



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Sobre a boa colocação da equação de Schrödinger não
linear não local.**

Mykael de Araújo Cardoso

Teresina - 2013

Mykael de Araújo Cardoso

Dissertação de Mestrado:

Sobre a boa colocação da equação de Schrödinger não linear não local.

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Roger Peres de Moura

Teresina - 2013

Cardoso, M. A.

Sobre a boa colocação da equação de Schrödinger não linear não local.

Mykael de Araújo Cardoso – Teresina: 2013.

Orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura.

1. Área de Concentração

CDD 516.36

Aos meus pais Domingos e Salete.

Aos meus irmãos Izael e Nathanel.

A minha amada esposa, Fátima.

*Aos meus avós paternos José e Sebatiana e
avós maternos Francisco (In memoriam) e Paulina.*

Agradecimentos

Agradeço à Deus, pela sabedoria, pelo dom da vida, pelas bênçãos derramadas e por sempre me acompanhar durante todos os momentos em que passei e vou passar.

Agradeço à meus pais, Domingos Alves Cardoso e Maria da Salete de Araújo Cardoso, pelo incentivo na construção de mais um objetivo, pelo apoio nos momentos de dificuldades e por compartilharem os momentos de alegria. À minha esposa, Maria de Fátima Costa Cardoso, por sempre estar ao meu lado e me proporcionar tantos momentos de alegria e pelo amor. Aos meus irmãos Izael Cardoso e Nathanael Cardoso, avós José Cardoso e Sebastiana de Jesus, Francisco Galeno (*In memoriam*) e Paulina de Araújo e a todos os meus familiares por me dirigirem orações e força mesmo com a distância.

Agradeço aos Frades Capuchinhos do Convento São Benedito em Teresina, pelo acolhimento e amizade, imprescindíveis. Especialmente a Frei Manoel Pereira.

Agradeço à todos os professores da UFPI-CMRV do curso de matemática, pelo conhecimento transmitido, dentre eles Roberto Ramos das Neves, Alexandro Marinho, Marcelo Melo, Marcelo Rego, Ricardo Mendes, Francisco Carpegiani, Carlos Augusto, Carlos Renato. Em especial gostaria de agradecer ao Professor e amigo Alexandro Marinho, orientador de iniciação científica, pelo empenho e dedicação na formação de alunos à pesquisa, no qual me motivou e deu o alicerce necessário para o prosseguimento na vida acadêmica.

Agradeço à todos os Professores do Programa de Pós-graduação em Matemática pela amizade e pelo empenho na arte de ensinar. Em especial aos Professores Carlos Humberto, Barnabé Pessoa, Jurandir Lopes, Marcondes Clark, Marcos Vinício. Ao professor Roger Peres de Moura pela paciência e dedicação dada à minha formação, pelos conhecimentos transmitidos e pela amizade.

Agradeço ao professor Alexandro Oliveira Marinho (UFPI) e a professora Vanessa Oliveira

(UFBA) por terem aceito compor a banca de avaliação deste trabalho, pelo apoio e valiosas sugestões.

Agradeço aos amigos pelo companheirismo e parcerias de estudo esses que me acompanham desde a graduação: Bernardo, Diego Prudêncio e Israel e aos que adquiri no decorrer da jornada entre eles: Ailton, Gilson, Felipe, Jefferson, Leonardo, Renata, Samara, Valdir, Vitaliano, Valdinês, Yuri.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"Ser feliz é um treinamento e não uma obra do acaso."

Augusto Cury.

Resumo

Neste trabalho mostramos que o problema de Cauchy para a equação de Schrödinger não linear não local com dado inicial suficientemente pequeno nos espaços de Sobolev de ordem maior que $1/2$, é bem posto localmente. Aqui, a noção de boa colocação (boa postura) inclui a existência e persistência, a unicidade e a dependência contínua da solução com relação ao dado inicial. As principais ferramentas para a obtenção desse resultado foram o teorema do ponto fixo para contrações e algumas propriedades de efeito regularizante do fluxo da equação de Schrödinger linear. Usando o teorema da função implícita, provamos adicionalmente que, se o problema é bem posto no sentido acima, então a aplicação dado inicial-fluxo é não só Lipschitz-contínua, é de fato suave. Usamos as leis de conservação de massa e energia do sistema para provar que a solução local para o problema com dado inicial no espaço de Sobolev de ordem 1 se estende globalmente em relação ao tempo. Por fim, mostramos que, se o dado inicial for tomado em espaços de Sobolev de ordem negativa, então o problema não é bem posto, no sentido de que a aplicação dado-fluxo não é suave; conseqüentemente, nesses casos, não é possível usar o teorema de ponto fixo para contrações para investigar a boa colocação do problema.

Abstract

In this work we show that the Cauchy problem for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with sufficiently small initial data in Sobolev spaces of order greater than $1/2$, is locally well posed. Here, the notion of well-posedness includes the existence and persistence, uniqueness and continuous dependence of the solution with respect to the initial data. The main tools for reaching this result were the fixed point theorem for contractions and some properties of smoothing effect from the flow of the linear Schrödinger equation. Using the implicit function theorem, we prove further that if the problem is well-posed in the above sense, then the data-flow map is not only Lipschitz-continuous, it is in fact smooth. We use the conservation laws of mass and energy of the system to prove that the local solution to the problem with initial data in Sobolev space of order 1 extends globally with respect to the time. Finally, we show that if the initial data is taken in Sobolev spaces of negative index, then the problem is not well-posed, in the sense that the data-flow map is not smooth, hence in these cases, you can not use the fixed point theorem for contractions to investigate the well-posedness problem.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
1 Resultados Preliminares	4
1.1 Principais Notações	4
1.2 Os Espaços de Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$	5
1.3 A transformada de Fourier	7
1.3.1 A transformada de Fourier no espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$	7
1.3.2 A transformada de Fourier no espaço das funções de decrescimento rápido.	8
1.3.3 A transformada de Fourier no espaço das distribuições temperadas.	10
1.3.4 A transformada de Fourier em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq 2$	13
1.3.5 A transformada de Hilbert	13
1.4 Os Espaços de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$	16
2 A equação de Schrödinger linear e lemas auxiliares.	20
3 Boa colocação local	24
4 Boa Colocação global	41
5 Má colocação.	44
5.1 Demonstração do Teorema 5.1	45
5.2 Demonstração do Proposição 5.1	46
Referências Bibliográficas	53

Introdução

Desde a década de 1960, o problema da auto-modulação das ondas não-lineares de pequena amplitude tem sido intensamente estudado. A equação de Schrödinger cúbica não-linear (NLS cúbica)

$$\partial_t \mathbf{u} = -i\partial_x^2 \mathbf{u} + i\gamma |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

onde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ é uma função complexa e $x, t, \gamma \in \mathbb{R}$, tem sido utilizada como um modelo universal para a descrição da evolução no tempo de pacotes de ondas. Um caso importante, quando temos pacotes de ondas entre dois fluidos de densidades e profundidades diferentes, conhecido como limite *raso-fundo* (Shallow-deep) (isto é, a camada superior é de pouca profundidade e a inferior é profunda, se comparado com o comprimento), não pode ser descrito adequadamente pela equação NLS cúbica (1). Assim, surge o problema de obter um tipo de equação NLS mais universal que modele pacotes de ondas quasi-harmônicas. D. Pelinovsky [19] deu o primeiro passo para o resolver, propondo a seguinte equação:

$$i\partial_t \mathbf{u} = \partial_x^2 \mathbf{u} + i\mathbf{u}(1 - i\mathcal{T}_h)\partial_x(|\mathbf{u}|^2) - \gamma|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

onde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ é uma função complexa, que representa o envólucro do pacote de ondas, \mathcal{T}_h é um operador integral singular (que é uma generalização da transformada de Hilbert) definido por

$$\mathcal{T}_h \mathbf{u}(x) = \frac{1}{2h} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \coth\left(\frac{\pi(y-x)}{2h}\right) \mathbf{u}(y) dy, \quad (3)$$

com *p.v.* a denotar o valor principal da integral e h denota um parâmetro proporcional à profundidade do fluido.

A Equação (2) governa a evolução de ondas de primeira ordem no limite raso-fundo. Esta, por sua vez, é não-local e é denominada equação intermediária NLS não-local (INL-SNL). Intermediária porque quando a profundidade é pequena, i.e $h \rightarrow 0$, a equação (2) reduz-se à seguinte equação NLS defocusing

$$i\partial_{\tilde{t}} \mathbf{u} = \partial_{\tilde{x}}^2 \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}(|\tilde{\mathbf{u}}|^2 - \rho^2), \quad \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad (4)$$

após redefinir x, t e u pelas relações $x = \sqrt{h}\tilde{x}$, $t = h\tilde{t}$ e $u(x, t) = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})$, respectivamente. Aqui, foi usada a expansão $\mathcal{T}_h \partial_x f = -h^{-1}f + O(h)$ junto com a condição de fronteira $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = \rho$; enquanto em grandes profundidades ($h \rightarrow \infty$) a equação (2) transforma-se na equação NLS não-local

$$\partial_t u = -i\partial_x^2 u + u(1 + i\mathcal{H})\partial_x(|u|^2) + i\gamma(|u|^2 u), \quad (5)$$

(consulte [11]) onde \mathcal{H} é a transformada de Hilbert, i.e.,

$$\mathcal{H}u(x, t) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y, t)}{y - x} dy. \quad (6)$$

Também em [19] foi mostrado que a equação INLSNL é integrável. Seu espalhamento inverso foi construído em [20]. Notamos que os efeitos de segunda ordem na expansão de ondas longas não são descritas pela equação INLSNL, embora possam influenciar o comportamento de ondas internas quase-harmônicas. Levando em conta esses efeitos de segunda ordem, D. Pelinovsky e R.H.J Grimshaw (ver [21]) propuseram uma equação de evolução universal do tipo de NLS no limite superficial de profundidade de um fluido contínuo estratificado. A equação estabelecida por eles é

$$i\partial_t u = \alpha\partial_x^2 u + \beta u(i + \mathcal{T}_h)\partial_x(|u|^2) - \gamma|u|^2 u, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

em que os coeficientes positivos α, β e γ são expressos pelos parâmetros do fluido estratificado (veja o Apêndice A de [21]).

Nosso objetivo neste trabalho é estudar a boa colocação local para os problemas de valor inicial (PVI) associados à equação (5), i.e.,

$$\begin{cases} \partial_t u + i\partial_x^2 u = u(1 + i\mathcal{H})\partial_x(|u|^2) + i\gamma(|u|^2 u), & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (8)$$

Mais precisamente mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 1 *Seja $s > \frac{1}{2}$. Então existe um $\delta > 0$, tal que para todo $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, com $\|u_0\|_{H^s} < \delta$, existe um $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ com $T(\|u_0\|_{H^s}) \rightarrow \infty$ quando $\|u_0\|_{H^s} \rightarrow 0$, existe um espaço X_T^s tal que $X_T^s \hookrightarrow C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}))$ e uma única solução u para o problema de Cauchy (8) em X_T^s . Além disso, existe uma vizinhança \tilde{V} de $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{1}{2}$, tal que a aplicação dado-solução de \tilde{V} em X_T^s é suave.*

Mostraremos por meio da Lei de conservação

$$E(u(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |\partial_x u|^2 + \frac{1}{2}|u|^2 \mathcal{H} \partial_x(|u|^2) + \gamma|u|^4 \right\} dx \quad (9)$$

que a solução do PVI (8) com o dado inicial em $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R})$ pode ser estendida globalmente no tempo. Por fim provamos a má colocação para o mesmo problema de valor inicial com dado inicial em $H^s(\mathbb{R})$, $s < 0$ no sentido de que a aplicação dado-fluxo não é C^3 na origem.

Observação 0.1 Se \mathbf{u} é solução do PVI associado a equação (5), com $\gamma = 0$, com dado inicial \mathbf{u}_0 , então

$$\mathbf{u}_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}(\lambda x, \lambda^{\frac{1}{2}} t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad (10)$$

com dado

$$\mathbf{u}_\lambda(0) = \mathbf{u}_\lambda(x, 0) = \lambda^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_0(\lambda x)$$

é também uma solução. Então, temos

$$\|D_x^s \mathbf{u}_\lambda(0)\|_{L^2} = \lambda^s \|D_x^s \mathbf{u}_0\|_{L^2}. \quad (11)$$

Portanto o termo de maior derivada na norma H^s -norma é invariante sob a transformação escala (10) para $s = 0$. Note que um argumento de escala semelhante não funciona se $\gamma > 0$, mas uma vez que o termo $\gamma|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}$ não oferece obstáculo, imaginamos que podemos pensar o mesmo sobre a equação (5) para $\gamma \geq 0$.

O trabalho está disposto da seguinte forma: No primeiro capítulo, exibimos alguns resultados a serem usados nos capítulos seguintes e a fim de situar o leitor aos fatos que serão usados nos Capítulos seguintes, e tornar o texto o mais claro possível. No segundo Capítulo enunciamos os lemas e principais resultados que usaremos no decorrer do texto. Aí, iremos definir o espaço solução X_T^s para o PVI associado à equação (5) e reescrever o problema para permitir nossa abordagem. No terceiro Capítulo provamos a boa-colocação (boa postura) local para o PVI (8), ou seja mostramos a existência e unicidade da solução, a persistência e dependência contínua da solução em relação ao dado inicial, sendo que nossas principais ferramentas para a existência e unicidade da solução é o Teorema do ponto fixo, as propriedades da equação de Schrödinger linear e as regras de Leibniz para derivadas fracionárias em espaços de Banach, enunciadas no capítulo 2. No quarto capítulo mostramos que a solução do PVI (8), obtida no capítulo 3 pode ser estendida globalmente no seguinte sentido: dado $T > 0$ existe única solução no intervalo $[0, T]$. No capítulo cinco provamos que o problema é mal posto quando o dado inicial \mathbf{u}_0 pertence a H^s com $s < 0$. Mal posto no seguinte sentido: A aplicação dado-fluxo não é C^3 -diferenciável na origem, quando o dado inicial está em $H^s(\mathbb{R})$, com $s < 0$.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste Capítulo apresentaremos definições e resultados a serem usados nos capítulos seguintes, como os Espaços L^p de Lebesgue, a Transformada de Fourier e os Espaços de Sobolev. Esta parte possui a finalidade de exibir as ferramentas básicas para o desenvolvimento do trabalho, bem como auxiliar sua leitura.

1.1 Principais Notações

Dada uma função complexa f , sua parte real será denotada por $\operatorname{Re} f$ e a imaginária por $\operatorname{Im} f$.

Denotamos a transformada de Fourier de uma função u com relação à variável espacial x por $\mathcal{F}\{u\}$ ou simplesmente por \hat{u} . Dado $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos a norma do espaço de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$ por $\|\cdot\|_{L^p}$. Para $1 \leq p, q < \infty$ definimos o espaço de Banach

$$L_x^p L_t^q = \{f : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável} : \|f\|_{L_x^p L_t^q} < \infty\}, \quad (1.1)$$

onde

$$\|f\|_{L_x^p L_t^q} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |f(x, t)|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando a notação for $L_x^p L_t^q$ (observe que agora t é minúsculo) significa que a integral em relação a t é de $-\infty$ a $+\infty$. $\|f\|_{L_t^q L_x^p}$ é definido de maneira similar, e quando $p = \infty$ ou $q = \infty$, $\|f\|_{L_x^p L_t^q}$ é definido da forma natural, ou seja, é a norma do supremo essencial.

Dados X, Y espaços de Banach, $C^k(X, Y)$ denotará o espaço das aplicações de X em Y com k derivadas contínuas.

Dizemos que um espaço métrico X está continuamente imerso em um espaço métrico Y e denotaremos por $X \hookrightarrow Y$, se existir uma aplicação injetiva de X em Y e $\|y(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$ para todo $x \in X$, $y \in Y$.

Denotaremos $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ o espaço de Schwartz em \mathbb{R} e

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f \text{ tem suporte compacto}\}.$$

J^s representará o potencial de Bessel, $J^s = (1 - \partial_x^2)^{s/2}$. D_x^s representará o potencial de Riesz, $D_x^s = (-\partial_x^2)^{s/2}$. Ou seja, $J^s f = \left((1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f} \right)^\vee$ e $D^s f = \left(|\xi|^s \widehat{f} \right)^\vee$.

Denotaremos por $H^s(\mathbb{R})$ o espaço de Sobolev usual (de tipo $L^2(\mathbb{R})$) de ordem s , com norma

$$\|f\|_{H^s} := \|J^s f\|_{L^2}.$$

Dados X, Y dois espaços vetoriais diremos que X é isomorfo a Y (notação $X \cong Y$) se existir uma aplicação bijetiva contínua de X em Y .

O comutador de um operador K será denotado por

$$[K, u]v := K(uv) - uK(v). \tag{1.2}$$

Sejam C, D constantes positivas. Por $C \lesssim D$ (resp. $C \gtrsim D$) significamos que existe uma constante $c > 0$ tal que $C \leq cD$ (resp. $C \geq cD$). Denotamos $C \lesssim D \lesssim C$ por $C \sim D$.

Dada uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sua medida (volume) será denotada por $|\Omega|$.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Por $x \gg y$ e $x \ll y$ significamos que x é muito maior que y e x é muito menor que y , respectivamente.

1.2 Os Espaços de Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$

Para cada p , $1 \leq p < \infty$, seja $L^p(\mathbb{R}^n)$ a classe das funções mensuráveis, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, tais que a integral (de Lebesgue) $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$ seja finita. Também, seja $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ a coleção das funções limitadas em quase todos os pontos, isto é, em todos os pontos, exceto, possivelmente em um conjunto com medida de Lebesgue nula. Munidos das normas

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}^n\}$$

cada $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço de Banach.

Algumas propriedades elementares de $L^p(\mathbb{R}^n)$:

1. $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ (desigualdade de Minkowski);
2. $\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$, onde $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, se $1 \leq p < \infty$ e $q = 1$ se $p = \infty$ (desigualdade de Hölder).

Em particular, se $p = q = 2$, então

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2. \quad (1.3)$$

(1.3) é conhecida como **desigualdade de Cauchy-Schwartz**.

Em vista de (1.3), definimos o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (1.4)$$

Munido deste produto interno, o espaço de Banach $L^2(\mathbb{R}^n)$ torna-se um espaço de Hilbert.

É claro que $\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Enunciaremos abaixo dois resultados básicos e essenciais dos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$. Quando não especificado os p 's que aparecem são tais que $1 \leq p < \infty$.

Proposição 1.1 (Desigualdade de Hölder generalizada) *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Se $f \in L^p$ $g \in L^q$, então $f \cdot g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

Demonstração: É uma consequência imediata da desigualdade de Hölder. Considere a desigualdade de Hölder com $|f|^r$ e $|g|^r$. ■

Proposição 1.2 (Des. de Minkowski para Integrais) *Seja $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) mensurável tal que, $f(\cdot, \mathbf{y}) \in L^p(\mathbb{R}^m)$ para q.t.p. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, e que a função $\mathbf{y} \mapsto \|f(\cdot, \mathbf{y})\|_{L^p(\mathbb{R}^m)}$ pertença a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Então a função $\mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^m)$ e*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, \mathbf{y})\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} d\mathbf{y}.$$

Demonstração: Veja a referência [5]. ■

Teorema 1.1 (Riesz-Thorin) *Sejam $(X; \Sigma_X; \mu)$ e $(Y; \Sigma_Y; \nu)$ espaços de medida e $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ (com ν σ -finita se $q_0 = q_1 = \infty$). E para $0 < t < 1$, sejam p_t e q_t tais que*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Se $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \longrightarrow L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ é um operador linear tal que,

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}, \text{ para } f \in L^{p_0}(\mu) \text{ e } \|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}, \text{ para } f \in L^{p_1}(\mu),$$

então

$$\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}, \forall f \in L^{p_t}(\mu) \text{ e } 0 < t < 1;$$

ou seja, designando por M_t a norma de $T : L^{p_t} \longrightarrow L^{q_t}$ temos: $M_t \leq M_0^{1-t} M_1^t$.

1.3 A transformada de Fourier

Definiremos e enunciaremos agora as propriedades da Transformada de Fourier em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$ e no espaço de Schwartz e das distribuições temperadas.

1.3.1 A transformada de Fourier no espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$

Proposição 1.3 *A aplicação $f : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} f(x) dx, \tag{1.5}$$

onde $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ é o produto escalar em \mathbb{R}^n , é um operador linear e contínuo e $\|\mathcal{F}\| = 1$.

Demonstração: Veja as referências [5] ou [6]. ■

Além da notação $\mathcal{F}(f)(\xi)$ também é comum o uso do símbolo $\widehat{f}(\xi)$ para designar a transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.1 Algumas vezes para simplificação de cálculos vamos usar a definição

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Definição 1.1 *O operador linear contínuo $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ definido pela fórmula (1.5) é chamado de Transformada de Fourier.*

Enunciamos a seguir as propriedades básicas da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.2 *A transformada de Fourier satisfaz as seguintes propriedades:*

1. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua.
2. $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ (Lema de Riemann-Lebesgue), com $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$
3. $(\tau_h f)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i h \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$, onde $\tau_h f(x) = f(x - h)$.
4. $\mathcal{F}(e^{2i\pi x \cdot h} f)(\xi) = \tau_h \widehat{f}(\xi)$.
5. Dada $a > 0$, $\mathcal{F}(f(ax))(\xi) = a^{-n} \widehat{f}(a^{-1}\xi)$.
6. Dadas $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$.

Demonstração: Veja, por exemplo, as referências [10] ou [5]. ■

1.3.2 A transformada de Fourier no espaço das funções de decrescimento rápido.

Apresentaremos a seguir um espaço de funções no qual a transformada de Fourier tem inversa, e devido a sua regularidade e densidade em L^p , $1 \leq p < \infty$, podemos usá-lo para o estudo mais amplo da transformada de Fourier, por exemplo defini-la em L^2 facilmente.

Definição 1.2 *Chamamos de espaço das funções $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de decrescimento rápido, também conhecido como espaço de Schwartz, ao espaço*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \|\varphi\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi| < \infty, \forall \text{ multi-índice } \alpha, \beta \in \mathbb{N}\}.$$

Denotaremos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ simplesmente por \mathcal{S} .

Definição 1.3 *Dizemos que uma sequência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funções de \mathcal{S} converge para uma função $\varphi \in \mathcal{S}$, quando $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{\alpha, \beta} = 0$, para quaisquer multi-índices α, β .*

Proposição 1.4 *\mathcal{S} com a topologia gerada pelas semi-normas $\|\varphi\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi|$, $x \in \mathbb{R}^n$ e α, β multi-índices, é completo.*

Demonstração: Veja [6]. ■

Teorema 1.3 *O espaço de Schwartz possui as seguintes propriedades básicas:*

1. Dada $\varphi \in \mathcal{S}$, $P(x)\varphi \in \mathcal{S}$ e $P(\partial)\varphi \in \mathcal{S}$, para qualquer polinômio $P(x)$. Em particular, dados quaisquer polinômios $P(x)$, $Q(x)$ e qualquer $\varphi \in \mathcal{S}$, temos que $P(x)Q(\partial)\varphi \in \mathcal{S}$.
2. $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p$ e é denso em L^p , $\forall 1 \leq p < \infty$, com a norma de L^p .
3. Dadas $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, $\varphi * \psi \in \mathcal{S}$, ou seja, o produto de convolução,

$$\varphi * \psi(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(y-x)dx,$$

é uma operação em \mathcal{S} ,

Demonstração: Veja o Capítulo 8 de [6]. ■

Corolário 1.1 *Todas as propriedades dadas pelo Teorema 1.2 para a transformada de Fourier em L^1 são válidas para o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Temos pelo item 2 do Teorema 1.3 que $\mathcal{S} \hookrightarrow L^1$. Daí segue o resultado.

■

Teorema 1.4 *Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então:*

1. $(\partial_x^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$.
2. $((-2\pi i x)^\alpha \varphi(x))^\wedge(\xi) = \partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$.
3. $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Veja [6], capítulo 8. ■

Teorema 1.5 (Fourier) *Dado $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vale:*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} d\xi. \tag{1.6}$$

Demonstração: Consulte o capítulo 8 de [6]. ■

O Teorema de Fourier nos dá uma fórmula de inversão da transformada, que permite definir a transformada inversa de Fourier de uma função $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por:

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi(x)) = \check{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} d\xi.$$

Teorema 1.6 *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo contínuo e sua inversa $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ também é um isomorfismo contínuo.*

Demonstração: Veja o Teorema 8.2.3, página 96 de [6]. ■

Teorema 1.7 (Plancherel) *Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\|\varphi\|_{L^2} = \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}$.*

Demonstração: Veja, por exemplo, as referências [4] e [6]. ■

Corolário 1.2 (Identidade de Parseval) *Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi \overline{\varphi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi} \widehat{\overline{\varphi}} dx.$$

1.3.3 A transformada de Fourier no espaço das distribuições temperadas.

Definição 1.4 *Uma distribuição temperada é um funcional linear contínuo $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. O dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ será designado pela notação $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,*

(i) $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é linear;

(ii) se $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $F(\varphi_j) \rightarrow 0$ em \mathbb{C} .

Definição 1.5 *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é de crescimento polinomial quando existem $C, M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^M, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Proposição 1.5 *Toda função localmente integrável de crescimento polinomial no infinito define uma distribuição temperada.*

Demonstração: Veja as referências [6] e [10]. ■

Observação 1.2 (i) Em particular, toda função limitada e toda função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, define uma distribuição temperada por meio da definição da

$$F_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in L^\infty$ e é contínua, portanto $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, isto é, define uma distribuição temperada, pois se $f, g \in L^1$, então $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} d\xi$. Além disso, segue do Teorema 1.4-(3) que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo, $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \varphi d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{\varphi} d\xi, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.6 Dada $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definimos sua transformada de Fourier por

$$\widehat{\langle F, \varphi \rangle} = \widehat{F}(\varphi) = \langle F, \widehat{\varphi} \rangle = F(\widehat{\varphi}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.7)$$

Observe que se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então \widehat{f} coincide com sua transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Portanto, a definição 1.6 é consistente com a teoria de transformada de Fourier para funções de L^1 e \mathcal{S} .

Assim como em \mathcal{S} , vale o seguinte resultado para a transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.8 $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo e tanto \mathcal{F} como \mathcal{F}^{-1} são contínuas.

Demonstração: Consulte [4] e [6]. ■

Teorema 1.9 $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $(\partial_x^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$.
2. $((-2\pi i x)^\alpha \varphi(x))^\wedge(\xi) = \partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$.
3. $(\tau_h F)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i h \xi} \widehat{F}$.
4. $(e^{2\pi i x h} F)^\wedge(\xi) = \tau_h \widehat{F}(\xi)$.

Demonstração: Para a demonstração, consulte as referências [5] e [10]. ■

Alternativamente, usando a fórmula da inversão (1.6) chega-se ao mesmo resultado.

Definição 1.7 Definimos em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a função valor principal de $\frac{1}{x}$, denotada por v.p. $\frac{1}{x}$, pela expressão

$$\text{v.p.} \frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

para qualquer $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.1 Calculemos $\widehat{\text{v.p.} \frac{1}{x}}$. Dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, usando o Teorema de Fubini e o teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\begin{aligned} \widehat{\text{v.p.} \frac{1}{x}(\varphi)} &= \text{v.p.} \frac{1}{x}(\widehat{\varphi}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\widehat{\varphi}(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{1}{x} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-2i\pi x \cdot y} dy \right) dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \left(\int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-2i\pi x \cdot y}}{x} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-2i\pi x \cdot y}}{x} dx \right) dy. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Além disso, como $\int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen}x}{x} dx = \pi$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-2i\pi xy}}{x} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \left(\frac{\cos(2\pi xy)}{x} - i \frac{\text{sen}(2\pi xy)}{x} \right) dx \\ &= 0 - i \text{sgn}(y) \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen}x}{x} dx \\ &= -i\pi \text{sgn}(y). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Segue portanto de (1.8) e (1.9) que

$$\widehat{\frac{1}{x}}(\xi) = -i\pi \text{sgn}(\xi).$$

Definição 1.8 Dadas $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos a convolução de F e ψ por:

$$F * \psi(x) = \langle F, \tau_{-x}\psi(\cdot) \rangle = \langle F, \psi(x - \cdot) \rangle.$$

Proposição 1.6 Se $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $F * \psi$ é uma função C^∞ de crescimento polinomial, e portanto, define uma distribuição temperada pela fórmula:

$$\langle F * \psi, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (F * \psi)(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.10}$$

Demonstração: Ver a referência [5]. ■

Vale a seguinte caracterização de $F * \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

Proposição 1.7 Se $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} (F * \psi)(x) \phi(x) dx = \langle F, \phi * \tilde{\psi} \rangle,$$

onde $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$ é a reflexão de ψ .

Demonstração: Consulte a referência [5]. ■

Com essas ferramentas podemos provar o resultado seguinte:

Teorema 1.10 Se $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, então

$$\widehat{F * \psi} = \widehat{F} \widehat{\psi}, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

onde $\widehat{F} \widehat{\psi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é definido como

$$\langle \widehat{F} \widehat{\psi}, \phi \rangle = \widehat{F} \widehat{\psi}(\phi) = \widehat{F}(\widehat{\psi} \phi) = \langle \widehat{F}, \widehat{\psi} \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Pelas propriedades anteriores e usando o fato de que $\tilde{\tilde{\psi}} = \widehat{\widehat{\psi}}$, segue que

$$\langle \widehat{F * \psi}, \phi \rangle = \langle F * \psi, \widehat{\phi} \rangle = \langle F, \widehat{\phi} * \widehat{\tilde{\psi}} \rangle = \langle F, \widehat{\phi} \cdot \widehat{\widehat{\psi}} \rangle = \langle \widehat{F}, \widehat{\phi} \widehat{\widehat{\psi}} \rangle = \langle \widehat{F} \widehat{\psi}, \phi \rangle,$$

donde segue o resultado. ■

1.3.4 A transformada de Fourier em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq 2$

Já definida a transformada de Fourier de funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$, iremos estender o conceito para funções pertencentes a $L^2(\mathbb{R}^n)$ e então usaremos o Teorema de interpolação de Riez-Thorin para também definirmos a transformada de Fourier em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$.

Teorema 1.11 (Plancherel) *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Em outras palavras, \mathcal{F} é um operador unitário (uma isometria) em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\widehat{f} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{|x| < M} f(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx$$

e

$$f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{|x| < M} \widehat{f}(\xi) e^{-2i\pi x \cdot \xi} d\xi,$$

onde os limites são tomados em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver a referência [4]. ■

Com a Proposição 1.5 e o Teorema 1.11 provamos que a transformada de Fourier é um operador linear do tipo forte $(1, \infty)$ e $(2, 2)$, respectivamente. Então o teorema de interpolação de Riez-Thorin nos permite estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 1.12 (Des. de Hausdorff-Young) *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$, então $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e*

$$\|\widehat{f}\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Demonstração: Como \mathcal{F} é de tipo forte $(1, \infty)$ e $(2, 2)$, segue do Teorema de Riez-Thorin que \mathcal{F} é de tipo forte (p, q) , com

$$\frac{1}{p} = \frac{(1-t)}{1} + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2} = 1 - \frac{1}{p}.$$

Portanto, $\|\widehat{f}\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}$. ■

1.3.5 A transformada de Hilbert

Definição 1.9 *Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definimos sua transformada de Hilbert pela seguinte expressão ($\mathcal{H} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$):*

$$\mathcal{H}f(y) = \frac{1}{\pi} (\text{v.p.} \frac{1}{x} * f)(y) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \frac{1}{x} (f(y - \cdot)) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{y - x} dx. \quad (1.11)$$

Observe que $\mathcal{H}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), ou seja, $\mathcal{H}f$ está definida em toda a reta.

Proposição 1.8 Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi)$.

Demonstração: Como v.p. $\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e v.p. $\widehat{\frac{1}{x}}(\xi) = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi)$, segue que

$$\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \widehat{\frac{1}{x} * f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \widehat{\frac{1}{x}}(\xi) \widehat{f}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi).$$

■

Lembramos que $\mathcal{H}f$ é uma função C^∞ de crescimento polinomial, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

A Proposição 1.8 e a densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em L^2 nos permite definir a transformada de Hilbert de funções em L^2 como uma isometria:

Teorema 1.13 Dada $f \in L^2(\mathbb{R})$, temos

1. $\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.
2. $\mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$, ou seja, $\mathcal{H}^2 = -1$.
3. $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f \cdot g \, dx = - \int_{\mathbb{R}} f \mathcal{H}g \, dx$.
4. $\mathcal{H}(f \cdot g) = f \mathcal{H}g + g \mathcal{H}f + \mathcal{H}(f) \mathcal{H}(g)$.

Demonstração: Veja a referência [4].

■

Além das propriedades acima a transformada de Hilbert satisfaz as seguintes propriedades:

Teorema 1.14 (a) Dada $f \in L^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}(f)$ existe quase-sempre.

(b) (Komolgorov) \mathcal{H} é do tipo fraco $(1, 1)$, isto é, dado $\lambda > 0$

$$\left| \{x \in \mathbb{R}; |\mathcal{H}f(x)| > \lambda\} \right| \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

(c) (M. Riez) \mathcal{H} é do tipo forte (p, p) , se $1 < p < \infty$, isto é,

$$\|\mathcal{H}f\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Demonstração: Consulte [4].

■

Observação 1.3 1. \mathcal{H} não é forte (p, p) , se $p = 1$ ou $p = \infty$. Considere por exemplo $f = \chi_{[0,1]}$, então $\mathcal{H}f$ não pertence a L^p , para $p = 1$ e $p = \infty$, pois

$$\mathcal{H}f = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{x}{x-1} \right|,$$

que não é nem limitada nem integrável.

2. Observe que, dada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}\phi \in L^1 \iff \widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi \, dx = 0$.

Teorema 1.15 *Seja \mathcal{H} a transformada de Hilbert e sejam $1 < p, q < \infty$. Então para $f \in L_x^p L_T^q$, temos*

$$\|\mathcal{H}f\|_{L_x^p L_T^q} \leq C(p, q) \|f\|_{L_x^p L_T^q}, \quad (1.12)$$

ou seja, $\mathcal{H} : L_x^p L_T^q \rightarrow L_x^p L_T^q$ é um operador linear limitado.

Demonstração: A prova é baseada no Lema 3.1 de [16]. A Proposição 3.1 de [4], nos dá a seguinte definição equivalente para a transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}f(x, t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{f(y, t)}{y-x} dy.$$

Para simplificar a notação definamos $g(y) = \left(\int_0^T |f(y, t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$. Utilizando-se a desigualdade de Minkowski para integrais em L_T^q e como

$$\int_{|y-x|>\varepsilon} F(y, t) \chi_{[x-\varepsilon, x+\varepsilon]} dy = 0$$

para toda função F , temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}f\|_{L_x^p L_T^q} &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \left(\int_0^T \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{f(y)}{y-x} dy \right|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} \left| \frac{1}{y-x} \right| \left(\int_0^T |f(y, t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} \left| \frac{1}{y-x} \right| g(y) dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} \chi_{(x+\varepsilon, +\infty)} \left| \frac{1}{y-x} \right| g(y) dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} \chi_{(-\infty, x-\varepsilon)} \left| \frac{1}{y-x} \right| g(y) dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\mathcal{H}(\chi_{(x+\varepsilon, +\infty)} g)(y)\|_{L_x^p} + \|\mathcal{H}(\chi_{(-\infty, x-\varepsilon)} g)(y)\|_{L_x^p}. \end{aligned}$$

Além disso, como a transformada de Hilbert \mathcal{H} é limitada em L_x^p , temos

$$\|\mathcal{H}(\chi_{(x+\varepsilon, +\infty)} g)(y)\|_{L_x^p} \leq C(p) \|\chi_{(x+\varepsilon, +\infty)} g(y)\|_{L_x^p} \leq C(p) \|g(y)\|_{L_x^p} = C(p) \|f\|_{L_x^p L_T^q}.$$

Portanto, pelas desigualdades obtidas acima temos que

$$\|\mathcal{H}f\|_{L_x^p L_T^q} \leq C(p, q) \|f\|_{L_x^p L_T^q}.$$

■

1.4 Os Espaços de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Os espaços de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$ medem a diferenciabilidade de distribuições em $L^2(\mathbb{R}^n)$. A vantagem desses espaços é que, além de serem espaços de Hilbert, a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$, que transforma derivação em multiplicação por polinômios, é um operador unitário.

Definição 1.10 Dado $s \in \mathbb{R}$, definimos os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ por:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : J^s f \in L^2(\mathbb{R}^n), \text{ onde } J^s f = ((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f})^\vee \right\}$$

munido da norma

$$\|f\|_{H^s} = \|J^s f\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \right\|_{L^2},$$

a qual provém do produto interno:

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} J^s f \overline{J^s g} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) (1 + |\xi|^2)^s \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi.$$

Observemos que $H^s(\mathbb{R}^n)$ está bem definido, pois a função $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$ é C^∞ e de crescimento polinomial, pois $|\partial_\alpha| \leq C_\alpha (1 + |\xi|^2)^{s-\alpha}$. Vamos nos referir a $H^s(\mathbb{R}^n)$ simplesmente por H^s ficando subentendido o espaço.

Teorema 1.16 Sejam $f \in H^s(\mathbb{R})$ e $s \geq 0$, então

$$\|f\|_{H^s} \sim \|f\|_{L^2} + \|D_x^s f\|_{L^2}.$$

Demonstração: Aqui vamos mostrar que

$$\|f\|_{H^s} \lesssim \|f\|_{L^2} + \|D_x^s f\|_{L^2} \quad \text{e} \quad \|f\|_{H^s} \gtrsim \|f\|_{L^2} + \|D_x^s f\|_{L^2}. \quad (1.13)$$

A primeira desigualdade obtemos por

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^s} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2^{\frac{s}{2}} \left[\left(\int_{|\xi| \leq 1} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|\xi| > 1} |\xi|^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\lesssim \|f\|_{L^2} + \|D_x^s f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

A outra desigualdade pode ser obtida usando-se a identidade de Plancherel

$$\|f\|_{L^2} + \|D_x^s f\|_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

■

Proposição 1.9 H^s satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f \in H^s \iff (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2$, ou seja, $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_s)$, onde $d\mu_s = (1 + |\xi|^2)^s d\xi$ ($F : H^s \rightarrow L^2(d\mu_s)$ é isomorfismo unitário). Em particular, H^s é um espaço de Hilbert.
2. \mathcal{S} é denso em H^s , com a norma de H^s , para todo $s \in \mathbb{R}$.
3. Se $t < s$, então $H^s \rightarrow H^{s-t}$ é um isomorfismo unitário, para todo $s, t \in \mathbb{R}$.
4. $J^t : H^s \rightarrow H^{s-t}$ é um isomorfismo unitário, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.
5. $H^0 \cong L^2$ e $\|\cdot\|_{H^0} = \|\cdot\|_{L^2}$.
6. $\partial^\alpha : H^s \rightarrow H^{s-|\alpha|}$ é um operador limitado $\forall s \in \mathbb{R}$ e qualquer multi-índice α .

Observação 1.4 No item (i) do teorema acima a condição $g \in L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_s)$ onde $d\mu_s = (1 + |\xi|^2)^s d\xi$, interpretaremos por

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) d\mu_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s g(\xi) d\xi < \infty.$$

Demonstração: O item 1 segue da definição de H^s , já o item 2 segue de 1 e da densidade de \mathcal{S} em L^2 . 3 é imediato. Os demais itens não apresentam maior dificuldade. ■

Observe que pelos itens 3 e 5 da Proposição acima, temos que se $s \geq 0$ então as distribuições em H^s são funções de L^2 . Quando $s < 0$, geralmente os elementos de H^s não são funções.

Teorema 1.17 (Interpolação) *Sejam $s_1 \leq s \leq s_2$ e $\theta \in [0, 1]$ números reais tais que $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$. Se $f \in H^{s_1} \cap H^{s_2}$, então $f \in H^s$ e $\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^{s_1}}^\theta \|f\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}$.*

Demonstração: Veja a referência [5] ou [10]. ■

Definição 1.11 Dizemos que uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ é fortemente diferenciável em L^p em relação à j -ésima variável, quando existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{(\tau_{-\varepsilon e_j})f - f}{\varepsilon} - g \right\|_{L^p},$$

isto é,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x + \varepsilon e_j) - f(x)}{\varepsilon} - g(x) \right|^p dx = 0.$$

A função g é chamada de derivada parcial (forte) de f em L^p em relação à j -ésima variável. Define-se, de modo análogo, a derivada de f em L^p . Dizemos que $g \in L^p$ é a derivada de Fréchet em L^p de f quando:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\tau_{-\varepsilon} f - f}{\varepsilon} - g \right\|_{L^p} = 0,$$

onde $\tau_y f(x) = f(x - y)$.

Observação 1.5 No caso $p = 2$, temos que a definição acima é equivalente às duas seguintes afirmações:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{x_j} \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) dx, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n);$
2. $\xi_j \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n).$

Teorema 1.18 (Imersão de Sobolev) *Seja $s > k + \frac{n}{2}$.*

1. *Se $f \in H^s$, então $(\partial_x^\alpha f)^\wedge \in L^1$ e*

$$\|(\partial_x^\alpha f)^\wedge\|_{L^1} \leq C \|f\|_{H^s}, \quad \forall |\alpha| \leq k,$$

onde $C = C(k - s)$.

2. $H^s \hookrightarrow C_\infty^k$ *(O espaço das funções com k derivadas contínuas que se anulam no infinito). Em outras palavras, se $f \in H^s$, $s > k + \frac{n}{2}$, então (após uma possível modificação de f em um conjunto de medida nula)*

$$f \in C_\infty^k(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \|f\|_{C^k} \leq \|f\|_{H^s}.$$

Demonstração: Consulte [5] ou [10]. ■

Segue desse Teorema que se $s > \frac{n}{2}$, então as funções de H^s são contínuas.

Corolário 1.3 *Se $f \in H^s$, para todo $s \in \mathbb{R}$, então $f \in C^\infty$.*

Demonstração: Veja a referência [1] ou [10]. ■

Vamos agora caracterizar $(H^s)^*$ (o dual de H^s). Dados $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, a identidade de Parseval nos diz que

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\overline{\psi}}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\psi}(-\xi) d\xi,$$

onde estamos olhando φ como uma distribuição temperada e ψ como uma função teste. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, \psi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \widehat{\varphi}(\xi) (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{\psi}(-\xi) d\xi \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-s} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \\ &= \|\varphi\|_{H^{-s}} \|\psi\|_{H^s}. \end{aligned}$$

Podemos então estender $\langle \varphi, \psi \rangle$ a uma forma bilinear em $H^{-s} \times H^s$,

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\xi) \widehat{\varphi}(-\xi) d\xi \quad (1.14)$$

que é contínua, pois

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \|\psi\|_{H^{-s}} \|\varphi\|_{H^s}. \quad (1.15)$$

Proposição 1.10 *Se $s \in \mathbb{R}$, então a dualidade entre \mathcal{S}' e \mathcal{S} induz um isomorfismo unitário de H^{-s} a $(H^s)^*$, o dual de H^s . Em outras palavras, se $f \in H^{-s}$, o funcional*

$$\begin{aligned} \langle f, \cdot \rangle : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

estende-se a um funcional linear contínuo em H^s , com norma $\|f\|_{H^{-s}}$, e todos os elementos de $(H^s)^$ são desta forma.*

Demonstração: Consulte [5]. ■

Aplicando a propriedade da função maximal de Hardy-Littlewood, conhecida como Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev (veja referência [10]), para estabelecer o seguinte Teorema de imersão de Sobolev que usaremos com muita frequência em nosso trabalho.

Teorema 1.19 (1) *Se $s \in (0, \frac{n}{2})$, então $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p$, com $p = \frac{2n}{n-2s}$, isto é, $s = \frac{n}{2} - \frac{n}{p}$. Além disso, dado $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0, \frac{n}{2})$, temos que*

$$\|f\|_{L^p} \leq C_{n,s} \|D^s f\|_{L^2} \leq C \|f\|_{H^s}, \quad (1.16)$$

onde $D^s = (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f = ((2\pi|\xi|^s) \widehat{f})^\vee$.

(2) *Se $s > \frac{n}{2}$, então $H^s \hookrightarrow L^\infty$. Além disso, dado $f \in H^s$,*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C_s \|f\|_{H^s}.$$

Demonstração: Veja a referência [10]. ■

Capítulo 2

A equação de Schrödinger linear e lemas auxiliares.

Consideremos o PVI associado à equação de Schrödinger linear

$$\begin{cases} \partial_t u + i\partial_x^2 u = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.1)$$

As soluções deste problema são descritas pelo grupo unitário $\{e^{it\partial_x^2}\}_{t=-\infty}^{\infty}$, o qual iremos representar por $\{\mathbf{U}(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$. Para maiores detalhes veja o capítulo 4 da referência [10].

Definição 2.1 Dizemos que o terno $(\alpha, p, q) \in \mathbb{R} \times [2, \infty]^2$ é

(i) 1-admissível, se

$$(\alpha, p, q) = \left(\frac{1}{2}, \infty, 2\right) \text{ ou } p \in [4, \infty), q \in [2, \infty], \frac{2}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{2};$$

(ii) 2-admissível, se $2 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{p} + \frac{3}{q} - 1$. Se, além disso, $4 \leq p < \infty$, dizemos que (α, p, q) é 2*-admissível.

Listaremos primeiramente os efeitos suavizantes e as estimativas de Strichartz obtidas por Molinet e Ribaud em [12] para a equação de Benjamin-Ono linear e que também são válidas para o fluxo da equação de Schrödinger linear.

Lema 2.1 Sejam $(\alpha, p, q) \in \mathbb{R} \times [2, \infty]^2$ e $0 < T < 1$.

(i) Se (α, p, q) é 1-admissível, então

$$\|D_x^\alpha \mathbf{U}(t)u_0\|_{L_x^p L_t^q} \lesssim \|u_0\|_{L^2}, \quad \forall u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (2.2)$$

(ii) Se (α, p, q) é 2-admissível, então

$$\|J_x^\alpha \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{L_x^p L_t^q} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}, \quad \forall \mathbf{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (2.3)$$

(iii) Se (α, p, q) é 2*-admissível, então

$$\|D_x^\alpha \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{L_x^p L_t^q} \lesssim T^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2q}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}, \quad \forall \mathbf{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (2.4)$$

A seguir temos uma estimativa para função maximal essencial em nosso trabalho.

Lema 2.2 Para cada $s > \frac{1}{2}$ e $0 < T \leq 1$, temos

$$\|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{L_x^2 L_t^\infty} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}. \quad (2.5)$$

Demonstração: Ver [7], Teorema 3.1. ■

Fazendo-se o uso do chamado lema de Christ e Kiselev [3], Molinet e Ribaud [12] provaram o seguinte resultado:

Lema 2.3 Sejam $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$ e $1 \leq p_1, q_1, p_2, q_2 \leq \infty$ tais que, dado $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|D_x^{\alpha_1} \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{L_x^{p_1} L_t^{q_1}} \lesssim T^{r_1} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}, \quad (2.6)$$

$$\|D_x^{\alpha_2} \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{L_x^{p_2} L_t^{q_2}} \lesssim T^{r_2} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}. \quad (2.7)$$

Então para todo $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\left\| D_x^{\alpha_2} \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau)F(\cdot, \tau) d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T^{r_2} \|F\|_{L_x^{\tilde{p}_2} L_T^{\tilde{q}_2}}, \quad (2.8)$$

$$\left\| D_x^{\alpha_1 + \alpha_2} \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau)F(\cdot, \tau) d\tau \right\|_{L_T^{p_1} L_x^{q_1}} \lesssim T^{r_1 + r_2} \|F\|_{L_x^{\tilde{p}_2} L_T^{\tilde{q}_2}}, \quad (2.9)$$

desde que

$$\min(p_1, q_1) > \max(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2) \text{ ou } (q_1 = \infty \text{ e } \tilde{p}_2, \tilde{q}_2 < \infty), \quad (2.10)$$

onde \tilde{p}_2, \tilde{q}_2 estão relacionados por $\frac{1}{\tilde{p}_2} = 1 - \frac{1}{p_2}$ e $\frac{1}{\tilde{q}_2} = 1 - \frac{1}{q_2}$.

Iremos definir agora o espaço de resolução para (8).

Definição 2.2 Seja $s > \frac{1}{2}$ e $0 < T \leq 1$. Definimos o espaço de resolução X_T^s para (8) por

$$X_T^s = \{\mathbf{u} \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})); \quad \|\mathbf{u}\|_{X_T^s} < \infty\}, \quad (2.11)$$

onde

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_T^s} := \max \left\{ \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}, \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty}, \left\| D_x^{\frac{9}{10}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}}, \left\| D_x^s \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}, \right. \\ \left. \left\| D_x^{s+\frac{1}{10}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^{\frac{5}{3}} L_T^{\frac{10}{3}}}, \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}, \left\| D_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \right\}. \quad (2.12)$$

Uma das consequências dos Lemas 2.2 e 2.3 é a garantia que $\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0 \in \mathcal{X}_T^s$, para todo $\mathbf{u}_0 \in H^s$, $s > \frac{1}{2}$. Consequentemente, $\mathcal{X}_T^s \neq \emptyset$. Isso pode ser obtido através do seguinte resultado:

Lema 2.4 *Sejam $s > \frac{1}{2}$ e $T \in (0, 1)$. Então para todo $\mathbf{u}_0 \in H^s$,*

$$\|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{X}_T^s} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}. \quad (2.13)$$

Demonstração: Com efeito, basta observarmos que a desigualdade é satisfeita para qualquer uma das normas que definem a norma em \mathcal{X}_T^s . Ora, pela definição da norma em H^s , temos

$$\|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{H^s} = \|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{L^2} + \|D_x^s \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{L^2} = \|\mathbf{u}_0\|_{L^2} + \|D_x^s \mathbf{u}_0\|_{L^2} = \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}.$$

Logo,

$$\|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{L_x^\infty H^s} = \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}.$$

O Lema 2.2 nos diz que $\|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}$. Para tratar o restante das normas, usaremos o Lema 2.1: já que $\frac{9}{10} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10}$ e $(\frac{2}{5}, 20, \frac{20}{9})$ é 2^* -admissível, $(\frac{1}{10}, 5, \frac{10}{3})$ é 2^* -admissível, $(0, 6, 6)$ é 1 -admissível e $(\frac{1}{2}, \infty, 2)$ é 1 -admissível, temos que

$$\left\| D_x^{\frac{9}{10}} \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0 \right\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}} = \left\| D_x^{\frac{2}{5}} \mathbf{U}(t) D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_0 \right\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}} \lesssim T^{\frac{1}{40}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_0 \right\|_{L^2} \lesssim T^{\frac{1}{40}} \|\mathbf{u}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} \lesssim T^{\frac{1}{40}} \|\mathbf{u}_0\|_{H^s},$$

$$\|D_x^s \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{L_{x,T}^6} = \|\mathbf{U}(t) D_x^s \mathbf{u}_0\|_{L_{x,T}^6} \lesssim \|D_x^s \mathbf{u}_0\|_{L^2} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{H^s},$$

$$\left\| D_x^{s+\frac{1}{10}} \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0 \right\|_{L_x^{\frac{5}{3}} L_T^{\frac{10}{3}}} = \left\| D_x^{\frac{1}{10}} \mathbf{U}(t) D_x^s \mathbf{u}_0 \right\|_{L_x^{\frac{5}{3}} L_T^{\frac{10}{3}}} \lesssim T^{\frac{1}{10}} \|D_x^s \mathbf{u}_0\|_{L^2} \lesssim T^{\frac{1}{10}} \|\mathbf{u}_0\|_{H^s},$$

$$\left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0 \right\|_{L_{x,T}^6} = \left\| \mathbf{U}(t) D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_0 \right\|_{L_{x,T}^6} \lesssim \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_0 \right\|_{L^2} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}$$

e

$$\left\| D_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0 \right\|_{L_x^\infty L_T^2} = \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}(t) D_x^s \mathbf{u}_0 \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|D_x^s \mathbf{u}_0\|_{L^2} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{H^s},$$

respectivamente.

Portanto, $\|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{X}_T^s} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}$, o que demonstra o Lema. ■

Finalmente, lembraremos algumas regras de Leibniz para derivadas fracionárias, que serão fundamentais para alcançar o nosso objetivo.

Lema 2.5 *Seja $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \alpha]$ tal que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Então, se $p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \in (1, \infty)$ com $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, temos*

$$(i) \quad \|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L_x^p L_T^q} \leq c \|D_x^{\alpha_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}.$$

Além disso, se $\alpha_1 = 0$, (i) ainda é satisfeita com $q_1 = \infty$.

$$(ii) \quad \|D_x^\beta([D_x^\alpha, f]g)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha+\beta} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}},$$

onde $0 \leq \beta \leq 1 - \alpha$. Além disso, para $\beta > 0$ o valor $q_1 = \infty$ é admitido.

$$(iii) \quad \|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L_x^1 L_T^2} \leq c \|D_x^{\alpha_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}},$$

onde $1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ e $p_1, p_2, q_1, q_2 \in (1, \infty)$.

$$(iv) \quad \|D_x^\alpha P_\pm(fP_\mp D_x^\beta g)\|_{L_x^p L_T^q} \leq c \|D_x^{\gamma_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\gamma_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}},$$

com $\gamma_1 \geq \alpha$ e $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$.

$$(v) \quad \|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L_x^p} \lesssim \|f\|_{L_x^\infty} \|D_x^{\alpha_2} g\|_{L_x^p}.$$

O Lema é válido com \tilde{D}_x^α no lugar de D_x^α , onde $\tilde{D}_x^\alpha = \mathcal{H}D_x^\alpha$.

Demonstração: Os itens (i), (iii), (v) foram provados por Kening, Ponce e Vega em [8] (teoremas A.8, A.13 e A.12, respectivamente). Os itens (ii) e (iv) (este último para o caso $P_+(fP_-g)$) foram estabelecidos por Molinet e Ribaud [12] (Lemas 3.4 e 3.5, respectivamente). ■

Teorema 2.1 (da Função Implícita) *Sejam $U \subset E$, $V \subset F$ abertos (E e F espaços de Banach) e $f : U \times V \rightarrow G$ uma aplicação de classe C^k . Considere $(a, b) \in U \times V$ e suponha que $D_2 f(a, b) : F \rightarrow G$ é um isomorfismo. Se $f(a, b) = 0$, então existe uma aplicação contínua $g : U_0 \rightarrow V$, onde $U_0 \subset U$ é uma vizinhança aberta de a , tal que $g(a) = b$ e $f(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in U_0$. Além disso, se U_0 é uma bola suficientemente pequena, então g é determinada de maneira única e é de classe C^k .*

Demonstração: Veja a referência [9]. ■

Capítulo 3

Boa colocação local

O nosso principal objetivo aqui, é estabelecer a boa colocação local para o problema de Cauchy (8). A nossa demonstração segue em parte idéias das referências [12], [17] e [18]. Para isso, como em [17], vamos reescrever a equação (5) numa forma mais adequada.

Sabendo-se que:

$$1 = P_+ + P_- \quad e \quad P_+ - P_- = i\mathcal{H}$$

temos

$$\begin{aligned} u(1 + i\mathcal{H})\partial_x(|u|^2) &= 2uP_+\partial_x(|u|^2) = 2P_-(uP_+\partial_x(|u|^2)) + 2P_+(uP_+\partial_x(|u|^2)) \\ &= 2P_-(uP_+\partial_x(|u|^2)) - 2P_+(uP_-\partial_x(|u|^2)) + 2P_+(u\partial_x(|u|^2)) \\ &= 2P_-(uP_+\partial_x(|u|^2)) - 2P_+(uP_-\partial_x(|u|^2)) + 2P_+(|u|^2\partial_x u) \\ &\quad + 2P_+(u^2\partial_x \bar{u}) \\ &= 2P_-(uP_+\partial_x(|u|^2)) - 2P_+(uP_-\partial_x(|u|^2)) - 2P_+(|u|^2 D_x^{\frac{1}{2}} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u) \\ &\quad - 2P_+(u^2 D_x^{\frac{1}{2}} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u}) \\ &= 2P_-(uP_+\partial_x(|u|^2)) - 2P_+(uP_-\partial_x(|u|^2)) + 2P_+([D_x^{\frac{1}{2}}, |u|^2] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u) \\ &\quad - 2P_+ D_x^{\frac{1}{2}} (|u|^2 \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u) + 2P_+([D_x^{\frac{1}{2}}, u^2] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u}) - 2P_+ D_x^{\frac{1}{2}} (u^2 \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $[\cdot, \cdot]$ e \tilde{D} foram definidos em (1.2) e no item (v) do Lema 2.5.

Portanto, a equação (5) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \partial_t u + i\partial_x^2 u &= 2P_-(uP_+\partial_x(|u|^2)) - 2P_+(uP_-\partial_x(|u|^2)) + 2P_+([D_x^{\frac{1}{2}}, |u|^2] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u) \\ &\quad + 2P_+([D_x^{\frac{1}{2}}, u^2] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u}) - 2P_+ D_x^{\frac{1}{2}} (|u|^2 \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u) - 2P_+ D_x^{\frac{1}{2}} (u^2 \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u}) + i\gamma |u|^2 u \\ &= \sum_{j=1}^7 F_j. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Então consideremos o PVI

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + i\partial_x^2 \mathbf{u} = \sum_{j=1}^7 F_j, & x, t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $\sum_{j=1}^7 F_j$ está definido em (3.2). A ferramenta principal para provar a existência e unicidade de solução para o PVI (3.3) é o Teorema do ponto fixo para contrações. Mais precisamente, provaremos o seguinte.

Teorema 3.1 *Seja $s > \frac{1}{2}$. Então existe um $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})$, com $\|\mathbf{u}_0\|_{H^s} < \delta$, existe um $T = T(\|\mathbf{u}_0\|_{H^s}) > 0$ com $T(\|\mathbf{u}_0\|_{H^s}) \rightarrow \infty$ quando $\|\mathbf{u}_0\|_{H^s} \rightarrow 0$, existe um espaço X_T^s tal que $X_T^s \hookrightarrow C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}))$ e uma única solução \mathbf{u} para o problema de Cauchy (3.3) em X_T^s .*

Demonstração: Iremos fazer o caso mais difícil, quando $\frac{1}{2} < s \leq \frac{9}{10}$. Seja $s > \frac{1}{2}$ e $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})$ tal que $\|\mathbf{u}_0\|_{H^s} < \delta$, onde δ será escolhido posteriormente. Estamos interessados em encontrar uma solução (única!) da equação integral correspondente a (3.3), isto é, uma função $\mathbf{u} \in X_T^s \hookrightarrow C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}))$ tal que

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0 + \sum_{j=1}^7 \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau)F_j(\tau)d\tau. \quad (3.4)$$

Nossa principal ferramenta será o Teorema do Ponto Fixo para contrações. Considere a aplicação

$$\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u})(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0 + \sum_{j=1}^7 \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau)F_j(\tau)d\tau. \quad (3.5)$$

Provaremos que existe $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\|\mathbf{u}_0\|_{L^2}) > 0$ e $T(0 < T \leq 1)$ tal que, se $\mathbf{u} \in X_T^s(\mathbf{a}) := \{\mathbf{u} \in X_T^s; \|\mathbf{u}\|_{X_T^s} \leq \mathbf{a}\}$, então $\Phi(\mathbf{u}) \in X_T^s(\mathbf{a})$ e $\Phi : X_T^s(\mathbf{a}) \rightarrow X_T^s(\mathbf{a})$ é uma contração.

Primeiramente, notemos que pelos Lema 2.4, temos para $0 < T \leq 1$ que

$$\|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{X_T^s} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}. \quad (3.6)$$

Vemos daí que é suficiente estimarmos $\|\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u})\|_{L^{\infty}H^s}$. Para fazer a abordagem da forma mais fácil possível, vamos considerar cada termo de (3.5) separadamente. Dessa forma, definamos por

$$E_j := \left\| \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau)F_j d\tau \right\|_{H^s} = E_{j,1} + E_{j,2},$$

sendo

$$E_{j,1} = \left\| \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) F_j d\tau \right\|_{L_x^2} \quad \text{e} \quad E_{j,2} = \left\| D_x^s \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) F_j d\tau \right\|_{L_x^2},$$

onde $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $E_7 := \left\| \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) F_7 d\tau \right\|_{H^s}$.

Observemos que sendo, $\mathcal{H} \cdot \mathcal{H} = -1$ e $[A, B]f = ABf - B Af$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} P_{\mp} \partial_x (|\mathbf{u}|^2) &= -\mathbf{u} P_{\mp} \mathcal{H} \cdot \mathcal{H} \partial_x (|\mathbf{u}|^2) = -\mathbf{u} P_{\mp} \tilde{D}_x (|\mathbf{u}|^2) = -\mathbf{u} D_x^{\frac{1}{2}} P_{\mp} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2) \\ &= [D_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{u}] (P_{\mp} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2)) - D_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{u} P_{\mp} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Usando-se a identidade (3.7), as desigualdade de Hölder e de Minkowski para integrais, o Lema 2.3 com $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ e $(p_2, q_2) = (\infty, 2)$, o Lema 2.5 com $(\alpha, \beta, p, q) = (\frac{1}{2}, 0, 2, 2)$ e $(p_1, q_1) = (p_2, q_2) = (3, 6)$ e o fato de P_{\mp} serem limitados em L_x^2 temos

$$\begin{aligned} E_{1,1} &= \left\| \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) P_{-} (\mathbf{u} P_{+} \partial_x (|\mathbf{u}|^2)) d\tau \right\|_{L_x^2} \lesssim \left\| \int_0^T \mathbf{U}(t-\tau) P_{-} ([D_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{u}] (P_{+} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2))) d\tau \right\|_{L_x^2} \\ &\quad + \left\| \int_0^T \mathbf{U}(t-\tau) P_{-} D_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{u} P_{+} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2)) d\tau \right\|_{L_x^2} \\ &\lesssim \left\| \left(\int_0^T |\mathbf{U}(t-\tau) P_{-} ([D_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{u}] (P_{+} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2)))|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_x^2} \\ &\quad + \left\| P_{-} D_x^{\frac{1}{2}} \int_0^T \mathbf{U}(t-\tau) (\mathbf{u} P_{+} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2)) d\tau \right\|_{L_x^2} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{2}} \left\| P_{-} [D_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{u}] (P_{+} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2)) \right\|_{L_{x,T}^2} + \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \int_0^T \mathbf{U}(t-\tau) (\mathbf{u} P_{+} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2)) d\tau \right\|_{L_x^2} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{2}} \left\| [D_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{u}] (P_{+} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2)) \right\|_{L_{x,T}^2} + \left\| \mathbf{u} P_{+} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2) \right\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{2}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2) \right\|_{L_{x,T}^3} + \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^{\infty}} \left(\int_0^T |P_{+} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\lesssim T^{\frac{1}{2}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2) \right\|_{L_{x,T}^3} + \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^{\infty}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2) \right\|_{L_{x,T}^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Agora, pelo Lema 2.3 com $(p_1, q_1) = (p_2, q_2) = (6, 6)$ e $(p_1, q_1) = (p_2, q_2) = (3, 6)$, respectivamente e pela desigualdade de Hölder com $(p, q) = (2, 2)$ e $(p, q) = (\frac{2}{3}, 3)$, temos nesta ordem que

$$\begin{aligned} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2) \right\|_{L_{x,T}^3} &\leq \left\| D_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2) - \mathbf{u} D_x^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{u}}) - \bar{\mathbf{u}} D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^3} + 2 \left\| \mathbf{u} D_x^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{u}}) \right\|_{L_{x,T}^3} \\ &\lesssim \|\mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6} \lesssim T^{\frac{1}{6}} \|\mathbf{u}\|_{L_T^{\infty} L_x^6} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{6}} \|\mathbf{u}\|_{L_T^{\infty} H^{\frac{1}{2}}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
 \| D_x^{\frac{1}{2}}(|u|^2) \|_{L_{x,T}^2} &\leq \| D_x^{\frac{1}{2}}(|u|^2) - u D_x^{\frac{1}{2}}(\bar{u}) - \bar{u} D_x^{\frac{1}{2}}u \|_{L_{x,T}^2} + 2 \| u D_x^{\frac{1}{2}}(\bar{u}) \|_{L_{x,T}^2} \\
 &\lesssim \| u \|_{L_{x,T}^3} \| D_x^{\frac{1}{2}}u \|_{L_{x,T}^6} \lesssim T^{\frac{1}{3}} \| u \|_{L_T^\infty L_x^3} \| D_x^{\frac{1}{2}}u \|_{L_{x,T}^6} \\
 &\lesssim T^{\frac{1}{3}} \| u \|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \| D_x^{\frac{1}{2}}u \|_{L_{x,T}^6}, \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

onde no último passo usamos a imersão de Sobolev, Teorema 1.19, de $H^{\frac{1}{2}}$ em L_x^6 e L_x^3 , respectivamente. Pela simetria entre os termos, $P_+(uP_- \partial_x(|u|^2))$ e $P_-(uP_+ \partial_x(|u|^2))$, das estimativas (3.8)-(3.10) segue

$$\begin{aligned}
 E_{1,1} + E_{2,1} &= \left\| \int_0^t U(t-\tau) P_+(uP_- \partial_x(|u|^2)) d\tau \right\|_{L_x^2} + \left\| \int_0^t U(t-\tau) P_-(uP_+ \partial_x(|u|^2)) d\tau \right\|_{L_x^2} \\
 &\lesssim T^{\frac{2}{3}} \| D_x^{\frac{1}{2}}u \|_{L_{x,T}^6}^2 \| u \|_{L_T^\infty H^s} + T^{\frac{1}{3}} \| u \|_{L_x^2 L_T^\infty} \| u \|_{L_T^\infty H^s} \| D_x^{\frac{1}{2}}u \|_{L_{x,T}^6}. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.4 segue que

$$\| D_x^s U(t)u_0 \|_{L_x^{\frac{10}{5}} L_T^{\frac{10}{3}}} \lesssim T^{\frac{1}{10}} \| D_x^{s-\frac{1}{10}}u_0 \|_{L^2}.$$

Então usando-se o Lema 2.3, com $\alpha_2 = \frac{1}{10}$, $p_2 = 5$, $q_2 = \frac{10}{3}$, $r_2 = \frac{1}{10}$ e o Lema 2.5 item (iv), com $\gamma_1 = \frac{9}{10}$, $\gamma_2 = s$, $p_1 = 20$, $q_1 = \frac{20}{9}$, $p_2 = \frac{4}{3}$, $q_2 = 4$ temos

$$\begin{aligned}
 E_{1,2} &\lesssim \left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau) P_-(uP_+ D_x^{1-s}(\tilde{D}_x^s |u|^2)) d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
 &\lesssim T^{\frac{1}{10}} \left\| D_x^{s-\frac{1}{10}} P_-(uP_+ \partial_x(|u|^2)) \right\|_{L_x^{\frac{5}{4}} L_T^{\frac{10}{7}}} \\
 &= T^{\frac{1}{10}} \left\| D_x^{s-\frac{1}{10}} P_-(uP_+ D_x^{1-s}(\tilde{D}_x^s |u|^2)) \right\|_{L_x^{\frac{5}{4}} L_T^{\frac{10}{7}}} \\
 &\lesssim T^{\frac{1}{10}} \left\| D_x^{\frac{9}{10}}u \right\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}} \| D_x^s(|u|^2) \|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_T^4}. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Com o uso da desigualdade de Minkowski e fazendo-se $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = s$ e $p_1 = 2$, $q_1 = \infty$, $p_2 = 4$, $q_2 = 4$ no Lema 2.5 item (i), segue que

$$\| D_x^s(|u|^2) \|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_T^4} \leq \| u \|_{L_x^2 L_T^\infty} \| D_x^s u \|_{L_{x,T}^4} + 2 \| u D_x^s \bar{u} \|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_T^4}. \tag{3.13}$$

Usando-se a desigualdade de Hölder com $(p, q) = (\frac{3}{2}, 3)$ e $(p, q) = (2, 2)$, podemos estimar a norma de $u D_x^s \bar{u}$ em $L_x^{\frac{4}{3}} L_T^4$ e de $D_x^s u$ em $L_{x,T}^4$, respectivamente por

$$\begin{aligned}
 \| u D_x^s \bar{u} \|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_T^4} &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \| u \|_{L_T^\infty}^{\frac{4}{3}} \left(\int_0^T |D_x^s \bar{u}|^4 dt \right)^{\frac{1}{3}} dx \right)^{\frac{3}{4}} \\
 &\leq \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \| u \|_{L_T^\infty}^2 dx \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |D_x^s \bar{u}|^4 dt \right) dx \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{3}{4}} \\
 &= \| u \|_{L_x^2 L_T^\infty} \| D_x^s u \|_{L_{x,T}^4}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\mathbf{u}D_x^s \bar{\mathbf{u}}\|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_T^4} \leq \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^4}. \quad (3.14)$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned} \|D_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^4} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T |D_x^s \mathbf{u}| |D_x^s \mathbf{u}|^3 dt dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |D_x^s \mathbf{u}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{8}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T |D_x^s \mathbf{u}|^6 dt dx \right)^{\frac{1}{8}} \\ &\leq T^{\frac{1}{8}} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \|D_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Assim, por (3.13), (3.14), (3.15), temos que

$$E_{1,2} \lesssim T^{\frac{9}{40}} \|D_x^{\frac{9}{10}} \mathbf{u}\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \|D_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}}. \quad (3.16)$$

Para estimarmos

$$E_{2,2} = \left\| D_x^s \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) 2P_+(uP_-\partial_x(|u|^2))(\tau) d\tau \right\|_{L_x^2},$$

basta operarmos de modo análogo a $E_{1,2}$, pois no Lema 2.5 item (iii), em ambos os casos, obtemos as mesmas desigualdades. Logo,

$$E_{2,2} \lesssim T^{\frac{9}{40}} \|D_x^{\frac{9}{10}} \mathbf{u}\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \|D_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}}. \quad (3.17)$$

Agora, pelas desigualdade de Minkowski para integrais e Cauchy-Schwarz, pelo Lema (2.5) item (ii), segue

$$\begin{aligned} E_{3,1} + E_{4,1} &= \left\| \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) P_+([D_x^{\frac{1}{2}}, |u|^2]) \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u} d\tau \right\|_{L_x^2} + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) P_+([D_x^{\frac{1}{2}}, u^2]) \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u} d\tau \right\|_{L_x^2} \\ &\leq \int_0^T \left\| [D_x^{\frac{1}{2}}, |u|^2] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u} \right\|_{L_x^2} dt + \int_0^T \left\| [D_x^{\frac{1}{2}}, u^2] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u}(t) \right\|_{L_x^2} dt \\ &\leq T^{\frac{1}{2}} \left(\left\| [D_x^{\frac{1}{2}}, |u|^2] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u} \right\|_{L_{x,T}^2} + \left\| [D_x^{\frac{1}{2}}, u^2] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u} \right\|_{L_{x,T}^2} \right) \\ &\lesssim T^{\frac{1}{2}} \|D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6} \left(\|D_x^{\frac{1}{2}}(|u|^2)\|_{L_{x,T}^3} + \|D_x^{\frac{1}{2}}(u^2)\|_{L_{x,T}^3} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Portanto, temos por (3.9) que

$$E_{3,1} + E_{4,1} \lesssim T^{\frac{2}{3}} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s} \|D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^2. \quad (3.19)$$

Sendo o terno $(\frac{2}{5}, 20, \frac{20}{9})$ 2^* -admissível, pelo Lema 2.1 item (iii) segue que

$$\|D_x^s \mathbf{U}(t) \mathbf{u}_0\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}} = \|D_x^{\frac{2}{5}} \mathbf{U}(t) D_x^{s-\frac{2}{5}} \mathbf{u}_0\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}} \lesssim T^{\frac{1}{10}} \|D_x^{s-\frac{2}{5}} \mathbf{u}_0\|_{L_x^2}.$$

Usando-se o fato de P_+ ser limitado em L_x^2 , o Lema 2.3 com $r_2 = \frac{1}{10}$, $\alpha_2 = \frac{2}{5}$, $\tilde{p}_2 = \frac{20}{19}$, $\tilde{q}_2 = \frac{20}{11}$, o Lema 2.5 item (ii) sendo $p_1 = q_1 = 4$, $p_2 = \frac{10}{7}$, $q_2 = \frac{10}{3}$, respectivamente segue que

$$\begin{aligned} E_{3,2} &\lesssim \|D_x^s \int_0^t U(t-\tau) F_3 d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} = \|D_x^s \int_0^t U(t-\tau) P_+ ([D_x^{\frac{1}{2}}, |u|^2] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\leq \|D_x^{\frac{2}{5}} \int_0^t U(t-\tau) D_x^{s-\frac{2}{5}} ([D_x^{\frac{1}{2}}, |u|^2] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{10}} \|D_x^{s-\frac{2}{5}} [D_x^{\frac{1}{2}}, |u|^2] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \bar{u}\|_{L_x^{\frac{20}{19}} L_T^{\frac{20}{11}}} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{10}} \|D_x^{\frac{1}{2}} u\|_{L_{x,T}^4} \|D_x^{s+\frac{1}{10}} (|u|^2)\|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Agora, estimemos $\|D_x^{s+\frac{1}{10}} (|u|^2)\|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}}$. Pela desigualdade de Minkowski e o Lema 2.5 item (i) com $\alpha_1 = 0$, $p_1 = 2$, $q_1 = \infty$, $p_2 = 5$, $q_2 = \frac{10}{3}$, respectivamente, temos

$$\|D_x^{s+\frac{1}{10}} (|u|^2)\|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}} \lesssim \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{s+\frac{1}{10}} u\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}} + \|u D_x^{s+\frac{1}{10}} \bar{u}\|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}}. \quad (3.21)$$

Assim, por (3.15), pela desigualdade de Hölder e (3.21) podemos estabelecer a seguinte estimativa:

$$E_{3,2} \lesssim T^{\frac{9}{40}} \|u\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\| D_x^{s+\frac{1}{10}} u \right\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}}. \quad (3.22)$$

Se seguirmos de modo inteiramente análogo aos passos feitos na estimativa de $E_{3,2}$, teremos que

$$\begin{aligned} E_{4,2} &\lesssim \left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau) 2P_+ D_x^{\frac{1}{2}} (|u|^2 \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u) d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\lesssim T^{\frac{9}{40}} \|u\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\| D_x^{s+\frac{1}{10}} u \right\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pelo Lema 2.1, Lema 2.3 com $(\alpha, p_2, q_2) = (\frac{1}{2}, \infty, 2)$ 1-admissível, a desigualdade de Hölder no caso $(p, q) = (\frac{3}{2}, 3)$, o Teorema 3.13 de [10], sendo $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ e pelas imersões em espaços de Sobolev, temos

$$\begin{aligned} E_{5,1} + E_{6,1} &= \left\| \int_0^t U(t-\tau) P_+ D_x^{\frac{1}{2}} (|u|^2 \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u) d\tau \right\|_{L_x^2} + \left\| \int_0^t U(t-\tau) P_+ D_x^{\frac{1}{2}} (u^2 \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u) d\tau \right\|_{L_x^2} \\ &\leq \| |u|^2 \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u \|_{L_x^1 L_T^2} + \| u^2 \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u \|_{L_x^1 L_T^2} \lesssim \int_{-\infty}^{+\infty} \|u\|_{L_T^\infty} \left(\int_0^T |u \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\lesssim \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |u \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u|^2 dt \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |u|^3 dt \right) dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |\tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} u|^6 dt \right) dx \right)^{\frac{1}{6}} \\ &\leq T^{\frac{1}{3}} \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|u\|_{L_T^\infty L_x^3} \|D_x^{\frac{1}{2}} u\|_{L_{x,T}^6} \leq T^{\frac{1}{3}} \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|u\|_{L_T^\infty H^s} \|D_x^{\frac{1}{2}} u\|_{L_{x,T}^6}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Portanto,

$$E_{5,1} + E_{6,1} \lesssim T^{\frac{1}{3}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}. \quad (3.25)$$

Com o uso do Lema 2.1 com $(\alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\frac{1}{2}, \infty, 2)$ 2*-admissível, Lema 2.3, Lema 2.5 item (ii) com $\mathbf{p}_1 = \frac{4}{3}$, $\mathbf{q}_1 = 4$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2 = 4$, temos que

$$\begin{aligned} E_{5,2} &\lesssim \|\mathbf{D}_x^s \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) \mathbf{P}_+ \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|^2 \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\leq \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) \mathbf{D}_x^s (|\mathbf{u}|^2 \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \leq \|\tilde{\mathbf{D}}_x^s (|\mathbf{u}|^2 \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{D}}_x^s (|\mathbf{u}|^2 \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}) - |\mathbf{u}|^2 \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{D}}_x^s (|\mathbf{u}|^2) \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2} + \| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\quad + \|\tilde{\mathbf{D}}_x^s (|\mathbf{u}|^2) \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\leq \|\mathbf{D}_x^s (|\mathbf{u}|^2)\|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_T^4} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^4} + \| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2} + \|\tilde{\mathbf{D}}_x^s (|\mathbf{u}|^2) \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pelas propriedades das normas em L_T^∞ e L_x^∞ , e devido a desigualdade de Cauchy-Schwarz e Hölder com $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\frac{4}{3}, 4)$, respectivamente, segue

$$\| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty}^2 \left(\int_0^T |\mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} dx \leq \|\mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2. \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}_x^s (|\mathbf{u}|^2) \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |\mathbf{D}_x^s (|\mathbf{u}|^2)|^2 |\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |\mathbf{D}_x^s (|\mathbf{u}|^2)|^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T |\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}|^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} dx \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |\mathbf{D}_x^s (|\mathbf{u}|^2)|^4 dt \right)^{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}} dx \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}|^4 dt \right)^{\frac{1}{4} \cdot 4} dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \|\mathbf{D}_x^s (|\mathbf{u}|^2)\|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_T^4} \|\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^4}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathbf{D}_x^s (|\mathbf{u}|^2) \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2} \leq \|\mathbf{D}_x^s (|\mathbf{u}|^2)\|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_T^4} \|\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^4}. \quad (3.28)$$

Dessa forma, por (3.13), (3.14), (3.15), (3.27), (3.28), temos

$$E_{5,2} \lesssim T^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{D}_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \quad (3.29)$$

Note que devido a semelhança de $E_{5,2}$ com o termo $E_{6,2} = \left\| \mathbf{D}_x^s \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) \mathbf{F}_6 d\tau \right\|_{L_x^2}$ podemos seguir os mesmos passos utilizados para estimar que

$$E_{6,2} \lesssim T^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{D}_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2. \quad (3.30)$$

Pela a desigualdade de Minkowski para integrais e pelo Teorema 3.14 de [10], temos que $H^s(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Banach com respeito ao produto de Banach, logo

$$E_7 \lesssim \left\| \int_0^t \mathbf{u}(t-\tau)(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(\tau) d\tau \right\|_{L_T^\infty H^s} \lesssim T \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^3 \leq T \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^3. \quad (3.31)$$

Assim, por (3.6), (3.16), (3.17), (3.11), (3.22), (3.23), (3.19), (3.29), (3.30), (3.25) e (3.31)

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u})\|_{X_T^s} &\lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{L_T^\infty H^s} + \sum_{j=1}^7 E_j \\ &\lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{L_T^\infty H^s} + T^{\frac{9}{40}} \left\| D_x^{\frac{9}{10}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \|D_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \\ &\quad + T^{\frac{2}{3}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}^2 \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s} + T^{\frac{1}{3}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6} \\ &\quad + T^{\frac{9}{40}} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\| D_x^{s+\frac{1}{10}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}} + T^{\frac{2}{3}} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}^2 \\ &\quad + T^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{2}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} + \left\| D_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \\ &\quad + T^{\frac{1}{3}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6} + T \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^3 \\ &\lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{L_T^\infty H^s} + T^{\frac{9}{40}} \left\| D_x^{\frac{9}{10}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \|D_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \\ &\quad + (T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{2}{3}}) \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}^2 \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s} + (T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{1}{3}}) \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6} \\ &\quad + T^{\frac{9}{40}} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\| D_x^{s+\frac{1}{10}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}} \\ &\quad + T^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{2}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} + \left\| D_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \\ &\quad + T \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^3 \\ &\leq c \|\mathbf{u}_0\|_{L_T^\infty H^s} + c(1 + T + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}}) \|\mathbf{u}\|_{X_T^s}^3. \end{aligned}$$

Queremos $\|\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u})\|_{X_T^s} \leq \mathbf{a}$, então isto nos motiva a escolher $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\|\mathbf{u}_0\|_{H^s}) > 0$ tal que

$$\mathbf{a} \in (2c \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}, 4c \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}), \quad (3.32)$$

visto que temos de escolher $c \|\mathbf{u}_0\|_{H^s} \leq \frac{\mathbf{a}}{2}$. Daí, como temos que ter

$$\begin{aligned} c(1 + T + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}}) \|\mathbf{u}\|_{X_T^s}^3 &\leq c(1 + T + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}}) \|\mathbf{u}\|_{X_T^s}^2 \|\mathbf{u}\|_{X_T^s} \\ &\leq c(1 + T + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}}) (4c \|\mathbf{u}_0\|_{H^s})^2 \mathbf{a} \\ &\leq \frac{\mathbf{a}}{2}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

este (mais a estimativa de contração), nos sugere escolher um T arbitrário de tal forma que

$$4c(1 + T + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}})(4c \|u_0\|_{H^s})^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (3.34)$$

Então, fixe um δ tal que $\sqrt{2}(4c)^{\frac{3}{2}}\delta = 1$. Portanto, escolhidos α e T como em (3.32) e (3.34), respectivamente, segue que $u = \Phi(v) \in X_T^s(\alpha)$ para $v \in X_T^s(\alpha)$. Para mostrarmos que Φ_{u_0} é uma contração, consideremos

$$\begin{aligned} & \|\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v)\|_{X_T^s} \\ &= \left\| \int_0^t U(t-\tau) 2u P_+ \partial_x(|u|^2) + i\gamma(|u|^2 u) d\tau \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t U(t-\tau) 2v P_+ \partial_x(|v|^2) + i\gamma(|v|^2 v) d\tau \right\|_{X_T^s} \\ &= 2 \left\| \int_0^t U(t-\tau) \left[u P_+ \partial_x(|u|^2) + i\gamma(|u|^2 u) - v P_+ \partial_x(|v|^2) - i\gamma(|v|^2 v) \right] d\tau \right\|_{X_T^s} \\ &= 2 \left\| \int_0^t U(t-\tau) \left[u P_+ \bar{u} \partial_x(u) + u P_+ u \partial_x(\bar{u}) - v P_+ \bar{v} \partial_x(v) - v P_+ v \partial_x(\bar{v}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + i\gamma(|u|^2 u - |v|^2 v) \right] d\tau \right\|_{X_T^s} \\ &= 2 \left\| \int_0^t U(t-\tau) \left[(u-v) P_+ \bar{u} \partial_x(u) + (u-v) P_+ u \partial_x(\bar{u}) + v P_+ (\bar{u} - \bar{v}) \partial_x(v) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + v P_+ (u-v) \partial_x(\bar{v}) + v P_+ \bar{v} \partial_x(u-v) + v P_+ v \partial_x(\bar{u} - \bar{v}) + i\gamma(u-v)(|u|^2 + |v|^2) \right] d\tau \right\|_{X_T^s}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde $u, v \in X_T^s(\alpha)$.

Pelo Lema 2.4, temos que

$$\begin{aligned} & \|\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v)\|_{X_T^s} \\ & \lesssim \left\| \int_0^t U(-\tau) \left[(u-v) 2P_+ \bar{u} \partial_x(u) + (u-v) 2P_+ u \partial_x(\bar{u}) + v P_+ (\bar{u} - \bar{v}) \partial_x(v) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + v 2P_+ (u-v) \partial_x(\bar{v}) + v 2P_+ \bar{v} \partial_x(u-v) + v 2P_+ v \partial_x(\bar{u} - \bar{v}) \right] d\tau \right\|_{H^s} \\ & \leq \left\| \int_0^t U(-\tau) (u-v) 2P_+ \partial_x(|u|^2) d\tau \right\|_{H^s} \\ & \quad + \left\| \int_0^t U(-\tau) v 2P_+ (\bar{u} - \bar{v}) \partial_x(v) + v 2P_+ (u-v) \partial_x(\bar{v}) \right. \\ & \quad \left. + v P_+ \bar{v} \partial_x(u-v) + v 2P_+ v \partial_x(\bar{u} - \bar{v}) + i\gamma(u-v)(|u|^2 + |v|^2) d\tau \right\|_{L_T^\infty H^s}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Temos que aplicar em (3.36) argumentos semelhantes aos feitos em (3.6)-(3.31) para a equação integral. Para exemplificarmos, majoremos o termo

$$\left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau)(\mathbf{u} - \mathbf{v})2\mathbf{P}_+\partial_x(|\mathbf{u}|^2) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s}.$$

Como já feito em (3.1), temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \mathbf{v})2\mathbf{P}_+\partial_x(|\mathbf{u}|^2) &= 2\mathbf{P}_-((\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{P}_+\partial_x(|\mathbf{u}|^2)) - 2\mathbf{P}_+((\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{P}_-\partial_x(|\mathbf{u}|^2)) \\ &\quad + 2\mathbf{P}_+([\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}, (\mathbf{u} - \mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}}]\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}) - 2\mathbf{P}_+\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}((\mathbf{u} - \mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}) \\ &\quad + 2\mathbf{P}_+([\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}, (\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{u}]\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{u}}) - 2\mathbf{P}_+\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}((\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{u}\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{u}}) \\ &= \sum_{j=1}^6 \mathbf{F}_j. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau)(\mathbf{u} - \mathbf{v})2\mathbf{P}_+\partial_x(|\mathbf{u}|^2) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\leq \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau)2\mathbf{P}_-((\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{P}_+\partial_x(|\mathbf{u}|^2)) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau)2\mathbf{P}_+((\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{P}_-\partial_x(|\mathbf{u}|^2)) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\quad + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau)2\mathbf{P}_+([\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}, (\mathbf{u} - \mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}}]\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau)2\mathbf{P}_+([\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}, (\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{u}]\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{u}}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\quad + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau)2\mathbf{P}_+\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}((\mathbf{u} - \mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau)2\mathbf{P}_+\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}((\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{u}\tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{u}}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &= \sum_{j=1}^6 \mathbf{E}_j^*, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \mathbf{E}_j^* = \mathbf{E}_{j,1}^* + \mathbf{E}_{j,2}^* = \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau)\mathbf{F}_j d\tau \right\|_{\mathbf{L}_x^2} + \left\| \mathbf{D}_x^s \int_0^t \mathbf{U}(-\tau)\mathbf{F}_j d\tau \right\|_{\mathbf{L}_x^2}.$$

Segue de (3.8)-(3.10) que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1,1}^* + \mathbf{E}_{2,1}^* &\lesssim \mathbf{T}^{\frac{2}{3}} \left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}\mathbf{v} \right\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} \left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}\mathbf{u} \right\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s} + \mathbf{T}^{\frac{1}{3}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s} \left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}\mathbf{u} \right\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} \\ &\lesssim (\mathbf{T}^{\frac{2}{3}} + \mathbf{T}^{\frac{1}{3}}) \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{\mathbf{X}_T^s} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}_T^s}^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

De (3.12)-(3.15), segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1,2}^* + \mathbf{E}_{2,2}^* &\lesssim \mathbf{T}^{\frac{9}{40}} \|\mathbf{D}_x^{\frac{9}{10}}(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{\mathbf{L}_x^{20} \mathbf{L}_T^{\frac{20}{9}}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s}^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{D}_x^s \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \\ &\lesssim \mathbf{T}^{\frac{9}{40}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{\mathbf{X}_T^s} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}_T^s}^2. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Além disso, temos por (3.18) e (3.9) que

$$\mathbf{E}_{3,1}^* + \mathbf{E}_{4,1}^* \lesssim \mathbf{T}^{\frac{2}{3}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6}^2 \lesssim \mathbf{T}^{\frac{2}{3}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{\mathbf{X}_T^s} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}_T^s}^2. \quad (3.39)$$

Por (3.20) e (3.21)

$$\begin{aligned} E_{3,2}^* + E_{4,2}^* &\lesssim T^{\frac{9}{40}} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{10}} \mathbf{u}\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}} \\ &\lesssim T^{\frac{9}{40}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{X_T^s} \|\mathbf{u}\|_{X_T^s}^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como feito em (3.26), temos

$$E_{5,1}^* + E_{6,1}^* \lesssim T^{\frac{1}{3}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6} \lesssim T^{\frac{1}{3}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{X_T^s} \|\mathbf{u}\|_{X_T^s}^2. \quad (3.41)$$

Usando-se (3.26), (3.14), (3.15), (3.27), (3.28), temos

$$\begin{aligned} E_{5,2}^* + E_{6,2}^* &\lesssim T^{\frac{1}{4}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{D}_x^s \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \\ &\quad + \|\mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{4}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{X_T^s} \mathbf{a}^2 + \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{X_T^s} \|\mathbf{u}\|_{X_T^s}^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Concluimos por (3.37)-(3.42) que

$$\left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) (\mathbf{u} - \mathbf{v}) 2\mathbf{P}_+ \partial_x (|\mathbf{u}|^2) d\tau \right\|_{H^s} \lesssim (1 + T + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}}) \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{X_T^s} \|\mathbf{u}\|_{X_T^s}^2.$$

Chegamos à estimativa

$$\begin{aligned} &\|\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u}) - \Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{v})\|_{X_T^s} \\ &\leq c(1 + T + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}}) (\|\mathbf{u}\|_{X_T^s} + \|\mathbf{v}\|_{X_T^s})^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{X_T^s} \\ &\leq 4c(1 + T + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}}) \mathbf{a}^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{X_T^s} \\ &\leq 4c(1 + T + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}}) (4c)^2 \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{X_T^s}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Agora é o suficiente escolher T como em (3.34).

Usando um argumento padrão, vamos estabelecer a unicidade do resultado em uma classe maior do que $X_T^s(\mathbf{a})$. Seja $\tilde{\mathbf{u}}$ uma solução do PVI (3.3) no intervalo de tempo $[0, T_1]$ com $T_1 < T$. Além disso, assumamos que $\tilde{\mathbf{u}} \in X_{T_1}^s(\mathbf{a}_1)$ para algum $\mathbf{a}_1 > \mathbf{a}$, com $\tilde{\mathbf{u}} \in C([0, T_1] : H^s(\mathbb{R}))$. Desta maneira, $\tilde{\mathbf{u}}$ satisfaz a equação integral correspondente a (3.3). Sendo $\tilde{\mathbf{u}} : [0, T_1] \rightarrow H^s(\mathbb{R})$ contínua, com $s > \frac{1}{2}$, temos que existe $T_2 \in (0, T_1)$ tal que

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L_{T_2}^\infty H^s} \leq \mathbf{a}.$$

De maneira similar, conseguimos mostrar que existe $T_3 \in (0, T_2)$ de modo que para as demais normas que compõem a norma de X_T^s , a solução, $\tilde{\mathbf{u}}$, pertence a bola $X_{T_3}^s(\mathbf{a})$. Ou seja,

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{X_{T_3}^s} \leq \mathbf{a}.$$

Assim, $\tilde{\mathbf{u}} \in X_{T_3}^s(\mathbf{a})$ e conseqüentemente $\mathbf{u} \equiv \tilde{\mathbf{u}}$ para $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \mathbb{R} \times [0, T_4]$. Reaplicando este processo ao PVI (3.3) com dado inicial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, T_3)$ conseguimos estender a unicidade ao intervalo $[0, T]$ com um número finito de iterações.

Para mostrarmos a propriedade de persistência de $\mathbf{u}(\mathbf{t}) \in H^s(\mathbb{R})$, isto é, $\mathbf{u} \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$, seguiremos o argumento para provar o Teorema 4.1 de [7]. É suficiente estabelecermos em $\mathbf{t} = 0$. Considere T_0 pequeno. Combinando a equação integral

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) - \mathbf{u}_0 = \mathbf{U}(\mathbf{t})\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0 + \int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{U}(\mathbf{t} - \tau) \left(\mathbf{u}(1 + i\mathcal{H})\partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\gamma(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}) \right) d\tau,$$

o Lema 2.1 com $(\alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\frac{1}{2}, \infty, 2)$ e o grupo de propriedades (3.6)-(3.31) juntos com a informação que $\mathbf{u} \in X_T^s$ obtemos, para $\mathbf{t} \in (0, T_0)$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\mathbf{t}) - \mathbf{u}_0\|_{L_{T_0}^\infty H^s} &\lesssim \|\mathbf{U}(\mathbf{t})\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0\|_{L_{T_0}^\infty H^s} \\ &\quad + \left\| \int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{U}(\mathbf{t} - \tau) \left(\mathbf{u}(1 + i\mathcal{H})\partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\gamma(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}) \right) d\tau \right\|_{L_{T_0}^\infty H^s} \\ &\lesssim \|\mathbf{U}(\mathbf{t})\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0\|_{L_{T_0}^\infty H^s} + (T_0 + T_0^{\frac{1}{3}} + T_0^{\frac{1}{4}} + T_0^{\frac{2}{3}} + T_0^{\frac{9}{40}})\mathbf{a}^3 + \mathbf{a}^2 \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2}. \end{aligned}$$

Se fizermos $\mathbf{t} \rightarrow 0$ é imediato que $\|\mathbf{U}(\mathbf{t})\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0\|_{L_{T_0}^\infty H^s} \rightarrow 0$, mas não fica claro que $\mathbf{a}^2 \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2}$ tende a zero.

Então consideremos a seguinte equação integral $\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, isto é,

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{U}(\mathbf{t})\mathbf{u}_0 + \int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{U}(\mathbf{t} - \tau) \left(\mathbf{u}(1 + i\mathcal{H})\partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\gamma(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}) \right) d\tau. \quad (3.44)$$

Da equação (3.44), do Lema 2.1 com $(\alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\frac{1}{2}, \infty, 2)$ e do Lema 2.3, temos

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} &\lesssim \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{U}(\mathbf{t})\mathbf{u}_0 \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\quad + \left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}(\mathbf{t}) \left(\mathbf{D}_x^s \int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{U}(-\tau) \left(\mathbf{u}(1 + i\mathcal{H})\partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\gamma(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}) \right) \right) \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\lesssim \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{U}(\mathbf{t})\mathbf{u}_0 \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\quad + \left\| \mathbf{D}_x^s \int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{U}(-\tau) \left(\mathbf{u}(1 + i\mathcal{H})\partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\gamma(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}) \right) \right\|_{L_x^2} \\ &\lesssim \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{U}(\mathbf{t})\mathbf{u}_0 \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\quad + \left\| \int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{U}(-\tau) \left(\mathbf{u}(1 + i\mathcal{H})\partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\gamma(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}) \right) \right\|_{H^s} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} &\lesssim \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}(t) \mathbf{u}_0 \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\quad + (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0^{\frac{1}{3}} + \mathbf{T}_0^{\frac{1}{4}} + \mathbf{T}_0^{\frac{2}{3}} + \mathbf{T}_0^{\frac{9}{40}}) \mathbf{a}^3 + \mathbf{a}^2 \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Para $\varepsilon > 0$, seja $\phi_\varepsilon \in H^\infty(\mathbb{R})$ tal que, $\|\mathbf{u}_0 - \phi_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Então, temos pelo Lema 2.1, com $(\alpha, p, q) = (\frac{1}{2}, \infty, 2)$, que

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}(t) \mathbf{u}_0 \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} &\leq \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}(t) (\mathbf{u}_0 - \phi_\varepsilon) \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} + \left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}(t) \phi_\varepsilon \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\leq c \left\| \mathbf{D}_x^s (\mathbf{u}_0 - \phi_\varepsilon) \right\|_{L_x^2} + \left\| \mathbf{D}_x^s \mathbf{u}(t) \phi_\varepsilon \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\leq \|\mathbf{u}_0 - \phi_\varepsilon\|_{H^s} + c \mathbf{T}_0^{\frac{1}{2}} \|\phi_\varepsilon\|_{H^s}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\| \mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \varepsilon + \mathbf{T}_0^{\frac{1}{2}} \|\phi_\varepsilon\| + (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0^{\frac{1}{3}} + \mathbf{T}_0^{\frac{1}{4}} + \mathbf{T}_0^{\frac{2}{3}} + \mathbf{T}_0^{\frac{9}{40}}) \mathbf{a}^3. \quad (3.46)$$

Portanto, a persistência segue por substituir (3.46) em (3.45) e fazer \mathbf{T}_0 suficientemente pequeno. Com isso, está provado o teorema. \blacksquare

Corolário 3.1 *O Teorema 3.1 também é válido se $\gamma = 0$. Neste caso, é suficiente considerar $\|\mathbf{u}_0\|_{L_x^2} < \delta$ no lugar de $\|\mathbf{u}_0\|_{H^s} < \delta$, isto é, o resultado de boa colocação local detém também se supormos apenas que $\|\mathbf{u}_0\|_{L_x^2}$ é pequena.*

Demonstração: Se $\mathbf{u}(x, t)$ é solução da equação (5) em $[0, T]$ com dados iniciais $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})$, então $\lambda^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}(\lambda x, \lambda^2 t)$ é a solução da equação de PVI (5) em $[0, \lambda^{-2} T]$ com dados $\mathbf{u}_{0\lambda} = \lambda^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_0(\lambda x)$ em $H^s(\mathbb{R})$. De temos que

$$\|\mathbf{u}_{0\lambda}\|_{H^s} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2} + \lambda^s \|\mathbf{D}_x^s \mathbf{u}_0\|_{L^2} \quad (3.47)$$

e assim, tendo $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2} < \delta$ e $\lambda = o(\|\mathbf{u}_0\|_{H^s}^{-2})$, obtemos $\|\mathbf{u}_{0\lambda}\|_{H^s} < \delta$. Então existe uma solução \mathbf{u}_λ para o PVI associado a equação (5), com $\mathbf{u}_\lambda(x, 0) = \mathbf{u}_{0\lambda}(x)$ e, portanto, existe uma \mathbf{u} solução do PVI (8) em $[0, T]$ com $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2} < \delta$ e $\gamma = 0$ \blacksquare

Corolário 3.2 *Nas hipóteses do Teorema 3.1, temos que existe uma vizinhança \tilde{V} de $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{1}{2}$, tal que a aplicação dado-solução de \tilde{V} em X_T^s é suave.*

Demonstração: A prova é muito similar à feita no Corolário 2.7 em [15] e [16], no entanto iremos fazer mesmo assim. A principal ferramenta é o Teorema da Função Implícita. Escrevamos

$$F(\mathbf{u}) = 2\mathbf{u}P_+\partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\gamma|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}.$$

e para uma vizinhança V de \mathbf{u}_0 , definamos $G : V \times X_T^s \rightarrow X_T^s$ por

$$G(\psi, \mathbf{v})(t) = \mathbf{v}(t) - \left(\mathbf{U}(t)\psi + \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau)F(\mathbf{v})(\tau)d\tau \right). \quad (3.48)$$

Então, G está bem definida. Pelo Teorema 3.1 $G(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}) = 0$ e G é suave. Derivando $G(\mathbf{u}_0, \mathbf{u})$ com respeito a \mathbf{u} temos

$$\begin{aligned} D_u G(\mathbf{u}_0, \mathbf{u})\mathbf{v}(t) = & \mathbf{v}(t) - \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau)(2i\gamma|\mathbf{u}|^2\mathbf{v} + i\gamma\mathbf{u}^2\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\partial_x(|\mathbf{u}|^2) + 2\mathbf{u}\text{Re}\partial_x(\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}) \\ & + i\mathcal{H}(|\mathbf{u}|^2) + 2i\mathbf{u}\mathcal{H}\text{Re}\partial_x(\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}))(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Agora, $D_u G(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}) : X_T^s \rightarrow X_T^s$ é inversível. De fato, seja $I : X_T^s \rightarrow X_T^s$ o operador identidade e escrevamos

$$\begin{aligned} (I - D_u G(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}))\mathbf{v}(t) = & \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau)(2i\gamma|\mathbf{u}|^2\mathbf{v} + i\gamma\mathbf{u}^2\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\partial_x(|\mathbf{u}|^2) + 2i\mathbf{u}\text{Re}\partial_x(\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}) \\ & + i\mathcal{H}(|\mathbf{u}|^2) + 2i\mathbf{u}\mathcal{H}\text{Re}\partial_x(\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}))(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Estimemos $\left\| (I - D_u G(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}))\mathbf{v}(t) \right\|_{X_T^s}$, como feito no Teorema 3.1. Pela desigualdade de Minkowski e pelo fato de H^s , $s > \frac{1}{2}$ ser uma álgebra de Banach,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau)(2i\gamma|\mathbf{u}|^2\mathbf{v} + i\gamma\mathbf{u}^2\bar{\mathbf{v}})d\tau \right\|_{H^s} & \leq 2T \|\gamma|\mathbf{u}|^2\mathbf{v}\|_{L_T^\infty H^s} + T \|\gamma\mathbf{u}^2\bar{\mathbf{v}}\|_{L_T^\infty H^s} \\ & \lesssim T \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^2 \|\mathbf{v}\|_{L_T^\infty H^s} \leq T \|\mathbf{u}\|_{X_T^s}^2 \|\mathbf{v}\|_{X_T^s} \\ & \lesssim T \|\mathbf{v}\|_{X_T^s} a^2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

De maneira similar a (3.1), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(1 + i\mathcal{H})\partial_x(|\mathbf{u}|^2) & = 2P_-(\mathbf{v}P_+\partial_x(|\mathbf{u}|^2)) - 2P_+(\mathbf{v}P_-\partial_x(|\mathbf{u}|^2)) + 2P_+([\mathcal{D}_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{v}\bar{\mathbf{u}}]\tilde{\mathcal{D}}_x^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}) \\ & \quad - 2P_+D_x^{\frac{1}{2}}(\mathbf{v}\bar{\mathbf{u}}\tilde{\mathcal{D}}_x^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}) + 2P_+([\mathcal{D}_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{v}\mathbf{u}]\tilde{\mathcal{D}}_x^{\frac{1}{2}}\bar{\mathbf{u}}) - 2P_+D_x^{\frac{1}{2}}(\mathbf{v}\mathbf{u}\tilde{\mathcal{D}}_x^{\frac{1}{2}}\bar{\mathbf{u}}) \\ & = \sum_{j=1}^6 F_j \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 & \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) \mathbf{v} (1 + i\mathcal{H}) \partial_x (|\mathbf{u}|^2) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\
 & \leq \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_- (\mathbf{v}\mathbf{P}_+ \partial_x (|\mathbf{u}|^2)) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_+ (\mathbf{v}\mathbf{P}_- \partial_x (|\mathbf{u}|^2)) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\
 & + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_+ ([\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{v}\bar{\mathbf{u}}] \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_+ ([\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{v}\mathbf{u}] \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{u}}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\
 & + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_+ \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v}\bar{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_+ \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v}\mathbf{u} \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{u}}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\
 & = \sum_{j=1}^6 \mathbf{E}_j^*,
 \end{aligned}$$

$$\text{onde } \mathbf{E}_j^* = \mathbf{E}_{j,1}^* + \mathbf{E}_{j,2}^* = \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) \mathbf{F}_j d\tau \right\|_{\mathbf{L}_x^2} + \left\| \mathbf{D}_x^s \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) \mathbf{F}_j d\tau \right\|_{\mathbf{L}_x^2}.$$

Segue de (3.8)-(3.10) que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{1,1}^* + \mathbf{E}_{2,1}^* & \lesssim \mathbf{T}^{\frac{2}{3}} \left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{v} \right\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} \left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s} + \mathbf{T}^{\frac{1}{3}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s} \left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} \\
 & \lesssim (\mathbf{T}^{\frac{2}{3}} + \mathbf{T}^{\frac{1}{3}}) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_T^s} \mathbf{a}^2.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

De (3.12)-(3.15), segue que

$$\mathbf{E}_{1,2}^* + \mathbf{E}_{2,2}^* \lesssim \mathbf{T}^{\frac{9}{40}} \|\mathbf{D}_x^{\frac{9}{10}} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_x^{20} \mathbf{L}_T^{\frac{20}{9}}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s}^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{D}_x^s \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \lesssim \mathbf{T}^{\frac{9}{40}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_T^s} \mathbf{a}^2. \tag{3.53}$$

Além disso, temos por (3.9) e (3.18) que

$$\mathbf{E}_{3,1}^* + \mathbf{E}_{4,1}^* \lesssim \mathbf{T}^{\frac{2}{3}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6}^2 \lesssim \mathbf{T}^{\frac{2}{3}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_T^s} \mathbf{a}^2. \tag{3.54}$$

Por (3.20) e (3.21)

$$\mathbf{E}_{3,2}^* + \mathbf{E}_{4,2}^* \lesssim \mathbf{T}^{\frac{9}{40}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s}^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \|\mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{10}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_x^5 \mathbf{L}_T^{\frac{10}{3}}} \lesssim \mathbf{T}^{\frac{9}{40}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_T^s} \mathbf{a}^2. \tag{3.55}$$

Como feito em (3.26), temos

$$\mathbf{E}_{5,1}^* + \mathbf{E}_{6,1}^* \lesssim \mathbf{T}^{\frac{1}{3}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} \lesssim \mathbf{T}^{\frac{1}{3}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_T^s} \mathbf{a}^2. \tag{3.56}$$

Usando-se (3.26), (3.14), (3.15), (3.27), (3.28), temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{5,2}^* + \mathbf{E}_{6,2}^* & \lesssim \mathbf{T}^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{D}_x^s \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6}^{\frac{1}{4}} + \|\mathbf{D}_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_x^\infty \mathbf{L}_T^2} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \\
 & \lesssim \mathbf{T}^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_T^s} \mathbf{a}^2 + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_T^s} \mathbf{a}^2.
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Concluimos por (3.52)-(3.57) que

$$\left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) \mathbf{v} (1 + i\mathcal{H}) \partial_x (|\mathbf{u}|^2) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \lesssim (1 + \mathbf{T}^{\frac{1}{3}} + \mathbf{T}^{\frac{1}{4}} + \mathbf{T}^{\frac{2}{3}} + \mathbf{T}^{\frac{9}{40}}) \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{X}_T^s} \mathbf{a}^2. \quad (3.58)$$

Sendo $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, temos que

$$2\mathbf{u} \operatorname{Re} \partial_x (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}) + 2i\mathbf{u}\mathcal{H} \operatorname{Re} \partial_x (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{u}(1 + i\mathcal{H}) \partial_x (\bar{\mathbf{u}}\mathbf{v}) + \mathbf{u}(1 + i\mathcal{H}) \partial_x (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}).$$

Procedendo, de forma análoga à estimativa feita para obter (3.58), segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(1 + i\mathcal{H}) \partial_x (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}) &= 2\mathbf{P}_- (\mathbf{u}\mathbf{P}_+ \partial_x (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}})) - 2\mathbf{P}_+ (\mathbf{u}\mathbf{P}_- \partial_x (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}})) + 2\mathbf{P}_+ ([\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}] \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}) \\ &\quad - 2\mathbf{P}_+ \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}) + 2\mathbf{P}_+ ([\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^2] \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{v}}) - 2\mathbf{P}_+ \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{u}^2 \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{v}}) \\ &= \sum_{j=1}^6 \mathbf{F}_j. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) \mathbf{u} (1 + i\mathcal{H}) \partial_x (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\leq \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_- (\mathbf{u}\mathbf{P}_+ \partial_x (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}})) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_+ (\mathbf{u}\mathbf{P}_- \partial_x (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}})) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\quad + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_+ ([\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}] \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_+ ([\mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^2] \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{v}}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\quad + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_+ \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) 2\mathbf{P}_+ \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{u}^2 \tilde{\mathbf{D}}_x^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{v}}) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &= \sum_{j=1}^6 \mathbf{E}_j^*, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \mathbf{E}_j^* = \mathbf{E}_{j,1}^* + \mathbf{E}_{j,2}^* = \left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) \mathbf{F}_j d\tau \right\|_{\mathbf{L}_x^2} + \left\| \mathbf{D}_x^s \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) \mathbf{F}_j d\tau \right\|_{\mathbf{L}_x^2}.$$

Utilizando as mesmas técnicas aplicadas de (3.8)-(3.10) segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1,1}^* + \mathbf{E}_{2,1}^* &\lesssim \mathbf{T}^{\frac{2}{3}} \left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} \left(\left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s} + \left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{v} \right\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s} \right) \\ &\quad + \mathbf{T}^{\frac{1}{3}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \left(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s} \left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s} \left\| \mathbf{D}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{v} \right\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6} \right) \\ &\lesssim (\mathbf{T}^{\frac{2}{3}} + \mathbf{T}^{\frac{1}{3}}) \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{X}_T^s} \mathbf{a}^2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Das estimativas (3.12)-(3.15), segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1,2}^* + \mathbf{E}_{2,2}^* &\lesssim \mathbf{T}^{\frac{9}{40}} \|\mathbf{D}_x^{\frac{9}{10}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_x^{20} \mathbf{L}_T^{\frac{20}{9}}} \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s}^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{D}_x^s \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_x^2 \mathbf{L}_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^\infty \mathbf{H}^s}^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{D}_x^s \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \right) \\ &\lesssim \mathbf{T}^{\frac{9}{40}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{X}_T^s} \mathbf{a}^2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Além disso, temos por (3.9) e (3.18) que

$$E_{3,1}^* + E_{4,1}^* \lesssim T^{\frac{2}{3}} \|D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6} \left(\|v\|_{L_T^\infty H^s} \|D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6} + \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s} \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_{x,T}^6} \right) \lesssim T^{\frac{2}{3}} \|v\|_{X_T^s} \mathbf{a}^2. \quad (3.61)$$

Por (3.20)-(3.21)

$$\begin{aligned} E_{3,2}^* + E_{4,2}^* &\lesssim T^{\frac{9}{40}} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \left(\|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\| D_x^{s+\frac{1}{10}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}} + \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\| D_x^{s+\frac{1}{10}} v \right\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}} \right) \\ &\quad + T^{\frac{9}{40}} \|v\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\| D_x^{s+\frac{1}{10}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}} \\ &\lesssim T^{\frac{9}{40}} \|v\|_{X_T^s} \mathbf{a}^2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Como feito em (3.26), temos

$$E_{5,1}^* + E_{6,1}^* \lesssim T^{\frac{1}{3}} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s} \|D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6} \lesssim T^{\frac{1}{3}} \|v\|_{X_T^s} \mathbf{a}^2. \quad (3.63)$$

Usando-se (3.26), (3.14), (3.15), (3.27), (3.28), temos

$$\begin{aligned} E_{5,2}^* + E_{6,2}^* &\lesssim T^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \left(\|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|v\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} v \right\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \right. \\ &\quad \left. + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \right) + \left\| D_x^{s+\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ &\quad + T^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} \|v\|_{L_T^\infty H^s}^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_{x,T}^6}^{\frac{3}{4}} + \|D_x^{s+\frac{1}{2}} v\|_{L_x^\infty L_T^2} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \\ &\lesssim T^{\frac{1}{4}} \|v\|_{X_T^s} \mathbf{a}^2 + \|v\|_{X_T^s} \mathbf{a}^2. \end{aligned} \quad (3.64)$$

De acordo com as estimativas feitas acima podemos concluir que

$$\left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) \mathbf{u} P_+ \partial_x (\mathbf{u} \bar{v}) d\tau \right\|_{H^s} \lesssim (1 + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}}) \|v\|_{X_T^s} \mathbf{a}^2 \quad (3.65)$$

e de modo análogo (3.65) temos

$$\left\| \int_0^t \mathbf{U}(-\tau) \mathbf{u} P_+ \partial_x (\bar{\mathbf{u}} v) d\tau \right\|_{H^s} \lesssim (1 + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}}) \|v\|_{X_T^s} \mathbf{a}^2 \quad (3.66)$$

Assim, por (3.51), (3.58), (3.65), (3.66) obtemos

$$\|(I - D_u G)v(t)\|_{X_T^s} \leq c(1 + T + T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{9}{40}}) \|v\|_{X_T^s} \mathbf{a}^2,$$

onde $c > 1$, \mathbf{a} é como definido em (3.32) e T é como em (3.34). Portanto, $I - (I - D_u G) = D_u G \in \mathcal{B}(X_T^s(\mathbf{a}), X_T^s(\mathbf{a}))$ é inversível. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança $\tilde{V} \subset V$ de $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})$ e uma aplicação $g : \tilde{V} \rightarrow X_T^s$ tal que, $G(\psi, g(\psi)) = 0$, isto é,

$$g(\psi) = \mathbf{U}(t)\psi + \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau)F(g(\psi))(\tau)d\tau \equiv \mathbf{u}(t)$$

é a solução do PVI (3.3) com dado inicial $\psi \in \tilde{V}$ e g , que é uma aplicação suave. \blacksquare

Capítulo 4

Boa Colocação global

Neste capítulo estenderemos globalmente a solução do PVI (8) em $L^2(\mathbb{R})$ e $H^1(\mathbb{R})$ por meio de leis de conservação, ou seja, dado $T \in \mathbb{R}$, então existe única solução para (8) no intervalo $[0, T]$.

Lema 4.1 *Seja u a solução local do PVI (8), então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) dx > 0.$$

Demonstração: Pelo Identidade de Parseval, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{|u|^2}(\xi) \overline{\widehat{\mathcal{H} \partial_x (|u|^2)}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{|u|^2}(\xi) \right|^2 \overline{-i \operatorname{sgn}(\xi) (2\pi i \xi)} d\xi > 0. \end{aligned}$$

■

Proposição 4.1 *Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ e seja u a solução do PVI (8). Então*

$$\|u(t)\|_{L_x^2} = \|u_0\|_{L_x^2} \quad (4.1)$$

e

$$E(u(t)) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |\partial_x u|^2 + \frac{1}{2} |u|^2 \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) + \gamma |u|^4 \right\} dx = E(u_0) \quad (4.2)$$

no intervalo de tempo de existência local.

Demonstração: Multiplicando-se a equação (5) por \bar{u} e integrando-se com relação a x , obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u} \partial_t u dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 \partial_x (|u|^2) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} (-\bar{u} \partial_x^2 u + |u|^2 \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) + \gamma |u|^4) dx. \quad (4.3)$$

Sendo

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u} \partial_t u dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 \partial_x (|u|^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x (|u|^4) dx = \frac{1}{2} |u|^4 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

e tomando-se a parte real em ambos os lados da identidade (4.3) resulta a identidade (4.1). Agora, multiplicando a equação (5) por $\partial_t \bar{u}$, temos

$$\begin{aligned} i \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_t u|^2 dx &= i \int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_t \bar{u} \partial_x (|u|^2) - (-\partial_t \bar{u} \partial_x^2 u + u \partial_t \bar{u} \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) + \gamma |u|^2 u \partial_t \bar{u}) dx \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_t \bar{u} \partial_x (|u|^2) - (\partial_x u \partial_t \partial_x \bar{u} + u \partial_t \bar{u} \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) + \gamma |u|^2 u \partial_t \bar{u}) dx. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Tomando-se a parte real em ambos os lados de (4.4) chega-se a (4.2). De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x u \partial_t \partial_x \bar{u} + u \partial_t \bar{u} \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) + \gamma |u|^2 u \partial_t \bar{u}) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x u|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t (|u|^2) \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) dx + \gamma \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^4 dx \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x u|^2 + \gamma |u|^4 dx \right) + \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t (|u|^2) \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) + |u|^2 \partial_t \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) dx \right) \\ &= \frac{d}{dt} E(u). \end{aligned}$$

■

Teorema 4.1 *Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$. Então a solução u do Teorema 3.1 pode ser estendida para todo intervalo $[0, T]$.*

Demonstração: Com efeito, sendo $\gamma > 0$ e $[0, T']$ o intervalo onde se tem a solução do PVI no Teorema 3.1, de (4.2) e do Lema 4.1 segue-se

$$\sup_{[0, T']} \|\partial_x u(t)\|_{L_x^2}^2 \leq E(u_0)$$

que combinado com (4.1), nos leva à estimativa

$$\sup_{[0, T']} \|u(t)\|_{H^1}^2 \leq E(u_0) + \|u_0\|_{L_x^2}^2.$$

Com isso, dado qualquer $T^* \in [0, T']$, temos que o PVI (8) com dado inicial $u(x, T^*)$, pelo Teorema 3.1, possui única solução no intervalo de tempo $[T^*, 2T^*]$. Da mesma forma, agora

com dado inicial $u(x, 2T^*)$ o PVI possui única solução no intervalo de tempo $[2T^*, 3T^*]$. Com uma quantidade finita de etapas, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[0, T] \subset \cup[(n-1)T^*, nT^*]$. Devido a unicidade da solução em cada intervalo e como os mesmos são compactos, a função definida pela justa posição das funções em cada intervalo considerado será a única solução em $[0, T]$. ■

Capítulo 5

Má colocação.

Este capítulo tem como base parte do artigo [2] e as referências [14] e [15]. Considere o PVI (8). A equação integral associada é dada por

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0 + 2 \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau)(\mathbf{u}\mathcal{P}_+ \partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\gamma|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})(\tau) d\tau. \quad (5.1)$$

Estabeleceremos que a aplicação dado solução para a equação (8) não é C^3 -diferenciável de $H^s(\mathbb{R})$ em $C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$, se $s < 0$. Basta provarmos esta propriedade na origem, mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.1 *Se $s \in \mathbb{R}$, tal que $s < 0$, então não existe $T > 0$ tal que o PVI (8) admite uma única solução local definida em um intervalo $[0, T]$ e tal que aplicação*

$$\mathbf{u}_0 \longmapsto \mathbf{u}(t), \quad t \in [0, T],$$

para (8) é C^3 -diferenciável em zero de $H^s(\mathbb{R})$ em $C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$.

Observação 5.1 Quando $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0$, usaremos a seguinte notação:

$$i\gamma|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0|^2\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0 + \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\partial_x(|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0|^2) + i\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\mathcal{H}\partial(|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0|^2) \equiv F_\gamma(\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0).$$

Uma condição a priori para que a aplicação dado solução seja C^3 -diferenciável em zero de $H^s(\mathbb{R})$ em $C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$, é que exista um espaço métrico X_T continuamente imerso em $C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$ tal que, para

$$\|\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0\|_{X_T} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}, \quad \mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}), \quad (5.2)$$

se $\mathbf{u} \in X_T$ temos,

$$\left\| \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) (i\gamma|\mathbf{u}|^2\mathbf{u} + \mathbf{u}\partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\mathbf{u}\mathcal{H}\partial_x(|\mathbf{u}|^2)) (\tau) d\tau \right\|_{X_T} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{X_T}^3. \quad (5.3)$$

Tomando-se $\mathbf{u} = \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0$ em (5.2) e supondo que exista X_T continuamente imerso em $C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$, tal que as desigualdades (5.2) e (5.3) sejam válidas, segue que

$$\left\| \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) F_\gamma(\mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0) d\tau \right\|_{H^s} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}^3. \quad (5.4)$$

Iremos mostrar que existe uma $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s < 0$, tal que (5.4) falha. Em resumo demonstraremos a seguinte proposição:

Proposição 5.1 *Se $s < 0$, então existe $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})$ tal que (5.4) falha.*

5.1 Demonstração do Teorema 5.1

Demonstração: Consideremos já demonstrada a Proposição 5.1. Seja o PVI

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + i\partial_x^2 \mathbf{u} = 2\mathbf{u}P_+ \partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\gamma(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}), & \mathbf{x}, t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mu \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (5.5)$$

e suponha que $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mu, \mathbf{x}, t)$ é uma solução local de (5.5) e que a aplicação dado solução é C^3 -diferenciável em zero de $H^s(\mathbb{R})$ em $C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$. A equação integral associada a (5.5) é

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t)\mu \mathbf{u}_0 + 2 \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) (\mathbf{u}P_+ \partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\gamma|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})(\tau) d\tau.$$

Diferenciando \mathbf{u} , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} &= \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) (\partial_\mu \mathbf{u} \partial_x(|\mathbf{u}|^2) + \mathbf{u} \partial_x \partial_\mu(|\mathbf{u}|^2) + i\partial_\mu \mathbf{u} \mathcal{H} \partial_x(|\mathbf{u}|^2) \\ &\quad + i\mathbf{u} \partial_\mu \mathcal{H} \partial_x(|\mathbf{u}|^2) + i\gamma \partial_\mu(|\mathbf{u}|^2) \mathbf{u} + i\gamma |\mathbf{u}|^2 \partial_\mu \mathbf{u}) d\tau \Big|_{\mu=0} \\ &= \mathbf{U}(t)\mathbf{u}_0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Na identidade acima usamos que se $\mu = 0$, então $\mathbf{u}(0, \mathbf{x}, 0) = 0$ no PVI e pela unicidade da solução, $\mathbf{u}(0, \mathbf{x}, t) \equiv 0$, conseqüentemente, $\partial_x \mathbf{u}(0, \mathbf{x}, t) = 0$. Diferenciando (5.6), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mu^2} \Big|_{\mu=0} &= \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) (\partial_\mu^2 \mathbf{u} \partial_x(|\mathbf{u}|^2) + 2\partial_\mu \mathbf{u} \partial_x \partial_\mu(|\mathbf{u}|^2) + \mathbf{u} \partial_x \partial_\mu^2(|\mathbf{u}|^2) \\ &\quad + i\partial_\mu^2 \mathbf{u} \mathcal{H} \partial_x(|\mathbf{u}|^2) + 2i\partial_\mu \mathbf{u} \mathcal{H} \partial_x \partial_\mu(|\mathbf{u}|^2) + i\mathbf{u} \partial_\mu^2 \mathcal{H} \partial_x(|\mathbf{u}|^2) \\ &\quad + i\gamma \partial_\mu^2(|\mathbf{u}|^2) \mathbf{u} + 2i\gamma \partial_\mu(|\mathbf{u}|^2) \partial_\mu \mathbf{u} + i\gamma |\mathbf{u}|^2 \partial_\mu^2 \mathbf{u}) d\tau \Big|_{\mu=0} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

pois $\partial_x u(0, x, t) = 0$. Agora se diferenciarmos mais uma vez e usando (5.6), temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 u}{\partial \mu^3} \Big|_{\mu=0} &= \int_0^t U(t-\tau) (\partial_\mu^3 u \partial_x (|u|^2) + 3\partial_\mu^2 u \partial_x \partial_\mu (|u|^2) + 3\partial_\mu u \partial_x \partial_\mu^2 (|u|^2) \\
 &\quad + u \partial_x \partial_\mu^3 (|u|^2) + i\partial_\mu^3 u \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) + 3i\partial_\mu^2 u \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) \\
 &\quad + 3i\partial_\mu u \mathcal{H} \partial_x \partial_\mu^2 (|u|^2) + i\partial_\mu^3 \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) + i\gamma \partial_\mu^3 (|u|^2) u \\
 &\quad + 3i\gamma \partial_\mu^2 (|u|^2) \partial_\mu u + 3i\gamma \partial_\mu (|u|^2) \partial_\mu^2 u + i\gamma |u|^2 \partial_\mu^3 u) d\tau \Big|_{\mu=0} \\
 &= 6 \int_0^t U(t-\tau) (\partial_\mu u \partial_x (|\partial_\mu u|^2) + i\partial_\mu u \mathcal{H} \partial_x (|\partial_\mu u|^2) + i|\partial_\mu u|^2 \partial_\mu u) (\tau) d\tau \Big|_{\mu=0} \\
 &= 6 \int_0^t U(t-\tau) F_\gamma(U(\tau)u_0) d\tau.
 \end{aligned}$$

Pela hipótese de C^3 -diferenciabilidade obtemos,

$$\left\| \int_0^t U(t-\tau) F_\gamma(U(\tau)u_0) d\tau \right\|_s \lesssim \|u_0\|_s^3 \quad (5.8)$$

mas esta estimativa é (5.4) e pela Proposição 5.1 é falsa se $s < 0$. ■

5.2 Demonstração do Proposição 5.1

Demonstração: A demonstração é feita por meio de uma sequência de lemas. Defina u_0 por meio da transformada de Fourier,

$$\widehat{u_0}(\xi) = \eta^{-\frac{1}{2}} N^{-s} \chi_I(\xi), \quad N \gg 1, \text{ e } 0 < \eta \ll 1, \quad (5.9)$$

onde $I = [N, N + \eta]$. Note que $\|u_0\| \sim 1$. O lema a seguir traz uma importante identidade.

Lema 5.1 *Temos a seguinte identidade:*

(i) Para $\gamma > 0$,

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t U(t-\tau) F_\gamma(U(\tau)u_0) d\tau \\
 &= \frac{-1}{\eta^{3/2} N^{3s}} \int_\Omega \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)} - 1}{2(\xi-\xi_1)(\xi+\xi_2)} e^{ix\xi+it\xi^2} (\gamma + \xi - \xi_1 + |\xi - \xi_1|) d\xi d\xi_1 d\xi_2, \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{F} \left\{ \int_0^t U(t-\tau) F_\gamma(U(\tau)u_0) d\tau \right\} \\
 &= \frac{-e^{it\xi^2}}{\eta^{3/2} N^{3s}} \int_{\Omega(\xi)} \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)} - 1}{2(\xi-\xi_1)(\xi+\xi_2)} (\gamma + \xi - \xi_1 + |\xi - \xi_1|) d\xi_1 d\xi_2, \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

com $\Omega(\xi) = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \in I, -\xi_2 \in I, \xi - \xi_1 - \xi_2 \in I\}$ e $\Omega = \{(\xi_1, \xi_2, \xi) \in \mathbb{R}^3 : (\xi_1, \xi_2) \in \Omega(\xi)\}$.

(ii) Se $\gamma = 0$

$$\int_0^t \mathbf{U}(t - \tau) F_0(\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0) d\tau = \frac{-2}{\eta^{3/2} \mathbf{N}^{3s}} \int_{\mathcal{A}} \frac{e^{-2it(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)} - 1}{\xi_1 + \xi_2} e^{ix\xi + it\xi^2} d\xi d\xi_1 d\xi_2, \quad (5.12)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} \left\{ \int_0^t \mathbf{U}(t - \tau) (\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0 \partial_x (|\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0|^2) - i \mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0 \mathcal{H} \partial_x (|\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0|^2)) (\tau) d\tau \right\} \\ &= \frac{-2e^{it\xi^2}}{\eta^{3/2} \mathbf{N}^{3s}} \int_{\mathcal{A}(\xi)} \frac{e^{-2it(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)} - 1}{\xi_1 + \xi_2} d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (5.13)$$

com $\mathcal{A}(\xi) = \{(\xi_1, \xi_2) \in \Omega(\xi) : \xi > \xi_1\}$ e $\mathcal{A} = \{(\xi_1, \xi_2, \xi) \in \mathbb{R}^3 : (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{A}(\xi)\}$, onde $\Omega(\xi)$ e Ω são definidos como anteriormente.

Demonstração: Para obter (5.10) devemos tomar a transformada de Fourier inversa em relação a x e se integrar com relação a t :

$$\int_0^t \mathbf{U}(t - \tau) F_\gamma(\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0) d\tau = G_1 + G_2 + G_3, \quad (5.14)$$

onde

$$\begin{aligned} G_1 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + i(t-\tau)\xi^2} \mathcal{F} \{ i\gamma |\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0|^2 \mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0 \} (\xi) d\xi d\tau \\ &= i\gamma \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi + i(t-\tau)\xi^2} \widehat{\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0}(\xi - \xi_1 - \xi_2) \widehat{\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0}(\xi_2) \widehat{\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0}(\xi_1) d\xi d\xi_1 d\xi_2 d\tau \\ &= \gamma \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi + it\xi^2} i e^{-2\tau(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} \widehat{\mathbf{u}_0}(\xi - \xi_1 - \xi_2) \widehat{\mathbf{u}_0}(\xi_1) \widehat{\mathbf{u}_0}(-\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 d\xi d\tau \\ &= \frac{\gamma}{\eta^{3/2} \mathbf{N}^{3s}} \int_{\Omega} e^{ix\xi + it\xi^2} \int_0^t i e^{-2\tau(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} d\tau d\xi_1 d\xi_2 d\xi \\ &= -\frac{\gamma}{\eta^{3/2} \mathbf{N}^{3s}} \int_{\Omega} \frac{e^{-2it(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} - 1}{2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} e^{ix\xi + it\xi^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + i(t-\tau)\xi^2} \mathcal{F} \{ \mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0 \partial_x (|\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0|^2) \} (\xi) d\xi d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi + it\xi^2} i(\xi - \xi_1) e^{-2i\tau(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} \widehat{\mathbf{u}_0}(\xi - \xi_1 - \xi_2) \widehat{\mathbf{u}_0}(\xi_1) \widehat{\mathbf{u}_0}(-\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 d\xi d\tau \\ &= -\frac{1}{\eta^{3/2} \mathbf{N}^{3s}} \int_{\Omega} \frac{e^{-2it(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} - 1}{2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} (\xi - \xi_1) e^{ix\xi + it\xi^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 G_3 &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + i(t-\tau)\xi^2} \mathcal{F} \{ i\mathbf{U}(\tau)\mathbf{u}_0 \mathcal{H}\partial_x(|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{u}_0|^2) \} (\xi) d\xi \\
 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} i e^{ix\xi + it\xi^2} |\xi - \xi_1| e^{-2it(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} \widehat{\mathbf{u}}_0(\xi - \xi_1 - \xi_2) \widehat{\mathbf{u}}_0(\xi_1) \widehat{\mathbf{u}}_0(-\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 d\xi d\tau \\
 &= - \frac{1}{\eta^{3/2} \mathbf{N}^{3s}} \int_{\Omega} \frac{e^{-2it(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} - 1}{2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} |\xi - \xi_1| e^{ix\xi + it\xi^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi.
 \end{aligned}$$

Assim, acrescentando os termos acima, chegamos a (5.10). A expressão (5.11) é obtida tomando a transformada de Fourier de (5.10) com relação a ξ . Para chegar às identidades (5.12) e (5.13) o procedimento é exatamente como para a obtenção de (5.10). Agora tomando-se a transformada de Fourier em ambos os lados de (5.12) chegamos a (5.13). ■

Lema 5.2 *Fixemos $\xi \in \mathbb{R}$. Então*

(a) *Dado $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega(\xi)$ (ou em $A(\xi)$), temos*

$$|2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)| \lesssim \eta^2 \quad (5.15)$$

e

$$|\gamma + \xi - \xi_1 + |\xi - \xi_1|| \gtrsim 1. \quad (5.16)$$

(b) *Se $\xi \in (\mathbf{N}, \mathbf{N} + \eta)$, então*

$$|\Omega(\xi)| \gtrsim \eta^2. \quad (5.17)$$

Defina

$$\mathbf{B}(\xi) = \left\{ (\xi_1, \xi_2) \in A(\xi) : \xi - \xi_1 \geq \frac{\eta}{10} \right\}. \quad (5.18)$$

Se $\xi \in (\mathbf{N} + \frac{\eta}{2}, \mathbf{N} + \eta)$, então

$$|\mathbf{A}(\xi)| \geq |\mathbf{B}(\xi)| \gtrsim \eta^2. \quad (5.19)$$

(c) *Para cada $\gamma > 0$, temos*

$$\text{supp } \mathcal{F} \left\{ \int_0^t \mathbf{U}(t - \tau) F_\gamma(\mathbf{U}(\tau)\mathbf{u}_0) d\tau \right\} \subseteq [\mathbf{N} - \eta, \mathbf{N} + 2\eta]. \quad (5.20)$$

Demonstração: (a) Observe que,

$$-\eta = \mathbf{N} - \mathbf{N} - \eta \leq \xi_1 + \xi_2 \leq \mathbf{N} + \eta - \mathbf{N} = \eta$$

$$-\eta \leq \xi - \xi_1 = \xi - \xi_1 - \xi_2 + \xi_2 \leq \mathbf{N} + \eta - \mathbf{N} = \eta$$

implicam em (5.15). Agora, (5.16) segue imediatamente:

$$|\gamma + \xi - \xi_1 - |\xi - \xi_1|| \geq \gamma - 2|\xi - \xi_1| \geq \gamma - 2\eta \gtrsim \gamma,$$

pois η é suficientemente pequeno ($< \frac{\gamma}{2}$) e $\gamma > 0$ é fixo.

(b) Fixado $\xi \in (N, N + \eta)$, onde $N \leq \xi - \xi_1 - \xi_2 \leq N + \eta$ obtemos

$$-\xi_1 + \xi - N - \eta =: f_1(\xi_1) \leq \xi_2 \leq f_2(\xi_2) := -\xi_1 + \xi - N.$$

Assim, $\Omega(\xi)$ é localizado entre as retas f_1 e f_2 . Mas uma vez que $N \leq \xi_1 \leq N + \eta$ e $N \leq -\xi_2 \leq N + \eta$, isto resulta que $\Omega(\xi)$ é um hexágono formado pela intersecção da região entre as retas f_1 e f_2 com o quadrado $I \times -I$ (veja a Figura 5.1). Assim

$$|\Omega(\xi)| = \eta^2 - \frac{(\xi - N - \eta)^2 + (\xi - N)^2}{2} \gtrsim \eta^2.$$

Para provar (5.19), observemos que $B(\xi)$ é o quadrilátero de vértices $V_1(\xi + \frac{\eta}{10}; -N - \frac{\eta}{10})$, $V_2(\xi + \frac{\eta}{10}; -N - \eta)$, $V_3(N + \eta; -N - \eta)$, $V_4(N + \eta; -2N - \eta + \xi)$ (veja a Figura 5.2) e portanto,

$$|B(\xi)| = (\xi - N)(N + \frac{9\eta}{10} - \xi) + \frac{(N + \frac{9\eta}{10} - \xi)^2}{2} \gtrsim \eta^2.$$

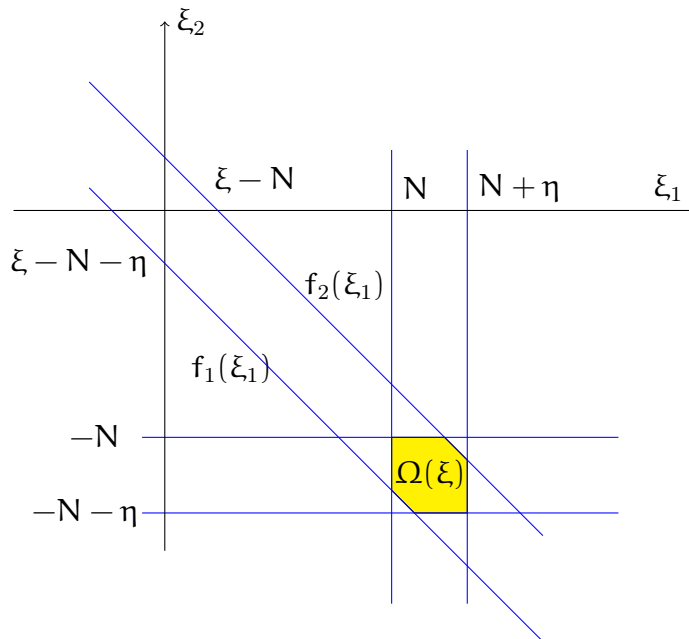


Figura 5.1: Região $\Omega(\xi)$.

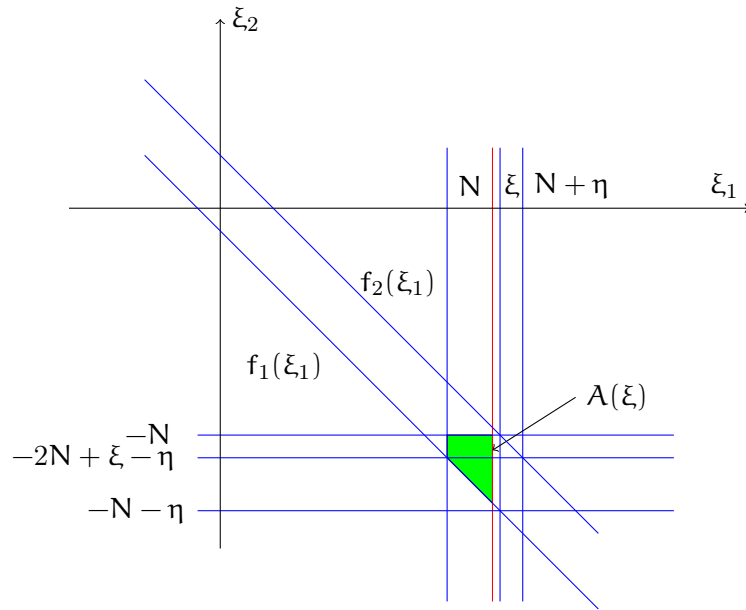


Figura 5.2: Região $A(\xi)$.

(c) Se $\Omega(\xi)$ é não vazio temos,

$$N - \eta = 2N - N - \eta \leq N + \xi_1 + \xi_2 \leq \xi - \xi_1 - \xi_2 + \xi_1 + \xi_2 \leq 2N + 2\eta + \xi_2 \leq N + 2\eta,$$

e então $\xi \in [N - \eta, N + 2\eta]$. A prova para o caso $\gamma = 0$ é exatamente a mesma que para o caso $\gamma > 0$. ■

Observação 5.2 Se $N + \eta < \xi < N + 2\eta$, então $\Omega(\xi)$ é um triângulo retângulo isósceles sobre a diagonal do quadrado $I \times -I$; e $\Omega(\xi)$ é um triângulo isósceles sob a diagonal do quadrado $I \times -I$ se $N - \eta < \xi < N$. Se $N + \eta < \xi < N + 2\eta$, então $A(\xi)$ é um triângulo retângulo isósceles sobre a diagonal do quadrado $I \times -I$; se $N - \eta < \xi < N$, nesse caso $A(\xi)$ é o conjunto vazio.

Finalmente, concluiremos a prova da Proposição 5.1. Primeiro consideremos o caso $\gamma > 0$. Sejam $k \in (1, \frac{5}{4})$, $\theta < 0$ (a ser escolhido mais tarde) e $\eta = N^\theta$. Uma elementar, mas importante proposição diz que, dada uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e um conjunto de medida finita $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $|f(x)| \geq c_0$ para todo $x \in \Omega$, temos

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \geq c_0 |\Omega|. \quad (5.21)$$

Vamos fazer uso, sempre que necessário, das seguintes notações:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\xi, \xi_1, \xi_2) = 2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2) \text{ e } \mathcal{N} = \mathcal{N}(\xi, \xi_1, \xi_2) = \gamma + \xi - \xi_1 + |\xi - \xi_1|. \quad (5.22)$$

Então, usando as notações acima, o Lema 5.1 (i) dá-nos a seguinte identidade:

$$\left\| \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) F_\gamma(\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0) d\tau \right\|_s = \frac{\eta^{-\frac{3}{2}}}{N^{3s}} \left(\int_{N-\eta}^{N+2\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{e^{-it\mathcal{M}} - 1}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.23)$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{e^{-it\mathcal{M}} - 1}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 \\ &= \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{\cos(i\mathcal{M}) - 1}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 - i \int_{\Omega(\xi)} \frac{\text{sen}(t\mathcal{M})}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 \\ &= \left(\int_{\Omega(\xi)} \frac{\cos(i\mathcal{M}) - 1}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right)^2 + \left(\int_{\Omega(\xi)} \frac{\text{sen}(t\mathcal{M})}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right)^2 \\ &\geq \left(\int_{\Omega(\xi)} \frac{\text{sen}(t\mathcal{M})}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right)^2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Logo, pelo Lema 5.2 junto com (5.21) e (5.24) segue que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) F_\gamma(\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0) d\tau \right\| &\gtrsim \frac{\eta^{-\frac{3}{2}}}{N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{\text{sen}(t\mathcal{M})}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\gtrsim \frac{\gamma}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s |\Omega(\xi)|^2 |t|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\gtrsim \frac{\gamma \eta^2 |t|}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} \xi^{2s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\gtrsim \frac{\gamma \eta^2 |t|}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} N^{2s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\gtrsim \frac{\gamma \eta^{\frac{1}{2}} |t|}{N^{2s}} (N + (2-k)\eta - N - (k-1)\eta)^{\frac{1}{2}} \gtrsim \frac{\gamma \eta |t|}{N^{2s}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

e assim, escolhendo $s < 0$, $\eta = N^s$, obtemos:

$$1 \sim \|\mathbf{u}_0\|_s^3 \geq C|t|N^{-s},$$

que é uma contradição para $N \gg 1$. Portanto, a proposição está provada para o caso $\gamma > 0$.

Agora passemos ao caso $\gamma = 0$. Utilizando o Lema 5.1 (ii), o Lema 5.2 juntamente com as desigualdades (5.24) e (5.21), respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \int_0^t \mathbf{U}(t-\tau) (\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0 \partial_x (|\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0|^2) - i \mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0 \mathcal{H} \partial_x (|\mathbf{U}(\tau) \mathbf{u}_0|^2)) (\tau) d\tau \right\|_s \quad (5.26) \\
 &= -\frac{4|t|}{\eta^{\frac{3}{2}} \mathbf{N}^{3s}} \left(\int_{\mathbf{N}-\eta}^{\mathbf{N}+2\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{\mathcal{A}(\xi)} \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} - 1}{2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (\xi-\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\gtrsim \frac{|t|}{\eta^{\frac{3}{2}} \mathbf{N}^{3s}} \left(\int_{\mathbf{N}+(k-1)\eta}^{\mathbf{N}+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{\mathcal{A}(\xi)} \frac{\text{sen} 2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)}{2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (\xi-\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\gtrsim \frac{|t|}{\eta^{\frac{3}{2}} \mathbf{N}^{3s}} \left(\int_{\mathbf{N}+(k-1)\eta}^{\mathbf{N}+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{\mathcal{B}(\xi)} \frac{\text{sen} 2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)}{2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (\xi-\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\gtrsim \frac{|t|}{\eta^{\frac{1}{2}} \mathbf{N}^{3s}} \left(\int_{\mathbf{N}+(k-1)\eta}^{\mathbf{N}+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s |\mathcal{B}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \gtrsim \frac{|t|\eta^2}{\mathbf{N}^{2s}}. \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Agora, escolhendo $s < 0$ e $\eta = \mathbf{N}^{s/2}$ obtemos,

$$1 \sim \|\mathbf{u}_0\|_s^3 \geq C|t|\mathbf{N}^{-s},$$

que caracteriza uma contradição se $\mathbf{N} \gg 1$. Assim, a proposição está provado. \blacksquare

Referências Bibliográficas

- [1] R. Adams and Fournier, *Sobolev Spaces*. (2nd ed.), Pure and Applied Mathematics, 2003.
- [2] J. Angulo, R. P. Moura. *Ill-posedness and the nonexistence of standing-waves solutions for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation*. Differential and Integral Equations, v. 20, p. 1107-1130, 2007.
- [3] M. Christ e A. Kiselev, *Maximal functions associated to filtrations*, J. Funct. Anal. *Int. Math. Res. Notices* **179**, 409-425, 2001.
- [4] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Math. Vol. 19, AMS, 2001.
- [5] G. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (2nd ed), John Wiley e Sons, 1999.
- [6] G. Friedlander, M. Joshi, *Introduction to the Theory of Distributions* (2nd ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [7] C. E. Kenig, G. Ponce e L. Vega, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **10**, 255-288, 1993.
- [8] C. E. Kenig, G. Ponce e L. Vega. *Well-posedness and scattering Results for generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, *Comm. Pure Appl. Math* **46**, 527-620, 1993.
- [9] S. Lang. *Analysis II*. Columbia University, 1969.
- [10] F. Linares, G. Ponce. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Publicações Matemáticas, 2ªed. 2006.

-
- [11] Y. Matsuno, *Dark soliton generation for the intermediate nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys. 43, No. 2, pp.984-1007, 2002.
- [12] L. Molinet e F. Ribaud. *Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with arbitrary initial data*, **70**, 3757-3795, 2004.
- [13] L. Molinet, F. Ribaud. *Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with small initial data*. J. Math. Pures Appl. 83, 277-311, 2004.
- [14] L. Molinet, J. C. Saut, N. Tzvetkov. *Ill-posedness issues for the Benjamin-Ono and related equations*. SIAM J. Math. Anal. 33 (4) 982-988, 2001.
- [15] R. P. Moura. *O problema de Cauchy para a equação de Schrödinger não linear não local* Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação científica, 2005.
- [16] R. P. Moura. *Well-posedness for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Estados Unidos, v. 326, p. 1254-1267, 2007.
- [17] R. P. Moura, A. Pastor. *On the Cauchy problem for the nonlocal derivative nonlinear Schrödinger equation*. Communications in Mathematical Sciences, v. 9, p. 63-80, 2011.
- [18] R. P. Moura, D. Pilod. *Local well-posedness for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation below the energy space*. Advances in Differential Equations, v. 15, p. 925-952, 2010.
- [19] D. E. Pelinovsky, *Intermediate nonlinear Schrödinger equation for internal waves in a fluid of finite depth*, Phys. Lett. A 197, pp. 401-406, 1995.
- [20] D. E. Pelinovsky, R. H. Grimshaw, *A spectral transform for the intermediate nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys. 36(8), pp. 4203-4219, 1995.
- [21] D. E. Pelinovsky, R. H. Grimshaw. *Nonlocal Models for envelope waves in a stratified fluid*, Stud. Appl. Math., **97**, 369-391 1996.
-