ *e* f *é uma forma linear contínua sobre V, então o problema variacional abstrato*

$$a(u,v) = \big\langle f,v\big\rangle$$

possui uma única solução $u \in V$*. Além disso, a aplicação* $f \mapsto u$ *é linear e lipschitziana de* V' *em* V *com constante de Lipschitz igual a* α^{-1}*, onde* α *é a constante de coercividade de* $a(u,v)$.

Demonstração. Vide [4] ou [2]. □

Teorema 1.3.2. *(Representação de Riesz) Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $\varphi \in (L^p(\Omega))'$*. Então, existe uma única* $u \in L^{p'}(\Omega)$*, tal que*

$$(\varphi, f) = \int_\Omega uf\,dx, \quad \forall\, f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$*, onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demonstração. Vide [2] e [12]. □

1.4 Algumas Desigualdades Importantes

Desigualdade 1.4.1. *(Cauchy-Schwarz) Seja* E *um espaço com produto interno. Para quaisquer* a *e* $b \in E$*, temos*

$$|(a,b)| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$$

Demonstração. Vide [4]. □

Desigualdade 1.4.2. *(Gronwall) Sejam* C *uma constante não negativa,* $u \geqslant 0$*, q.t.p. em* $(0,T)$*, uma função integrável em* $(0,T)$*, e* $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e não negativa, tal que*

$$\varphi(t) \leqslant C + \int_0^t u(x)\varphi(x)dx\ , \quad \forall t \in [0,T].$$

Então,

$$\varphi(t) \leqslant Ce^{\int_0^t u(x)dx}\ , \quad \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. Vide [6] ou [3]. □

Desigualdade 1.4.3. *(Gronwall Generalizada) Sejam* $f, v : [0,T] \to \mathbb{R}$ *funções integráveis, não negativas,* v_0 *uma constante não negativa e* $a : [0,T] \to \mathbb{R}$*, uma função contínua, não negativa, tais que*

$$v(t) \leqslant v_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t v(s)a(s)ds\ , \quad \forall t \in [0,T].$$

Então,

$$v(t) \leqslant \left(v_0 + \int_0^t f(s)ds\right) e^{\int_0^t a(s)ds}\ , \quad \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. Vide [6] ou [3]. □

Desigualdade 1.4.4. *(Poincaré-Friendrichc) Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante positiva C tal que*

$$|v|_{L^2(\Omega)} \leqslant C|v_x|_{L^2(\Omega)},$$

onde v_x é o gradiente de v.

Demonstração. Vide [8], [3] ou [13]. □

Desigualdade 1.4.5. *(Young) Dados a e b números reais positivos tais que $p, q \in \mathbb{R}^n$ com $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demonstração. Vide [1]. □

1.5 Solução Forte e Solução Fraca

Consideremos o seguinte sistema, o qual será estudado com mais detalhes no Capítulo 2.

$$\left| \begin{array}{l} \phi'' - a\phi_{xx} - \psi_x + \phi = 0 \;\text{ em }\; Q, \\ \psi'' - b\psi_{xx} + \phi_x = 0 \;\text{ em }\; Q, \end{array} \right. \tag{1.5}$$

$$\left| \begin{array}{l} \phi(0,t) = 0, \quad \phi(1,t) = 0 \;\text{ em }\; (0,T), \\ \psi(0,t) = 0, \quad \psi(1,t) = 0 \;\text{ em }\; (0,T), \end{array} \right. \tag{1.6}$$

$$\left| \begin{array}{l} \phi(x,0) = \phi^0(x), \quad \phi'(x,0) = \phi^1(x) \;\text{ em }\; (0,1), \\ \psi(x,0) = \psi^0(x), \quad \psi'(x,0) = \psi^1(x) \;\text{ em }\; (0,1). \end{array} \right. \tag{1.7}$$

Definição 1.5.1. *Dizemos que um par de funções (ϕ, ψ) é solução fraca para o sistema $(1.5) - (1.7)$ se:*

$$\phi, \psi \in L^\infty\big(0,T; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)\big),$$

$$\phi', \psi' \in L^\infty\big(0,T; H_0^1(0,1)\big),$$

e satisfaz:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\phi'(t), \omega) + ((a\phi_x(t), \omega)) - (\psi_x(t), \omega) + (\phi(t), \omega) = 0 \\ \frac{d}{dt}(\psi'(t), \omega) + ((a\psi_x(t), \omega)) - (\phi_x(t), \omega) = 0, \end{array} \right. \tag{1.8}$$

para todo ω no sentido de $D'(0,T)$. Além disso verifica (1.6) e (1.7).

Definição 1.5.2. *Dizemos que um par de funções* (ϕ, ψ) *é solução forte para o sistema* $(1.5)-(1.7)$ *se:*

$$\phi, \psi \in L^{\infty}\big(0, T; H_0^1(0,1)\big),$$

$$\phi', \psi' \in L^{\infty}\big(0, T; L^2(0,1)\big),$$

e verifica $(1.6)-(1.8)$.

Capítulo 2

Resultados Básicos sobre a Solução do Sistema de Timoshenko

Nesta seção, estudaremos a controlabilidade exata para o sistema de Timoshenko:

$$\left| \begin{array}{l} y'' - a y_{xx} - z_x + y = 0 \text{ em } Q \\ z'' - b z_{xx} + y_x = 0 \text{ em } Q, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

o qual é motivado por questões de elasticidade unidimensional, onde *a* e *b* são constantes positivas. Consideramos uma barra de comprimento $L = 1$. O deslocamento transversal do ponto *x* no instante *t*, é a deformação da curva $z = z(x,t)$ onde

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \;\; e \;\; 0 \leqslant t \leqslant T, \;\; com \; T \geqslant 0$$

e $y = y(x,t)$ é a inclinação da deformação da curva. Representamos por $\Omega = [0,1]$ e por Q o cilindro $Q = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^2$. Sendo y' a derivada em relação a *t* e y_x a derivada em relação a *x* da função $y(x,t)$, analizaremos o seguinte problema:

Problema Misto Não Homogeneo

Encontrar um par $\{y, z\}$ de solução, satisfazendo:

$$\left| \begin{array}{l} y'' - a y_{xx} - z_x + y = 0 \text{ em } Q, \\ z'' - b z_{xx} + y_x = 0 \text{ em } Q, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

$$\left| \begin{array}{l} y(0,t) = v(t), \quad y(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \\ z(0,t) = w(t), \quad z(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \end{array} \right. \tag{2.3}$$

$$\left| \begin{array}{l} y(x,0) = y^0(x), \quad y'(x,0) = y^1(x) \text{ em } \Omega, \\ z(x,0) = z^0(x), \quad z'(x,0) = z^1(x) \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

A controlabilidade exata para o sistema (2.1) é formulada como segue-se: Dado $T > 0$, encontrar um espaço de Hilbert H tal que para qualquer conjunto de valor inicial $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\}$ em H, existe um par de controles $v(t)$ e $w(t)$ em $L^2(0,T)$ tal que a solução $y = y(x,t)$, $z = z(x,t)$ de (2.2), (2.3) e (2.4) satisfaça a condição

$$\left| \begin{array}{l} y(x,T) = 0, \quad y'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1), \\ z(x,T) = 0, \quad z'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1). \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Dados $\{\phi^0, \phi^1\}$ e $\{\psi^0, \psi^1\} \in D(0,1) \times D(0,1)$, iniciaremos com o estudo da energia associada ao sistema dado.

2.1 Desigualdade da Energia

Mostraremos que a energia $E(t)$ associada ao sistema abaixo, satisfaz a desigualdade $C_0E_0 \leqslant E(t) \leqslant C_1E_0$, onde $E(t)$ é definida por

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big(|\phi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 + a|\phi_x(t)|^2 + b|\psi_x(t)|^2 + |\phi(t)|^2\Big),$$

é a energia associada ao sistema (2.2).

Consideremos o sistema

$$\left| \begin{array}{l} \phi'' - a\phi_{xx} - \psi_x + \phi = 0 \text{ em } Q, \\ \psi'' - b\psi_{xx} + \phi_x = 0 \text{ em } Q, \end{array} \right. \tag{2.6}$$

$$\left| \begin{array}{l} \phi(0,t) = 0, \quad \phi(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \\ \psi(0,t) = 0, \quad \psi(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \end{array} \right. \tag{2.7}$$

$$\left| \begin{array}{l} \phi(x,0) = \phi^0(x), \quad \phi'(x,0) = \phi^1(x) \text{ em } (0,1), \\ \psi(x,0) = \psi^0(x), \quad \psi'(x,0) = \psi^1(x) \text{ em } (0,1). \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Com isso, vale o seguinte resultado:

Lema 2.1.1. *Existem constantes positivas* C_0 *e* C_1 *tais que* $C_0E_0 \leqslant E(t) \leqslant C_1E_0$ *para todo* $t \in [0,T]$, *onde* $E(0) = E_0$.

Demonstração. De fato, multiplicando $(2.6)_1$ por ϕ' e $(2.6)_2$ por ψ' e integrando em $(0,1)$, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} (\phi'', \phi') - a(\phi_{xx}, \phi') - (\psi_x, \phi') + (\phi, \phi') = 0 \ \ em \ \ Q, \\ (\psi'', \psi') - b(\psi_{xx}, \psi') + (\phi_x, \psi') = 0 \ \ em \ \ Q. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Usando a regra do produto, vale

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}(\phi', \phi') &= (\phi'', \phi') + (\phi', \phi''),\\ &= 2(\phi'', \phi'),\end{aligned}$$

e, sendo $|\phi'(t)|^2_{L^2(0,1)} = (\phi', \phi')_{L^2(0,1)}$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi'(t)|^2_{L^2(0,1)} = (\phi'', \phi')_{L^2(0,1)}. \tag{2.10}$$

De modo similar,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi(t)|^2_{L^2(0,1)} = (\phi, \phi')_{L^2(0,1)}. \tag{2.11}$$

Como $(\phi_{xx}, \phi')_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \phi_{xx}\phi' dx$ e $||\phi(t)||_{H_0^1(0,1)} = |\phi_x(t)|_{L^2(0,1)}$, segue que

$$\frac{d}{dt}a||\phi(t)||^2 = a\frac{d}{dt}|\phi_x(t)|^2 = a\frac{d}{dt}(\phi_x, \phi_x) = 2a(\phi_x', \phi_x). \tag{2.12}$$

Usando integração por partes, resulta que

$$\begin{aligned}a\cdot(\phi_x', \phi_x) &= a\cdot\left(\phi'\phi_x|_0^1 - \int_0^1 \phi'\phi_{xx}dx\right)\\ &= a\cdot\left(\phi'(1,t)\phi_x(1,t) - \phi'(0,t)\phi_x(0,t) - \int_0^1 \phi'\phi_{xx}dx\right)\\ &= -a\cdot\int_0^1 \phi'\phi_{xx}dx\\ &= -a\cdot(\phi_{xx}, \phi'),\end{aligned}$$

pois $\phi' \in D(0,1)$. Usando esta igualdade em (2.12), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a||\phi(t)||^2 = -a(\phi_{xx}, \phi'). \tag{2.13}$$

De (2.10), (2.11) e (2.13), e usando o mesmo raciocinando para $(2.6)_2$, nos leva a

$$\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\phi'(t)|^2 + a||\phi(t)||^2 + |\phi(t)|^2\right) - (\psi_x, \phi') = 0,\\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\psi'(t)|^2 + b||\psi(t)||^2\right) + (\phi_x, \psi') = 0.\end{array}\right.$$

Usando integração por partes em (ψ_x, ϕ'), e usando $(2.7)_2$, resulta que

$$\begin{aligned}-(\psi_x, \phi') &= -\int_0^1 \psi_x\phi' dx = -\psi\phi'|_0^1 + \int_0^1 \psi\phi_x' dx\\ &= -\psi(1,t)\phi'(1,t) + \psi(0,t)\phi'(0,t) + \int_0^1 \psi\phi_x' dx\\ &= (\psi, \phi_x').\end{aligned}$$

Usando essa igualdade no sistema acima, obtemos

$$\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\phi'(t)|^2 + a||\phi(t)||^2 + |\phi(t)|^2\right) + (\psi, \phi_x') = 0,\\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\psi'(t)|^2 + b||\psi(t)||^2\right) + (\phi_x, \psi') = 0.\end{array}\right. \tag{2.14}$$

Somando as equações de (2.14), segue que

$$E'(t) + \frac{d}{dt}(\psi, \phi_x) = 0,$$

que integrando em $(0, t)$, obtemos

$$E(t) + (\psi(t), \phi_x(t)) = E_0 + \left(\psi^0, \phi_x^0\right) \tag{2.15}$$

Note que,

$$(\psi^0, \phi_x^0) \leqslant |(\psi^0, \phi_x^0)| \leqslant |\psi^0||\phi_x^0| \leqslant \frac{|\psi^0|^2 + |\phi_x^0|^2}{2},$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy e a de Young. Portanto, temos que

$$-\frac{1}{2}\Big(|\psi^0|^2 + |\phi_x^0|^2\Big) \leqslant \left(\psi^0, \phi_x^0\right) \leqslant \frac{1}{2}\Big(|\psi^0|^2 + |\phi_x^0|^2\Big). \tag{2.16}$$

Somando E_0 em ambos os lados da primeira desigualdade em (2.17) obtemos

$$E_0 - \frac{1}{2}\Big(|\psi^0|^2 + |\phi_x^0|^2\Big) \leqslant E_0 + \left(\psi^0, \phi_x^0\right). \tag{2.17}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} E_0 - \tfrac{1}{2}\big(|\psi^0|^2 + |\phi_x^0|^2\big) &= \tfrac{1}{2}\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + a|\phi_x^0|^2 + b|\psi_x^0|^2 + |\phi^0|^2\big) - \tfrac{1}{2}|\psi^0|^2 - \tfrac{1}{2}|\phi_x^0|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + (a-1)|\phi_x^0|^2 + b|\psi_x^0|^2 - |\psi^0|^2 + |\phi^0|^2\big). \end{aligned} \tag{2.18}$$

A desigualdade de Poincaré, afirma que

$$|v|^2_{L^2(0,1)} \leqslant C|v_x|^2_{L^2(0,1)}, \ \ \forall\, v \in H_0^1(0,1),$$

onde C é uma constante positiva. Então, tomando $C = \frac{1}{\lambda_1}$ com $\lambda_1 = \pi^2$ tal que $-v'' = \lambda_1 v$, $v \in H_0^1(0,1)$, temos com $v = \psi^0$ na desigualdade de Poincaré, que:

$$-\frac{1}{2}|\psi^0|^2 \geqslant \frac{1}{2\pi^2}|\psi_x^0|^2.$$

Como *b* é uma constante positiva temos

$$\frac{b}{2}|\psi_x^0|^2 - \frac{1}{2}|\psi^0|^2 \geqslant \frac{1}{2}\Big(b - \frac{1}{\pi^2}\Big)|\psi_x^0|^2,$$

de tal forma que $\pi^2 b > 1$. Portanto, usando esta última desigualdade em (2.18), obtemos que

$$\begin{aligned} E_0 - \tfrac{1}{2}\big(|\psi^0|^2 + |\phi_x^0|^2\big) &\geqslant \tfrac{1}{2}\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + (a-1)|\phi_x^0|^2 + (b - \tfrac{1}{\pi^2})|\psi_x^0|^2 + |\phi^0|^2\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + a(1 - \tfrac{1}{a})|\phi_x^0|^2 + b(1 - \tfrac{1}{b\pi^2})|\psi_x^0|^2 + |\phi^0|^2\big) \\ &\geqslant \min\big(1, 1 - \tfrac{1}{a}, 1 - \tfrac{1}{b\pi^2}\big)\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + a|\phi_x^0|^2 + b|\psi_x^0|^2 + |\phi^0|^2\big) \\ &= \min\big(1, 1 - \tfrac{1}{a}, 1 - \tfrac{1}{b\pi^2}\big)E_0 \end{aligned}$$

Agora, usando (2.16) e (2.18), na desigualdade acima, resulta que

$$E(t) + \big(\psi(t), \phi_x(t)\big) \geqslant C_1 E_0, \tag{2.19}$$

onde $C_1 = \min\big(1, 1 - \frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{b\pi^2}\big)$.

Lema 2.1.2. *Existe uma constante* M *positiva, tal que* $M \cdot E(t) \geqslant \big(\psi(t), \phi_x(t)\big)$.

Prova. De fato, como $\big(\psi(t), \phi_x(t)\big) \leqslant \frac{1}{2}\big(|\psi(t)|^2 + |\phi_x(t)|^2\big)$, e usando a desigualdade de Poincaré, segue que

$$\begin{aligned}
\big(\psi(t), \phi_x(t)\big) &\leqslant \tfrac{1}{2}\big(c|\psi_x(t)|^2 + |\phi_x(t)|^2\big)\\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\big(|\phi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 + a|\phi_x(t)|^2 + b|\psi_x(t)|^2 + |\phi(t)|^2 + c|\psi_x(t)|^2\big) +\\
&+ \tfrac{1}{2}|\phi_x(t)|^2\\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\big(|\phi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 + (a+1)|\phi_x(t)|^2 + (b+c)|\psi_x(t)|^2 + |\phi(t)|^2\big)\\
&= \tfrac{1}{2}\big(|\phi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 + a\big(1 + \tfrac{1}{a}\big)|\phi_x(t)|^2 + b\big(1 + \tfrac{c}{b}\big)|\psi_x(t)|^2 + |\phi(t)|^2\big)\\
&\leqslant \max\big(1, 1 + \tfrac{1}{a}, 1 + \tfrac{c}{b}\big)E(t)
\end{aligned}$$

Portanto, fica provado o Lema com $M = \max\big(1, 1 + \frac{1}{a}, 1 + \frac{c}{b}\big)$.

Agora, usando o Lema 2.1.2 em (2.19), obtemos

$$ME(t) + E(t) \geqslant C_1 E_0.$$

Daí, fazendo $C_2 = \frac{C_1}{1+M}$, resulta que

$$E(t) \geqslant C_2 E_0 \tag{2.20}$$

Agora, mostraremos que $E(t) \leqslant C_3 E_0$ com $t \in [0, T]$. Notemos que

$$\begin{aligned}
E(t) + (\psi, \phi_x) &\leqslant E_0 + |\psi^0||\phi_x^0| \leqslant E_0 + \tfrac{1}{2}\big(|\psi^0|^2 + |\phi_x^0|^2\big)\\
&\leqslant E_0 + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{\lambda_1}|\psi_x^0|^2 + |\phi_x^0|^2\big)\\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + (a+1)|\phi_x^0|^2 + (b + \tfrac{1}{\lambda_1})|\psi_x^0|^2 + |\phi|^2\big)\\
&= \tfrac{1}{2}\Big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + a\big(1 + \tfrac{1}{a}\big)|\phi_x^0|^2 + b\big(1 + \tfrac{1}{b\lambda_1}\big)|\psi_x^0|^2 + |\phi|^2\Big)\\
&\leqslant \max\Big(1, 1 + \tfrac{1}{a}, 1 + \tfrac{1}{b\lambda_1}\big) \cdot \tfrac{1}{2}\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + a|\phi_x^0|^2 + b|\psi_x^0|^2 + |\phi|^2\big)\\
&= \max\Big(1, 1 + \tfrac{1}{a}, 1 + \tfrac{1}{b\lambda_1}\big)E_0.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo $K = \max\Big(1, 1 + \frac{1}{a}, 1 + \frac{1}{b\lambda_1}\big)$, temos que

$$E(t) + (\psi, \phi_x) \leqslant KE_0. \tag{2.21}$$

Usando a mesma idéia de (2.17), resulta que

$$-\frac{1}{2}(|\psi_x|^2 + |\phi|^2) \leqslant -(\psi_x, \phi).$$

Integrando por partes em relação a x a equação $-(\psi_x, \phi)$, obtemos

$$\begin{aligned} -(\psi_x, \phi) &= -\psi(1,t)\phi(1,t) + \psi(0,t)\phi(0,t) + \textstyle\int_0^1 \psi\phi_x dx \\ &= \textstyle\int_0^1 \psi\phi_x dx \\ &= (\psi, \phi_x), \end{aligned}$$

pois $\phi(0,t) = \phi(1,t) = 0$. Assim, vale

$$-\frac{1}{2}(|\psi_x|^2 + |\phi|^2) \leqslant (\psi, \phi_x).$$

Somando $E(t)$ em ambos os lados dessa desigualdade e usando (2.21) temos

$$E(t) - \frac{1}{2}\big(|\psi_x|^2 + |\phi|^2\big) \leqslant KE_0. \tag{2.22}$$

Da desigualdade de Poincaré, obtemos

$$-\frac{1}{2}|\phi|^2 \geqslant -\frac{C}{2}|\phi_x|^2.$$

Usando a desigualdade acima no primeiro membro de (2.22), resulta que

$$\begin{aligned} E(t) - \tfrac{1}{2}\big(|\psi_x(t)|^2 + |\phi(t)|^2\big) &\geqslant E(t) - \tfrac{1}{2}\big(|\psi_x|^2 + C|\phi_x|^2\big) \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}\big(|\phi'|^2 + |\psi'|^2 + \big(a - \tfrac{1}{\pi^2}\big)|\phi_x|^2 + (b-1)|\psi_x|^2\big) + \\ &+ \tfrac{1}{2}|\phi|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\big(|\phi'|^2 + |\psi'|^2 + a\big(1 - \tfrac{1}{a\pi^2}\big)|\phi_x|^2 + b\big(1 - \tfrac{1}{b}\big)|\psi_x|^2\big) + \\ &+ \tfrac{1}{2}|\phi|^2 \\ &\geqslant C_4 \cdot \tfrac{1}{2}\big(|\phi'|^2 + |\psi'|^2 + a|\phi_x|^2 + b|\psi_x|^2 + |\phi|^2\big) \\ &= C_4 E(t), \end{aligned}$$

onde $C_4 = \min\big(1, 1 - \frac{1}{a\pi^2}, 1 - \frac{1}{b}\big)$, ou seja,

$$E(t) - \frac{1}{2}\big(|\psi_x(t)|^2 + |\phi(t)|^2\big) \geqslant C_4 E(t). \tag{2.23}$$

De (2.22) e (2.23), obtemos

$$KE_0 \geqslant C_4 E(t)$$

isto é,

$$E(t) \leqslant C_5 E_0,$$

onde $C_5 = \frac{K}{C_4}$. ■

2.2 Desigualdades Direta e Inversa

O objetivo dessa seção é mostrarmos que vale a dupla desigualdade

$$C_6\|\{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}\|_F^2 \leqslant \int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt + \int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt \leqslant C_7\|\{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}\|_F^2,$$

onde C_6 e C_7 são constantes e $F = (H_0^1(0,1)\times L^2(0,1))^2$. A primeira desigualdade acima é chamada de Desigualdade Inversa, e a segunda desigualdade é chamada de Desigualdade Direta. Iremos, a princípio, demonstrar a segunda.

2.2.1 Desigualdade Direta

Consideraremos o sistema (2.6) não homogêneo, isto é, com $f, g \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ no lado direito de $(2.6)_1$ e $(2.6)_2$, respectivamente em vez de zero. Provaremos uma identidade básica, essencial na prova da Desigualdade Direta

Lema 2.2.1. *Seja* $\{\phi,\psi\}$ *uma solução fraca de* (2.1), (2.2) *e* (2.3)*. Então*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt + \int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt = \\
&-[(\phi'(x,t),(1-x)\phi_x(x,t)) + (\psi'(x,t),(1-x)\psi_x(x,t))]_o^T + \\
&+\tfrac{1}{2}\textstyle\int_Q(|\phi'|^2+|\psi'|^2+a|\phi_x|^2+b|\psi_x|^2)dxdt - \\
&-\tfrac{1}{2}\textstyle\int_Q|\phi|^2dxdt + \int_Q f.(1-x)\phi_x dxdt + \int_Q g.(1-x)\psi_x dxdt
\end{aligned}$$

Demonstração: Com efeito, seja $\{\phi^0,\psi^0\}\in H_0^1(0,1)\cap H^2(0,1)$ com $\{\phi^1,\psi^1\}\in H_0^1(0,1)$ e $f,g\in W^{1,1}\big(0,T;H_0^1(0,1)\big)$. Multiplicando $(2.6)_1$ por $(1-x)\phi_x$, $(2.6)_2$ por $(1-x)\psi_x$ e integrando em Q, obtemos

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_Q \phi''.(1-x)\phi_x dxdt - a\int_Q \phi_{xx}.(1-x)\phi_x dxdt - \\
&-\textstyle\int_Q \psi_x.(1-x)\phi_x dxdt + \int_Q \phi.(1-x)\phi_x dxdt = \\
&=\textstyle\int_Q f.(1-x)\phi_x dxdt
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_Q \psi''.(1-x)\psi_x dxdt - b\int_Q \psi_{xx}.(1-x)\psi_x dxdt + \\
&-\textstyle\int_Q \phi_x.(1-x)\psi_x dxdt = \int_Q g.(1-x)\psi_x dxdt.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Analizaremos a integração dos termos da equação (2.24).

Integrando por partes em relação a t, no primeiro termo de (2.24), nos leva a

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_Q \phi''.(1-x)\phi_x dxdt &= \textstyle\int_0^T\int_0^1 \phi''.(1-x)\phi_x dxdt \\
&= \textstyle\int_0^T\big(\phi'',(1-x)\phi_x\big)dt \\
&= \big(\phi',(1-x)\phi_x\big)\Big|_0^T - \textstyle\int_0^T\big(\phi',(1-x)\phi_x'\big)dt.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Integrando por partes em relação a x, na última integral de (2.26), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \big(\phi', (1-x)\phi'_x\big)dt &= \int_0^T \int_0^1 (1-x)\phi'\phi'_x dxdt = \tfrac{1}{2}\int_0^T \int_0^1 (1-x)\tfrac{\partial}{\partial x}|\phi'|^2 dxdt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^T \Big\{(1-x)|\phi'|^2|_0^1 + \int_0^1 |\phi'|^2 dx\Big\}dt.\end{aligned}$$

Como $\{\phi^0, \psi^0\} \in H_0^1(0,1)$ e $\{\phi^1, \psi^1\} \in H_0^1(0,1)$, temos $(1-x)|\phi'|^2|_0^1 = -\phi'^2(0,t) = 0$, e assim resulta que

$$-\int_0^T \big(\phi', (1-x)\phi'_x\big)dt = -\frac{1}{2}\int_Q |\phi'|^2 dxdt. \tag{2.27}$$

De (2.26) e (2.27), segue que

$$\int_Q \phi''.(1-x)\phi_x dxdt = \big(\phi', (1-x)\phi_x\big)\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_Q \phi'^2 dxdt. \tag{2.28}$$

Agora, analizaremos o termo $-a\int_Q \phi_{xx}.(1-x)\phi_x dxdt$.

Com efeito, integrando por partes em relação a x, resulta que

$$\begin{aligned}-a\int_Q \phi_{xx}.(1-x)\phi_x dxdt &= -a\int_0^T \int_0^1 (1-x)\phi_{xx}\phi_x dxdt \\ &= -\tfrac{a}{2}\int_0^T \int_0^1 (1-x)\tfrac{\partial}{\partial x}|\phi_x|^2 dxdt \\ &= -\tfrac{a}{2}\int_0^T \{(1-x)|\phi_x|^2|_0^1 + \int_0^1 |\phi_x|^2 dx\}dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt - \tfrac{1}{2}\int_Q a\phi_x^2 dxdt,\end{aligned} \tag{2.29}$$

visto que $(1-x)|\phi_x|^2|_0^1 = -\phi_x^2(0,t)$.

Analisando o termo $\int_Q \phi.(1-x)\phi_x dxdt$ e usando integração por partes em relação a x, temos

$$\begin{aligned}\int_Q \phi.(1-x)\phi_x dxdt &= \int_0^T \int_0^1 (1-x)\phi.\phi_x dxdt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^T \int_0^1 (1-x)\tfrac{\partial}{\partial x}\phi^2 dxdt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^T \{(1-x)\phi^2|_0^1 + \int_0^1 \phi^2 dx\}dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_Q \phi^2 dxdt.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Substituindo (2.28), (2.29) e (2.30) em (2.24), obtemos

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt &= -\big(\phi', (1-x)\phi_x\big)|_0^T + \tfrac{1}{2}\int_Q |\phi'|^2 dxdt + \tfrac{1}{2}\int_Q a\phi_x^2 dxdt - \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\int_Q |\phi|^2 dxdt + \int_Q f.(1-x)\phi_x dxdt + \\ &\quad + \int_Q (1-x)\psi_x\phi_x dxdt.\end{aligned} \tag{2.31}$$

De modo similar para (2.25), temos

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt &= -\big(\psi', (1-x)\psi_x\big)\Big|_0^T + \tfrac{1}{2}\int_Q |\psi'|^2 dxdt + \tfrac{1}{2}\int_Q b\psi_x^2 dxdt + \\ &\quad + \int_Q g.(1-x)\psi_x dxdt - \int_Q (1-x)\psi_x\phi_x dxdt.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Somando (2.31) e (2.32), obtemos

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt + \int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt = \\
&-\Big[\Big(\phi'(x,t),(1-x)\phi_x(x,t)\Big) + \Big(\psi'(x,t),(1-x)\psi_x(x,t)\Big)\Big]\Big|_o^T + \\
&+\tfrac{1}{2}\int_Q \Big(|\phi'|^2 + |\psi'|^2 + a|\phi_x|^2 + b|\psi_x|^2\Big)dxdt - \\
&-\tfrac{1}{2}\int_Q |\phi|^2 dxdt + \int_Q f.(1-x)\phi_x dxdt + \int_Q g.(1-x)\psi_x dxdt.
\end{aligned}$$ ∎

Agora, usando o Lema 2.2.1, provaremos a Desigualdade Direta.

Com efeito, temos que

$$|(\phi'(x,t),(1-x)\phi_x(x,t))|_0^T \leqslant 2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|(\phi'(x,t),(1-x)\phi_x(x,t))| \tag{2.33}$$

Como $0 \leqslant x \leqslant 1$ então $1 \geqslant 1-x \geqslant 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
(1-x)\phi'\phi_x &\leqslant \tfrac{1}{2}\phi'^2\cdot(1-x) + \tfrac{1}{2a}a\phi_x^2\cdot(1-x) \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\phi'^2 + \tfrac{1}{2a}a\phi_x^2 \\
&\leqslant \max\big(1,\tfrac{1}{a}\big)\cdot\big(\tfrac{1}{2}\phi'^2 + \tfrac{1}{2}a\phi_x^2\big)
\end{aligned}$$

Fazendo $C_8 = \max\big(1,\frac{1}{a}\big)$ e integrando de 0 a 1 em relação a x, obtemos

$$\int_0^1(1-x)\phi'\phi_x dx \quad \leqslant C_8\Big[\tfrac{1}{2}\int_0^1 \phi'^2 dx + \tfrac{1}{2}\int_0^1 a\phi_x^2 dx\Big],$$

isto é,

$$\big(\phi',(1-x)\phi_x\big) \leqslant C_8\Big[\frac{1}{2}\int_0^1 \phi'^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 a\phi_x^2 dx\Big]$$

Daí,

$$2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\big(\phi',(1-x)\phi_x\big)\big| \leqslant 2C_8\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big\{\frac{1}{2}\int_0^1 \phi'^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 a\phi_x^2 dx\Big\}. \tag{2.34}$$

Portanto de (2.33) e (2.34), segue que

$$\begin{aligned}
\big|\big(\phi',(1-x)\phi_x\big)\big|_0^T &\leqslant 2C_8\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big\{\frac{1}{2}\int_0^1 \phi'^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 a\phi_x^2 dx\Big\} \\
&\leqslant 2C_8\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big\{\frac{1}{2}\big(|\phi'|^2 + |\psi'|^2 + a|\phi_x|^2 + b|\psi_x|^2 + |\phi|^2\big)\Big\} \\
&\leqslant C_9 E(t),
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.1, como $E(t) \leqslant C_1E_0$ para todo $t \in [0,T]$, resulta que

$$\big|\big(\phi',(1-x)\phi_x\big)\big|_0^T \leqslant C_{10}E_0, \text{onde } \; C_{10} = C_9C_1. \tag{2.35}$$

Analogamente, temos que

$$\big|\big(\psi',(1-x)\psi_x\big)\big|_0^T \leqslant C_{11}E_0. \tag{2.36}$$

Agora, fazendo $f = g = 0$ no Lema 2.2.1, obtemos

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt + \int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt = \\
&-\Big[\Big(\phi'(x,t),(1-x)\phi_x(x,t)\Big) + \Big(\psi'(x,t),(1-x)\psi_x(x,t)\Big)\Big]\Big|_o^T + \\
&+\tfrac{1}{2}\int_Q \big(|\phi'|^2 + |\psi'|^2 + a|\phi_x|^2 + b|\psi_x|^2\big)dxdt - \\
&-\tfrac{1}{2}\int_Q |\phi|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

De (2.35) e (2.36) existe uma constante C_{12} tal que

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt + \int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt \leqslant \\
&\leqslant C_{12}E_0 + \tfrac{1}{2}\int_Q \big(|\phi'|^2 + |\psi'|^2 + a|\phi_x|^2 + b|\psi_x|^2\big)dxdt - \tfrac{1}{2}\int_Q \phi^2 dxdt \\
&\leqslant C_{12}E_0 + \tfrac{1}{2}\int_Q \big(|\phi'|^2 + |\psi'|^2 + a|\phi_x|^2 + b|\psi_x|^2 + |\phi|^2\big)dxdt \\
&\leqslant C_{12}E_0 + \int_0^T\int_0^1 E(t)dxdt \\
&\leqslant C_{12}E_0 + \int_0^T\int_0^1 C_1E_0 dxdt \\
&\leqslant C_{13}E_0,
\end{aligned}$$

onde $C_{13} = C_{12} + TC_1$.

Portanto, vale

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt + \int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{C_{13}}{2}\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + a|\phi_x^0|^2 + b|\psi_x^0|^2 + |\phi^0|^2\big).
\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Poincaré para $|\phi^0|$, resulta que

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt + \int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{C_{13}}{2}\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + (a+c)|\phi_x^0|^2 + b|\psi_x^0|^2\big) \\
&\leqslant \max\Big\{\tfrac{C_{13}}{2}, \tfrac{C_{13}.(a+c)}{2}, \tfrac{C_{13}b}{2}\Big\}\cdot\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + |\phi_x^0|^2 + |\psi_x^0|^2\big) \\
&\leqslant C_{14}\cdot\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + |\phi_x^0|^2 + |\psi_x^0|^2\big),
\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde $C_{14} = \max\Big\{\frac{C_{13}}{2}, \frac{C_{13}.(a+c)}{2}, \frac{C_{13}b}{2}\Big\}$.

Integrando (2.37) em $(0,1)$ em relação a *x*, obtemos

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt + \int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt \leqslant \\
&\leqslant C_{14}\cdot\int_0^1\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + a|\phi_x^0|^2 + b|\psi_x^0|^2\big)dx \\
&\leqslant C_{14}\|\{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}\|_F^2,
\end{aligned}$$

onde

$$\|\{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}\|_F^2 = \int_0^1\big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + a|\phi_x^0|^2 + b|\psi_x^0|^2\big)dx$$

Portanto,

$$\int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt + \int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt \leqslant C_{15}\|\{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}\|_F^2,$$

onde $C_{15} = 2C_{14}$. ■

2.2.2 Desigualdade Inversa

Agora nosso objetivo é mostrarmos a Desigualdade Inversa. Para isto, consideremos o funcional

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_{\alpha x}^{T-\alpha x}\big(\phi'^2(x,t) + a\phi_x^2(x,t) + \phi^2(x,t)\big)dt + \frac{1}{2}\int_{\alpha x}^{T-\alpha x}\big(\psi'^2(x,t) + b\psi_x^2(x,t)\big)dt$$

definido em $0 \leqslant x \leqslant 1$. Quando $x = 0$, temos

$$F(0) = \frac{1}{2}\int_0^T (a\phi_x^2(0,t) + b\psi_x^2(0,t))dt,$$

visto que $\phi(0,t) = \psi(0,t) = 0$.
Seja $\alpha = \max\left\{\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right\}$. Façamos $F(x) = G(x) + H(x)$, onde

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{\alpha x}^{T-\alpha x}(\phi'^2(x,t) + a\phi_x^2(x,t) + \phi^2(x,t))dt \tag{2.38}$$

e

$$H(x) = \frac{1}{2}\int_{\alpha x}^{T-\alpha x}(\psi'^2(x,t) + b\psi_x^2(x,t))dt. \tag{2.39}$$

Usando a identidade

$$\frac{d}{dx}\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x,y)dy = \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + f\big(x,u_2(x)\big)u_2'(x) - f\big(x,u_1(x)\big)u_1'(x),$$

válida para f e f_x contínuas, obtemos, derivando (2.38) em relação a x, que

$$\begin{aligned} G'(x) &= \textstyle\int_{\alpha x}^{T-\alpha x}\big(\phi'\phi_x' + a\phi_x\phi_{xx} + \phi\phi_x\big)dt- \\ &-\tfrac{\alpha}{2}\Big(\phi'^2(x,T-\alpha x) + a\phi_x^2(x,T-\alpha x) + \phi^2(x,T-\alpha x)\Big)- \\ &-\tfrac{\alpha}{2}\Big(\phi'^2(x,\alpha x) + a\phi_x^2(x,\alpha x) + \phi^2(x,\alpha x)\Big). \end{aligned}$$

Fazendo,

$$\begin{aligned} \sum_{t=\alpha x}^{T-\alpha x}\Big(\phi'^2(x,t) + a\phi_x^2(x,t) + \phi^2(x,t)\Big) &= \phi'^2(x,T-\alpha x) + a\phi_x^2(x,T-\alpha x) + \\ &+\phi^2(x,T-\alpha x) + \phi'^2(x,\alpha x) + \\ &+a\phi_x^2(x,\alpha x) + \phi^2(x,\alpha x), \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} G'(x) &= \textstyle\int_{\alpha x}^{T-\alpha x}\big(\phi'\phi_x' + a\phi_x\phi_{xx} + \phi\phi_x\big)dt- \\ &-\tfrac{\alpha}{2}\sum_{t=\alpha x}^{T-\alpha x}\Big(\phi'^2(x,t) + a\phi_x^2(x,t) + \phi^2(x,t)\Big). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Analogamente, de (2.39), obtemos

$$H'(x) = \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} (\psi'\psi'_x + b\psi_x\psi_{xx})dt - \frac{\alpha}{2}\sum_{t=\alpha x}^{T-\alpha x}\Big(\psi'^2(x,t) + b\psi_x^2(x,t)\Big) \tag{2.41}$$

A primeira integral da equação (2.40), nos dá

$$\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi'\phi'_x dt = \phi'\phi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} - \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi''\phi_x dt, \tag{2.42}$$

onde usamos integração por parte em relação a t. Multiplicando $(2.6)_1$ por ϕ_x e integrando em $(\alpha x, T-\alpha x)$ com relação a t, segue que

$$\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi''\phi_x dt - \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a\phi_{xx}\phi_x dt - \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \psi_x\phi_x dt + \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi\phi_x dt = 0. \tag{2.43}$$

A substituição de (2.43) em (2.42) nos garante que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi'\phi'_x dt &= \phi'\phi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} - \textstyle\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a\phi_{xx}\phi_x dt - \\ &- \textstyle\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \psi_x\phi_x dt + \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi\phi_x dt. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Agora, substituindo (2.44) em (2.40), resulta que

$$\begin{aligned} G'(x) &= \phi'\phi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} - \textstyle\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \psi_x\phi_x dt + \\ &+ 2\textstyle\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi\phi_x dt - \frac{\alpha}{2}\displaystyle\sum_{t=\alpha x}^{T-\alpha x}\Big(\phi'^2 + a\phi_x^2 + \phi^2\Big). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Como $\phi'\phi_x \leqslant \frac{\beta}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2\beta a}\cdot a\phi_x^2$, tomando $\beta = \frac{1}{\sqrt{a}}$, obtemos

$$\phi'\phi_x \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}\Big(\phi'^2 + a\phi_x^2\Big),$$

e sendo $\frac{1}{\sqrt{a}} \leqslant \alpha$, vale

$$\phi'\phi_x \leqslant \tfrac{\alpha}{2}\Big(\phi'^2 + a\phi_x^2\Big) \leqslant \tfrac{\alpha}{2}\Big(\phi'^2 + a\phi_x^2 + \phi^2\Big).$$

Portanto, dessa desigualdade, resulta que

$$\phi'\phi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} \leqslant \frac{\alpha}{2}\sum_{t=\alpha x}^{T-\alpha x}\Big(\phi'^2 + a\phi_x^2 + \phi^2\Big). \tag{2.46}$$

Da equação (2.46), segue que

$$\begin{aligned} &\phi'\phi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} - \textstyle\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \psi_x\phi_x dt + 2\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi'\phi_x dt - \frac{\alpha}{2}\displaystyle\sum_{t=\alpha x}^{T-\alpha x}\Big(\phi'^2 + a\phi_x^2 + \phi^2\Big) \leqslant \\ &\leqslant -\textstyle\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \psi_x\phi_x dt + 2\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi'\phi_x dt \end{aligned} \tag{2.47}$$

De (2.45) e (2.47), vale

$$G'(x) \leqslant -\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \psi_x \phi_x dt + 2\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi' \phi_x dt. \tag{2.48}$$

Analogamente, temos que

$$H'(x) = \psi'\psi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} + \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi_x \psi_x dt - \frac{\alpha}{2} \sum_{t=\alpha x}^{T-\alpha x} \Big(\psi'^2 + b\psi_x^2\Big). \tag{2.49}$$

Também,

$$\psi'\psi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} \leqslant \frac{\alpha}{2} \sum_{t=\alpha x}^{T-\alpha x} \Big(\psi'^2 + b\psi_x^2\Big), \tag{2.50}$$

e por (2.50), obtemos

$$\psi'\psi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} + \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi_x \psi_x dt - \frac{\alpha}{2} \sum_{t=\alpha x}^{T-\alpha x} \Big(\psi'^2 + b\psi_x^2\Big) \leqslant \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi_x \psi_x dt. \tag{2.51}$$

De (2.49) e (2.51), vale

$$H'(x) \leqslant \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi_x \psi_x dt. \tag{2.52}$$

Agora, usando (2.48) e (2.52), temos que

$$F'(x) \leqslant 2\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi' \phi_x dt \tag{2.53}$$

Da desigualdade de Young, obtemos

$$\phi'\phi_x \leqslant \max\Big\{1, \frac{1}{a}\Big\}\Big(\frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{a}{2}\phi_x^2\Big).$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi'\phi_x dt &\leqslant C_{16} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \Big(\tfrac{1}{2}\phi'^2 + \tfrac{a}{2}\phi_x^2\Big) dt \\ &\leqslant C_{16} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \Big(\tfrac{1}{2}\phi'^2 + \tfrac{1}{2}a\phi_x^2 + \tfrac{1}{2}\phi^2 + \tfrac{1}{2}\psi'^2 + \tfrac{1}{2}b\psi_x^2\Big) dt, \end{aligned} \tag{2.54}$$

onde $C_{16} = 2\max\Big\{1, \frac{1}{a}\Big\}$.

Portanto, da desigualdade (2.53) e (2.54), obtemos

$$F'(s) \leqslant C_{16} F(s). \tag{2.55}$$

Agora, integrando (2.55) em $(0, x)$, resulta que

$$F(x) \leqslant F(0) + \int_0^x C_{16} F(s) ds,$$

e pela desigualdade de Gronwall, segue que

$$F(x) \leqslant e^{C_{16}} F(0),$$

donde,

$$\int_0^1 F(x)dx \leqslant e^{C_{16}} F(0). \tag{2.56}$$

Tomando $T > 2\alpha$ e como $C_0 E_0 \leqslant E(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}(T-2\alpha)E_0 &= \int_\alpha^{T-\alpha} E_0 dt \leqslant \tfrac{1}{C_0} \cdot \int_\alpha^{T-\alpha} E(t)dt \\ &\leqslant \tfrac{1}{C_0} \cdot \int_\alpha^{T-\alpha} \Big(\tfrac{1}{2}(|\phi'|^2 + |\psi'|^2 + a|\phi_x|^2 + b|\psi_x|^2 + |\phi|^2) \Big) dt \\ &\leqslant \tfrac{1}{C_0} \cdot \int_\alpha^{T-\alpha} \int_0^1 \Big(\tfrac{1}{2}(\phi'^2 + \psi'^2 + a\phi_x^2 + b\psi_x^2 + \phi^2) \Big) dxdt.\end{aligned} \tag{2.57}$$

Como $0 \leqslant x \leqslant 1$, temos que $T - \alpha x \geqslant T - \alpha$. Daí $(\alpha, T-\alpha) \subset (\alpha x, T - \alpha x)$, e assim de (2.57), segue que

$$\begin{aligned}(T-2\alpha)E_0 &\leqslant \tfrac{1}{C_0} \int_0^1 \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \Big(\tfrac{1}{2}\phi'^2 + \tfrac{1}{2}\phi'^2 + \tfrac{1}{2}a\phi_x^2 \Big) dtdx + \\ &+ \tfrac{1}{C_0} \int_0^1 \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \Big(\tfrac{1}{2}b\psi_x^2 + \tfrac{1}{2}\psi_x^2 \Big) dtdx \\ &\leqslant \tfrac{1}{C_0} \int_0^1 F(x)dx.\end{aligned} \tag{2.58}$$

De (2.56) e (2.58), obtemos

$$E_0 \leqslant C_{17} F(0), \tag{2.59}$$

onde $C_{17} = \frac{1}{C_0}\big(\frac{e^{C_{16}}}{T-2\alpha}\big)$. Agora, da desigualdade (2.59), segue que

$$\begin{aligned}&\min\Big\{1, a, b\Big\} \Big(\tfrac{1}{2}|\phi^1|^2 + \tfrac{1}{2}|\psi^1|^2 + \tfrac{1}{2}|\phi_x^0|^2 + \tfrac{1}{2}|\psi_x^0|^2 \Big) \leqslant \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}|\phi^1|^2 + \tfrac{1}{2}|\psi^1|^2 + \tfrac{1}{2}a|\phi_x^0|^2 + \tfrac{1}{2}b|\psi_x^0|^2 \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}|\phi^1|^2 + \tfrac{1}{2}|\psi^1|^2 + \tfrac{1}{2}a|\phi_x^0|^2 + \tfrac{1}{2}b|\psi_x^0|^2 + \tfrac{1}{2}|\phi^0|^2 \\ &\leqslant \tfrac{C_{17}}{2} \int_0^T (a\phi_x^2(0,t) + b\psi_x^2(0,t))dt.\end{aligned} \tag{2.60}$$

Fazendo $C_{18} = \frac{C_{17}}{2}\Big(\frac{1}{\min\{1,a,b\}}\Big)$, de (2.60) segue que

$$\frac{1}{2}|\phi^1|^2 + \frac{1}{2}|\psi^1|^2 + \frac{1}{2}|\phi_x^0|^2 + \frac{1}{2}|\psi_x^0|^2 \leqslant C_{18} \int_0^T (a\phi_x^2(0,t) + b\psi_x^2(0,t))dt,$$

e, integrando essa desigualdade em $(0,1)$ com relação a x, resulta que

$$\int_0^1 \big(|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + |\phi_x^0|^2 + |\psi_x^0|^2\big)dx \leqslant 2C_{18} \int_0^T \big(a\phi_x^2(0,t) + b\psi_x^2(0,t)\big)dt. \tag{2.61}$$

Assim, de (2.61), obtemos

$$C_{19} \|\{\phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1\}\|_F^2 \leqslant \int_0^T (a\phi_x^2(0,t) + b\psi_x^2(0,t))dt,$$

onde $C_{19} = \frac{1}{2C_{18}}$. ■

Teorema 2.2.1. *Dado* $\{\phi^0, \psi^0\} \in (H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1))^2$; $\{\phi^1, \psi^1\} \in (H_0^1(0,1))^2$

$$e \quad f, g \in W^{1,1}\big(0, T; H_0^1(0,1)\big),$$

existe somente uma única solução fraca $\{\phi, \psi\}$ *de* (2.6), (2.7) *e* (2.8) *no sentido da definição 1.5.1. Além disso, a aplicação* $\{\{\phi^0, \psi^0\}, \{\phi^1, \psi^1\}, \{f.g\}\} \to \{\{\phi, \psi\}, \{\phi', \psi'\}\}$ *é continua.*

Demonstração. **Problema aproximado**

Consideraremos o subespaço m-dimensional de $H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ denotado por $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$, onde $\{w_j\}$ é uma base ortonormal de $H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$, a qual existe, pois $H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ é separável. O problema aproximado consiste em encontrar um par de soluções:

$$\begin{aligned}
\phi_m :\ & (0, t_m) \longrightarrow V_m \\
& t \longmapsto \phi_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \\
\psi_m :\ & (0, t_m) \longrightarrow V_m \\
& t \longmapsto \psi_m(t) = \sum_{j=1}^{m} p_{jm}(t) w_j
\end{aligned}$$

do problema aproximado

$$\left| \begin{array}{l} (\phi_m'', w_k) - a((\phi_m)_{xx}, w_k) - ((\psi_m)_x, w_k) + (\phi_m, w_k) = (f, w_k); \\ (\psi_m'', w_k) - b((\psi_m)_{xx}, w_k) + ((\phi_m)_x, w_k) = (g, w_k), \text{ onde } k = 1, \cdots m. \end{array} \right. \tag{2.62}$$

com as condições iniciais

$$\left| \begin{array}{l} \phi(0) = \phi_m^0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} (\phi^0, w_j) w_j \longrightarrow \phi^0 \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1) \\ \phi'(0) = \phi_m^1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} (\phi^1, w_j) w_j \longrightarrow \phi^1 \in H_0^1(0,1) \\ \psi(0) = \psi_m^0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} (\psi^0, w_j) w_j \longrightarrow \psi^0 \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1) \\ \psi'(0) = \psi_m^1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} (\psi^1, w_j) w_j \longrightarrow \psi^1 \in H_0^1(0,1), \end{array} \right. \tag{2.63}$$

onde essas convergências é no sentido forte. Mostraremos que as soluções de (2.62) e (2.63), eatá nas condições do Teorema de Caratheodory.

De fato,

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)(w_j, w_k) - a\sum_{j=1}^{m} g_{jmxx}(t)(w_j, w_k) - \sum_{j=1}^{m} p_{jmx}(t)(w_j, w_k) + \\ + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)(w_j, w_k) = (f, w_k), \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} p''_{jm}(t)(w_j, w_k) - b\sum_{j=1}^{m} p_{jmxx}(t)(w_j, w_k) - \sum_{j=1}^{m} g_{jmx}(t)(w_j, w_k) = (g, w_k), \\ g_{jm}(0) = (\phi^0, w_k),\ p_{jm}(0) = (\psi^0, w_k), \\ g'_{jm}(0) = (\phi^1, w_k),\ p'_{jm}(0) = (\psi^1, w_k), \quad \forall\ k = 1, 2, \cdots, m. \end{array} \right.$$

Fazendo,

$A = [(w_j, w_k)]_{m\times m}$; $B = [g_{jm}(t)]_{m\times 1}$; $C = [p_{jm}(t)]_{m\times 1}$ $R = [(f, w_k)]_{m\times 1}$ e $N = [(g, w_k)]_{m\times 1}$, temos o seguinte sistema na forma matricial:

$$\left| \begin{array}{l} AB'' + AB = aB_{xx}A + CA + R \\ AC'' = bC_{xx}A + B_xA + N \\ B(0) = [g_{jm}(0)]_{m\times 1} = B_0;\ B'(0) = [g'_{jm}(0)]_{m\times 1} = B_1 \\ C(0) = [p_{jm}(0)]_{m\times 1} = C_0;\ C'(0) = [p'_{jm}(0)]_{m\times 1} = C_1. \end{array} \right. \tag{2.64}$$

Agora mostremos que a matriz A é invertível. Com efeito, como o produto interno é simétrico, segue que a matriz A é uma matriz real e simétrica, isto é, diagonalizável. Portanto existem uma matriz P invertível e uma matriz D diagonal tais que

$$D = P^{-1}AP.$$

Para mostrarmos que a matriz A é invertível, provaremos que $\det D \neq 0$. Isso equivale a mostrarmos que zero não é autovalor de D. Suponhamos, por absurdo, que zero seja autovalor de D, isto é, $D\alpha = 0\alpha = 0$, onde α é um autovetor não nulo dado por

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

Agora, notemos que

$$AP\alpha = PP^{-1}AP\alpha = PD\alpha = P0 = 0.$$

Fazendo,

$$P\alpha = \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{bmatrix}$$

obtemos que

$$A\varphi = \left[\sum_{k=1}^{m} (w_j, w_k)\, \varphi_k \right]_{m\times 1} = 0, \quad \forall\, j = 1, 2, \cdots, m.$$

donde resulta que

$$\left[\left(w_j, \sum_{k=1}^{m} w_k \varphi_k \right) \right]_{m\times 1} = 0 \;\; \forall\, j = 1, 2, \cdots, m.$$

Portanto, temos

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \varphi_k = 0,$$

pois $w_j \neq 0 \;\; \forall\, j = 1, 2, \cdots, m$. Com isso, temos que $\varphi_k = 0, \;\; \forall\, k = 1, 2, \cdots, m$, ou seja, $\varphi = 0$. Então vale que $P\alpha = 0$ donde $\alpha = 0$, pois P é invertível. Mas isso contradiz o fato que α é autovetor. Logo, concluímos que a matriz A é invertível e de (2.64), temos

$$\left| \begin{array}{l} B'' + B = aB_{xx} + C + RA^{-1} \\ C'' = bC_{xx} + B_x + NA^{-1} \\ B(0) = B_0;\; B'(0) = B_1 \\ C(0) = C_0;\; C'(0) = C_1 \end{array} \right. \tag{2.65}$$

Fazendo $Y = \begin{bmatrix} B \\ B' \end{bmatrix}$; $W = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & I_{m\times m} \\ -I_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}$; $W_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ aB_{xx} + C + RA^{-1} \end{bmatrix}$; $G = \begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$; $F = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & I_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}$; $F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ bC_{xx} + B_x + NA^{-1} \end{bmatrix}$; $Y_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix}$ e $G_0 = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix}$,

o sistema (2.65) pode ser reescrito como sendo

$$\left| \begin{array}{l} Y' = WY + W_1 \\ G' = FG + F_1 \\ Y(0) = Y_0 \\ G(0) = G_0. \end{array} \right.$$

Agora, fazendo

$$X = \begin{bmatrix} Y \\ G \end{bmatrix}; \; H = \begin{bmatrix} W & 0_{2m\times 2m} \\ 0_{2m\times 2m} & F \end{bmatrix}; \; H_1 = \begin{bmatrix} W_1 \\ F_1 \end{bmatrix} \text{ e }; \; X_0 = \begin{bmatrix} Y_0 \\ G_0 \end{bmatrix},$$

segue que

$$\left| \begin{array}{l} X' = \omega(t, X) \\ X(0) = X_0, \end{array} \right. \tag{2.66}$$

onde $WY + H_1 = \omega(t, X)$.

Provaremos, agora que o problema acima possui uma solução local utilizando o Teorema de Carathéodory.

(i) Fixado X, tem-se que $\omega(t, X)$ é mensurável, pois ω pertence a classe $L^2(0, T; H^{-1})$.

(ii) Para cada t fixo, $\omega(t, X)$ é contínua pois, H_1 é constante e a aplicação

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^{4m} &\to \mathbb{R}^{4m} \\ X &\mapsto WY \end{aligned}$$

é linear e, portanto, contínua.

(iii) Seja K um compacto de $[0, T] \times \mathbb{R}^{4m}$. Então

$$||\omega(t, X)||_{\mathbb{R}^{4m}} \leqslant ||H_1||_{\mathbb{R}^{4m}} + ||J(X)||_{\mathbb{R}^{4m}}.$$

Como H_1 e J são contínuas em $\mathbb{R}^{4m}$, temos que elas são limitadas em qualquer compacto do $\mathbb{R}^{4m}$. Assim, existe um $M_k > 0$ tal que:

$$||H_1||_{\mathbb{R}^{4m}}, \; ||J(X)||_{\mathbb{R}^{4m}} \leqslant M_k,$$

para todo $(t, X) \in K$. Portanto, podemos concluir que existe uma constante positiva M_K satisfazendo

$$||\omega(t, X)||_{\mathbb{R}^{4m}} \leqslant 2M_k$$

Assim, a função $\omega(t, X)$ satisfaz as condições de Carathéodory, e portanto o sistema (2.66) possui solução local, em $[0, t_m]$.

O restante da demonstração dividiremos em:

1. Obtenção de estimativas a priori para as soluções aproximada de $\phi_m(t)$ e $\psi_m(t)$ do sistema (2.62) permitindo prolongar a solução ao intervalo $[0, T]$;

2. Obtenção de subsucessões cujo limite é a solução do Teorema 2.2.1.

Estimativas a Priori

Notando que o sistema (2.62) vale para todo $v \in V$ no lugar de w_k, então fazendo $v = -\phi'_{mxx} \in V_m$ em $(2.62)_1$ e $v = -\psi'_{mxx} \in V_m$ em $(2.62)_2$, temos:

$$\left| \begin{array}{l} (\phi'', -\phi'_{xx}) - a(\phi_{xx}, -\phi'_{xx}) - (\psi_x, -\phi'_{xx}) + (\phi, -\phi'_{xx}) = (f, -\phi'_{xx}) \\ (\psi'', -\psi'_{xx}) - b(\psi_{xx}, -\psi'_{xx}) + (\phi_x, -\psi'_{xx}) = (g, -\psi'_{xx}). \end{array} \right. \tag{2.67}$$

Aqui, por enquanto, estamos omitindo o índice m para facilitar os cálculos.

Usando integração por parte em (2.67), obtemos

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|\phi'_x|^2 + a|\phi_{xx}|^2 + |\phi_x|^2\big) = (f_x, \phi'_x) - (\psi_x, \phi'_{xx}) \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|\psi'_x|^2 + b|\psi_{xx}|^2\big) = (g_x, \psi'_x) - (\phi_x, \psi'_{xx}). \end{array} \right. \tag{2.68}$$

Derivando (ψ_x, ϕ_{xx}) em relação a t, segue que

$$\frac{d}{dt}(\psi_x, \phi_{xx}) = (\psi'_x, \phi_{xx}) + (\psi_x, \phi'_{xx}).$$

Integrando a equação acima de 0 a t, obtemos

$$\int_0^t (\psi_x, \phi'_{xx})ds = \big(\psi_x(t), \phi_{xx}(t)\big) - (\psi^0_x, \phi^0_{xx}) - \int_0^t (\psi'_x, \phi_{xx})ds. \tag{2.69}$$

Agora, integrando $(2.68)_1$ de 0 a t, resulta que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\big(|\phi'_x(t)|^2 + a|\phi_{xx}(t)|^2 + |\phi_x(t)|^2\big) &= \tfrac{1}{2}\big(|\phi^1_x|^2 + a|\phi^0_{xx}|^2 + |\phi^0_x|^2\big) + \\ &+ \textstyle\int_0^t (f_x, \phi'_x)ds - \int_0^t (\psi_x, \phi'_{xx})ds, \end{aligned}$$

e, levando em conta (2.69), obtemos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\big(|\phi'_x(t)|^2 + a|\phi_{xx}(t)|^2 + |\phi_x(t)|^2\big) &= \tfrac{1}{2}\big(|\phi^1_x|^2 + a|\phi^0_{xx}|^2 + |\phi^0_x|^2\big) + \\ &+ \textstyle\int_0^t (f_x, \phi'_x)ds - \big(\psi'_x(t), \phi_{xx}(t)\big) + \\ &+ (\psi^0_x, \phi^0_{xx}) + \textstyle\int_0^t (\psi'_x, \phi_{xx})ds. \end{aligned} \tag{2.70}$$

De modo análogo, temos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\big(|\psi'_x(t)|^2 + b|\psi_{xx}(t)|^2\big) &= \tfrac{1}{2}\big(|\psi^1_x|^2 + b|\psi^0_{xx}|^2\big) + \textstyle\int_0^t (g_x, \psi'_x)ds + \\ &+ \big(\phi_x(t), \psi_{xx}(t)\big) - (\phi^0_x, \psi^0_{xx}) - \textstyle\int_0^t (\phi'_x, \psi_{xx})ds. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Somando (2.70) e (2.71), segue que

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\big(|\phi'_x(t)|^2 + a|\phi_{xx}(t)|^2 + |\phi_x(t)|^2 + |\psi'_x(t)|^2 + b|\psi_{xx}(t)|^2\big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\big(|\phi^1_x|^2 + a|\phi^0_{xx}|^2 + |\phi^0_x|^2 + |\psi^1_x|^2 + b|\psi^0_{xx}|^2\big) + \textstyle\int_0^t (f_x, \phi'_x)ds + \\ &+ \textstyle\int_0^t (g_x, \psi'_x)ds - \int_0^t (\phi'_x, \psi_{xx})ds + \int_0^t (\psi'_x, \phi_{xx})ds. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Para prosseguirmos, demonstraremos que vale a identidade integral:

$$\int_0^t (\psi_x', \phi_{xx})ds = \int_0^t (\phi_x', \psi_{xx})ds.$$

De fato, temos que $(\psi_x', \phi_{xx}) = \int_0^t \psi_x' \phi_{xx} ds$. Agora, notemos que

$$\frac{d}{dt}\psi_x \phi_{xx} = \psi_x' \phi_{xx} + \psi_x \phi_{xx}'.$$

Integrando de 0 a 1, obtemos

$$\psi_x(x,t)\phi_{xx}(x,t)\Big|_0^1 = \int_0^1 \psi_x'\phi_{xx} ds + \int_0^1 \psi_x \phi_{xx}' ds.$$

Como $\psi_x \in H_0^1(0,1)$, isso implica que $\psi_x(1,t) = \psi_x(0,t) = 0$. Então temos

$$(\psi_x', \phi_{xx}) = -(\psi_x, \phi_{xx}').$$

De modo similar, temos

$$-(\psi_x, \phi_{xx}') = (\psi_{xx}, \phi_x').$$

Dessas duas últimas igualdades, obtemos

$$(\psi_x', \phi_{xx}) = (\psi_{xx}, \phi_x').$$

Usando esta igualdade em (2.72), resulta que

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(|\phi_x'(t)|^2 + a|\phi_{xx}(t)|^2 + |\phi_x(t)|^2 + |\psi_x'(t)|^2 + b|\psi_{xx}(t)|^2\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(|\phi_x^1|^2 + a|\phi_{xx}^0|^2 + |\phi_x^0|^2 + |\psi_x^1|^2 + b|\psi_{xx}^0|^2\right) + \textstyle\int_0^t (f_x, \phi_x')ds + \\ &+ \textstyle\int_0^t (g_x, \psi_x')ds. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Agora, fazendo $F(t) = |\phi_x'(t)|^2 + a|\phi_{xx}(t)|^2 + |\phi_x(t)|^2 + |\psi_x'(t)|^2 + b|\psi_{xx}(t)|^2$, obtemos de (2.73) que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}F(t) &= \tfrac{1}{2}F(0) + \textstyle\int_0^t (f_x, \phi_x')ds + \int_0^t (g_x, \psi_x')ds \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}F(0) + \textstyle\int_0^t |f_x| \cdot |\phi_x'| ds + \int_0^t |g_x| \cdot |\psi_x'| ds \end{aligned} \tag{2.74}$$

Agora, precisaremos do seguinte lema, para concluirmos a prova do Teorema 2.2.1.

Lema 2.2.2. $\int_0^t |f_x| \cdot |\phi_x'| ds \leqslant \frac{1}{2}||f||_M + \frac{1}{2}\int_0^t |f_x| \cdot |\phi_x'|^2 ds$, *onde* $M = L^1(0,T; H_0^1(0,1))$.

De fato, pela desigualdade de Young, obtemos

$$|f_x| \cdot |\phi_x'| = \sqrt{|f_x|} \cdot \sqrt{|f_x|} \cdot |\phi_x'| \leqslant \frac{1}{2}|f_x| + \frac{1}{2}|f_x| \cdot |\phi_x'|^2.$$

Integrando de 0 a t, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^t |f_x|\cdot|\phi_x'|ds &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^t |f_x|ds + \tfrac{1}{2}\int_0^t |f_x|\cdot|\phi_x'|^2ds\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^T |f_x|ds + \tfrac{1}{2}\int_0^t |f_x|\cdot|\phi_x'|^2ds\\ &= \tfrac{1}{2}||f||_{L^1(0,T;H_0^1(0,1))} + \tfrac{1}{2}\int_0^t |f_x|\cdot|\phi_x'|^2ds\\ &= \tfrac{1}{2}||f||_M + \tfrac{1}{2}\int_0^t |f_x|\cdot|\phi_x'|^2ds.\end{aligned}$$

■

De modo análogo, temos que

$$\int_0^t |g_x|\cdot|\psi_x'|ds \leqslant \frac{1}{2}||g||_M + \frac{1}{2}\int_0^t |g_x|\cdot|\psi_x'|^2ds.$$

Agora, usando o Lema 2.2.2 e a desigualdade (2.74), obtemos que

$$\frac{1}{2}F(t) \leqslant \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}||f||_M + \frac{1}{2}\int_0^t |f_x|\cdot|\phi_x'|^2ds + \frac{1}{2}||g||_M + \frac{1}{2}\int_0^t |g_x|\cdot|\psi_x'|^2ds,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}F(t) &\leqslant F(0) + ||f||_M + \int_0^t |f_x|\cdot|\phi_x'|^2ds + ||g||_M + \int_0^t |g_x|\cdot|\psi_x'|^2ds\\ &\leqslant C + \int_0^t\big(|f_x(s)| + |g_x(s)|\big)\cdot\big(|\phi_x'|^2 + a|\phi_{xx}|^2 + |\phi_x|^2 + |\psi_x'|^2 + b|\psi_{xx}|^2\big)ds,\end{aligned}$$

onde $C = F(0) + ||f||_M + ||g||_M$. Reescrevendo essa desigualdade com $u(s) = |f_x(s)| + |g_x(s)|$, resulta que

$$F(s) \leqslant C + \int_0^t u(s)F(s)ds.$$

Pela Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$F(t) \leqslant Ce^{\int_0^t u(s)ds}.\ \ \forall\ \ 0 < t < t_m < T\ \ \text{com}\ \ m = 1, 2, ...$$

Desta estimativa, podemos prolongar as soluções aproximadas $\{\phi_m, \psi_m\}$ a todo intervalo $[0, T]$ com $T > 0$. Além disso, obtemos as limitações

$$\left|\begin{array}{lll}(\phi_{xm}') & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;L^2(0,1))\\ (\psi_{xm}') & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;L^2(0,1))\\ (\phi_{xm}) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;L^2(0,1))\\ (\psi_{xxm}) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;L^2(0,1)).\end{array}\right. \tag{2.75}$$

De $(2.75)_1$, $(2.75)_2$ e $(2.75)_3$, e usando a imersão $H_0^1(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1)$, segue que

$$\left|\begin{array}{lll}(\phi_m') & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;H_0^1(0,1))\\ (\psi_m') & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;H_0^1(0,1))\\ (\phi_m) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)).\end{array}\right. \tag{2.76}$$

Como $H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1) \subset H_0^1(0,1)$ então de $(2.76)_3$, obtemos que

$$(\phi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)). \tag{2.77}$$

Da desigualdade de Poincaré, vale

$$||\psi_m||_{H_0^1(0,1)} \leqslant \alpha_1 |\psi_{xxm}|_{L^2(0,1)}.$$

De fato, temos

$$||\psi_m||_{H_0^1(0,1)} = |\psi_{xm}|_{L^2(0,1)} \leqslant \alpha_1 |\psi_{xxm}|_{L^2(0,1)},$$

ou seja, usando $(2.75)_4$, resulta que

$$(\psi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T; H_0^1(0,1)),$$

donde,

$$(\psi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty\big(0,T; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)\big). \tag{2.78}$$

Como $L^\infty(0,T; H_0^1(0,1)) = [L^1(0,T; H^{-1}(0,1))]'$ e $L^1(0,T; H^{-1}(0,1))$ é separável, então toda sequência limitada em $L^\infty(0,T; H_0^1(0,1))$ possui uma subsequência que converge na topologia fraca, para um elemento de $L^\infty(0,T; H_0^1(0,1))$. Para não carregarmos a notação, representaremos essas subsequências pelas proprias sequências. Então de (2.76), (2.77) e (2.78), obtemos

$$\left|\begin{array}{l} \phi'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \ \text{ em } \ L^\infty(0,T; H_0^1(0,1)) \\ \psi'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \psi' \ \text{ em } \ L^\infty(0,T; H_0^1(0,1)) \\ \phi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \ \text{ em } \ L^\infty(0,T; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)) \\ \psi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \ \text{ em } \ L^\infty(0,T; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)). \end{array}\right. \tag{2.79}$$

Logo, de (2.79), resulta que

$$\phi, \psi \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1))$$

$$\phi', \psi' \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,1)).$$

Como ϕ, ψ, ϕ', ψ' são contínuas, pelo caso acima, então a aplicação

$$\{\{\phi^0, \psi^0, \phi^1, \psi^1, f, g\}\} \to \{\phi, \psi, \phi', \psi'\}$$

é contínua. ■

Teorema 2.2.2. *Dado*

$$\phi^0, \psi^0 \in H_0^1(0,1);\ \phi^1, \psi^1 \in L^2(0,1);\ f, g \in L^1\big(0,T; L^2(0,1)\big),$$

existe uma única solução forte $\{\phi, \psi\}$ *de* (2.6), (2.7) *e* (2.8) *no sentido definido da definição 1.5.2 do capitulo 1, satisfazendo as condições:*

$$\phi, \psi \in L^\infty\big(0,T; H_0^1(0,1)\big),$$

$$\phi', \psi' \in L^\infty\big(0,T; L^2(0,1)\big).$$

Além disso, a aplicação $\{\{\phi^0, \psi^0\}, \{\phi^1, \psi^1\}, \{f.g\}\} \to \{\{\phi, \psi\}, \{\phi', \psi'\}\}$ *é continua.*

Demonstração. **Problema aproximado**

Consideraremos o subespaço m-dimensional de $H_0^1(0,1)$ denotado por $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$, onde $\{w_j\}$ é uma base ortonormal de $H_0^1(0,1)$. O problema aproximado consiste em encontrar funções $\phi_m, \psi_m \in V_m$, tais que:

$$\begin{aligned} \phi_m :\ & (0, t_m) \longrightarrow V_m \\ & t \longmapsto \phi_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_m :\ & (0, t_m) \longrightarrow V_m \\ & t \longmapsto \psi_m(t) = \sum_{j=1}^{m} p_{jm}(t) w_j \end{aligned}$$

que satisfaça o seguinte problema aproximado

$$\begin{cases} (\phi_m'', w_k) - a(\phi_{mxx}, w_k) - (\psi_{mx}, w_k) + (\phi_m, w_k) = (f, w_k) \\ (\psi_m'', w_k) - b(\psi_{mxx}, w_k) + (\phi_{mx}, w_k) = () \text{ onde } k = 1, \cdots m \end{cases} \tag{2.80}$$

com as condições iniciais satisfazendo

$$\begin{cases} \phi(0) = \phi_m^0 = \sum_{j=1}^{m} (\phi^0, w_j) w_j \longrightarrow \phi^0 \in H_0^1(0,1) \\ \phi'(0) = \phi_m^1 = \sum_{j=1}^{m} (\phi^1, w_j) w_j \longrightarrow \phi^1 \in L^2(0,1) \\ \psi(0) = \psi_m^0 = \sum_{j=1}^{m} (\psi^0, w_j) w_j \longrightarrow \psi^0 \in H_0^1(0,1) \\ \psi'(0) = \psi_m^1 = \sum_{j=1}^{m} (\psi^1, w_j) w_j \longrightarrow \psi^1 \in L^2(0,1), \end{cases} \tag{2.81}$$

onde as convergências, são no sentido forte.

Fazendo o mesmo processo, visto no Teorema 2.2.1, temos que o sistema (2.80), (2.81) possui soluções (ϕ_m, ψ_m), via Teorema de Caratheodory, em $[0, t_m)$.

Estimativas a Priori

Notando que sistema (2.79) vale para todo $v \in V$, no lugar de w_k, então fazendo $v = \phi'_m \in V_m$ em $(2.79)_1$ e $v = \psi'_m \in V_m$ em $(2.79)_2$, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} (\phi''_m, \phi'_m) - a(\phi_{xxm}, \phi'_m) - (\psi_{xm}, \phi'_m) + (\phi_m, \phi'_m) = (f, \phi'_m) \\ (\psi''_m, \psi'_m) - b(\psi_{xxm}, \psi'_m) + (\phi_{xm}, \psi'_m) = (g, \psi'_m), \end{array} \right. \tag{2.82}$$

e de $(2.81)_1$ e $(2.81)_2$, segue que

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|\phi'_m|^2 + a||\phi_m||^2 + |\phi_m|^2\big) = (f, \phi'_m) + (\psi_{xm}, \phi'_m) \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|\psi'_m|^2 + b||\psi_m||^2\big) = (g, \psi'_m) - (\phi_{xm}, \psi'_m). \end{array} \right. \tag{2.83}$$

Definindo a energia associada ao sistema (2.6), (2.7) e (2.8) por

$$E(t) = \frac{1}{2}\big(|\phi'_m(t)|^2 + |\psi'_m(t)|^2 + a||\phi_m(t)||^2 + b||\psi_m(t)||^2 + |\phi_m(t)|^2\big),$$

e somando $(2.83)_1$ e $(2.83)_2$, temos que

$$E'(t) = (f, \phi'_m) + (g, \psi'_m) + (\psi_{xm}, \phi'_m) - (\phi_{xm}, \psi'_m). \tag{2.84}$$

Pelas Desigualdades de Schwarz e Young, resulta que

$$\begin{aligned} E'(t) &\leqslant |f(t)||\phi'_m(t)| + |g(t)||\psi'_m(t)| + |\psi_{xm}(t)||\phi'_m(t)| + |\phi_{xm}(t)||\psi'_m(t)| \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\big(|f(t)| + |f(t)||\phi'_m(t)|^2\big) + \tfrac{1}{2}\big(|g(t)| + |g(t)||\psi'_m(t)|^2\big) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\big(|\psi_{xm}(t)|^2 + |\phi'_m(t)|^2\big) + \tfrac{1}{2}\big(|\phi_{xm}(t)|^2 + |\psi'_m(t)|^2\big). \end{aligned} \tag{2.85}$$

De (2.85), obtemos

$$\begin{aligned} E'(t) &\leqslant \tfrac{1}{2}\big(|f(t)||\phi'_m(t)|^2 + |g(t)||\psi'_m(t)|^2 + ||\psi_m||^2 + |\phi'_m(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 + |\psi'_m(t)|^2\big) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\big(|f(t)| + |g(t)|\big). \end{aligned}$$

Fazendo $h(t) = |f(t)| + |g(t)| + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \in L^2(0, T)$, segue que

$$E'(t) \leqslant \frac{1}{2}\big(|f(t)| + |g(t)|\big) + h(t)E(t).$$

Integrando essa desigualdade de 0 a t, resulta que

$$E(t) \leqslant E(0) + \frac{1}{2}\int_0^T \big(|f(t)| + |g(t)|\big)\,dt + \int_0^t h(s)E(s)\,ds. \tag{2.86}$$

Fazendo $C = E(0) + \frac{1}{2}\int_0^T \big(|f(t)| + |g(t)|\big)dt$ e, usando a Desigualdade de Gronwall em (2.85), segue que

$$E(t) \leqslant Ce^{\int_0^t h(s)ds}, \quad \forall \;\; 0 < t < t_m < T \;\; \text{com} \;\; m = 1, 2, ...$$

Com isso, obtemos

$$\left| \begin{array}{ll} (\phi'_m) & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ (\psi'_m) & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ (\phi_{xm}) & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ (\psi_{xm}) & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)). \end{array} \right. \tag{2.87}$$

Usando a imersão $H_0^1(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1)$, temos que

$$\left| \begin{array}{ll} (\phi'_m) & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ (\psi'_m) & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ (\phi_m) & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)) \\ (\psi_m) & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)). \end{array} \right. \tag{2.88}$$

Como $L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)) = [L^1(0,T;H^{-1}(0,1))]'$ e $L^1(0,T;H^{-1}(0,1))$ é separável, então toda sequência limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(0,1))$ possui uma subsequência que converge na topologia fraca estrela, para um elemento de $L^\infty(0,T;H_0^1(0,1))$. Para não carregarmos a notação, representaremos essas subsequências pelas proprias sequências. Então de (2.88), obtemos

$$\begin{array}{l} \phi'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \;\; em \;\; L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ \psi'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \psi' \;\; em \;\; L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ \phi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \;\; em \;\; L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)) \\ \psi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \;\; em \;\; L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)). \end{array} \tag{2.89}$$

Logo, de (2.89), vale que:

$$\phi, \psi \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,1))$$

$$\phi', \psi' \in L^\infty(0,T;L^2(0,1)).$$

■

Capítulo 3

Controlabilidade Exata para o Sistema de Timoshenko

3.1 Controlabilidade Exata para o Sistema de Timoshenko

Na demonstração do teorema principal deste capitulo será usado o Método de HUM, $(Ver[10])$ que é basedo em certos critérios de singularidade e a construção de um espaço de Hilbert H. Esse método leva em consideração a singularidade e regularidade da equação da onda, onde no decorrer da demonstração do teorema a seguir será descrito os passos.

Teorema 3.1.1. *(Controlabilidade Exata para o Sistema de Timoshenko) Seja a e b números reais, onde:*

$$\min\{a, b\} > 1 \ \text{ e } \ \alpha = \max\left\{\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right\},$$

com $T > 2\alpha$. *Então para cada conjunto de valor inicial* $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$, *existem um par de controles* $v(t), w(t) \in L^2(0,T)$ *tal que* $y(t), z(t)$ *é solução de* $(3.1), (3.2)$ *e* (3.3) *satisfazendo* (3.4).

$$\left|\begin{array}{l} y'' - ay_{xx} - z_x + y = 0 \text{ em } Q, \\ z'' - bz_{xx} + y_x = 0 \text{ em } Q, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

$$\left|\begin{array}{l} y(0,t) = v(t), \quad y(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \\ z(0,t) = w(t), \quad z(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \end{array}\right. \tag{3.2}$$

$$\left| \begin{array}{l} y(x,0) = y^0(x), \quad y'(x,0) = y^1(x) \text{ em } \Omega, \\ z(x,0) = z^0(x), \quad z'(x,0) = z^1(x) \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

$$\left| \begin{array}{l} y(x,T) = 0, \quad y'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1), \\ z(x,T) = 0, \quad z'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1). \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Demonstração. A prova será feita em três casos:

Caso 1. Dados $\{\phi^0, \phi^1\}$, $\{\psi^0, \psi^1\} \in D(0,1) \times D(0,1)$, consideraremos o problema misto homogêneo dado por

$$\begin{cases} \phi'' - a\phi_{xx} - \psi_x + \phi = 0 \text{ em } Q \\ \psi'' - b\psi_{xx} + \phi_x = 0 \text{ em } Q \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \phi(0,t) = 0, \quad \phi(1,t) = 0 \text{ em } (0,T) \\ \psi(0,t) = 0, \quad \psi(1,t) = 0 \text{ em } (0,T) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \phi(x,0) = \phi^0(x), \quad \phi'(x,0) = \phi^1(x) \text{ em } (0,1) \\ \psi(x,0) = \psi^0(x), \quad \psi'(x,0) = \psi^1(x) \text{ em } (0,1). \end{cases} \tag{3.7}$$

Pelo Teorema 2.2.1 e Teorema 2.2.2, o problema misto (3.5), (3.6) e (3.7) tem somente uma solução $\phi = \phi(x,t), \psi = \psi(x,t)$ tal que

$$\phi_x(0,t)\,,\ \psi_x(0,t) \in L^2(0,T)$$

Caso 2. Com a solução $\phi = \phi(x,t)$ e $\psi = \psi(x,t)$ do caso 1, resolve-se o problema dado por:

$$\begin{cases} \xi'' - a\xi_{xx} - \zeta_x + \xi = 0 \text{ em } Q \\ \zeta'' - b\zeta_{xx} + \xi_x = 0 \text{ em } Q \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \xi(0,t) = -\phi x(0,t), \quad \xi(1,t) = 0 \text{ em } (0,T) \\ \zeta(0,t) = -\psi_x(0,t), \quad \zeta(1,t) = 0 \text{ em } (0,T) \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} \xi(x,T) = 0, \quad \xi'(x,T) = 0 \text{ em } \Omega \\ \zeta(x,T) = 0, \quad \zeta'(x,T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Usando o caso 1, o problema (3.8), (3.9) e (3.10) tem somente uma única solução $\xi = \xi(x,t)$ e $\zeta = \zeta(x,t)$. Agora, definamos o operador Λ dado por

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1\} = \{\xi'(0), -\xi(0), \zeta'(0), -\zeta(0)\}, \tag{3.11}$$

para todo $\{\phi^0, \phi^1\}, \{\psi^0, \psi^1\} \in D(0,1) \times D(0,1)$.

A aplicação Λ, está bem definida, pois como $\xi = \xi(x,t)$, $\zeta = \zeta(x,t)$ é solução de (3.8), (3.9) e (3.10) faz sentido calcular $\xi(0) = \xi(x,0)$, $\zeta(0) = \zeta(x,0)$, $\xi'(0) = \xi'(x,0)$ e $\zeta'(0) = \zeta'(x,0)$.

Caso 3. Multiplicando $(3.5)_1$ por ξ e $(3.5)_2$ por ζ, solução de (3.8), (3.9) e (3.10) e, após integrando em Q, obtemos

$$\left|\begin{array}{l} \int_Q \phi''\xi dxdt - \int_Q a\phi_{xx}\xi dxdt - \int_Q \psi_x \xi dxdt + \int_Q \phi\xi dxdt = 0 \\ \int_Q \psi''\zeta dxdt - \int_Q b\psi_{xx}\zeta dxdt + \int_Q \phi_x\zeta dxdt = 0. \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Integrando por partes $(3.12)_1$ e usando $(3.6)_1$, $(3.9)_1$ e $(3.10)_1$, resulta que

$$\begin{aligned} \int_Q \phi''\xi dxdt &= \int_0^T (\phi'', \xi)dt = (\phi', \xi)|_0^T - \int_0^T (\phi', \xi')dt \\ &= -\big(\phi'(x,0), \xi(x,0)\big) - \int_0^T (\phi', \xi')dt \\ &= -\big(\phi^1, \xi(0)\big) - (\phi, \xi')|_0^T + \int_0^T (\phi, \xi'')dt \\ &= -\big(\phi^1, \xi(0)\big) + \big(\phi(x,0), \xi'(x,0)\big) + \int_0^T (\phi, \xi'')dt \\ &= -\big(\phi^1, \xi(0)\big) + \big(\phi^0, \xi'(0)\big) + \int_Q \phi \cdot \xi'' dxdt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Também,

$$\begin{aligned} -a\int_Q \phi_{xx}\xi dxdt &= -a\int_0^T\int_0^1 \phi_{xx}\xi dxdt = -a\int_0^T \Big(\phi_x\xi|_0^1 - \int_0^1 \phi_x\xi_x dx\Big)dt \\ &= -a\int_0^T \Big(-\phi_x(0,t)\xi(0,t) - \int_0^1 \phi_x\xi_x dx\Big)dt \\ &= -a\int_0^T \Big(-\phi_x(0,t)\xi(0,t) - \phi\xi_x|_0^1 + \int_0^1 \phi\xi_{xx} dx\Big)dt \\ &= -a\int_0^T \Big(-\phi_x(0,t)\xi(0,t) + \int_0^1 \phi\xi_{xx} dx\Big)dt \\ &= \int_0^T a\phi_x(0,t)\xi(0,t)dt - \int_Q a\phi\xi_{xx}dxdt \\ &= -\int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt - \int_Q a\phi\xi_{xx}dxdt, \end{aligned} \tag{3.14}$$

pois $\xi(0,t) = -\phi_x(0,t)$.

Analogamente, usando integração por partes em $(3.12)_2$ e usando $(3.6)_2$, $(3.9)_2$ e $(3.10)_2$, segue que

$$\int_Q \psi''\xi dxdt = -\big(\psi^1, \zeta(0)\big) + \big(\psi^0, \zeta'(0)\big) + \int_Q \psi \cdot \zeta'' dxdt. \tag{3.15}$$

$$-b\int_Q \psi_{xx}\zeta dxdt = -\int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt - \int_Q b\psi\zeta_{xx}dxdt, \tag{3.16}$$

pois $\zeta(0,t) = -\psi_x(0,t)$.

Agora, somando $(3.12)_1$ e $(3.12)_2$, e logo após substituindo em (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16) nessa soma, obtemos

$$\begin{aligned}&\left(\phi^0, \xi'(0)\right) - \left(\phi^1, \xi(0)\right) + \left(\psi^0, \zeta'(0)\right) - \left(\psi^1, \zeta(0)\right) - \int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt\\ &-\int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt + \int_Q \phi\xi''dxdt - \int_Q a\phi\xi_{xx}dxdt - \int_Q \zeta_x\phi dxdt+\\ &+\int_Q \xi\phi dxdt + \int_Q \psi\zeta''dxdt - \int_Q b\psi\zeta_{xx}dxdt + \int_Q \psi\xi_x dxdt = 0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Multiplicando $(3.8)_1$ por ϕ e $(3.8)_2$ por ψ e integrando em Q, e após substituindo em (3.17), temos

$$\begin{aligned}&\left(\phi^0, \xi'(0)\right) - \left(\phi^1, \xi(0)\right) + \left(\psi^0, \zeta'(0)\right) - \left(\psi^1, \zeta(0)\right) =\\ &= \int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt + \int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Da equação (3.11) e (3.18), resulta que

$$\begin{aligned}\left\langle \Lambda\{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}, \{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}\right\rangle &= \left(\{\xi'(0), -\xi(0), \zeta'(0), -\zeta(0)\}, \{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}\right)_F\\ &= \left(\xi'(0),\phi^0\right) - \left(\xi(0),\phi^1\right) + \left(\zeta'(0),\psi^0\right)-\\ &\quad -\left(\zeta(0),\psi^1\right)\\ &= \int_0^T a\phi_x^2(0,t)dt + \int_0^T b\psi_x^2(0,t)dt.\end{aligned}$$

Dessa igualdade e das desigualdades direta e inversa, obtemos

$$C_0\|\{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}\|_F^2 \leqslant \left\langle \Lambda\{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}, \{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}\right\rangle \leqslant C_1\|\{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}\|_F^2. \tag{3.19}$$

Da desigualdade (3.19) temos que o operador Λ é coercivo, contínuo com respeito a norma $\|\cdot\|_F$. Pela continuidade, o operador linear Λ tem uma única extensão linear contínua no fecho de $(D(0,1)\times D(0,1))^2$, que é equivalente a norma $(H_0^1(0,1)\times L^2(0,1))^2$. Então pelo Teorema de Lax-Milgram, para cada $\{\theta^0,\theta^1,\beta^0,\beta^1\}\in F'$ que é o dual de F, existem únicos $\{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}\in F$ tal que

$$\left\langle \Lambda\{\phi^0,\phi^1,\psi^0,\psi^1\}, \{\eta^0,\eta^1,\zeta^0,\zeta^1\}\right\rangle = \left\langle \{\theta^0,\theta^1,\beta^0,\beta^1\}, \{\eta^0,\eta^1,\zeta^0,\zeta^1\}\right\rangle_{F\times F'}$$

para todo $\{\eta^0, \eta^1, \zeta^0, \zeta^1\} \in F'$. Portanto, para cada $\{\theta^0, \theta^1, \beta^0, \beta^1\} \in F'$ existe um único $\{\phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1\} \in F$ que é solução da equação:

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1\} = \{\theta^0, \theta^1, \beta^0, \beta^1\} \quad em \quad F'.$$

Portanto, sua extensão que representaremos pelo próprio Λ, é definido por

$$\Lambda : F \to F',$$

o qual é um isomorfismo entre F e seu dual $F' = (H^{-1}(0,1) \times L^2(0,1))^2$, pois por constução o operador Λ é uma bijeção.

Então para cada $\{y^0, y^1, z^0, z^1\} \in F'$ tal que $\{y^1, -y^0\}, \{z^1, -z^0\} \in F'$, existe uma única solução $\{\phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1\} \in F$, tal que

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1\} = \{y^1, -y^0, z^1, -z^0\} \;\; em \;\; F'. \tag{3.20}$$

De (3.11) e (3.20), obtemos que

$$\xi'(0) = y^1, \; \xi(0) = y^0, \; \zeta'(0) = z^1 \;\; e \;\; \zeta(0) = z^0.$$

Isso implica que a única solução de (3.8) , (3.9) e (3.10), satisfaz a condição inicial (3.3). Então a única solução de (3.1) , (3.2) e (3.3) com controles $v(t) = -\phi_x(0,t)$ e $w(t) = -\psi_x(0,t)$ satisfaz (3.4), pois tomando $\xi = y$ e $\zeta = z$, temos

$$\left| \begin{array}{l} y'' - a y_{xx} - z_x + y = 0 \text{ em } Q, \\ z'' - b z_{xx} + y_x = 0 \text{ em } Q, \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} y(0,t) = -\phi_x(0,t), \quad y(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \\ z(0,t) = -\psi_x(0,t), \quad z(1,t) = 0 \text{ em } (0,T), \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} y(x,0) = y^0(x), \quad y'(x,0) = y^1(x) \text{ em } \Omega, \\ z(x,0) = z^0(x), \quad z'(x,0) = z^1(x) \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} y(x,T) = 0, \quad y'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1), \\ z(x,T) = 0, \quad z'(x,T) = 0 \text{ em } (0,1). \end{array} \right.$$

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] BRÉZIS, H .: *Análisis Funcional-Toeria y Aplicaciones*. Editorial S.A. Madrid, 1983. IMPA, 2005.

[2] BREZIS, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Velarg, 2011.

[3] CASTRO, N.N. de O.: *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano*. João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba. Notas de um Curso de Verão, 2005.

[4] EVANS,L.C. : *Berkeley Mathematics Lectures Notes-Partial Differential Equations*. Vol. 3B. University of California,1993. 465–512, 2000.

[5] G. CHE. : Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain I SIAM J. Control and Optim. 17-1979.

[6] MATOS,M.P. : Integral de Bochner e os espaços $L^p(0,T;X)$. Notas de Aulas, UFPB, João Pessoa, 1998.

[7] MEDEIROS, L.A., MIRANDA. M. M : *Introdução aos Espaços de Sobolev e ás Equações Diferenciais Parciais*, Textos e Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[8] MEDEIROS, L. A. :*Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2006.

[9] MEDEIROS, L.A., RIVERA, P.H. : Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, Editora UFRJ, 1975.

[10] MEDEIROS, L.A. MIRANDA.M.M, LOUREDO. A.T. : Introduction to Exact Control Theory Method Hum. UFPB.2013.

[11] MEDEIROS, L.A., MIRANDA, M.M.: *Espaços de Sobolev (Iniciação ao Problemas Eléticos não Homogêneos)*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 2000.

[12] ADANS, B.A., Sobolev Spaces, Academic Press, 1975.

[13] EARL,A. CODDINGTON. An Introduction to Ordinary Differential Equations. 1920.