Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Resultados de boa colocação da equação de Benjamin-Ono generalizada com dado inicial arbitrariamente grande

Alberone Fernandes de Sousa

Teresina - 2015

Alberone Fernandes de Sousa

Dissertação de Mestrado:

Resultados de boa colocação da equação de Benjamin-Ono generalizada com dado inicial arbitrariamente grande

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Roger Peres de Moura

Teresina - 2015

Sousa, A. F.

Resultados de boa colocação da equação de Benjamin-Ono generalizada com dado inicial arbitrariamente grande.

Alberone Fernandes de Sousa – Teresina: 2015.

Orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura.

1. Análise

CDD 516.36

A minha prima querida Amanda Fonsêca
(In memoriam).
Aos meus pais Antônio e Rejane.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado força e saúde para chegar até o final de mais uma jornada

Agradeço a minha família, ao meu pai Antônio Fonsêca pelos conselhos, pela educação que me deste, por sempre ter dado o melhor de si para cuidar e orientar a nossa família. A minha mãe Rejane Fernandes por todo carinho, amor e dedicação na minha vida. Ao meu irmão Irmão Alberis Fernandes por ser também um grande guerreiro na vida e nos estudos.

Agradeço a minha noiva Keylla Raquel por todo esse tempo de companheirismo, de amor e atenção. Obrigado por todo apoio e por ter me dado momentos maravilhosos ao seu lado.

Agradeço aos meus amigos do mestrado, Victor (Sacarose), Lucas Vidal, Lucas Quaresma (Quaresminha), Andressa (Parceira), Andrelino, Thiago (Vida lokaa), Rafael, Jeferson (Sujeira), etc. Valeu galera por todos os conselhos, estudos em grupos e claro das nossas diversões (partiuseurufino).

Agradeço aos meus familiares e parentes que sempre acreditaram e confiaram em mim deste o início.

Agradeço a todos os meus amigos, especialmente à galera VSFALL (étóis), meus grandes amigos de infância. Deixo meu agradecimento também a um grande amigo parceiro de verdade Lidiuan Soares, obrigado por tudo meu amigo, você realmente é um parceiro de verdade (tmj).

Agradeço ao meu orientador Roger Peres, que me ajudou principalmente para alcançar e concluir esse objetivo. Ao professor João Carlos, que foi o primeiro professor que me motivou e incentivou a fazer o mestrado. Aos professores Marcondes Clark e Fábio Natali que aceitaram em participar da minha banca. E a todos os professores do departamento de matemática da UFPI, meu muito obrigado.

Por fim, agradeço também a CAPES e CNPq pelo apoio financeiro.

"*Tudo o que tenho de valor, são as minhas memórias. Se elas partissem, eu partiria em dois*".

Ninguém Mais - Rosa de Saron

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo dos resultados de boa colocação local para equação de Benjamin-Ono generalizada (GBO) $\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0$, com $k \geqslant 2$, nos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geqslant 1/2$ se $k \geqslant 5$, $s > 1/2$ se $k = 2, 4$ e $s \geqslant 3/4$ se $k = 3$. Aqui, estudamos os resultados de boa colocação local existentes com dados iniciais arbitrários. O principal objetivo é estabelecer esses resultados nos espaços de Sobolev $H^{1/2}(\mathbb{R})$, o qual será alcançado somente para $k \geqslant 5$. O método consiste em primeiramente fazer uma mudança de variável w chamada transformada gauge sobre uma solução suave u da (GBO) e obter uma nova equação para w, com isto, podemos obter estimativas no espaço de resolução com potências positivas do tempo $T > 0$ em frente de todas as normas que aparecerem resultantes da parte não linear da equação na forma integral, tornando possível a obtenção da boa colocação local sem necessidade de restrição sobre a norma do dado inicial. De posse das devidas estimativas, regulariza-se o dado inicial e passa-se ao limite sobre soluções suaves para a (GBO).

Abstract

This work is focused on the study of the local well-posedness for the generalized Benjamin-Ono equation (GBO) $\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0$ with $k \geqslant 2$ into the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$ for $s \geqslant 1/2$ if $k \geqslant 5$, $s > 1/2$ if $k = 2, 4$ and $s \geqslant 3/4$ if $k = 3$. Here we study the existing local well-posedness results in the case of arbitrary large initial data. The main purpose is to establish these results in Sobolev spaces $H^{1/2}(\mathbb{R})$, which will be achieved only for $k \geqslant 5$. The method is initialized by making a change of variable w call transformed gauge on a smooth solution u of (GBO) and then getting an equation for w that will be used to estimate the resolution space with positive powers of time $T > 0$ in front of all norms that appear due to the non-linear part of the equation in Duhamel form (integral form) making it possible to obtain good local placement with no constraint required on the norm of the initial data. Having the needed estimations, the initial data is regularized and limited over smooth solutions for (GBO).

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo dos resultados de boa colocação local para o problema de Cauchy associado à equação de Benjamin-Ono generalizada (GBO):

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0, (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função real, $k \geqslant 2$ é um número natural e $\mathcal{H}$ é a transformada de Hilbert definida via transformada de Fourier por

$$(\mathcal{H}f)(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} sgn(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi. \tag{1.2}$$

Nosso trabalho tem como base o artigo [13] de L. Molinet e F. Ribaud.

A equação de Benjamin-Ono (no caso $k = 1$) surge como um modelo para propagação de ondas de gravidade internas longas em fluídos estratificados (interface de dois fluidos), sendo um de profundidade "infinita"(veja [2]), que tem sido estudado em uma grande quantidade de trabalhos. Quando $k \geqslant 2$, (1.1) é um sistema Hamiltoniano de dimensão infinita (para $k = 1$, é completamente integrável formalmente) e possui as seguintes quantidades invariantes:

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)dx, \\ M(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t,x)dx, \\ \text{e } E(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}|D_x^{1/2}u(t,x)|^2 \mp \frac{1}{(k+1)(k+2)}u(t,x)^{k+2}\right) dx \ \text{(energia)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Um dos desafios sobre esta família de equações é provavelmente estabelecer o resultado de boa colocação no espaço energia $H^{1/2}(\mathbb{R})$.

Uma importante característica da equação GBO é a seguinte invariância por escala (scaling): se $u(x,t)$ é uma solução do PVI (1.1) em $[-T,T]$, então

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^{\frac{1}{k}} u(\lambda x, \lambda^2 t), \qquad \lambda > 0, \tag{1.4}$$

também é solução em $[-\lambda^2 T, \lambda^2 T]$ do PVI (1.1) com dado inicial $u_\lambda(x,0) = \lambda^{\frac{1}{k}} u_0(\lambda x)$. Além disso,

$$\|u_\lambda(\cdot,0)\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{s+1/k-1/2} \|u(\cdot,0)\|_{\dot{H}^s}. \tag{1.5}$$

De fato, primeiro observemos que

$$\widehat{u}_\lambda(\xi,0) = \lambda^{\frac{1}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u_0(\lambda x)dx = \lambda^{\frac{1}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\frac{\xi}{\lambda}} u_0(x) d\frac{x}{\lambda} = \lambda^{\frac{1}{k}-1} \widehat{u}_\lambda(\xi/\lambda).$$

Portanto, chamando de $\eta = \xi/\lambda$, temos:

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda(\cdot,0)\|^2_{\dot{H}^s} &= \lambda^{\frac{2}{k}-2} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2s} |\widehat{u}_0(\xi/\lambda)|^2 d\xi \\
&= \lambda^{\frac{2}{k}-2} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda\eta|^{2s} |\widehat{u}_0(\eta)|^2 \lambda d\eta \\
&= \lambda^{2s+\frac{2}{k}-1} \int_{-\infty}^{\infty} |\eta|^{2s} |\widehat{u}_0(\eta)|^2 d\eta,
\end{aligned}$$

e isso prova a validade da identidade (1.5). Tal identidade implica que a derivada de ordem mais alta que deixa a norma de $\dot{H}^s(\mathbb{R})$ invariante é $s = s_k = 1/2 - 1/k$. Portanto, a norma $\dot{H}^s(\mathbb{R})$ é invariante pelo fluxo $u \mapsto u_\lambda$ se, e somente se, $s = s_k = 1/2 - 1/k$, e por causa disso, podemos esperar boa colocaçao em H^s, $s \geqslant s_k$, para o PVI (1.1).

Nesta dissertação, vamos usar o método desenvolvido por L. Molinet e F. Ribaud ([13]) que melhorou consideravelmente os resultados locais da boa colocação existentes até então, no caso de dados iniciais arbitrários.

Antes do trabalho de Molinet e Ribaud [13], conhecia-se a boa colação em $H^s(\mathbb{R}), s > 3/2$ (veja [1],[8],[11]) e em 2002, Kenig e Koenig [9] mostraram a boa colocação em $H^1(\mathbb{R})$ se $k = 2$. Mas tudo indica que o método de Kenig e Koenig não se aplica no caso $s < 1$ devido a pouca regularidade dos efeitos suavizantes associados ao problema linear.

Um pouco antes do trabalho [13], Molinet e Ribaud em [14], provaram a boa colocação local no caso de dados iniciais pequenos (restrição sobre o tamanho do dado inicial) em $H^s(\mathbb{R})$ quando:

$$s > 1/2 \ \text{ se } \ k = 2,$$

$$s > 3/2 \ \text{ se } \ k = 3,$$

$$s > s_k \ \text{ se } \ k \geqslant 4$$

e boa colocação global quando

$$
\begin{aligned}
&s \geqslant 1/2 \ \text{ se } \ k = 3,\\
&s > s_k \ \text{ se } \ k \geqslant 4,
\end{aligned}
$$

onde $s_k = 1/2 - 1/k$ é o indice crítico de escala (scaling). Vale ressaltar que tais resultados são quase sharp para $k \neq 3$. As principais ferramentas empregadas em [14] foram o teorema do ponto fixo para contrações, junto com novos efeitos regularizates e estimativas para a função maximal em L^p localizadas, $p > 2$, obtidos a partir de um argumento de Christ e Kiselev (veja Lema 2 em [14]).

Como mencionado acima, o objetivo é atingir o espaço de energia $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Isto será alcançado para $k \geqslant 5$. Mais precisamente, é provado que a (GBO) é localmente bem posta em $H^s(\mathbb{R})$ quando

$$
\begin{aligned}
&s > \frac{1}{2} \ \text{ se } \ k = 2, 4,\\
&s \geqslant \frac{3}{4} \ \text{ se } \ k = 3,\\
&s \geqslant \frac{1}{2} \ \text{ se } \ k \geqslant 5.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Além disso, mostra-se que em todos estes casos, num forte contraste com o caso $k = 1$, a aplicação dado inicial - fluxo é localmente Lipschitz.

Só em 2009, S. Vento (veja [17]) conseguiu melhorar alguns dos resultados obtidos por Molinet e Ribaud em [13]. Mais precisamente, em [17] é provado a boa colocação local para a (GBO) em $H^{s_k}(\mathbb{R})$, $s_k = 1/2 - 1/k$, quando $k \geqslant 4$ apenas com ligeiros ajustes na técnica de Molinet e Ribaud; por esse motivo fomos levados a priorizar o estudo do artigo [13] em detrimento de [17]. No caso $k = 3$, é obtida a boa colocação em $H^s(\mathbb{R}), s > 1/3$.

Enunciamos abaixo nosso principal resultado. Informamos que a definição dos espaços de resolução X^s_T encontra-se na Seção 4.1, local onde o teorema é provado.

Teorema 1. *Para qualquer* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *com* (1.6), *existem* $T = T^s_k\big(\|u_0\|_{H^s}\big) > 0$ *com* $T^s_k(\alpha) \nearrow \infty$ *quando* $\alpha \searrow 0$, *e uma única solução* u *da (GBO) satisfazendo*

$$
u \in C\big([0, T]; H^s(\mathbb{R})\big) \cap X^s_T. \tag{1.7}
$$

Além disso, para a classe de s *acima definidos, a aplicação dado inicial - fluxo é Lipschitz em cada conjunto limitado de* $H^s(\mathbb{R})$.

Para estabelecer o resultado acima, inspirados no trabalho de T. Tao [16], Molinet e Ribaud introduzem uma transformada Gauge w de u, onde u é uma solução suave da (GBO) e obtêm uma equação dispersiva para w. Usando estimativas dispersivas, eles obtêm um tempo positivo T em frente de cada norma oriunda da parte não linear da equação integral ao estimar w no espaço de resolução. Em seguida, reescrevendo (GBO) com a ajuda de w, obtém-se a estimativa desejada na solução de u (com potências de T acompanhando todas as normas). Os resultados seguem depois regularizando os dados iniciais e passando para o limite de soluções suaves para a (GBO). Mais precisamente, ao fazer a estimativa para a equação

$$u(t) = V(t)u_0 \pm \int_0^t V(t-t')(u^k \partial_x u)(t')dt'$$

no espaço de resolução X_T^s, chega-se desigualdade do tipo

$$\|u(t)\|_{X_T^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|u\|^2_{L_x^k L_T^\infty} \|\partial_x u\|_{L_x^\infty L_T^2} + T^\alpha \|u\|^{k+1}_{X_T^s}$$

e o termo $\|u\|_{L_x^k L_T^\infty} \|\partial_x u\|_{L_x^\infty L_T^2}$ obriga a tomar $\|u_0\|_{H^s} < \delta$, ou seja, $\|u_0\|_{H^s}$ com restrição de tamanho. Para retirar a restrição sobre o tamanho da norma do dado inicial, Molinet e Ribaud, seguindo T. Tao [16], tiveram êxito fazendo a mudança de variável dependente $w = P_+(e^{iF}u)$ descrita com detalhes na Seção 4.3 deste trabalho.

O trabalho está distribuído da seguinte forma:

No capítulo 1 introduzimos o problema (1.1) e apresentamos o nosso principal resultado, tendo como base o artigo [13] de L Molinet e F. Ribaud. No capítulo 2 apresentamos os assuntos que são pré-requisitos para leitura e compreensão deste trabalho. No capítulo 3 listamos as estimativas de efeito regularizante e para a função maximal associados ao fluxo da equação de Benjamin-Ono linear. No capítulo 4, o qual está dividido em seis seções, apresentamos a demonstração do teorema principal.

Notação:

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $R(f)$ representa a parte real, e, $Im(f)$ a imaginária de f.

$L^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mensurável tal que $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx\right)^{1/p} < \infty\}$.

$S(\mathbb{R})$ representa o espaço de Schwartz em $\mathbb{R}$.

$S'(\mathbb{R})$ é o espaço das distribuições temperadas em $\mathbb{R}$.

Para $1 \leqslant p, q < \infty$ definimos o espaço de Banach:

$$L^p_x L^q_T = \{f : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{C} \text{ mensurável } : \|f\|_{L^p_x L^q_T} < \infty\}, \text{ onde}$$

$$\|f\|_{L^p_x L^q_T} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |f(x,t)|^q dt\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Seja (X, Σ_X, μ) um espaço de medida. Dada $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável, denotamos por

$$E_f^\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}.$$

$J^s(\cdot) = \left((1 + |\xi|^2)^{s/2}\widehat{\cdot}\right)^{\vee}$ representará o potencial de Bessel de ordem $-s$.

$D^s(\cdot) = (|\xi|^s\widehat{\cdot})^{\vee}$ denota o potencial de Riesz de ordem $-s$.

$(f, g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx$ é o produto interno de L^2.

$< f, g >= Re \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx$ é o produto interno real de L^2.

$[A, B] = AB - BA$ é o comutador dos operadores A e B.

$H^s(\mathbb{R})$ é o espaço de Sobolev de ordem s em $\mathbb{R}$. E, $H^\infty(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s$.

$\partial^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(x)$, onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo abordaremos as definições básicas e os resultados que serão utilizados para a obtenção do resultado principal.

2.1 Teoria Básica de Distribuições

O nosso principal interesse nesta seção é expor parte da teoria de distribuições essencial para o estudo dos espaços de Sobolev e de equações diferenciais parciais. O conteúdo aqui exposto foi quase que totalmente extraido da referência [5].

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e seja

$$C_0^j(\Omega) = \{\varphi/\ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}) \text{ com supp}(\varphi) \text{ compacto e } \varphi \in C^j(\Omega)\},$$

com $j \in \mathbb{N}$.

Definição 1. *Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da topologia induzida pela família de seminormas*

$$\rho_{k,\alpha} = \sup_{x \in K}\{\ |(\partial^\alpha \varphi)(x)|,\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \textit{onde } K \subset \Omega \ \ \textit{é compacto e } \alpha \textit{ é um multi-índice}\}.$$

Esta topologia induz a seguinte noção de convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$:

Definição 2. *Sejam $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_j \to \varphi$ no sentido do espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ quando: 1. Existe $K \subset \Omega$ compacto tal que supp$(\varphi_j) \subseteq K, \forall j \in \mathbb{N}$. 2. $\partial^\alpha \varphi_j \to \partial^\alpha \varphi$, (uniformemente) para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.*

Com isso definimos distribuições:

Definição 3. *Chamamos de distribuição em* Ω *a qualquer funcional linear contínuo* $F : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{C}($*ou* $\mathbb{R})$. *O dual de* $\mathcal{D}(\Omega)$, *denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *é chamado de espaço de (Schwartz) distribuições.*

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{F : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{C}\ F \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Para cada $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}^+)^{2n}$ denotamos a semi-norma $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta)}$ definida por

$$\|f\|_{(\alpha,\beta)} = \left\|x^\alpha \partial_x^\beta f\right\|_\infty .$$

Definição 4. *Denotamos por* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *o espaço das funções* C^∞ *que se anulam no infinito, isto é,*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} < \infty\ \forall \alpha,\ \beta \in (\mathbb{Z}^+)^{2n}\}.$$

Portanto temos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A topologia em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dada pela família de semi-normas $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta)}$, $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}^+)^{2n}$.

Definição 5. *Seja* $(\varphi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então* $\varphi_j \to 0$ *quando* $j \to \infty$, *e para cada* $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}^+)^{2n}$ *temos que*

$$\|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} \to 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

Teorema 2. *O espaço de Schwartz satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Dada* $\varphi \in \mathcal{S}$, $P(x)\varphi \in \mathcal{S}$ *e* $P(\partial)\varphi \in \mathcal{S}$, *para qualquer polinômio* $P(x)$, *ou seja,* $\mathcal{S}$ *é estável em relação à multiplicação por polinômios e à diferenciação. Em particular, dados quaisquer polinômios* $P(x)$, $Q(x)$ *e qualquer* $\varphi \in \mathcal{S}$, *temos que* $P(x)Q(\partial)\varphi \in \mathcal{S}$.

2. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}$ *e é denso em* $\mathcal{S}$.

3. $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p$ *e é denso em* L^p, $\forall 1 \leqslant p < \infty$.

4. *Dadas* $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, $\varphi * \psi \in \mathcal{S}$, *ou seja, o produto de convolução e uma operação em* $\mathcal{S}$.

Demonstração. Ver [5]. □

Definição 6. *Dizemos que* $\Psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ *define uma distribução temperada se*

1. Ψ *é linear.*

2. Ψ *é contínua, isto é, se* $\varphi_j \to 0$ *quando* $j \to \infty$ *implicar que a sequência* $\Psi(\varphi_j) \to 0$ *quando* $j \to \infty$.

Denotaremos tal espaço como $S'(\mathbb{C})$ *ou* $S'(\mathbb{R})$.

2.2 A transformada de Fourier e suas propriedades básicas

Definição 7. *Dada uma função* $f \in L^1(\mathbb{R})$*, a transformada de Fourier de* f*, denotada por* $\mathcal{F}(f)$ *ou* $\widehat{f}$*, é definida pela fórmula*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

A mesma definição vale para a transformada de Fourier para $f \in S(\mathbb{R})$. A maior vantagem de $\mathcal{S}$ em relação a L^1 é a facilidade de trabalhar nele devido a regularidade de suas funções, o que nos permite demonstrar por exemplo as propriedades a seguir:

Teorema 3. *Seja* $\varphi \in \mathcal{S}$ *e seja* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *um multi-índice. Então*

1. $(\partial^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$;
2. $((-i\,\cdot)^\alpha \varphi(\,\cdot\,))^\wedge(\xi) = \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$;
3. $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$*, ou seja,* $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Demonstração. Ver [5] ou [7]. □

Agora iremos primeiramente estender a transformada de Fourier como função para $L^2(\mathbb{R}^n)$ e então usar o teorema de interpolação de Riesz-Thorin para provar que $\mathcal{F}$ também pode ser definida para funções de L^p, $1 < p < 2$. Vamos provar que quando $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\hat{f}$ é uma função.

Usaremos o fato de $\mathcal{S}$ ser um subconjunto denso de L^1 e L^2 para provar que se $f \in L^2$, então $\hat{f}$ é uma função.

Teorema 4 (Teorema de Plancherel)**.** *: Se* $f \in L^2$*, então* $\widehat{f} \in L^2$ *e*

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}.$$

Em outras palavras, $\mathcal{F}$ *é um operador unitário (uma isometria) em* L^2.

Demonstração. Ver [3] ou [5]. □

Para caracterizar a transformada de Fourier em $L^p, 1 < p < 2$, vamos utilizar o seguinte teorema:

Teorema 5 (Riesz-Thorin)**.** *Sejam* (X, Σ_X, μ) *e* (Y, Σ_Y, ν) *espaços de medida e* p_0, p_1, $q_0, q_1 \in [1, \infty]$ *(com* ν σ*-finita se* $q_0 = q_1 = \infty$*). Dado* $0 < t < 1$, *sejam* p_t *e* q_t *tais que*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Se $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ *é um operador linear tal que,*

$$\|Tf\|_{L^{q_0}} \leqslant M_0\|f\|_{L^{p_0}}, \quad \textit{para} \quad f \in L^{p_0}(\mu) \quad \text{e} \quad \|Tf\|_{L^{q_1}} \leqslant M_1\|f\|_{L^{p_1}}, \quad \textit{para} \quad f \in L^{p_1}(\mu),$$

então

$$\|Tf\|_{L^{q_t}} \leqslant M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{L^{p_t}}, \quad \forall f \in L^{p_t}(\mu) \ \textit{e} \ \ 0 < t < 1;$$

ou seja, designando por M_t *a norma de* $T : L^{p_t} \to L^{q_t}$ *temos:* $M_t \leqslant M_0^{1-t} M_1^t$.

Demonstração. Ver o Teorema 6.27 de [4]. □

Definição 8. *Seja* (X, Σ_X, μ) *um espaço de medida. Dada* $f : X \to \mathbb{C}$ *mensurável, definimos sua função distribuição (associada a* μ*)* $m_f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ *por*

$$m_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = \mu(E_f^\lambda).$$

Definição 9. *Sejam* (X, Σ_X, μ), (Y, Σ_Y, ν) *espaços de medida e* $M(Y, \Sigma_Y) = \{f : Y \to \mathbb{C}, f$ *é mensurável* $\}$. *Dado* $T : L^p(X, \Sigma_X, \mu) \to M(Y, \Sigma_Y) (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *um operador sublinear, isto é,*

$$|T(f+g)| \leqslant |Tf| + |Tg| \ \textit{e} \ |T(cf)| = |c||Tf|, \ \ \forall f, g \in L^p(\mu) \ \textit{e} \ c \in \mathbb{C}$$

dizemos que:

1. T *é de tipo forte* (p, q), *onde* $1 \leqslant q \leqslant \infty$, *quando* $T : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ *está bem definido e é limitado, ou seja, existe* $c = c(p, q) > 0$ *tal que,* $\|Tf\|_q \leqslant c\|f\|_p, \forall f \in L^p(\mu)$.

2. T *é de tipo fraco* (p, q), *onde* $1 \leqslant q < \infty$, *quando existe* $c > 0$ *tal que, para cada* $\lambda > 0$,
$$\nu(E_{Tf}^\lambda) \leqslant \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^q, \ \ \forall f \in L^p(\mu).$$

3. T *é de tipo fraco* (p, ∞) *quando, e somente quando,* T *é forte* (p, ∞).

Como a transformada de Fourier é um operador de tipo forte $(1, \infty)$ e $(2, 2)$ respectivamente, o teorema de Riesz-Thorim nos permite estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 6 (Desigualdade de Hausdorff-Young)**.** *: Se* $f \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *então* $\widehat{f} \in L^q$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = 1$ *e*

$$\|\widehat{f}\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Como $\mathcal{F}$ é forte $(1, \infty)$ e $(2, 2)$, segue do teorema de Riesz-Thorim que $\mathcal{F}$ é forte (p, q), com $\frac{1}{p} = \frac{(1-t)}{1} + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2}$ e $\frac{1}{q} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2} = 1 - \frac{1}{p}$.

Portanto, $\|\hat{f}\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}$. □

Estamos prontos para definir a transformada de Fourier de uma distribuição temperada. Sabemos que se $f \in L^1$, então $\widehat{f} \in L^\infty$ e é contínua, portanto, $\widehat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$, isto é, define uma distribuição temperada, pois $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ e

$$\int \widehat{f}(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int f(x)\widehat{\varphi}(x)dx, \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.2}$$

Isso nos permite fazer a seguinte definição:

Definição 10. *: Dada* $F \in S'(\mathbb{R}^n)$, *definimos sua transformada de Fourier por*

$$\langle \widehat{F}, \varphi \rangle = \widehat{F}(\varphi) = \langle F, \widehat{\varphi} \rangle = F(\hat{\varphi}),\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

Observe que, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então ambas as definições de $\widehat{f}$ coincidem. Portanto, a Definição 10 é consistente com a teoria de transformada de Fourier para funções de $\mathcal{S}$.

Assim como em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale o seguinte resultado para a transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

Teorema 7. *:* $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *é um isomorfismo e tanto* $\mathcal{F}$ *como* $\mathcal{F}^{-1}$ *são contínuas.*

Demonstração. Ver em [5]. □

Teorema 8. *:* $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $(\partial^\alpha F)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{F}(\xi)$.

2. $((-ix)^\alpha F)^\wedge(\xi) = \partial_\xi^\alpha \widehat{F}(\xi)$.

3. $(\tau_h F)^\wedge(\xi) = e^{ih\xi}\widehat{F}(\xi)$.

4. $(e^{ixh}F)^\wedge(\xi) = \tau_h \widehat{F}(\xi)$, *onde* $\tau_h f \Leftrightarrow (x) = f(x - h)$.

Demonstração. Ver em [5]. □

Definição 11. *A função valor principal de* $\frac{1}{x}$, *denotada por* $v.p\ \frac{1}{x}$ *é definida pela expressão*

$$v.p\ \frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Observe que

$$v.p\ \frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0} \Big(\int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{1 < |x|} \frac{\varphi(x)}{x} dx \Big)$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\varphi(0)}{x} dx &= \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{\varphi(0)}{x} dx = \varphi(0)(\ln|x| \Big|_{-1}^{-\epsilon} + \ln|x| \Big|_{\epsilon}^{1}) \\ &= \varphi(0)(\ln|\epsilon| - \ln 1 - \ln|\epsilon| + \ln 1) = 0,\end{aligned}$$

daí,

$$v.p\ \frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| > \frac{1}{\epsilon}} \frac{x\varphi(x)}{x^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow |v.p\ \frac{1}{x}(\varphi)| &\leqslant \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(0)|}{|x - 0|} dx + 2 \int_{1}^{+\infty} \frac{|x\varphi(x)|}{x^2} dx \\ &\leqslant \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} \sup |\varphi'(x)| dx + 2\|x\varphi\|_{L^\infty} \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &\leqslant 2\|\varphi'\|_{L^\infty} + 2\|x\varphi\|_{L^\infty} < \infty, \quad \forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Assim, $v.p\ \frac{1}{x}(\varphi)$ está bem definida e $v.p\ \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\Omega)$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto.

Exemplo 1. *Calculemos* $\widehat{v.p\ \frac{1}{x}}$.

Dado $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\widehat{v.p\ \frac{1}{x}}(\varphi) &= v.p\ \frac{1}{x}(\widehat{\varphi}) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\widehat{\varphi}(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{1}{x} (\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-ixy} dy) dx \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) (\int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-ixy}}{x} dx) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) (\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-ixy}}{x} dx) dy.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-ixy}}{x} dx &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\cos(2\pi xy)}{x} dx - 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(2\pi xy)}{x} dx \\ &= -2i\ \mathsf{sgn}(y) \int_{0}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = -i\pi\ \mathsf{sgn}(y).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Com as ferramentas já estabelecidas, podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 9. *: Se* $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$\widehat{F * \psi} = \widehat{F}\widehat{\psi}, \tag{2.6}$$

onde $\widehat{F}\widehat{\psi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *é definido como*

$$\langle \widehat{F}\widehat{\psi}, \varphi \rangle = \langle \widehat{F}, \widehat{\psi}\varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

isto é, $\widehat{F}\widehat{\psi}(\varphi) = \widehat{F}(\widehat{\psi}\varphi)$.

Demonstração. Pelas proposições anteriores e usando o fato de que $\widetilde{\psi} = \widehat{\widehat{\psi}}$, segue que

$$\langle \widehat{F * \psi}, \varphi \rangle = \langle F * \psi, \widehat{\varphi} \rangle = \langle F, \widehat{\varphi} * \widetilde{\psi} \rangle = \langle F, \widehat{\varphi} * \widehat{\widehat{\psi}} \rangle = \langle \widehat{F}, \varphi\widehat{\psi} \rangle,$$

e isto prova o teorema. □

2.3 A transformada de Hilbert e suas propriedades

Com a definição (1.2) acima, temos as seguintes propriedades para a transformada de Hilbert:

Proposição 1. *: Dada* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*,* $\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = -i \ \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)$.

Demonstração. Como $v.p. \ \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, e $\widehat{v.p. \ \frac{1}{x}}(\xi) = i\pi \ \mathrm{sgn}(\xi)$, segue do Teorema 9 que
$$\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = \frac{1}{\pi}\widehat{v.p. \ \frac{1}{x} * f}(\xi) = \frac{1}{\pi}\widehat{v.p. \ \frac{1}{x}}(\xi)\widehat{f}(\xi) = -i \ \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$ □

Observe que $\mathcal{H}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$(ou seja, $\mathcal{H}f$ está definida em toda a reta). Lembremo-nos que $\mathcal{H}f$ é uma função C^∞ de crescimento polinomial, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

A proposição 1 e a densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em L^2 nos permite definir a transformada de Hilbert de funções de L^2 como uma isometria:

Teorema 10. *: Dadas* f, $g \in L^2(\mathbb{R})$*, valem:*

1. $\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

2. $\mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$.

3. $\displaystyle\int \mathcal{H}fg dx = -\int f\mathcal{H}g dx$.

Demonstração. 1. Dada $f \in L^2$, segue da Proposição 1 e do teorema de Plancherel que

$$||\mathcal{H}f||_{L^2} = ||\widehat{\mathcal{H}f}||_{L^2} = ||\widehat{f}||_{L^2} = ||f||_{L^2}.$$

2. Como $\mathcal{H} : L^2 \longrightarrow L^2$ é unitário, segue da fórmula da inversa de Fourier que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\mathcal{H}f) &= (\widehat{\mathcal{H}\mathcal{H}(f)})^{\vee} = (-i\ sgn(\xi)\widehat{\mathcal{H}f}(\xi))^{\vee} \\
&= ((-i)^2(sgn(\xi))^2\widehat{f}(\xi))^{\vee} \\
&= -(\widehat{f})^{\vee} = -f.
\end{aligned}$$

3. Segue da Identidade de Parseval que, dadas $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{H}fg dx &= \int \widehat{\mathcal{H}f}\overline{\widehat{g}}d\xi = -\int isgn(\xi)\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi \\
&= -\int \widehat{f}(\xi)\overline{(-isgn(\xi)\widehat{g}(\xi))}d\xi = -\int \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\mathcal{H}g}(\xi)}d\xi \\
&= -\int f\mathcal{H}g dx.
\end{aligned}$$

□

Definição 12. *Definimos os operadores* P_+, P_- *como*

$$P_+ = \frac{1}{2}(1 + i\mathcal{H}),$$

$$P_- = \frac{1}{2}(1 - i\mathcal{H}),$$

P_+, P_- *são conhecidos como operadores de projeção.*

A Definição 12 para o operador projeção é equivalente à seguinte:

$$P_+f = (\chi_{[0,+\infty)}(\xi)\widehat{f}(\xi))^{\vee} \quad \text{e} \quad P_-f = (\chi_{[(-\infty,0]}(\xi)\widehat{f}(\xi))^{\vee}.$$

As principais propriedades do operador Projeção são descritas na proposição abaixo:

Proposição 2. *Sejam* P_+, P_- *os operadores de projeção dados pela Definição 12, então*

$$P_+ + P_- = 1, \tag{2.7}$$

$$P_+ - P_- = i\mathcal{H}, \tag{2.8}$$

$$iP_+ = -\mathcal{H}P_+, \tag{2.9}$$

$$iP_- = \mathcal{H}P_-. \tag{2.10}$$

Demonstração. Segue imediatamente da Definição 12. □

2.4 Fatos Básicos

Na sequência, C denota uma constante positiva que pode ser diferente em dados momentos. Para um número real a, denotamos por a^+ qualquer número real $b > a$ "suficientemente perto"de a. Quando escrevermos $x \simeq y$ (para x e y, dois números reais não negativos), queremos dizer que existem C_1 e C_2, duas constantes positivas (que não dependem de x e y) tais que $C_1 x \leqslant y \leqslant C_2 x$. Quando escrevermos $x \lesssim y$ (para x e y, dois números reais não negativos), queremos dizer que existe C_1 uma constante positiva (que não depende de x e y) tal que $x \leqslant C_1 y$.

Usaremos os espaço-tempo de Lebesgues como os espaços $L^r_x L^q_t$ e $L^q_t L^r_x$, respectivamente, dotados das normas

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|_{L^r_x L^q_t} &= \| \, \|f(.,x)\|_{L^q} \|_{L^r}, \\ \|f(t,x)\|_{L^q_t L^r_x} &= \| \, \|f(t,.)\|_{L^r} \|_{L^q}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Precisaremos de versões de tempo locais desses espaços, que denotamos por $L^r_x L^q_T$ e $L^q_T L^r_x$ e são, respectivamente, dotados das normas

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|_{L^r_x L^q_T} &= \| \, \|f(.,x)\|_{L^q([-T,T])} \|_{L^r(\mathbb{R})}, \\ \|f(t,x)\|_{L^q_T L^r_x} &= \| \, \|f(t,.)\|_{L^r} \|_{L^q([-T,T])}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Quando $q = r$, usamos as notações $L^r_{t,x} = L^r_t L^r_x$ e $L^r_{T,x} = L^r_T L^r_x$.

Utilizaremos a decomposição Littlewood-Paley. Na sequência, denotamos por Q_k e P_k os operadores, respectivamente, definidos por

$$Q_k(f) = \mathcal{F}^{-1}(\eta(2^{-k}\xi)\widehat{f}(\xi)), \quad P_k(f) = \mathcal{F}^{-1}(p(2^{-k}\xi)\widehat{f}(\xi)), \tag{2.13}$$

onde η é uma função não-negativa suave com suporte em $\{\xi, \ 1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$ tal que $\sum_{-\infty}^{+\infty} \eta(2^{-k}\xi) = 1$ para $\xi \neq 0$ e em que $p(\xi) = \sum_{j \leqslant -3} \eta(2^{-j}\xi)$.

Seguindo a notação padrão, D^s_x e J^s_x, denotam os operadores com o símbolo $|\xi|^s$ e $(1 + |\xi|^2)^{s/2}$, respectivamente.

Definição 13. *Uma família de operadores T_z é dita ser admissível se a aplicação*

$$z \mapsto \int_Y (T_z f) g \, d\nu$$

é analítica no interior de uma faixa S, contínua em S e existe uma constante $a < \pi$ tal que

$$e^{-a|y|} \log \left| \int_Y (T_z f) g \, d\nu \right|$$

é limitada superiormente em S.

Teorema 11. *(Stein) Seja* T_z, $z \in S$,*uma família admissível de operadores satisfazendo*

$$||T_{iy}f||_{q_0} \leqslant M_0(y)||f||_{p_0} \quad e \quad ||T_{1+iy}f||_{q_1} \leqslant M_1(y)||f||_{p_1}$$

para todas as funções simples f *em* $L^1(X, A, \mu)$, *onde* $1 \leqslant p_j, q_j \leqslant \infty$, $M_j(y), j = 0, 1$, *são independentes de* f *e satisfazem*

$$\sup_{-\infty<y<\infty} e^{b|y|} \log M_j(y) < \infty$$

para algum $b < \pi$. *Então, se* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *existe uma constante* M_t *tal que*

$$||T_t f||_{q_t} \leqslant M_t ||f||_{p_t}$$

para toda função simples com

$$\frac{1}{p_t} = \frac{(1-t)}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q_t} = \frac{(1-t)}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Demonstração. Ver [12]. □

Lema 1. *Seja* T *um operador linear definido no espaço tempo das funções* $f(x, t)$*:*

$$Tf(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, t')f(t')dt',$$

tal que

$$||Tf||_{L_x^{p_1} L_t^{q_1}} \lesssim C||f||_{L_x^{\bar{p}_2} L_t^{\bar{q}_2}},$$

onde

$$\min(p_1, q_1) > \max(\bar{p}_2, \bar{q}_2).$$

Então

$$\left\| \int_0^t K(t, t')f(t')dt' \right\|_{L_x^{p_1} L_t^{q_1}} \lesssim C||f||_{L_x^{\bar{p}_2} L_t^{\bar{q}_2}}.$$

Demonstração. Ver o Lema 2 de [14]. □

Lema 2. *Seja* T *um operador linear definido no espaço de tempo das funções* $f(x, t)$*:*

$$Tf(t) = \int_0^1 K(t, t')f(t')dt',$$

onde $K : \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \to C(\mathbb{R}^3)$ *e tal que*

$$||Tf||_{L_x^{p_1} L_{[0,1]}^{\infty}} \lesssim C||f|_{L_x^{\bar{p}_2} L_{[0,1]}^{\bar{q}_2}},$$

com

$$\bar{p}_2, \bar{q}_2 < +\infty.$$

Então

$$\left\| \int_0^t K(t,t')f(t')dt' \right\|_{L_x^{p_1} L_{[0,1]}^{\infty}} \lesssim C\|f\|_{L_x^{\bar{p}_2} L_{[0,1]}^{\bar{q}_2}}.$$

Demonstração. Ver o Lema 3 de [14]. □

Lema 3. *(Desigualdade de Bernstein) Seja* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$*, tal que* $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset B(0,\lambda)$*. Seja* $p \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *com* $1 \leqslant p$ *e suponhamos que* $f \in L^p$*. Então existe uma constante* $C = C(n)$ *tal que temos as seguintes desigualdades:*

(1) Para todo $q \geqslant p, f \in L^p$ *e*

$$\|f\|_{L^q} \leqslant C\lambda^{n(1/p-1/q)}\|f\|_{L^p}. \tag{2.14}$$

(2) Para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *e* $\partial^{\alpha} f \in L^p$

$$\|\partial^{\alpha} f\|_{L^p} \leqslant C^{|\alpha|}\lambda^{|\alpha|}\|f\|_{L^p}. \tag{2.15}$$

(3) Se $\widehat{f}$ *tem suporte fora da origem, i.e,* $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{R}^n - B(0,\lambda/2)$*, então*

$$C^{-|\alpha|}\lambda^{|\alpha|}\|f\|_{L^p} \leqslant \sup_{\alpha=|\alpha|} \|\partial^{\alpha} f\|_{L^p} \leqslant C^{|\alpha|}\lambda^{|\alpha|}\|f\|_{L^p}. \tag{2.16}$$

Demonstração. Ver o Lema 1 de [15]. □

Passamos agora a listar as regras de Leibniz para derivadas fracionárias em $L_x^p L_T^q$ que iremos usar.

Lema 4. *Se* $\alpha > 0$*,* $\beta \geqslant 0$ *e* $1 < p, q < \infty$ *então*

$$\|D_x^{\alpha} P_+(fP_- D_x^{\beta} g)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|D_x^{\gamma_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\gamma_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}},$$

onde $1 < p_1, q_1, p_2, q_2 < \infty$*,* $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$*,* $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$ *e* $\gamma_1 \geqslant \alpha$*,* $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$*.*

Demonstração. Ver o Apêndice A.2.1, de [13]. □

Lema 5. *Sejam* $0 < \alpha \leqslant 1$ *e* $1 < p, q < \infty$*; então*

$$\|D_x^{\alpha}(e^{\mp iF} g)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|u\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}}^k \|g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}} + \|J_x^{\alpha} g\|_{L_x^p L_T^q}, \tag{2.17}$$

onde $1 < p_i, q_i < \infty$*,* $k/p_1 + 1/p_2 = 1/p, k/q_1 + 1/q_2 = 1/q$*.*

Demonstração. Ver o Apêndice A.2.2 de [13]. □

Lema 6. *Se* $\alpha > 0$ *e* $1 < p, q < \infty$, *então*

$$\|D_x^\alpha(fg)\|_{L_x^pL_T^q} \lesssim \|f\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}}\|D_x^\alpha g\|_{L_x^{p_2}L_T^{q_2}} + \|g\|_{L_x^{\tilde{p}_1}L_T^{\tilde{q}_1}}\|D_x^\alpha f\|_{L_x^{\tilde{p}_2}L_T^{\tilde{q}_2}},$$

onde $1 < p_1, p_2, q_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2 < \infty$, $1 < q_1, \tilde{q}_1 \leqslant \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/\tilde{p}_1 + 1/\tilde{p}_2 = 1/p$ *e* $1/q_1 + 1/q_2 = 1/\tilde{q}_1 + 1/\tilde{q}_2 = 1/q$.
Além disso, os casos $(p_1, q_1) = (\infty, \infty)$ *e* $(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) = (\infty, \infty)$ *são permitidos.*

Demonstração. Ver a referência [13], Apêndice A.2.3. □

Lema 7. *Se* $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta < 1 - \alpha$ *e* $1 < p, q < \infty$, *então*

$$\|D_x^\beta([D_x^\alpha, f]g)\|_{L_x^pL_T^q} \lesssim \|g\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}}\|D_x^{\alpha+\beta}f\|_{L_x^{p_2}L_T^{q_2}},$$

onde $1 < p_1, q_1, p_2, q_2 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$ *e* $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$.
Além disso, se $\beta > 0$ *então* $q_1 = \infty$ *é permitido.*

Demonstração. Ver a referência [13], Apêndice A.2.4. □

Lema 8. *Se* $0 < \alpha < 1$ *e* $1 < p, q < \infty$ *então*

$$\|D_x^\alpha F(f)\|_{L_x^pL_T^q} \lesssim \|F'(f)\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}}\|D_x^\alpha f\|_{L_x^{p_2}L_T^{q_2}},$$

onde $1 < p_1, p_2, q_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$ *e* $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$.

Demonstração. Ver a referência [10], Teorema A.6. □

Lema 9. *Se* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *e* $1 < p, q < \infty$ *então*

$$\|D_x^\alpha G(f,g)\|_{L_x^pL_T^q} \lesssim \|D_x^{\gamma_1}f\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}}\|D_x^{\gamma_2}g\|_{L_x^{p_2}L_T^{q_2}},$$

onde $0 \leqslant \gamma_1, \gamma_2 \leqslant 1$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + 1$, $1 < p_1, q_1, p_2, q_2 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$ *e* $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$.

Demonstração. Ver o Apêndice A.2.5 de [13]. □

Teorema 12. *Seja* $\alpha \in (0,1), \alpha_1, \alpha_2 \in [0,\alpha]$ *com* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. *Seja* $p_1, p_2, q_1, q_2 \in (1,\infty)$ *com* $1 = 1/p_1 + 1/p_2$ *e* $1/2 = 1/q_1 + 1/q_2$. *Então,*

$$\|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L_x^1L_T^2} \lesssim c\|D_x^{\alpha_1}f\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}}\|D_x^{\alpha_2}g\|_{L_x^{p_2}L_T^{q_2}}. \tag{2.18}$$

Demonstração. Ver o Teorema A.13 de [10]. □

2.5 Os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$

Nesta seção iremos fazer uma breve introdução dos espaços de Sobolev clássicos $H^s(\mathbb{R})$. Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ medem a diferenciabilidade de funções em L^2 e são ferramentas fundamentais no estudo de equações diferenciais parciais de tipo dipersivas.

Definição 14. *Seja* $s \in \mathbb{R}$, *definimos o espaço de Sobolev de ordem* s, *denotado por* $H^s(\mathbb{R})$, *como*

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in S'(\mathbb{R}) : J^s f(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}, \tag{2.19}$$

com a norma $\| \,.\, \|_{H^s}$ *definida como*

$$\|f\|_{H^s} = \|J^s f\|_{L^2}. \tag{2.20}$$

Proposição 3. *Da definição de espaços de Sobolev deduzimos as seguintes propriedades:*

1. *Se* $0 \leqslant s < s'$, *então* $H^{s'}(\mathbb{R}) \subsetneq H^s(\mathbb{R})$.

2. $H^s(\mathbb{R})$ *é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno* $\left(<,>_{H^s} \right)$ *definido como segue:*

   Se $f, g \in H^s(\mathbb{R})$, *então* $< f, g >_{H^s} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} J^s f(\xi)\overline{J^s g(\xi)}d\xi.$

   Vemos que, via transformada de Fourier, $H^s(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$.

3. *Para todo* $s \in \mathbb{R}$, *o espaço de Schwartz,* $S(\mathbb{R})$, *é denso em* $H^s(\mathbb{R})$.

4. *Se* $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, *com* $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, *então*

$$\|f\|_{H^s} \leqslant \|f\|^{\theta}_{H^{s_1}} \|f\|^{1-\theta}_{H^{s_2}}.$$

Demonstração. Ver a Proposição 3.6 de [12]. □

Para compreendermos a relação entre os espaços $H^s(\mathbb{R})$ e a diferenciabilidade das funções em $L^2(\mathbb{R})$, definimos:

Definição 15. *Uma função* f *é diferenciável em* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *com respeito a k-ésima variável se existir* $g \in L^2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+he_k) - f(x)}{h} - g(x) \right|^2 dx \to 0 \quad \textit{quando} \quad h \to 0,$$

onde e_k *tem a k-ésima coordenada igual a 1 e as demais iguais a zero.*

Com esta definição podemos dar uma descrição de $H^k(\mathbb{R})$ sem usarmos a transformada de Fourier, sempre que $k \in \mathbb{Z}^+$.

Teorema 13. *Se* k *é um inteiro positivo, então* $H^k(\mathbb{R})$ *coincide com o espaço das funções* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *cujas derivadas (no sentido das distribuições)* $\partial_x^\alpha f$ *pertencem a* $L^2(\mathbb{R})$ *para cada* $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ *com* $|\alpha| \leqslant k$.

Neste caso as normas $||f||_{H^k}$ *e* $\sum_{|\alpha|\leqslant k} ||\partial_x^\alpha f||_{L^2}$ *são equivalentes.*

Demonstração. Ver o Teorema 3.10 de [12]. □

Lema 10. *Seja* $f \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geqslant 0$ *com norma*

$$||f||_{H^s} = \Big(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Então temos que

$$||f||_{H^s} \simeq ||f||_{L^2} + ||D_x^s f||_{L^2}. \tag{2.21}$$

Demonstração. Primeiramente temos que

$$1+|\xi|^{2s} = (1)^s + (|\xi|^2)^s \leqslant (1+|\xi|^2)^s + (1+|\xi|^2)^s = 2(1+|\xi|^2)^s. \tag{2.22}$$

Agora, temos

$$\begin{aligned}
||f||_{H^s} &= \Big(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \Big(\int_{|\xi|\leqslant 1} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{|\xi|>1} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \Big(\int_{|\xi|\leqslant 1} 2^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{|\xi|>1} 2^s |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2^{s/2}\Big(||f||_{L^2} + ||D_x^s f||_{L^2}\Big).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

De (2.22), segue que

$$\begin{aligned}
||f||_{L^2} + ||D_x^s f||_{L^2} &\leqslant 2\Big(||f||_{L^2}^2 + ||D_x^s f||_{L^2}^2\Big)^{1/2} \\
&= 2\Big(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^{2s}) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \\
&\leqslant 2\Big(\int_{\mathbb{R}} 2(1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} = 2^{3/2} ||f||_{H^s}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

De (2.23) e (2.24), segue (2.21). □

Apresentaremos agora os teoremas de imersão de Sobolev e a importante propriedade de álgebra de Banach para H^s com s suficientemente grande.

Teorema 14. *Se* $s > 1/2 + k$, *então* $H^s(\mathbb{R})$ *é continuamente imerso em* $C^k_\infty(\mathbb{R})$ *o espaço das funções com k derivadas contínuas e que se anulam no infinito. Em outras palavras, se* $f \in H^s(\mathbb{R})$, *então a menos de uma possivel modificação de* f *a um conjunto de medida nula,* $f \in C^k_\infty(\mathbb{R})$ *e*

$$\|f\|_{C^k} \leqslant C_s \|f\|_{H^s}. \tag{2.25}$$

Demonstração. Ver o Teorema 3.11 de [12]. □

Teorema 15. *Se* $0 < s < 1/2$, *então* $H^s(\mathbb{R})$ *é continuamente imerso em* $L^p(\mathbb{R})$ *com* $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. *Além disso, para* $f \in H^s(\mathbb{R})$,

$$\|f\|_{L^p} \leqslant C_{n,s} \|D^s f\|_{L^2} \leqslant C \|f\|_{H^s}, \tag{2.26}$$

onde $D^s f = (|\xi|^s \widehat{f})^\vee$.

Demonstração. Ver o Teorema 3.13 de [12]. □

Teorema 16. *Se* $s > 1/2$, *então* $H^s(\mathbb{R})$ *é uma álgebra com respeito ao produto de funções. Ou seja, se* $f, g \in H^s(\mathbb{R})$, *então* $fg \in H^s(\mathbb{R})$ *com*

$$\|fg\|_{H^s} \leqslant C_s \|f\|_{H^s} \|g\|_{H^s}. \tag{2.27}$$

Demonstração. Ver o Teorema 3.14 de [12]. □

Finalizamos essa seção apresentando a seguinte importante propriedade da transformada de Hilbert em $H^s(\mathbb{R})$:

Proposição 4. $\mathcal{H}$ *é operador unitário em* $H^s(\mathbb{R})$, *ou seja,*

$$\|\mathcal{H} f\|_{H^s} = \|f\|_{H^s}. \tag{2.28}$$

Demonstração. De fato,

$$\|\mathcal{H} f\|_{H^s} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} i\,\mathrm{sgn}(\xi) \widehat{f}\|_{L^2} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{H^s}.$$ □

Capítulo 3

Estimativas Associadas ao Fluxo da Equação de Benjamin-Ono Linear

Nosso objetivo é obter algumas estimativas nos espaços $L_x^p L_t^q$ e $L_t^q L_x^p$ para derivadas fracionárias dos operadores lineares V e R, respectivamente, definidos por

$$\begin{aligned} V(t)\varphi &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\xi + t\xi|\xi|)} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi, \\ R(g) &= \int_0^t V(t-t')g(t')dt'. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Considere o problema de valor inicial com $f(x,t) \equiv 0$:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

Aplicando sobre (3.2) a transformada de Fourier, obtemos:

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u} + \widehat{\mathcal{H}\partial_x^2 u} = 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi). \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{gathered} \partial_t \widehat{u} - i\,\mathrm{sgn}(\xi)\xi^2 \widehat{u}(\xi,0) = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial_t \widehat{u}(\xi,t)}{\widehat{u}(\xi,0)} = i\,\mathrm{sgn}(\xi)\xi^2 \\ \Rightarrow u(\xi,t) = \widehat{u}(\xi,0) * \left(e^{-i\,\mathrm{sgn}(\xi)\xi^2 t}\right)^{\vee}. \end{gathered}$$

Logo,

$$V(t)(\cdot) = \left(e^{-i\,\mathrm{sgn}(\xi)\xi^2 t}\right)^{\vee} * (\cdot).$$

Portanto, $u(x,t)$ é dado por:

$$u(x,t) = V(t)u_0(x)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow u(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{-isgn(\xi)\xi^2 t}\widehat{u_0}(\xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\xi + t|\xi|\xi)}\widehat{u_0}(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

No caso não-homogêneo:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u = f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

Aplicando a transformada de Fourier em (3.3), obtemos:

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u} + isgn(\xi)\xi^2 \widehat{u} = \widehat{f}(x,t) \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi). \end{cases}$$

Usando fator integrante, temos

$$e^{it\xi|\xi|}\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}(\xi,0) + \int_o^t e^{it'|\xi|\xi}\widehat{f}(\xi,t)dt'. \tag{3.4}$$

Reorganizando (3.4) e aplicando a transformada inversa, temos que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= V(t)u_0(x) + \int_0^t V(t-t')f(x,t)dt' \\ &= V(t)u_0 + R(f), \end{aligned}$$

onde

$$R(f) = \int_0^t V(t-t')f(x,t')dt'.$$

Lema 11. $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|D_x^{1/2}V(t)\varphi\|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}, \tag{3.5}$$

$$\|V(t)\varphi\|_{L_x^4 L_t^\infty} \lesssim \|D_x^{1/4}\varphi\|_{L^2}. \tag{3.6}$$

Além disso, para algum $0 < T < 1$,

$$\|V(t)Q_j\varphi\|_{L_x^2 L_t^\infty} \lesssim 2^{j/2}\|Q_j\varphi\|_{L^2}, \quad \forall j \geqslant -2, \tag{3.7}$$

$$\|V(t)P_0\varphi\|_{L_x^2 L_t^\infty} \lesssim \|P_0\varphi\|_{L^2}, \tag{3.8}$$

onde Q_j *e* P_0 *são dados como em* (2.13).

Demonstração. Vamos provar apenas (3.5). Para demais itens, consulte as referências em [13].

$$\begin{aligned}
D_x^{1/2}V(t)\varphi &= (|\xi|^{1/2}e^{-i|\xi|\xi t}\widehat{\varphi}(\xi))^{\vee} \\
&= (|\xi|^{1/2}e^{-i|\xi|\xi t}\widehat{\varphi_+}(\xi))^{\vee} + (|\xi|^{1/2}e^{-i|\xi|\xi t}\widehat{\varphi_-}(\xi))^{\vee}.
\end{aligned}$$

É suficiente mostrar (3.5) para φ_+. Usando a notação $|\xi|\xi = r \Rightarrow \begin{cases} r = \xi^2, \text{se } \ \xi \geqslant 0 \\ r = -\xi^2, \text{se } \ \xi < 0 \end{cases}$ como

$$D_x^{1/2}V(t)\varphi_+ = (|\xi|^{1/2}e^{-i|\xi|\xi t}\widehat{\varphi_+}(\xi))^{\vee} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}|\xi|^{1/2}e^{-it|\xi|\xi}\widehat{\varphi_+}(\xi)d\xi,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |D_x^{1/2}V(t)\varphi_+(x)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^{1/2}e^{ix\xi}e^{-i|\xi|\xi t}\widehat{\varphi_+}(\xi)d\xi \right|^2 dt \\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{0}^{+\infty} r^{1/4}e^{ix\sqrt{r}}e^{-itr}\widehat{\varphi_+}(\sqrt{r})\frac{dr}{r^{1/2}} \right|^2 dt \\
&+ C\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{0} (-r)^{1/4}e^{ix\sqrt{-r}}e^{itr}\widehat{\varphi_+}(-\sqrt{r})\frac{dr}{\sqrt{-r}} \right|^2 dt \\
&= C\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{0}^{+\infty} r^{1/4}e^{ix\sqrt{r}}e^{-itr}\widehat{\varphi_+}(\sqrt{r})\frac{dr}{r^{1/2}} \right|^2 dt \\
&= C\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itr}e^{ix\sqrt{r}}(\widehat{\varphi_+})_+(\sqrt{r})\frac{1}{r^{1/4}}dr \right|^2 dt \\
&= C\int_{0}^{+\infty} \left| e^{ix\sqrt{r}}(\widehat{\varphi_+})_+(\sqrt{r})\frac{1}{r^{1/4}} \right|^2 dr \\
&= C\int_{0}^{+\infty} |(\widehat{\varphi_+})_+(\sqrt{r})|^2\frac{1}{r^{1/2}}dr \\
&= C\int_{-\infty}^{+\infty} |(\widehat{\varphi_+}(\xi))_+|^2 d\xi \\
&= C\,\|(\widehat{\varphi_+})_+\|_{L^2}^2 = C\|\widehat{\varphi_+}\|_{L^2}^2 = \|\varphi_+\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|D_x^{1/2}V(t)\varphi\|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

□

Definição 16. *Seja* $(\alpha, p, q) \in \mathbb{R} \times [2, \infty]^2$. *O terno* (α, p, q) *é*

(i) 1-admissível quando $(\alpha, p, q) = (1/2, \infty, 2)$ *ou*

$$4 \leqslant p < \infty, \quad 2 \leqslant q \leqslant \infty, \quad \frac{2}{p} + \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{2}{q} - \frac{1}{2}; \tag{3.9}$$

(ii) 2-admissível se, e somente se,

$$2 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{p} + \frac{3}{q} - 1. \tag{3.10}$$

Se, além disso, $4 \leqslant p < \infty$, *diremos que* (α, p, q) *é 2*-admissível.*

Proposição 5. *Seja* $0 < T < 1$ *e seja o terno* (α, p, q) *sendo fixo.*

(i) Se (α, p, q) *é 1-admissível, então*

$$\|D_x^\alpha V(t)\varphi\|_{L_x^p L_t^q} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{3.11}$$

(ii) Se (α, p, q) *é 2-admissível, então*

$$\|J_x^\alpha V(t)\varphi\|_{L_x^p L_t^q} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{3.12}$$

(iii) Se (α, p, q) *é 2*-admissível, então*

$$\|D_x^\alpha V(t)\varphi\|_{L_x^p L_t^q} \lesssim T^{1/4-1/2q}\|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{3.13}$$

Demonstração. Observe primeiro o caso $(1/2, \infty, 2)$ é coberto pelo Lema 11. Portanto, podemos supor que $p < \infty$.

(i) Segue-se de [10], para $z \in \mathbb{C}$ com $0 \leqslant \mathrm{Re} z \leqslant 1$, consideramos a família analítica de operadores $T_z : \varphi \mapsto D_x^{-z/4} D_x^{(1-z)/2} V(t)\varphi$. Do Lema 11, para todo $y \in \mathbb{R}$ e para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|T_{iy}\varphi\|_{L_x^\infty L_t^2} &\lesssim \|\varphi\|_{L^2}, \\ \|T_{1+iy}\varphi\|_{L_x^4 L_t^\infty} &\lesssim \|\varphi\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|T_{1+iy}\varphi\|_{L_x^4 L_t^\infty} &= \|D_x^{-3iy/4} D_x^{-1/4} V(t)\varphi\|_{L_x^4 L_x^\infty} \\ &= \|D_x^{-1/4} V(t)\varphi\|_{L_x^4 L_t^\infty} = \|V(t) D_x^{-1/4}\varphi\|_{L_x^4 L_t^\infty} \\ &\lesssim \|D_x^{1/4} D_x^{-1/4}\varphi\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos que $\|T_{iy}\varphi\|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}$.

Agora, de acordo com (3.14), para todo $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, pelo teorema de interpolação analítica de Stein(Teorema 11) tem-se

$$\|T_{1-\theta}\varphi\|_{L_x^{4/1-\theta} L_t^{2/\theta}} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}$$

e

$$T_{1-\theta}\varphi = D_x^{(\theta-1)/4} D_x^{\theta/2} V(t)\varphi = D_x^{(6\theta-2)/8} V(t)\varphi = D_x^{(3\theta-1)/4} V(t)\varphi.$$

Portanto temos

$$\|D_x^{(3\theta-1)/4} V(t)\varphi\|_{L_x^{4/(1-\theta)} L_t^{2/\theta}} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}.$$

Usando o teorema de imersão de Sobolev, para todo $0 \leqslant \alpha \leqslant (1-\theta)/4$,

$$\|D_x^{-\alpha+(3\theta-1)/4} V(t)\varphi\|_{L_x^p L_t^q} \lesssim \|\varphi\|_{L^2},$$

onde $4 \leqslant p < \infty,\ 2 \leqslant q \leqslant \infty$ e

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{4} - \alpha, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{2},$$

isso implica então que

$$\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{p} - \frac{1}{2q}, \quad \theta = \frac{2}{q}.$$

Isto prova a primeira afirmação, já que

$$\frac{3\theta-1}{4} - \alpha = \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{2},$$

e $0 \leqslant \alpha < (1-\theta)/4 \Leftrightarrow (p < +\infty$ e $2/p + 1/q \leqslant 1/2)$.

(ii) Ver a referência [13], Proposição 2.3, item (ii).

(iii) De (i) com $(\alpha, p, q) = (0, 6, 6)$, temos que

$$\|V(t)\varphi\|_{L_{t,x}^6} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}, \tag{3.15}$$

que é uma estimativa bem conhecida de Strichartz para $V(\cdot)$. Por outro lado, uma vez que $V(\cdot)$ é unitário em $L^2(\mathbb{R})$, temos pela desigualdade de Hölder em relação ao tempo segue que

$$\|V(t)\varphi\|_{L_{T,x}^2} \lesssim T^{1/2}\|\varphi\|_{L^2}. \tag{3.16}$$

De fato,

$$\|V(t)\varphi\|_{L_{T,x}^2} = \left(\int_0^T \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|V(t)\varphi\|^2 dx\right) dt\right)^{1/2} \leqslant \sup \|V(t)\varphi\|_{L^2} \left(\int_0^T dt\right)^{1/2}$$
$$= T^{1/2}\|\varphi\|_{L^2}.$$

De (3.15) e (3.16), do teorema de interpolação de Riesz-Thorin no caso em que $t = 1/4$, obtemos

$$\|V(t)\varphi\|_{L_{T,x}^4} \lesssim T^{1/8}\|\varphi\|_{L^2}. \tag{3.17}$$

Consideramos agora a família de operadores $T_z : \varphi \mapsto D_x^{z/2}V(t)\varphi$. De (3.17) e (3.5), se tem, respectivamente,

$$\|V(t)\varphi\|_{L^4_{T,x}} = \|T_{iy}\varphi\|_{L^4_{T,x}} \lesssim T^{1/8}\|\varphi\|_{L^2},$$

$$\|D_x^{1/2}V(t)\varphi\|_{L^\infty_x L^2_t} = \|T_{1+iy}\varphi\|_{L^\infty_x L^2_t} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}.$$

Então, pelo teorema de interpolação de Stein (Teorema 11), para todo $0 \leqslant \theta \leqslant 1$,

$$\|T_\theta \varphi\|_{L_x^{4/(1-\theta)} L_t^{4/(1+\theta)}} \lesssim T^{(1-\theta)/8}\|\varphi\|_{L^2},$$

isto é,

$$\|D_x^{\theta/2}V(t)\varphi\|_{L_x^{4/(1-\theta)} L_t^{4/(1+\theta)}} \lesssim T^{(1-\theta)/8}\|\varphi\|_{L^2}. \tag{3.18}$$

Assim, pelo teorema de imersão de Sobolev, para todo $0 \leqslant \alpha < (1-\theta)/4$,

$$\|D_x^{-\alpha+\theta/2}V(t)\varphi\|_{L^p_x L^q_t} \lesssim T^{(1-\theta)/8}\|\varphi\|_{L^2}, \tag{3.19}$$

onde $4 \leqslant p < \infty,\ 2 \leqslant q \leqslant 4$ e

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{4} - \alpha, \quad \frac{1}{q} = \frac{4}{1+\theta},$$

isso implica então que

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \quad \theta = \frac{4}{q} - 1.$$

Isto prova a terceira afirmação, pois

$$\frac{\theta}{2} - \alpha = \frac{1}{p} + \frac{3}{q} - 1,$$

e $0 \leqslant \alpha < (1-\theta)/4 \Leftrightarrow (p < +\infty$ e $1/p + 1/q \leqslant 1/2)$.

□

Proposição 6. *Seja* $0 < T \leqslant 1$ *e* $2 \leqslant p \leqslant 6$ *dados. Então*

$$\|V(t)\varphi\|_{L^p_{T,x}} \lesssim T^{(1/4)(6/p-1)}\|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{3.20}$$

Demonstração. Aplicando o teorema de Riesz-Thorin em

$$\|V(t)\varphi\|_{L^6_{T,x}} \lesssim \|\varphi\|_{L^2},$$

$$\|V(t)\varphi\|_{L^2_{T,x}} \lesssim T^{1/2}\|\varphi\|_{L^2},$$

tem-se

$$\|V(t)\varphi\|_{L^p_{T,x}} \lesssim T^{(1/2)t}\|\varphi\|_{L^2},$$

onde,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{6} + \frac{t}{2},$$

isto é,

$$t = \frac{6-p}{2p}.$$

Logo

$$\|V(t)\varphi\|_{L^p_{T,x}} \lesssim T^{(1/4)(6/p-1)}\|\varphi\|_{L^2}.$$

□

Proposição 7. *Sejam* $0 < T \leqslant 1$ *e* $2 \leqslant p < 4$ *dados. Então*

$$\|J^{-(1/p+)}V(t)\varphi\|_{L^p_x L^\infty_T} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{3.21}$$

Demonstração. Ver a referência [13], Proposição 2.5. □

Proposição 8. *Para todo* $0 < T < 1$ *e* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *tem-se que*

$$\|J_x^{-1/4}V(t)\varphi\|_{L^2_x L^4_T} \lesssim T^{1/4}\|\varphi\|_{L^2}. \tag{3.22}$$

Demonstração. Ver a referência [13], Proposição 2.6. □

Proposição 9. *Sejam* $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}_+$, *e* $1 \leqslant p_1, q_1, p_2, q_2 \leqslant \infty$ *tais que para todo* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|D_x^{\alpha_1}V(t)\varphi\|_{L^{p_1}_x L^{q_1}_T} \lesssim T^{\nu_1}\|\varphi\|_{L^2}, \tag{3.23}$$

$$\|D_x^{\alpha_2}V(t)\varphi\|_{L^{p_2}_x L^{q_2}_T} \lesssim T^{\nu_2}\|\varphi\|_{L^2}. \tag{3.24}$$

Então para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *temos,*

$$\left\|D_x^{\alpha_2}\int_0^t V(t-t')f(t')dt'\right\|_{L^\infty_T L^2_x} \lesssim T^{\nu_2}\|f\|_{L^{\bar{p}_2}_x L^{\bar{q}_2}_T}, \tag{3.25}$$

$$\left\|D_x^{\alpha_1+\alpha_2}\int_0^t V(t-t')f(t')dt'\right\|_{L^{p_1}_x L^{q_1}_T} \lesssim T^{\nu_1+\nu_2}\|f\|_{L^{\bar{p}_2}_x L^{\bar{q}_2}_T} \tag{3.26}$$

desde que

$$\min(p_1, q_1) > \max(\bar{p}_2, \bar{q}_2) \quad \textit{ou} \quad (q_1 = \infty \quad e \quad \bar{p}_2, \bar{q}_2 < \infty),$$

onde $\bar{p}_2$ *e* $\bar{q}_2$ *são definidos por* $1/\bar{p}_2 = 1 - 1/p_2$ *e* $1/\bar{q}_2 = 1 - 1/q_2$.

Demonstração. Em particular, como $(1/2, \infty, 2)$ é 1-admissível, vale

$$\|D_x^{1/2}V(t)\varphi\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}.$$

Então (pelo teorema de Hahn-Banach, teorema de Representação de Riesz, teorema de Fubini, teorema de Parseval e o fato de $V(\cdot)$ ser unitário)

$$\begin{aligned}
\left\|D_x^{\alpha_2}\int_0^t V(-t)f(x,t')dt'\right\|_{L^2} &= \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t D_x^{\alpha_2}V(-t)f(x,t')dt'\right)g(x)dx\right| \\
&= \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\left|\int_0^t\left(\int_{-\infty}^{+\infty} D_x^{\alpha_2}V(-t')f(x,t')g(x)dx\right)dt'\right| \\
&= \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\left|\int_0^t\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^{\alpha_2}e^{it'|\xi|\xi}\widehat{f}(\xi,t')\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi\right)dt'\right| \\
&= \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\left|\int_0^t\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t')D_x^{\alpha_2}V(t')g(x)dx\right)dt'\right| \\
&= \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t f(x,t')D_x^{\alpha_2}V(t')g(x)dx\right)dt'\right| \\
&\leqslant \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t |D_x^{\alpha_2}V(t')g(x)|\,f(x,t')|dt'dx \\
&\leqslant \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t |D_x^{\alpha_2}V(t')g(x)|^{q_2}\,dt'\right)^{\frac{1}{q_2}}\left(\int_0^t |f(x,t')|^{\bar{q}_2}dt'\right)^{\frac{1}{\bar{q}_2}}dx.
\end{aligned}$$

Aplicando Hölder na última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|D_x^{\alpha_2}\int_0^t V(-t)f(x,t')dt'\right\|_{L^2} &= \sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\|D_x^{\alpha_2}V(t)g\|_{L_x^{p_2}L_T^{q_2}}\|f\|_{L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}} \\
&\leqslant T^{\nu_2}\sup_{\|g\|_{L^2}\leqslant 1}\|g\|_{L^2}\|f\|_{L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}} \\
&\leqslant T^{\nu_2}\|f\|_{L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}}.
\end{aligned}$$

Tomando a norma em L_T^∞, segue o resultado.

Agora provaremos (3.26). De (3.23) e (3.24) obtemos

$$\left\|\int_{-T}^{T} D_x^{\alpha_i}V(-t')h(t')dt'\right\|_{L^2} \lesssim T^{\nu_i}\|h\|_{L_x^{\bar{p}_i}L_T^{\bar{q}_i}}, \quad \forall h\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2). \tag{3.27}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_{-T}^{T} D_x^{\alpha_i} V(-t') h(t') dt' \right\|_{L^2} &= \sup_{\|\varphi\|_{L^2} \leqslant 1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T}^{T} D_x^{\alpha_i} V(-t') h(x,t') dt' \right) \varphi(x) dx \right| \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L^2} \leqslant 1} \left| \int_{-T}^{T} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} D_x^{\alpha_i} V(-t') h(x,t') \varphi(x) dx \right) dt' \right| \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L^2} \leqslant 1} \left| \int_{-T}^{T} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^{\alpha_i} e^{it|\xi|\xi} \widehat{h}(\xi,t') \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} d\xi \right) dt' \right| \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L^2} \leqslant 1} \left| \int_{-T}^{T} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t') D_x^{\alpha_i} V(-t') \varphi(x) dx \right) dt' \right| \\
&\leqslant \sup_{\|\varphi\|_{L^2} \leqslant 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T}^{T} |h(x,t)^{\bar{q}_i} dt \right)^{\frac{1}{\bar{q}_i}} \left(\int_{-T}^{T} |D_x^{\alpha_i} V(t) \varphi|^{q_i} dt \right)^{\frac{1}{q_i}} dx \\
&\leqslant \|h\|_{L_x^{\bar{p}_i} L_T^{\bar{q}_i}} \sup_{\|\varphi\|_{L^2} \leqslant 1} \|D_x^{\alpha_i} V(t) \varphi\|_{L_x^{\bar{p}_i} L_T^{\bar{q}_i}} \\
&\leqslant T^{\nu_i} \|h\|_{L_x^{\bar{p}_i} L_T^{\bar{q}_i}} \sup_{\|\varphi\|_{L^2} \leqslant 1} \|\varphi\|_{L^2} \leqslant T^{\nu_i} \|h\|_{L_x^{\bar{p}_i} L_T^{\bar{q}_i}}.
\end{aligned}
$$

onde $1/\bar{p}_2 = 1 - 1/p_2$ e $1/\bar{q}_2 = 1 - 1/q_2$.

Agora, utilizando o argumento de P. Tomas, para toda $f \in L_x^{\bar{p}_2} L_T^{\bar{q}_2}$ e $g \in L_x^{\bar{p}_1} L_T^{\bar{q}_1}$ com $\|g\|_{L_x^{\bar{p}_1} L_T^{\bar{q}_1}} \leqslant 1$ temos

$$
\begin{aligned}
&\left| \left\langle \int_{-T}^{+T} D_x^{\alpha_1+\alpha_2} V(t-t') f(t',x) dt', g(t,x) \right\rangle_{L^2_{T,x}} \right| = \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{+T} D_x^{\alpha_1} V(-t') f(t',x) dt' \right) \left(\int_{-T}^{+T} \overline{D_x^{\alpha_2} V(-t) g(t,x)} dt \right) dx \right| \\
&\lesssim \left\| \int_{-T}^{+T} D_x^{\alpha_1} V(-t') f(t',x) dt' \right\|_{L^2_x} \left\| \int_{-T}^{+T} \overline{D_x^{\alpha_2} V(-t) g(t,x) dt} \right\|_{L^2_x} \\
&\lesssim T^{\nu_1+\nu_2} \|f\|_{L_x^{\bar{p}_2} L_T^{\bar{q}_2}} \|g\|_{L_x^{\bar{p}_1} L_T^{\bar{q}_1}}.
\end{aligned}
$$

Isto mostra que

$$
\left\| \int_{\mathbb{R}} D_x^{\alpha_1+\alpha_2} V(t-t') f(t',x) dt' \right\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \lesssim T^{\nu_1+\nu_2} \|f\|_{L_x^{\bar{p}_2} L_T^{\bar{q}_2}}.
$$

Para obtermos (3.26) usamos o Lema 1 no caso em que $\min(p_1, q_1) > \max(\bar{p}_2, \bar{q}_2)$, no caso em que $q_1 = \infty$ e $\bar{p}_2, \bar{q}_2 < \infty$ utilizamos o Lema 2, onde

$$
Tf(t) = \int V(t-t') f(t') dt'.
$$

□

Proposição 10. $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\left\| D_x \int_0^t V(t-t')f(t')dt' \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \|f\|_{L_x^1 L_t^2}, \tag{3.28}$$

$$\left\| D_x^{1/2} \int_0^t V(t-t')f(t')dt' \right\|_{L_t^\infty L_x^2} \lesssim \|f\|_{L_x^1 L_t^2}. \tag{3.29}$$

Demonstração. Ver Proposição 2.8 de [13]. □

Capítulo 4

Demonstração do Teorema 1

4.1 Espaço de Resolução X_T^s

Seja $k \geqslant 2$ fixo. Sejam $s \geqslant \frac{1}{2}$ e $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$. Vamos considerar uma função $u \in H^\infty(\mathbb{R})$ solução do PVI (1.1) no intervalo de tempo $[0, T]$, garantida por exemplo no artigo [1], com $0 < T < 1$. Sabemos que u satisfaz a equação integral

$$u(t) = V(t)u_0 \pm \int_0^t V(t-t')u^k(t')\partial_x u(t')dt', \tag{4.1}$$

para todo $t \in [0, T]$. Definimos o espaço de resolução X_T^s por

$$X_T^s = \{v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R})) : \|v\|_{X_T^s} < \infty\},$$

onde

(i) para $s = 1/2$,

$$\begin{aligned} \|v\|_{X_T^s} = {} & \|v\|_{L_T^\infty H^{1/2}} + \|J_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|P_0 v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ & + \|J_x^{1/2} v\|_{L_{T,x}^6} + \|J_x^{2/5} v\|_{L_x^{10/3} L_T^5} + \|J_x^{1/5} v\|_{L_x^{5/2} L_T^{10}} \\ & + T^{-1/10}\|J_x^{3/5} v\|_{L_x^5 L_T^{10/3}} + T^{-1/8}\|J_x^{1/2} v\|_{L_{T,x}^4} \\ & + \|J_x^{9/10} v\|_{L_x^{20} L_T^{20/9}} + \|v\|_{L_x^{8/3} L_T^\infty} + \|v\|_{L_x^{40k^2} L_T^\infty}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

(ii) para $s > 1/2$,

$$\begin{aligned} \|v\|_{X_T^s} = {} & \|v\|_{X_T^{1/2}} + \|v\|_{L_T^\infty H^s} + \|J_x^{s+1/2} v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ & + \|J_x^s v\|_{L_{T,x}^6} + \|J^{s-1/10} u\|_{L_x^{20} L_T^{40/7}} + \|J_x^{s-1/10} v\|_{L_x^{10/3} L_T^5} \\ & + T^{-1/10}\|J_x^{s+1/10} v\|_{L_x^5 L_T^{10/3}} + T^{-1/8}\|J_x^s v\|_{L_{T,x}^4} \\ & + \|J_x^{1+3\epsilon/2} v\|_{L_x^{6/\epsilon} L_T^{6/(3-2\epsilon)}}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $\epsilon = \min((s-1/2)/2, 1/4)$ e escolhido após as estimativas (4.32) e (4.34) de modo que $(1/2-\epsilon/2, 6/\epsilon, 6/(3-2\epsilon))$ seja admissível.

(iii) Finalmente, para $s \geqslant 3/4$, adicionamos $T^{-1/4}\|D_x^{1/2}v\|_{L_x^2L_T^4}$ na definição de $\|v\|_{X_T^s}$.

Lema 12. *Sejam* $s \geqslant 1/2$ *e* $0 < T < 1$. *Então*

$$\|V(t)\varphi\|_{X_T^s} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}, \quad \forall \varphi \in H^s(\mathbb{R}). \tag{4.4}$$

Demonstração. Caso s=1/2. Primeiro note que $V(\cdot)$ é unitário em $H^s(\mathbb{R})$. Por outro lado, pela Proposição 7 e Imersão de Sobolev

$$\begin{aligned}\|V(t)\varphi\|_{L_x^rL_T^\infty} &= \|J^{-1/r}(J^{1/r}V(t)\varphi)\|_{L_x^rL_T^\infty} = \|J^{-1/r}V(t)(J^{1/r}\varphi)\|_{L_x^rL_T^\infty}\\ &\lesssim \|J^{1/r}\varphi\|_{L^2} = \|\varphi\|_{H^{1/r}} \lesssim \|\varphi\|_{H^{1/2}}, \quad \forall\, 2 < r < \infty.\end{aligned}$$

Usando (3.8), imersão de Sobolev e desigualdade de Hölder com $2 \leqslant p, q < \infty$, obtemos

$$\|P_0V(t)\varphi\|_{L_x^pL_T^q} \lesssim T^{1/q}\|\varphi\|_{L^2} \lesssim \|\varphi\|_{H^{1/2}}. \tag{4.5}$$

Além disso, usando que $(1/2-\epsilon/2, 6/\epsilon, 6/(3-2\epsilon))$ é 1-admissível, obtemos

$$\|D_x^{1+3\epsilon/2}V(t)\varphi\|_{L_x^{6/\epsilon}L_T^{6/(3-2\epsilon)}} \lesssim \|\varphi\|_{H^{1/2+2\epsilon}}. \tag{4.6}$$

Para os casos $1/2 \leqslant s < 3/4$, é suficiente usar que $(1/2, \infty, 2), (0, 6, 6), (-1/10, 20, 40/7)$ são 1-admissíveis, $(-1/10, 10/3, 5)$ e $(-3/10, 5/2, 10)$ são 2-admissíveis e que $(1/10, 5, 10/3)$, $(0, 4, 4)$ e $(2/5, 20, 20/9)$ são 2^*-admissíveis.
Finalmente, o caso $s \geqslant 3/4$ o termo complementar pode ser controlado pela Proposição 8. □

4.2 Uma estimativa sobre as soluções

Proposição 11. *Seja* $u \in C([0,T]; H^\infty)$ *solução de* (1.1) *associada com dado inicial* $u_0 \in H^\infty$. *Então valem as seguintes estimativas:*

(1) Se $k = 2, 3$ *e* $s > 1/2$, *então*

$$\begin{aligned}\|u\|_{X_T^s} &\lesssim \|u_0\|_{H^s} + T^{1/10}p_k\left(\|u\|_{X_T^{1/2+}}\right)\left(1 + \|u\|_{X_T^s}\right)\\ &+ \left(\|u_0\|_{H^{1/2+}} + T^{\nu(k)}\|u\|_{X_T^{1/2+}}^k\right)\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

(2) Se $k \geqslant 4$ *e* $s \geqslant 1/2$*, então*

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_T^s} &\lesssim \|u_0\|_{H^s} + T^{1/10} p_k\left(\|u\|_{X_T^{1/2}}\right)\left(1+\|u\|_{X_T^s}\right) \\ &\quad + \left(\|u_0\|_{H^{1/2}} + T^{\nu(k)}\|u\|^k_{X_T^{1/2}}\right)\|D_x^{s+1/2} w\|_{L_x^\infty L_T^2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde w *será definido posteriormente,* p_k *são funções polinomiais positivas não decrescentes e* $\nu(k)$ *são números reais positivos.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em vários lemas técnicos. A parte linear de (4.1) foi estimada no Lema 12.

Para deduzirmos as estimativas sobre u, vamos ter que trabalhar com espaço $L_x^1 L_T^2$. Como P_+ não é operador contínuo nesse espaço (isto decorre do fato de a transformada de Hilbert não ser limitada em $L^1(\mathbb{R})$), introduzimos os multiplicadores de Fourier $\tilde{P}_+$ e $\tilde{P}_-$, respectivamente, definidos por

$$\widehat{\tilde{P}_+ u} = \chi_{\{\xi \geqslant 0\}}(1-p(\xi))\widehat{u}(\xi), \qquad \widehat{\tilde{P}_- u} = \chi_{\{\xi \leqslant 0\}}(1-p(\xi))\widehat{u}(\xi), \tag{4.9}$$

onde p é definido na Seção 2.1.

Sabemos que $\tilde{P}_+ u$ definido desta maneira é um operador contínuo em $L_x^p L_t^q$ para algum $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Além disso, como u é real, tem-se $\tilde{P}_- u = \overline{\tilde{P}_+ u}$. Por isso, para algum $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ e $\alpha \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \|D_x^\alpha u\|_{L_x^p L_T^q} &= \|D_x^\alpha (P_0 u + (1-P_0)u)\|_{L_x^p L_T^q} \\ &\leqslant \|D_x^\alpha P_0 u\|_{L_x^p L_T^q} + \|D_x^\alpha (1-P_0)u\|_{L_x^p L_T^q} \\ &\leqslant C_\alpha \|P_0 u\|_{L_x^p L_T^q} + \|D_x^\alpha \tilde{P}_+ u\|_{L_x^p L_T^q} + \|D_x^\alpha \tilde{P}_- u\|_{L_x^p L_T^q} \\ &= C_\alpha \|P_0 u\|_{L_x^p L_T^q} + \|D_x^\alpha \tilde{P}_+ u\|_{L_x^p L_T^q} + \|\overline{D_x^\alpha \tilde{P}_- u}\|_{L_x^p L_T^q} \\ &= C_\alpha \|P_0 u\|_{L_x^p L_T^q} + \|D_x^\alpha \tilde{P}_+ u\|_{L_x^p L_T^q} + \|D_x^\alpha \overline{\tilde{P}_- u}\|_{L_x^p L_T^q} \\ &= C_\alpha \|P_0 u\|_{L_x^p L_T^q} + \|D_x^\alpha \tilde{P}_+ u\|_{L_x^p L_T^q} + \|D_x^\alpha \tilde{P}_+ u\|_{L_x^p L_T^q} \\ &= C_\alpha \|P_0 u\|_{L_x^p L_T^q} + 2\|D_x^\alpha \tilde{P}_+ u\|_{L_x^p L_T^q}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Agora, temos que

$$\|P_0 u\|_{X_T^s} \lesssim \|P_0 V(t) u\|_{X_T^s} + \left\| \int_0^t V(t-t') P_0 \partial_x (u^{k+1}) dt' \right\|_{X_T^s}$$

sabemos do Lema 12 e da desigualdade de Bernstein que:

$$\|P_0 V(t) u\|_{X_T^s} \lesssim \|P_0 u\|_{H^s} \lesssim \|P_0 u\|_{L^2}.$$

Além disso, como $(0, 6, 6)$ é 1-admissível, segue do Lema 12 que:

$$\|P_0 V(t)u\|_{L^6_{x,T}} \lesssim \|P_0 u\|_{L^2}.$$

Daí, pela Proposição 9, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| P_0 \int_0^t V(t-t')\partial_x(u^{k+1})dt' \right\|_{X^s_T} &\lesssim \|P_0 \partial_x(u^{k+1})\|_{L_T^{6/5}L_x^{6/5}} \\
&\lesssim \|u^{k+1}\|_{L_T^{6/5}L_x^{6/5}} \\
&= T^{5/6}\|u^{k+1}\|_{L_T^{\infty}L_x^{6/5}} \\
&= T^{5/6}\|u\|^{k+1}_{L_T^{\infty}L_x^{6(k+1)/5}} \\
&\lesssim T^{5/6}\|u\|^{k+1}_{L_T^{\infty}H^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|P_0 u\|_{X^s_T} \lesssim \|u_0\|_{L^2} + T^{5/6}\|u\|^{k+1}_{L_T^{\infty}H_x^{1/2+}}. \tag{4.11}$$

Vamos decompor $u^k\partial_x u$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
u^k\partial_x u &= P_0(u^k\partial_x u) + \tilde{P}(u^k\partial_x u) \\
&= P_0(u^k\partial_x u) + \tilde{P}_+(u^k\partial_x u) + \tilde{P}_-(u^k\partial_x u).
\end{aligned}$$

No que segue, vamos estimar a não-linearidade $\tilde{P}_+(u^k\partial_x u)$, pois a não-linearidade $\tilde{P}_-(u^k\partial_x u)$ pode ser tratada de modo igual. Para prosseguir com as estimativas devemos introduzir a seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned}
&w = P_+(e^{-iF}u), \text{ onde} \\
&F = F(u) = \int_\infty^x u^k(y,t)dy.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

com isso temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_+\big(u^k\partial_x u\big) &= \tilde{P}_+\big(u^k e^{iF}e^{-iF}\partial_x u\big) \\
&= \tilde{P}_+\big(u^k e^{iF}\partial_x\big(e^{-iF}u\big) + iu^{2k+1}\big) \\
&= \tilde{P}_+\big(e^{iF}u^k\partial_x\big(P_+ + P_-\big)\big(e^{-iF}u\big) + iu^{2k+1}\big) \\
&= \tilde{P}_+\big(e^{iF}u^k\partial_x P_+\big(e^{-iF}u\big) + e^{iF}u^k\partial_x P_-\big(e^{-iF}u\big) + iu^{2k+1}\big) \\
&= \tilde{P}_+\big(e^{iF}u^k\partial_x w\big) + \tilde{P}_+\big(e^{iF}u^k\partial_x P_-\big(e^{-iF}u\big)\big) + i\tilde{P}_+\big(u^{2k+1}\big),
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de $P_+ + P_- = 1$ (identidade).

De $(0, 6, 6)$ sere 1-admissível tem-se

$$\|V(t)\tilde{P}_+(u^{2k+1})\|_{L^6_{x,T}} \lesssim \|\tilde{P}_+(u^{2k+1})\|_{L^2}.$$

Mas,

$$\|V(t)\tilde{P}_+(u^{2k+1})\|_{L^6_{x,T}} = \|D_x^{-s}D_x^s V(t)\tilde{P}_+(u^{2k+1})\|_{L^6_{x,T}}$$
$$\lesssim \|\tilde{P}_+(u^{2k+1})\|_{L^2}.$$

Então, pela Proposição 9 tem-se:

$$\left\|D_x^{-s}\int_0^t V(t-t')D_x^s\tilde{P}_+(u^{2k+1})dt'\right\|_{L^6_{x,T}} \lesssim \|D_x^s\tilde{P}_+(u^{2k+1})\|_{L^{6/5}_{x,T}}.$$

Agora, de $(1/10, 5, 10/3)$ ser 2*-admissível tem-se

$$\|D_x^{1/10}V(t)\tilde{P}_+(e^{iF}u^k\partial_x P_-(e^{-iF}u))\|_{L^5_xL^{10/3}_T} \lesssim T^{1/10}\|\tilde{P}_+(e^{iF}u^k\partial_x P_-(e^{-iF}u))\|_{L^2}$$

que é equivalente a

$$\|D_x^s V(t)D_x^{-s+1/10}\tilde{P}_+(e^{iF}u^k\partial_x P_-(e^{-iF}u))\|_{L^5_xL^{10/3}_T} \lesssim T^{1/10}\|\tilde{P}_+(e^{iF}u^k\partial_x P_-(e^{-iF}u))\|_{L^2}.$$

Pela Proposição 9 obtemos

$$\left\|D_x^{s+1/10}\int_0^t V(t-t')D_x^{-s+1/10}\tilde{P}_+(e^{iF}u^k\partial_x P_-(e^{-iF}u))dt'\right\|_{L^5_xL^{10/3}_T}$$
$$\lesssim T^{1/10}\|D_x^{s-1/10}\tilde{P}_+(e^{iF}u^k\partial_x P_-(e^{-iF}u))\|_{L^{5/4}_xL^{10/7}_T}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|(1-P_0)u\|_{X^s_T} = \|\tilde{P}_+u\|_{X^s_T} &= \left\|\tilde{P}_+\left(V(t)u + \int_0^t V(t-t')u^k u_x dt\right)\right\|_{X^s_T} \\
&\lesssim \|u\|_{H^s} + \underbrace{\left\|\int_0^t V(t-t')\tilde{P}_+(e^{iF}u^k u_x)(t')t'\right\|_{X^s_T}}_{A} \\
&+ \underbrace{\|D_x^s\tilde{P}_+(u^{2k+1})\|_{L^{6/5}_xL^{6/5}_T}}_{B} \qquad (4.13)\\
&+ \underbrace{T^{1/10}\|D_x^{s-1/10}\tilde{P}_+(e^{iF}u^k\partial_x P_-(e^{-iF}u))\|_{L^{5/4}_xL^{10/7}_T}}_{C} \\
&\lesssim \|\varphi\|_{H^s} + A + B + C.
\end{aligned}$$

Para estimarmos B usamos o Lema 8,

$$\begin{aligned}
B &\lesssim \|D_x^s u^{2k}u\|_{L^{6/5}_{x,T}} \\
&\lesssim \|u^{2k}\|_{L^{3/2}_xL^{3/2}_T}\|D_x^s u\|_{L^6_{x,T}} \\
&\lesssim \|u\|^{2k}_{L^{3k}_{x,T}}\|D_x^s u\|_{L^6_{x,T}} \qquad (4.14)\\
&\lesssim T^{2/3}\|u\|^{2k}_{L^{3k}_xL^\infty_T}\|D_x^s u\|_{L^6_{x,T}} \\
&\lesssim T^{2/3}\|u\|^{2k}_{X^{1/2}_T}\|u\|_{X^s_T}.
\end{aligned}$$

Para estimarmos C, usamos o Lema 4, Lema 5 e o Lema 8 como segue

$$\begin{aligned}
C &\lesssim T^{1/10}\|D_x^s(e^{iF}u^k)\|_{L_x^{4/3}L_T^4}\|D_x^{9/10}(e^{-iF}u)\|_{L_x^{20}L_T^{20/9}} \\
&\lesssim T^{1/10}\left(\|u\|^k_{L_x^{8k/3}L_T^{8k}}\|u^k\|_{L_x^{8/3}L_T^8} + \|J_x^s u^k\|_{L_x^{4/3}L_T^4}\right) \\
&\times\left(\|u\|^k_{L_x^{20(k+1)}L_T^{20(k+1)/9}}\|u\|_{L_x^{20(k+1)}L_T^{20(k+1)/9}} + \|J_x^{9/10}u\|_{L_x^{20}L_T^{20/9}}\right) \\
&= T^{1/10}\left(\|u\|^k_{L_x^{8k/3}L_T^{8k}}\|u\|^k_{L_x^{8k/3}L_T^{8k}} + \|J_x^s u^{k-1}u\|_{L_x^{4/3}L_T^4}\right) \\
&\times\left(\|u\|^{k+1}_{L_x^{20(k+1)}L_T^{20(k+1)/9}} + \|J_x^{9/10}u\|_{L_x^{20}L_T^{20/9}}\right) \\
&\lesssim T^{1/10}\left(\|u\|^{2k}_{L_x^{8k/3}L_T^{8k}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^{\infty}}\|J_x^s u\|_{L^4_{x,T}}\right) \\
&\times\left(\|u\|^{k+1}_{L_x^{20(k+1)}L_T^{20(k+1)/9}} + \|J_x^{9/10}u\|_{L_x^{20}L_T^{20/9}}\right) \\
&\lesssim T^{1/10}\left(\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^{\infty}}\|u\|_{X_T^s}\right)\left(\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + 1\right).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Por fim, para estimarmos A, consideramos primeiro o caso $s = 1/2$. Usando diretamente o fato de $(1/2, \infty, 2)$ ser 1-admissível e a Proposição 9, obtemos

$$\begin{aligned}
A &\lesssim \|\tilde{P}_+(e^{iF}u^k w_x)\|_{L_x^1L_T^2} \\
&\lesssim \|u^k w_x\|_{L_x^1L_T^2} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^T \|u\|^{2k}\|w_x\|^2 dt\right)^{1/2} dx \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\|u\|^k_{L_T^\infty}\left(\int_0^T \|w_x\|^2 dt\right)^{1/2} dx \\
&\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_0^T \|w_x\|^2 dt\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\|u\|^k_{L_T^\infty}dx = \|w_x\|_{L_x^\infty L_T^2}\|u\|^k_{L_x^kL_T^\infty}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

No caso $s > 1/2$, primeiro reescrevermos $u^k e^{iF} w_x$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
u^k e^{iF}\partial_x w &= -u^k e^{iF} D_x \mathcal{H} w \\
&= D_x^{1/2}(u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w) - [D_x^{1/2}, u^k e^{iF}]\mathcal{H}D_x^{1/2}w.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

De $(1/2, \infty, 2)$ ser 1-admissível,

$$\|D_x^{1/2}V(t)\tilde{P}_+(u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|\tilde{P}_+(u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L^2}, \tag{4.18}$$

que é equivalente a

$$\|D_x^{1/2}D_x^{-s}D_x^s V(t)\tilde{P}_+(u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|\tilde{P}_+(u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L^2},$$

ou seja,

$$\|D_x^{1/2-s}V(t)\tilde{P}_+(D_x^s u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|\tilde{P}_+(u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L^2},$$

e portanto pela Proposição 9 obtemos

$$\left\|D_x^{1/2-s}\int_0^t V(t-t')\tilde{P}_+ D_x^s u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w dt'\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|D_x^s u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w\|_{L_x^1 L_T^2}. \quad (4.19)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t V(t-t')\tilde{P}_+ D_x^{\frac{1}{2}} u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w dt'\right\|_{L_x^\infty L_T^2} &= \\ &= \left\|\int_0^t V(t-t')\mathcal{H}\tilde{P}_+\mathcal{H}D_x^{1/2}D_x^{-s}D_x^s u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w dt'\right\| \\ &= \left\|D_x^{1/2-s}\int_0^t V(t-t')\mathcal{H}\tilde{P}_+\mathcal{H}D_x^s u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w dt'\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\lesssim \|\mathcal{H}\tilde{P}_+\mathcal{H}D_x^s u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim \|\mathcal{H}D_x^s u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w\|_{L_x^1 L_T^2}.\end{aligned} \quad (4.20)$$

Analogamente, de $(-2/5, 20, 20/9)$ ser 2*-admissível,

$$\|D_x^{-2/5}V(t)\tilde{P}_+([D_x^{1/2}, u^k e^{iF}]\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L_x^{20}L_T^{20/9}} \lesssim T^{1/40}\|\tilde{P}_+([D_x^{1/2}, u^k e^{iF}]\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L^2},$$

que é equivalente a

$$\|D_x^{-s}V(t)D_x^{s-2/5}\tilde{P}_+([D_x^{1/2}, u^k e^{iF}]\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L_x^{20}L_T^{20/9}} \lesssim T^{1/40}\|\tilde{P}_+([D_x^{1/2}, u^k e^{iF}]\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L^2}.$$

Pela Proposição 9 obtemos

$$\begin{aligned}\left\|D_x^{-s}\int_0^t V(t-t')D_x^{s-2/5}\tilde{P}_+([D_x^{1/2}, u^k e^{iF}]\mathcal{H}D_x^{1/2}w)dt'\right\|_{L_x^{20}L_T^{20/9}} \\ \lesssim T^{1/40}\|D_x^{s-2/5}\tilde{P}_+([D_x^{1/2}, u^k e^{iF}]\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L_x^{20/19}L_T^{20/11}} \\ \lesssim T^{1/40}\|D_x^{s-2/5}([D_x^{1/2}, u^k e^{iF}]\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L_x^{20/19}L_T^{20/11}}.\end{aligned} \quad (4.21)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}A &\lesssim \underbrace{\|\mathcal{H}D_x^s(u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L_x^1 L_T^2}}_{A_1} + \underbrace{T^{1/40}\|D_x^{s-2/5}([D_x^{1/2}, u^k e^{iF}]\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L_x^{20/19}L_T^{20/11}}}_{A_2} \\ &\lesssim A_1 + A_2.\end{aligned} \quad (4.22)$$

Utilizando o Teorema 12 (lembrando que os resultados obtidos para D_x^α ainda se mantém para $\tilde{D}_x^\alpha$, onde $\widetilde{D}_x^\alpha = \mathcal{H} \circ D_x^\alpha$), obtemos

$$\begin{aligned}
A_1 \lesssim\, & \|\mathcal{H}D_x^s(u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^{1/2}w) - \mathcal{H}D_x^s(u^k e^{iF})\mathcal{H}D_x^{1/2}w - u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^s\mathcal{H}D_x^{1/2}w\|_{L_x^1L_T^2}\\
&+ \|\mathcal{H}D_x^s(u^k e^{iF})\mathcal{H}D_x^{1/2}w\|_{L_x^1L_T^2} + \|u^k e^{iF}\mathcal{H}D_x^s\mathcal{H}D_x^{1/2}w\|_{L_x^1L_T^2}\\
\lesssim\, & \|\mathcal{H}D_x^s(u^k e^{iF})\|_{L_x^{4/3}L_T^4}\|\mathcal{H}D_x^{1/2}w\|_{L_{x,T}^4}\\
&+ \|u^k e^{iF}\|_{L_x^1L_T^\infty}\|\mathcal{H}^2D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&+ \|D_x^{s-1/10}(u^k e^{iF})\|_{L_x^{5/4}L_T^5}\|D_x^{3/5}(ue^{-iF}\|_{L_x^5L_T^{10/3}}\\
\lesssim\, & \underbrace{\|u^k\|_{L_x^1L_T^\infty}\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2}}_{A_{11}} \qquad (4.23)\\
&+ \underbrace{\|D_x^s(e^{iF}u^k)\|_{L_x^{4/3}L_T^4}\|D_x^{1/2}(ue^{-iF})\|_{L_{T,x}^4}}_{A_{12}}\\
&+ \underbrace{\|D_x^{s-1/10}(e^{iF}u^k)\|_{L_x^{5/4}L_T^5}\|D_x^{3/5}(ue^{-iF})\|_{L_x^5L_T^{10/3}}}_{A_{13}}\\
\lesssim\, & A_{11} + A_{12} + A_{13}.
\end{aligned}$$

É facíl ver que

$$A_{11} \lesssim \|u\|_{L_x^kL_T^\infty}^k\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2}. \qquad (4.24)$$

Usando os Lemas 5 e 8,

$$\begin{aligned}
A_{12} \lesssim & \Big(\|u\|_{L_x^{8k/3}L_T^{8k}}^k\|u^k\|_{L_x^{8/3}L_T^8} + \|J_x^su^k\|_{L_x^{4/3}L_T^4}\Big)\\
&\times \Big(\|u\|_{L_{x,T}^{4(k+1)}}^k\|u\|_{L_{x,T}^{4(k+1)}} + \|J_x^{1/2}u\|_{L_{T,x}^4}\Big)\\
\lesssim & \Big(\|u\|_{L_x^{8k/3}L_T^{8k}}^{2k} + \|J_x^s(u^k)\|_{L_x^{4/3}L_T^4}\Big)\\
&\times \Big(\|u\|_{L_{T,x}^{4(k+1)}}^{k+1} + \|J_x^{1/2}u\|_{L_{T,x}^4}\Big)\\
\lesssim & \Big(T^{1/4}\|u\|_{L_x^{8k/3}L_T^\infty}^{2k} + \|J_x^s(u^{k-1}u)\|_{L_x^{4/3}L_T^4}\Big)\\
&\times \Big(T^{1/4}\|u\|_{L_T^\infty L_x^{4(k+1)}}^{k+1} + \|J_x^{1/2}u\|_{L_{T,x}^4}\Big) \qquad (4.25)\\
\lesssim & \Big(T^{1/4}\|u\|_{L_x^{8k/3}L_T^\infty}^{2k} + \|u^{k-1}\|_{L_x^2L_T^\infty}\|J_x^su\|_{L_{T,x}^4}\Big)\\
&\times \Big(T^{1/4}\|u\|_{L_x^{4(k+1)}L_T^\infty}^{k+1} + \|J_x^{1/2}u\|_{L_{T,x}^4}\Big)\\
\lesssim & \Big(T^{1/4}\|u\|_{L_x^{8k/3}L_T^\infty}^{2k} + \|u\|_{L_x^{2(k+1)}L_T^\infty}^{k+1}\|J_x^su\|_{L_{T,x}^4}\Big)\\
&\times \Big(T^{1/4}\|u\|_{L_x^{4(k+1)}L_T^\infty}^{k+1} + \|J_x^{1/2}u\|_{L_{T,x}^4}\Big)\\
\lesssim & T^{1/4}\Big(\|u\|_{X_T^{1/2}}^{2k} + \|u\|_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}^{k-1}\|u\|_{X_T^s}\Big)\Big(\|u\|_{X_T^s}^{k+1} + 1\Big).
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$
\begin{aligned}
A_{13} \lesssim & \Big(\|u\|^k_{L^{5k/2}_x L^{10k}_T} \|u^k\|_{L^{5/2}_x L^{10}_T} + \|J^{s-1/10}_x (u^k)\|_{L^{5/4}_x L^5_T}\Big) \\
& \times \Big(\|u\|^k_{L^{5(k+1)}_x L^{(10/3)(k+1)}_T} \|u\|_{L^{5(k+1)}_x L^{(10/3)(k+1)}_T} + \|J^{3/5}_x u\|_{L^5_x L^{10/3}_T}\Big) \\
\lesssim & \Big(\|u\|^{2k}_{L^{5k/2}_x L^{10k}_T} + \|J^{s-1/10}_x (u^k)\|_{L^{5/4}_x L^5_T}\Big) \\
& \times \Big(\|u\|^{k+1}_{L^{5(k+1)}_x L^{(10/3)(k+1)}_T} + \|J^{3/5}_x u\|_{L^5_x L^{10/3}_T}\Big) \\
\lesssim & \Big(T^{1/5}\|u\|^{2k}_{L^{5k/2}_x L^\infty_T} + \|J^{s-1/10}_x (u^{k-1}u)\|_{L^{5/4}_x L^5_T}\Big) \qquad (4.26) \\
& \times \Big(T^{3/10}\|u\|^{k+1}_{L^{5(k+1)}_x L^\infty_T} + \|J^{3/5}_x u\|_{L^5_x L^{10/3}_T}\Big) \\
\lesssim & \Big(T^{1/5}\|u\|^{2k}_{L^{5k/2}_x L^\infty_T} + \|u\|^{k-1}_{L^{2(k-1)}_x L^\infty_T} \|J^{s-1/10}_x u\|_{L^{10/3}_x L^5_T}\Big) \\
& \times \Big(T^{3/10}\|u\|^{k+1}_{L^{5(k+1)}_x L^\infty_T} + \|J^{3/5}_x u\|_{L^5_x L^{10/3}_T}\Big) \\
\lesssim & T^{1/10}\Big(\|u\|^{2k}_{X^{1/2}_T} + \|u\|^{k-1}_{L^{2(k-1)}_x L^\infty_T} \|u\|_{X^s_T}\Big)\Big(\|u\|^{k+1}_{X^{1/2}_T} + 1\Big).
\end{aligned}
$$

Finalmente, para estimar A_2 vamos usar o Lema 7, Lema 5 e o Lema 8:

$$
\begin{aligned}
A_2 \lesssim & T^{1/40}\|D^{s+1/10}_x (e^{iF}u)\|_{L^{10/7}_x L^{10/3}_T} \|D^{1/2}_x \mathcal{H}P_+(e^{-iF}u)\|_{L^4_{T,x}} \\
\lesssim & T^{1/40}\|D^{s+1/10}_x (e^{iF}u)\|_{L^{10/7}_x L^{10/3}_T} \|D^{1/2}_x (e^{-iF}u)\|_{L^4_{T,x}} \\
\lesssim & T^{1/40}\Big(\|u\|^k_{L^{20k/7}_x L^{20k/3}_T} \|u^k\|_{L^{20/7}_x L^{20/3}_T} + \|J^{s+1/10}_x (u^k)\|_{L^{10/7}_x L^{10/3}_T}\Big) \\
& \times \Big(\|u\|^k_{L^{4(k+1)}_{T,x}} \|u\|_{L^{4(k+1)}_{T,x}} + \|J^{1/2}_x u\|_{L^4_{T,x}}\Big) \\
\lesssim & T^{1/40}\Big(\|u\|^{2k}_{L^{20k/7}_x L^{20k/3}_T} + \|J^{s+1/10}_x (u^k)\|_{L^{10/7}_x L^{10/3}_T}\Big) \\
& \times \Big(\|u\|^{k+1}_{L^{4(k+1)}_{T,x}} + \|J^{1/2}_x u\|_{L^4_{T,x}}\Big) \qquad (4.27) \\
\lesssim & T^{1/40}\Big(T^{3/10}\|u\|^{2k}_{L^{20k/7}_x L^\infty_T} + \|J^{s+1/10}_x (u^{k-1}u)\|_{L^{10/7}_x L^{10/3}_T}\Big) \\
& \times \Big(T^{1/4}\|u\|^{k+1}_{L^\infty_T L^{4(k+1)}_x} + \|J^{1/2}_x u\|_{L^4_{T,x}}\Big) \\
\lesssim & T^{1/40}\Big(T^{3/10}\|u\|^{2k}_{L^{20k/7}_x L^\infty_T} + \|u\|^{k-1}_{L^{2(k-1)}_x L^\infty_T} \|J^{s+1/10}_x u\|_{L^5_x L^{10/3}_T}\Big) \\
& \times \Big(T^{1/4}\|u\|^{k+1}_{L^\infty_T L^{4(k+1)}_x} + \|J^{1/2}_x u\|_{L^4_{T,x}}\Big) \\
\lesssim & T^{1/4}\Big(\|u\|^{2k}_{X^{1/2}_T} + \|u\|^{k-1}_{L^{2(k-1)}_x L^\infty_T} \|u\|_{X^s_T}\Big)\Big(\|u\|^{k+1}_{X^{1/2}_T} + 1\Big),
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de $\mathcal{H}P_+$ ser limitado em $L^4_{T,x}$, o Lema 5 e a definição de $w = P_+(e^{-iF}u)$.

Portanto, de (4.11), e (4.13)-(4.16), obtemos para $s = 1/2$:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X_T^s} =& \|P_0 u + (1-P_0)u\|_{X_T^s} \\
\lesssim& \|P_0 u\|_{X_T^s} + \|(1-P_0)u\|_{X_T^s} \\
\lesssim& \|u_0\|_{L^2} + T^{5/6}\|u\|^{k+1}_{L^\infty_T H^{1/2}} + \|u_0\|_{H^s} + T^{2/3}\|u\|^{2k+1}_{X_T^s} \\
&+ T^{1/10}(\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^{1/2}})(\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + 1) \\
&+ \|u\|^k_{L^k_x L^\infty_T}\|w_x\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
\lesssim& \|u_0\|_{H^s} + T^{5/6}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + T^{2/3}\|u\|^{2k+1}_{X_T^{1/2}} \\
&+ T^{1/10}(\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^{1/2}})(\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + 1) \\
&+ \|u\|^k_{L^k_x L^\infty_T}\|D_x^{1/2}D_x^{1/2}w\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
\lesssim& \|u_0\|_{H^s} + T^{5/6}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + T^{2/3}\|u\|^{2k+1}_{X_T^{1/2}} \\
&+ T^{1/10}(\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^{1/2}}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} \\
&+ \|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^{1/2}}) \\
&+ \|u\|^k_{L^k_x L^\infty_T}\|D_x^{1/2}D_x^{1/2}w\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
\lesssim& \|u_0\|_{H^s} + T^{1/10}T^{11/15}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + T^{1/10}T^{17/30}\|u\|^{2k+1}_{X_T^{1/2}} \\
&+ T^{1/10}\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + T^{1/10}\|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^{1/2}}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} \\
&+ T^{1/10}\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + T^{1/10}\|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^{1/2}} \\
&+ \|u\|^k_{L^k_x L^\infty_T}\|D_x^{s+1/2}w\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
\lesssim& \|u_0\|_{H^s} + \|u\|^k_{L^k_x L^\infty_T}\|D_x^{s+1/2}w\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
&+ T^{1/10}(T^{11/15}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + T^{17/30}\|u\|^{2k+1}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} \\
&+ \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^{1/2}}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} \\
&+ \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^{1/2}}),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X_T^s} \lesssim& \|u_0\|_{H^s} + \|u\|^k_{L^k_x L^\infty_T}\|D_x^{s+1/2}w\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
&+ T^{1/10}p_k(\|u\|_{X_T^{1/2}})(1 + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s}).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Agora, de (4.11) e (4.13)-(4.27), obtemos para caso $s > 1/2$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X_T^s} =&\|P_0u + (1-P_0)u\|_{X_T^s}\\
\lesssim&\|P_0u\|_{X_T^s} + \|(1-P_0)u\|_{X_T^s}\\
\lesssim&\|u_0\|_{L^2} + T^{5/6}\|u\|^{k+1}_{L_T^\infty H^{1/2}} + \|u_0\|_{H^s} + T^{2/3}\|u\|^{2k+1}_{X_T^s}\\
&+ T^{1/10}(\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^{1/2}})(\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}}+1)\\
&+ \|u\|^k_{L_x^kL_T^\infty}\|D_x^{1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&+ T^{1/4}(\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s})(\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}}+1)\\
&+ T^{1/10}(\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s})(\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}}+1)\\
&+ T^{1/4}(\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s})(\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}}+1)\\
\lesssim&\|u_0\|_{H^s} + T^{1/10}T^{11/15}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + T^{1/10}T^{17/30}\|u\|^{2k+1}_{X_T^{1/2}}\\
&+ T^{1/10}(\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}}\\
&+ \|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s})\\
&+ \|u\|^k_{L_x^kL_T^\infty}\|D_x^{1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&+ T^{1/10}T^{3/20}(\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}}\\
&+ \|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s})\\
\lesssim&\|u_0\|_{H^s} + \|u\|^k_{L_x^kL_T^\infty}\|D_x^{1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&+ T^{1/10}(T^{11/15}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + T^{17/30}\|u\|^{2k+1}_{X_T^{1/2}} + T^{3/20}\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}}\\
&+ T^{3/20}\|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + T^{3/20}\|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s}\\
&+ \|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}}\\
&+ \|u\|^{2k}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s}),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X_T^s} \lesssim&\|u_0\|_{H^s} + \|u\|^k_{L_x^kL_T^\infty}\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&+ T^{1/10}p_k(\|u\|_{X_T^{1/2}})(1 + \|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^s}).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Por outro lado, para $k \geqslant 4$, $(1/k-1/2, k, \infty)$ e $(1/2-1/k, 3k, 6k/(3k-4))$ são 1-admissíveis obtemos

$$\|D_x^{1/k-1/2}V(t)\varphi\|_{L_x^kL_T^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{L^2},$$

$$\|D_x^{1/2-1/k}V(t)\varphi\|_{L_x^{3k}L_T^{6k/(3k-4)}} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}.$$

Assim, da Proposição 9 temos então

$$\left\| \int_0^t V(t-t')u^k u_x(t')dt' \right\|_{L_x^k L_T^\infty} \lesssim \|u^k u_x\|_{L_x^{3k/(3k-1)} L_T^{6k/(3k+4)}}.$$

Também do fato de $(1/k-1/2, k, \infty)$ ser 1-admissível,

$$\begin{aligned} \|V(t)u_0\| =& \|V(t)D_x^{1/k-1/2}D_x^{1/2-1/k}u_0\|_{L_x^k L_T^\infty} \\ &= \|D_x^{1/k-1/2}V(t)D_x^{1/2-1/k}u_0\|_{L_x^k L_T^\infty} \\ &\lesssim \|D_x^{1/2-1/k}u_0\|_{L^2} \\ &\lesssim \|u_0\|_{H^{1/2-1/k}} . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_x^k L_T^\infty} =& \left\| V(t)u_0\| + \int_0^t V(t-t')u^k u_x(t')dt' \right\|_{L_x^k L_T^\infty} \\ \lesssim& \|V(t)u_0\|_{L_x^k L_T^\infty} + \left\| \int_0^t V(t-t')u^k u_x(t')dt' \right\|_{L_x^k L_T^\infty} \\ \lesssim& \|u_0\|_{H^{1/2-1/k}} + \|u^k u_x\|_{L_x^{3k/(3k-1)} L_T^{6k/(3k+4)}} \\ \lesssim& \|u_0\|_{H^{1/2}} + \|u\|^k_{L_x^{3k^2/(3k-1)} L_T^{3k^2/2}} \|u_x\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ \lesssim& \|u_0\|_{H^{1/2}} + T^{2/3k^2}\|u\|^k_{L_x^{3k^2/(3k-1)} L_T^\infty} \|u_x\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ \lesssim& \|u_0\|_{H^{1/2}} + T^{2/3k^2}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Para $k = 2, 3$, fixando $0 < \epsilon \ll 1$:

Usando a Proposição 7 e o fato de $(1/2-\epsilon, 3/\epsilon, 6/(3-4\epsilon))$ ser 1-admissível obtemos, respectivamente,

$$\|J_x^{-(1/k+)}V(t)\varphi\|_{L_x^k L_T^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{L^2},$$

$$\|J_x^{1/2-\epsilon}V(t)\varphi\|_{L_x^{3/\epsilon} L_T^{6/(3-4\epsilon)}} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}.$$

Daí Proposição 9 obtemos

$$\begin{aligned} &\left\| J_x^{1/2-\epsilon}J_x^{-(1/k+)} \int_0^t V(t-t')J_x^{-1/2+\epsilon}J_x^{(1/k+)}\partial_x(u^{k+1})dt' \right\|_{L_x^k L_T^\infty} \\ &\lesssim \|J_x^{-1/2+\epsilon}J_x^{1/k+2\epsilon}\partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^{3/(3-\epsilon)} L_T^{6/(3+4\epsilon)}} \\ &= \|\left((1+|\xi|^2)^{-1/4+\epsilon/2}(1+|\xi|^2)^{1/2k+\epsilon}\partial_x(u^{k+1})\right)\|_{L_x^{3/(3-\epsilon)} L_T^{6/(3+4\epsilon)}} \\ &= \|\left((1+|\xi|^2)^{\epsilon/2+\epsilon}\partial_x(u^{k+1})\right)\|_{L_x^{3/(3-\epsilon)} L_T^{6/(3+4\epsilon)}} \\ &= \|J_x^{3\epsilon/2}\partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^{3/(3-\epsilon)} L_T^{6/(3+4\epsilon)}}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^k_x L^\infty_T} =&\left\|V(t)u_0\| + \int_0^t V(t-t')\partial_x(u^{k+1})(t')dt'\right\|_{L^k_x L^\infty_T} \\
\lesssim&\|V(t)u_0\|_{L^k_x L^\infty_T} + \left\|\int_0^t V(t-t')\partial_x(u^{k+1})(t')dt'\right\|_{L^k_x L^\infty_T} \\
\lesssim&\ \|J_x^{(1/k+)}u_0\|_{L^2} + \|J_x^{3\epsilon/2}\partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^{3/(3-\epsilon)}L_T^{6/(3+4\epsilon)}} \\
\lesssim&\ \|J_x^{1/2+\epsilon/2}u_0\|_{L^2} + \|J_x^{1+3\epsilon/2}(u^{k+1})\|_{L_x^{3/(3-\epsilon)}L_T^{6/(3+4\epsilon)}} \\
\lesssim&\ \|u_0\|_{H^{1/2+\epsilon/2}} + \|u\|^k_{L_x^{2k/(2-\epsilon)}L_T^{k/\epsilon}}\|J_x^{1+3\epsilon/2}u\|_{L_x^{6/\epsilon}L_T^{6/(3-2\epsilon)}} \\
\lesssim&\ \|u_0\|_{H^{1/2+\epsilon/2}} + T^{\epsilon/k}\|u\|^k_{L_x^{2k/(2-\epsilon)}L_T^{\infty}}\|J_x^{1+3\epsilon/2}u\|_{L_x^{6/\epsilon}L_T^{6/(3-2\epsilon)}} \\
\lesssim&\ \|u_0\|_{H^{1/2+2\epsilon}} + T^{\epsilon/k}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2+2\epsilon}}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

□

4.3 A Transformada de Gauge

Vamos escolher arbitrariamente o sinal de + na frente de $u^k u_x$ na (GBO). O caso do sinal de - pode ser tratado de modo análogo apenas invertendo o sinal em frente de iF na definição de w (ver (4.36)). Além disso, alterando u por $u/2^{1/k}$, podemos sempre supor que u satisfaz a equação

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u = 2u^k \partial_x u. \tag{4.35}$$

Seja $u \in C([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$ uma solução de (4.35). Inspirado no trabalho de Tao [16], realizamos a transformada de Gauge

$$w = P_+(e^{-iF}u), \quad F = F(u) = \int_{-\infty}^x u^k(t,y)dy. \tag{4.36}$$

Note que $w = e^{-iF}u$ seria a transformação de Gauge adequada para resolver a equação de Schrödinger não linear $u_t - iu_{xx} = 2u^k u_x$ por um método de energia (veja [6]). Inicialmente observemos que, pelas propriedades da transformada de Hilbert (veja Proposição

2):

$$
\begin{aligned}
w_x + \mathcal{H} w_{xx} =& w_t + \mathcal{H}(P_- + P_+) w_{xx} \\
=& w_t + iP_- w_{xx} - iP_+ w_{xx} \\
=& w_t + iP_- P_+ (e^{-iF}u)_{xx} - iP_+ P_+ (e^{-iF}u)_{xx} \\
=& w_t - iP_+ (e^{-iF}u)_{xx} \\
=& w_t - i w_{xx} \\
=& \partial_t P_+ (e^{-iF}u) - i\partial_{xx} P_+ (e^{-iF}u) \\
=& P_+ (e^{-iF}(-iF_t)u + e^{-iF}u_t) - i\partial_x P_+ (e^{-iF}(-iF_x)u + e^{-iF}u_x) \\
=& P_+ (e^{-iF}(-iF_t)u + e^{-iF}u_t) - iP_+ (e^{-iF}(-iF_x)(-iF_x)u + e^{-iF}(-iFu)_x \\
& + e^{-iF}(-iF_x)u_x + e^{-iF}u_{xx}) \\
=& P_+ \Big[e^{-iF} \Big(\Big(- iF_t - F_{xx} + i(F_x)^2 \Big) u + (u_t - iu_x x) - 2F_x u_x \Big) \Big].
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

Usando (4.35) e (4.36), podemos agora calcular um por os termos que aparecem no lado direito de (4.37). Definamos

$$
\begin{aligned}
A &= -iF_t u = -iku\int_{-\infty}^{x} u^{k-1}u_t \\
&= -iku\Big[\int_{-\infty}^{x} u^{k-1}\Big(-\mathcal{H}u_{xx} + 2u^k u_x\Big)\Big] \\
&= iku\Big[\int_{-\infty}^{x} u^{k-1}\mathcal{H}u_{xx} - 2\int_{-\infty}^{x} u^{2k-1}u_x\Big] \\
&= iku\Big[u^{k-1}\mathcal{H}u_x - \frac{2}{2k}u^{2k}\Big] - ik(k-1)u\int_{-\infty}^{x} u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x \\
&= A_1 + A_2 + A_3, \\
B &= -F_{xx}u = -(u^k)_x u = -ku^{k-1}uxu = -ku^k u_x, \\
C &= i(F_x)^2 u = i(u^k)^2 u = iu^{2k+1}, \\
D &= u_t - iu_{xx} \\
&= u_t - iu_{xx} + \mathcal{H}u_{xx} - \mathcal{H}u_{xx} \\
&= u_t + \mathcal{H}u_{xx} + (-i - \mathcal{H})u_{xx} \\
&= u_t + \mathcal{H}u_{xx} + (-i + i^2\mathcal{H})u_{xx} \\
&= u_t + \mathcal{H}u_{xx} - i(1 - i\mathcal{H})u_{xx} \\
&= u_t + \mathcal{H}u_{xx} - i2P_-u_{xx} \\
&= 2u^k u_x - 2iP_-(u_{xx}), \\
E &= -2F_x u_x = -2u^k u_x.
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

É fácil ver que $A_2 + C = 0$ e que $D + E = -2iP_-(u_{xx})$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
A_1 + B &= k(iu^k\mathcal{H}u_x - u^k u_x) \\
&= k(u^k(P_+ - P_-)u_x - u^k u_x) \\
&= k(u^kP_+u_x - u^kP_-u_x - u^k u_x) \\
&= k(u^kP_+u - u^kP_-u - u^k(P_+ + P_-)u_x) \\
&= k(u^kP_+u - u^kP_-u_x - u^k u_x) \\
&= -2ku^kP_-u_x.
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

Portanto, por (4.37) temos

$$
w_t + \mathcal{H}w_{xx} = P_+[e^{-iF}(A + B + C + D + E)]. \tag{4.40}
$$

Finalmente obtemos a seguinte equação para w:

$$\begin{aligned} w_t + \mathcal{H}w_{xx} =& P_+[2e^{-iF}(-ku^kP_-u_x - iP_-(u_{xx}))] \\ &- ik(k-1)P_+\Big(e^{-iF}u\int_{-\infty}^{x} u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x\Big). \end{aligned} \tag{4.41}$$

O interesse da transformação de Gauge aparece claramante na Proposição 12. Em contraste com o que acontece para u, (veja [14] e (4.7) da Proposição 11), seremos capazes de obter algumas potências de T em frente da parte não linear ao estimar $\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2}$. O principal ingrediente da demonstração desta proposição será o Lema 4. A grosso modo, ele diz que a derivada de g pode ser compartilhada com f ao estimar temos da forma de $P_+(fP_-g_x)$.

Proposição 12. *Dada uma solução* $u \in C([0,T], H^\infty)$ *da (GBO) com dado inicial* $u_0 \in H^\infty$*, seguem as seguintes estimativas sobre* $w = P_+(e^{-iF}u)$

(1) se $k = 2$ *ou* $k = 4$*, para* $s > 1/2$ *vale:*

$$\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim p_k\Big(\|u_0\|_{H^{1/2}}\Big)\|u_0\|_{H^s} + T^{1/24}p_k\Big(\|u\|_{X_T^{1/2+}}\Big)\|u\|_{X_T^s}; \tag{4.42}$$

(2) se $k \geqslant 5$*, para* $s \geqslant 1/2$ *vale:*

$$\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim p_k\Big(\|u_0\|_{H^{1/2}}\Big)\|u_0\|_{H^s} + T^{1/24}p_k\Big(\|u\|_{X_T^{1/2}}\Big)\|u\|_{X_T^s}; \tag{4.43}$$

(3) se $k = 3$*, para* $s \geqslant 3/4$ *vale:*

$$\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim p_k\Big(\|u_0\|_{H^{1/2}}\Big)\|u_0\|_{H^s} + T^{1/24}p_k\Big(\|u\|_{X_T^{3/4}}\Big)\|u\|_{X_T^s}; \tag{4.44}$$

onde p_k *são funções polinomiais positivas não decrescente.*

Observação 1. *Faremos a demonstração da Proposição 12 apenas para os casos mais difíceis, isto é, para* s *pequeno. Por isso, na demonstração inteira, vamos supor que* $s < 9/10$.

Demonstração. Substituindo w pela fórmula integral (4.41), temos:

$$\begin{aligned} \|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2} =& \Big\|D_x^{s+1/2}\Big(V(t)w_0 + \int_0^t V(t-t')w^kw_x\Big)\Big\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ \lesssim& \|D_x^{s+1/2}V(t)w_0\|_{L_x^\infty L_T^2} + \Big\|D_x^{s+1/2}\int_0^t V(t-t')P_+(e^{-iF}u^kP_-u_x)\Big\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &+ \Big\|D_x^{s+1/2}\int_0^t V(t-t')P_+(e^{-iF}P_-u_{xx})\Big\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &+ \Big\|D_x^{s+1/2}\int_0^t V(t-t')P_+\Big(e^{-iF}u\int_{-\infty}^{x} u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x\Big)\Big\|_{L_x^\infty L_T^2}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Usando que $(1/2, \infty, 2)$ é 1-admissível, obtemos:

$$\begin{aligned}\|D_x^{s+1/2}V(t)w_0\|_{L_x^\infty L_T^2} &= \|D_x^{1/2}V(t)D_x^s w_0\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\lesssim \|D_x^s w_o\|_{L^2} \\ &= \|D_x^s P_+(e^{-iF(u_0)}u_0)\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{4.46}$$

Usando que $(1/2, \infty, 2)$ é 1-admissível e $(1/10, 5, 10/3)$ é 2*-admissível, obtemos respectivamente,

$$\|D_x^{1/2}V(t)D_x^s(\cdot)\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|D_x^s(\cdot)\|_{L^2}, \tag{4.47}$$

$$\|D_x^{1/10}V(t)D_x^s(\cdot)\|_{L_x^5 L_T^{10/3}} \lesssim T^{1/10}\|D_x^s(\cdot)\|_{L^2}. \tag{4.48}$$

Logo, pela Proposição 9,

$$\left\|D_x^{1/2+1/10}\int_0^t V(t-t')f(t')\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{1/10}\|f(t')\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/7}}. \tag{4.49}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\left\|D_x^{s+1/2}\int_0^t V(t-t')P_+(e^{-iF}u^k P_- u_x)\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\qquad= \left\|D_x^{s+1/2}D_x^{1/10}D_x^{-1/10}\int_0^t V(t-t')P_+(e^{-iF}u^k P_- u_x)\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\qquad= \left\|D_x^{1/2+1/10}\int_0^t V(t-t')D_x^{s-1/10}P_+(e^{-iF}u^k P_- u_x)\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\qquad\lesssim T^{1/10}\|D_x^{s-1/10}P_+(e^{-iF}u^k P_- u_x)\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/7}}.\end{aligned} \tag{4.50}$$

Analogamente,

$$\left\|D_x^{s+1/2}\int_0^t V(t-t')P_+(e^{-iF}P_- u_{xx})\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{1/10}\|D_x^{s-1/10}P_+(e^{-iF}P_- u_{xx})\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/7}}. \tag{4.51}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim& \|D_x^s P_+(e^{-iF(u_0)}u_0)\|_{L^2}\\ &+ T^{1/10}\|D_x^{s-1/10}P_+(e^{-iF}u^k P_- u_x)\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/7}}\\ &+ T^{1/10}\|D_x^{s-1/10}P_+(e^{-iF}P_- u_{xx})\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/7}}\\ &+ \left\|\int_0^t V(t-t')D_x^{s+1/2}P_+\Big(e^{-iF}u\int_{-\infty}^x u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x\Big)\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ \lesssim& I + II + III + IV.\end{aligned} \tag{4.52}$$

Primeiro note que P_+ é contínuo os Espaços de Lebesgue $L^q_T L^p_x$ para $1 \leqslant q \leqslant \infty$ e $1 < p < \infty$ e nos espaços $L^p_x L^q_T$ para $1 < p, q < \infty$, pois a transformada de Hilbert $\mathcal{H}$ é limitada nesses espaços.

A partir de considerações semelhantes ao Lema 5 e imersão de Sobolev, concluimos facilmente que

$$\begin{aligned} I &\lesssim \|u_0\|^k_{L^{4k}_x}\|u_0\|_{L^{4k}_x} + \|J^s_x u_0\|_{L^2} \\ &\lesssim \|u_0\|^k_{H^{1/2-1/4k}}\|u_0\|_{H^s} + \|u_0\|_{H^s} \\ &\lesssim \|u_0\|^k_{H^{1/2}}\|u_0\|_{H^s} + \|u_0\|_{H^s} \\ &\lesssim \left(1 + \|u_0\|^k_{H^{1/2}}\right)\|u_0\|_{H^s}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Por outro lado, pelos Lemas 4, 5, 8 e a definição de X^s_T,

$$\begin{aligned} II &\lesssim T^{1/10}\|D^s_x(e^{-iF}u^k)\|_{L^{4/3}_x L^4_T}\|D^{9/10}_x u\|_{L^{20}_x L^{20/9}_T} \\ &\lesssim T^{1/10}\left(\|u\|^{2k}_{L^{8k/3}_x L^{8k}_T} + \|J^s_x(u^k)\|_{L^{4/3}_x L^4_T}\right)\|D^{9/10}_x u\|_{L^{20}_x L^{20/9}_T} \\ &\lesssim T^{1/10}\left(\|u\|^{2k}_{L^{8k/3}_x L^\infty_T} + \|u\|^{k-1}_{L^{2(k-1)}_x L^\infty_T}\|J^s_x u\|_{L^4_{x,T}}\right)\|D^{9/10}_x u\|_{L^{20}_x L^{20/9}_T} \\ &\lesssim T^{1/10}\left(\|u\|^{2k}_{X^s_T} + \|u\|^{k-1}_{L^{2(k-1)}_x L^\infty_T}\|u\|_{X^s_T}\right)\|u\|_{X^{1/2}_T}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Finalmente, III pode ser estimado de forma análoga:

$$\begin{aligned} III &\lesssim T^{1/10}\|D^{s+1}_x(e^{-iF})\|_{L^{4/3}_x L^4_T}\|D^{9/10}_x u\|_{L^{20}_x L^{20/9}_T} \\ &\lesssim T^{1/10}\|D^s_x D_x(e^{-iF})\|_{L^{4/3}_x L^4_T}\|D^{9/10}_x u\|_{L^{20}_x L^{20/9}_T} \\ &\lesssim T^{1/10}\|D^s_x(e^{-iF}u^k)\|_{L^{4/3}_x L^4_T}\|D^{9/10}_x u\|_{L^{20}_x L^{20/9}_T} \\ &\lesssim T^{1/10}\left(\|u\|^{2k}_{X^s_T} + \|u\|^{k-1}_{L^{2(k-1)}_x L^\infty_T}\|u\|_{X^s_T}\right)\|u\|_{X^{1/2}_T}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Agora, vamos estimar IV:

Notando que, por simetria, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_x\mathcal{H}u_x) =& \frac{1}{2}\mathcal{F}(u_x\mathcal{H}u_x) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(u_x\mathcal{H}u_x) \\ =& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} i(\xi-\xi_1)\widehat{u}(\xi-\xi_1)(-i\operatorname{sgn}(\xi_1))i\xi_1\widehat{u}(\xi_1)d\xi_1 \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} i\xi\widehat{u}(\xi_1)(-i\operatorname{sgn}(\xi-\xi_1))i(\xi-\xi_1)\widehat{u}(\xi-\xi_1)d\xi_1 \\ =& \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}} \xi_1(\xi-\xi_1)\widehat{u}(\xi_1)\widehat{u}(\xi-\xi_1)[\operatorname{sgn}(\xi_1)+\operatorname{sgn}(\xi_1)]d\xi_1 \\ =& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \xi_1(\xi-\xi_1)[\operatorname{sgn}(\xi_1)+\operatorname{sgn}(\xi_1)]\widehat{u}(\xi_1)\widehat{u}(\xi-\xi_1)d\xi_1 \\ =& \frac{1}{2}\int_{|\xi|\geqslant|\xi|\vee|\xi-\xi_1|} \xi_1(\xi-\xi_1)[\operatorname{sgn}(\xi_1)+\operatorname{sgn}(\xi_1)]\widehat{u}(\xi_1)\widehat{u}(\xi-\xi_1)d\xi_1, \end{aligned} \tag{4.56}$$

definimos o seguinte operador bilinear que, portanto, faz sentido:

$$G(u,v) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\xi_1(\xi-\xi_1)}{i\xi}[sgn(\xi_1)+sgn(\xi_1)]\widehat{u}(\xi_1)\widehat{v}(\xi-\xi_1)d\xi_1\Big). \tag{4.57}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
G(u,u) = \int_{\infty}^{x} u_x \mathcal{H} u_x &= \partial_x^{-1}(u_x\mathcal{H}u_x) \\
&= \partial_x^{-1}(u_x(P_+ + P_-)\mathcal{H}u_x) \\
&= \partial_x^{-1}(-iu_xP_+u_x + iu_xP_-u_x) \\
&= \partial_x^{-1}(-i(P_+ + P_-)u_xP_+u_x + i(P_+ + P_-)u_xP_-u_x) \\
&= \partial_x^{-1}(-i(P_+u_x)^2 + i(P_-u_x)^2),
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$G(u,v) = \partial_x^{-1}(-i(P_+u_x)(P_+v_x) + i(P_-u_x)(P_-v_x)).$$

Separamos agora os casos $k=2$ e $k \geqslant 3$.

- Caso $k=2$. Começamos escrevendo

$$\begin{aligned}
D_x^s(e^{-iF}uG(u,u)) &= D_x^{1/10}D_x^{s-1/10}(e^{-iF}uG(u,u)) \\
&= D_x^{1/10}\Big(D_x^{s-1/10}(e^{-iF}u)G(u,u) + [D_x^{s-1/10}, G(u,u)]e^{-iF}u\Big).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Para estimar o primeiro termo do lado direito de (4.59), usaremos os Lemas 5, 9, 6, 12, a continuidade de P_+, a Proposição 6 com $p=4$, o fato de $(1/2, \infty, 2)$ ser 1-admissível e por fim também a Proposição 9 para obter

$$
\begin{aligned}
\Big\| D_x^{1/2} & \int_0^t V(t-t') D_x^{1/10} P_+ (D_x^{s-1/10}(e^{-iF}u) G(u,u)) dt' \Big\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
\lesssim & T^{1/8} \| D_x^{1/10} P_+ (D_x^{s-1/10}(e^{-iF}u) G(u,u)) \|_{L_x^{4/3} L_T^{4/3}} \\
\lesssim & T^{1/8} \| D_x^{1/10} (D_x^{s-1/10}(e^{-iF}u) G(u,u)) \|_{L_x^{4/3} L_T^{4/3}} \\
\lesssim & T^{1/8} \Big(\| D_x^s (e^{-iF}u) \|_{L_x^4 L_T^4} \| G(u,u) \|_{L_x^2 L_T^2} \\
& + \| D_x^{s-1/10}(e^{-iF}u) \|_{L_x^{10/3} L_T^5} \| D_x^{1/10} G(u,u) \|_{L_x^{20/9} L_T^{20/11}} \Big) \\
\lesssim & T^{1/8} \Big(\|u\|_{L_x^{12} L_T^{12}}^3 + \|J_x^s u\|_{L_x^4 L_T^4} \Big) \| D_x^{1/2} u \|_{L_x^4 L_T^4} \| D_x^{1/2} u \|_{L_x^4 L_T^4} \\
& + T^{1/8} \Big(\|u\|_{L_x^{10} L_T^{15}}^3 + \|J_x^{s-1/10} u\|_{L_x^{10/3} L_T^5} \Big) \| D_x^{9/10} u \|_{L_x^{20} L_T^{20/9}} \| D_x^{1/5} u \|_{L_x^{5/2} L_T^{10}} \\
\lesssim & T^{1/8} \Big(\|u\|_{L_x^{12} L_T^\infty}^3 + \|J_x^s u\|_{L_x^4 L_T^4} \Big) \| D_x^{1/2} u \|_{L_x^4 L_T^4}^2 \\
& + T^{1/8} \Big(\|u\|_{L_x^{10} L_T^{15}}^3 + \|J_x^{s-1/10} u\|_{L_x^{10/3} L_T^5} \Big) \| D_x^{9/10} u \|_{L_x^{20} L_T^{20/9}} \| D_x^{1/5} u \|_{L_x^{5/2} L_T^{10}} \\
\lesssim & T^{1/8} \Big(\|u\|_{X_T^{1/2}}^3 + \|u\|_{X_T^s} \Big) \|u\|_{X_T^{1/2}}^2 \\
& + T^{1/8} \Big(\|u\|_{X_T^{1/2}}^3 + \|u\|_{X_T^s} \Big) \|u\|_{X_T^{1/2}} \|u\|_{X_T^{1/2}} \\
\lesssim & T^{1/8} \|u\|_{X_T^{1/2}}^5 + T^{1/8} \|u\|_{X_T^{1/2}}^2 \|u\|_{X_T^s}.
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

Finalmente, para o segundo termo de (4.59), utilizando também o Lema 7, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Big\| D_x^{1/2} & \int_0^t V(t-t') D_x^{1/10} P_+ \Big([D_x^{s-1/10}, G(u,u)] e^{-iF}u \Big) dt' \Big\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
& \lesssim T^{1/8} \| D_x^{1/10} P_+ \Big([D_x^{s-1/10}, G(u,u)] e^{-iF}u \Big) \|_{L_x^{4/3} L_T^{4/3}} \\
& \lesssim T^{1/8} \| D_x^{1/10} \Big([D_x^{s-1/10}, G(u,u)] e^{-iF}u \Big) \|_{L_x^{4/3} L_T^{4/3}} \\
& \lesssim T^{1/8} \Big(\| e^{-iF}u \|_{L_x^2 L_T^\infty} \| D_x^s G(u,u) \|_{L_x^4 L_T^{4/3}} \Big) \\
& \lesssim T^{1/8} \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} \| D_x^s G(u,u) \|_{L_x^4 L_T^{4/3}} \\
& \lesssim T^{1/8} \|u\|_{L_X^2 L_T^\infty} \| D_x^{s+1/10} u \|_{L_x^5 L_T^{10/3}} \| D_x^{9/10} u \|_{L_x^{20} L_T^{20/9}} \\
& \lesssim T^{1/8} \|u\|_{X_T^{1/2+}} \|u\|_{X_T^{1/2}} \|u\|_{X_T^s}.
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

Com isso completamos o caso $k = 2$.

- Caso $k \geqslant 3$. Integrando por partes temos:

$$
\begin{aligned}
e^{-iF}u \int_{-\infty}^x u^{k-2} u_x \mathcal{H} u_x &= e^{-iF}u \Big(u^{k-2} G(u,u) - \int_{-\infty}^x (k-2) u^{k-3} u_x G(u,u) \Big) \\
&= e^{-iF} u^{k-1} G(u,u) - (k-2) e^{-iF}u \int_{-\infty}^x u^{k-3} u_x G(u,u).
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Para tratar a contribuição do primeiro termo no lado direito de (4.62), como no caso $k = 2$, escrevemos

$$
\begin{aligned}
D_x^s(e^{-iF}u^{k-1}G(u,u)) =& D_x^{1/10}D_x^{s-1/10}(e^{-iF}u^{k-1}G(u,u)) \\
=& D_x^{1/10}(D_x^{s-1/10}(e^{-iF}u^{k-1})G(u,u) \\
&+ [D_x^{s-1/10}, G(u,u)]e^{-iF}u^{k-1}).
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

Em seguida, procedemos exatamente da mesma maneira do caso $k = 2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left\|D_x^{1/2}\int_0^t V(t-t')D_x^{1/10}P_+(D_x^{s-1/10}(e^{-iF}u^{k-1})G(u,u))dt'\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\lesssim T^{1/8}\|D_x^{1/10}P_+(D_x^{s-1/10}(e^{-iF}u^{k-1})G(u,u))\|_{L_x^{4/3}L_T^{4/3}} \\
&\lesssim T^{1/8}\Big(\|D_x^s(e^{-iF}u^{k-1})\|_{L_x^4L_T^4}\|G(u,u)\|_{L_x^2L_T^2} \\
&\quad + \|D_x^{s-1/10}(e^{-iF}u^{k-1})\|_{L_x^{10/3}L_T^5}\|D_x^{1/10}G(u,u)\|_{L_x^{20/9}L_T^{20/11}}\Big) \\
&\lesssim T^{1/8}\Big(\|u\|^{2k-1}_{L_x^{4(2k-1)}L_T^{4(2k-1)}} + \|J_x^s u\|_{L_x^4L_T^4}\Big)\|D_x^{1/2}u\|^2_{L_x^4L_T^4} \\
&\quad + T^{1/8}\Big(\|u\|^{2k-1}_{L_x^{10(2k-1)/3}L_T^{5(2k-1)}} + \|J_x^{s-1/10}u^{k-1}\|_{L_x^{10/3}L_T^5}\Big) \\
&\quad \times \|D_x^{9/10}u\|_{L_x^{20}L_T^{20/9}}\|D_x^{1/5}u\|_{L_x^{5/2}L_T^{10}} \\
&\lesssim T^{1/8}\Big(\|u\|^{2k-1}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-2}_{L_x^{20(k-2)}L_T^\infty}\|J_x^s u\|_{L_x^5L_T^5}\Big)\|D_x^{1/2}u\|^2_{L_x^4L_T^4}\|D_x^{1/2}u\|^2_{L_x^4L_T^4} \\
&\quad + T^{1/8}\Big(\|u\|^{2k-1}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-2}_{L_x^{40(k-2)}L_T^\infty}\|J_x^{s-1/10}u^{k-1}\|_{L_x^{20}L_T^{40/7}}\Big) \\
&\quad \times \|D_x^{9/10}u\|_{L_x^{20}L_T^{20/9}}\|D_x^{1/5}u\|_{L_x^{5/2}L_T^{10}} \\
&\lesssim T^{1/8}\Big(\|u\|^{k-2}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^{k-2}_{X_T^{1/2}}\|u\|_{X_T^s}\Big)\|u\|^2_{X_T^{1/2}} \\
&\lesssim T^{1/8}\Big(\|u\|^{2k+1}_{X_T^{1/2}} + \|u\|^k_{X_T^{1/2}}\|u\|_{X_T^s}\Big), \\
&\left\|D_x^{1/2}\int_0^t V(t-t')D_x^{1/10}P_+([D_x^{s-1/10}, G(u,u)]e^{-iF}u^{k-1})dt'\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\lesssim T^{1/8}\|D_x^{1/10}([D_x^{s-1/10}, G(u,u)]e^{-iF}u^{k-1})\|_{L_x^{4/3}L_T^{4/3}} \\
&\lesssim T^{1/8}\|e^{-iF}u^{k-1}\|_{L_x^2L_T^\infty}\|D_x^s G(u,u)\|_{L_x^4L_T^{4/3}} \\
&\lesssim T^{1/8}\|u\|^{k-1}_{L_x^{2(k-1)}L_T^\infty}\|D_x^{s+1/10}u\|_{L_x^5L_T^{10/3}}\|D_x^{9/10}u\|_{L_x^{20}L_T^{20/9}} \\
&\lesssim T^{1/8}\|u\|^{k-1}_{X_T^{1/2}}\|u\|_{X_T^{1/2}}\|u\|_{X_T^s} \\
&\lesssim T^{1/8}\|u\|^k_{X_T^{1/2}}\|u\|_{X_T^s}.
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

Assim, falta somente estimar a contribuição do segundo termo do lado direito de (4.62).

Primeiro decompomos este termo como

$$\begin{aligned} D_x^s\Big(ue^{-iF}\int_{-\infty}^x u^{k-3}u_x G(u,u)\Big) =& D_x^s(ue^{-iF})\int_{-\infty}^x u^{k-3}u_x G(u,u) \\ &+ [D_x^s, \int_{-\infty}^x u^{k-3}u_x G(u,u)]ue^{-iF}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

A contribuição do primeiro termo do lado direito de (4.65) é estimada com ajuda da Proposição 10 e imersão de Sobolev, como segue:

$$\begin{aligned} &\Big\|D_x^{1/2}\int_0^t V(t-t')\Big(D_x^s(ue^{-iF})\int_{-\infty}^x u^{k-3}u_x G(u,u)\Big)dt'\Big\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\lesssim \Big\|D_x^s(ue^{-iF})\int_{-\infty}^x u^{k-3}u_x G(u,u)\Big\|_{L_T^1 L_x^2} \\ &\lesssim \|D_x^s(ue^{-iF})\|_{L_T^\infty L_x^2}\Big\|\int_{-\infty}^x u^{k-3}u_x G(u,u)\Big\|_{L_T^1 L_x^\infty} \\ &\lesssim \Big(\|u\|^k_{L_T^\infty L_x^{4k}}\|u\|_{L_T^\infty L_x^4} + \|J_x^s u\|_{L_T^\infty L_x^2}\Big)\Big\|\int_{-\infty}^x u^{k-3}u_x G(u,u)\Big\|_{L_T^1 L_x^\infty} \\ &\lesssim \Big(\|u\|^{k+1}_{L_T^\infty H^{1/2}} + \|J_x^s u\|_{L_T^\infty L_x^2}\Big)\Big\|\int_{-\infty}^x u^{k-3}u_x G(u,u)\Big\|_{L_T^1 L_x^\infty} \\ &\lesssim \Big(\|u\|^{k+1}_{L_T^\infty H^{1/2}} + \|J_x^s u\|_{L_T^\infty L_x^2}\Big)\Big\|u^{k-3}u_x G(u,u)\Big\|_{L_T^1 L_x^1}, \end{aligned} \tag{4.66}$$

uma vezão que para qualquer função integrável ψ, pela desigualdade de Minkowski,

$$\Big\|\int_{-\infty}^x \psi\Big\|_{L_T^1 L_x^\infty} \lesssim \Big\|\int_{\mathbb{R}} |\psi(\cdot,x)|dx\Big\|_{L_T^1} \lesssim \int_{\mathbb{R}} \|\psi(\cdot,x)\|_{L_T^1} = \|\psi\|_{L_x^1 L_T^1}. \tag{4.67}$$

Para $k \geqslant 4$, nós então obtemos então pelo Lema 9,

$$\begin{aligned} \|u^{k-3}u_x G(u,u)\|_{L_x^1 L_T^1} &\lesssim \|u\|^{k-3}_{L_x^{2(k-3)}L_T^\infty}\|u_x\|_{L_x^\infty L_T^2}\|G(u,u)\|_{L_x^2 L_T^2} \\ &\lesssim \|u\|^{k-3}_{L_x^{2(k-3)}L_T^\infty}\|u_x\|_{L_x^\infty L_T^2}\|D_x^{1/2}u\|^2_{L_x^4 L_T^4} \\ &\lesssim \|u\|^{k-3}_{L_x^{2(k-3)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^{1/2}}\Big(T^{1/8}\|u\|_{X_T^{1/2}}\Big)^2 \\ &\lesssim T^{1/4}\|u\|^{k-3}_{L_x^{2(k-3)}L_T^\infty}\|u\|_{X_T^{1/2}}, \end{aligned} \tag{4.68}$$

e para $k = 3$,

$$\begin{aligned} \|u_x G(u,u)\|_{L_x^1 L_T^1} &\lesssim \|u_x\|_{L_x^\infty L_T^2}\|G(u,u)\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim \|u_x\|_{L_x^\infty L_T^2}\|D_x^{1/2}u\|^2_{L_x^2 L_T^4} \\ &\lesssim \|u\|_{X_T^{3/4}}\Big(T^{1/4}\|u\|_{X_T^{3/4}}\Big)^2 \\ &\lesssim T^{1/2}\|u\|^3_{X_T^{3/4}}. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Para estimar o segundo termo de (4.65) primeiro fazemos sua decomposição da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\Big[D_x^s, \int_{-\infty}^{x} u^{k-3}u_x G(u,u)\Big]ue^{-iF} =& \Big[D_x^s, P_0\int_{-\infty}^{x} u^{k-3}u_x G(u,u)\Big]ue^{-iF} \\
&+ \Big[D_x^s, (1-P_0)\int_{-\infty}^{x} u^{k-3}u_x G(u,u)\Big]ue^{-iF}.
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

A contribuição do primeiro termo do lado direito de (4.70) pode ser estimada como o primeiro termo do lado direito de (4.65), pois que pela desigualdade de Bernstein

$$
\begin{aligned}
&\Big\|D_x^{1/2}\int_0^t V(t-t')P_+\Big(\Big[D_x^s, P_0\int_{-\infty}^{x} u^{k-3}u_x G(u,u)\Big]ue^{-iF}\Big)dt'\Big\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\quad\lesssim \Big\|\Big[D_x^s, P_0\int_{-\infty}^{x} u^{k-3}u_x G(u,u)\Big]ue^{-iF}\Big\|_{L_T^1 L_x^2} \\
&\quad\lesssim \|J_x^s(ue^{-iF})\|_{L_T^\infty L_x^2}\Big\|P_0\int_{-\infty}^{x} u^{k-3}u_x G(u,u)\Big\|_{L_T^1 L_x^\infty}.
\end{aligned}
\tag{4.71}
$$

Para o segundo termo de (4.70), a Proposição 9 com o fato que $(1/2,\infty,2)$ e $(-1/12,6,8)$ são 1-admissíveis obtemos que

$$
\Big\|D_x^{1/2-1/12}\int_0^t V(t-t')f(t')dt'\Big\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|f(t')\|_{L_x^{6/5}L_T^{8/7}}.
\tag{4.72}
$$

Logo, usando também o Lema 7, temos para $k \geqslant 4$,

$$
\begin{aligned}
&\Big\|D_x^{1/2}\int_0^t V(t-t')P_+\Big(\Big[D_x^s, (1-P_0)\int_{-\infty}^{x} u^{k-3}u_x G(u,u)\Big]ue^{-iF}\Big)dt'\Big\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\quad= \Big\|D_x^{1/2-1/12}\int_0^t V(t-t')P_+D_x^{1/12}\Big(\Big[D_x^s, (1-P_0)\int_{-\infty}^{x} u^{k-3}u_x G(u,u)\Big]ue^{-iF}\Big)dt'\Big\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\qquad\lesssim \Big\|D_x^{1/12}\Big(\Big[D_x^s, (1-P_0)\int_{-\infty}^{x} u^{k-3}u_x G(u,u)\Big]ue^{-iF}\Big)\Big\|_{L_x^{6/5}L_T^{8/7}} \\
&\qquad\lesssim \|ue^{-iF}\|_{L_x^8 L_T^{24}}\Big\|D_x^{1/2+s}(1-P_0)\int_{-\infty}^{x} u^{k-3}u_x G(u,u)\Big\|_{L_x^{24/17}L_T^{6/5}} \\
&\qquad\lesssim \|u\|_{L_x^8 L_T^{24}}\|u^{k-3}u_x G(u,u)\|_{L_x^{24/17}L_T^{6/5}} \\
&\qquad\lesssim \|u\|_{L_x^8 L_T^{24}}\|u\|^{k-3}_{L_x^{8(k-3)}L_T^\infty}\|u_x\|_{L_x^\infty L_T^2}\|G(u,u)\|_{L_x^3 L_T^3} \\
&\qquad\lesssim \|u\|_{L_x^8 L_T^{24}}\|u\|^{k-3}_{L_x^{8(k-3)}L_T^\infty}\|u_x\|_{L_x^\infty L_T^2}\|D_x^{1/2}u\|^2_{L_x^6 L_T^6} \\
&\qquad\lesssim T^{1/24}\|u\|_{L_x^8 L_T^\infty}\|u\|^{k-3}_{L_x^{8(k-3)}L_T^\infty}\|u_x\|_{L_x^\infty L_T^2}\|D_x^{1/2}u\|^2_{L_x^6 L_T^6} \\
&\qquad\lesssim T^{1/24}\|u\|_{X_T^{1/2}}\|u\|^{k-3}_{X_T^{1/2}}\|u\|_{X_T^{1/2}}\|u\|^2_{X_T^{1/2}} \\
&\qquad\lesssim T^{1/24}\|u\|^{k+1}_{X_T^{1/2}},
\end{aligned}
\tag{4.73}
$$

onde usamos que $D_x^{s+1/12}(1-P_0)\int_0^x$ é um operador limitado em $L^p_xL^q_T, 1 \leqslant p,q \leqslant \infty$, deste que $s+1/12 \leqslant 1$ (veja Observação 1).

Finalmente, para $k=3$, a contribuição acima pode ser estimada da mesma maneira:

$$
\begin{aligned}
\Big\| D_x^{1/2}\int_0^t V(t-t')P_+\Big(\Big[D_x^s,(1-P_0)\int_{-\infty}^x u_xG(u,u)\Big]ue^{-iF}\Big)dt'\Big\|_{L^\infty_xL^2_T} \\
&\lesssim \Big\|D_x^{1/12}\Big(\Big[D_x^s,(1-P_0)\int_{-\infty}^x u_xG(u,u)\Big]ue^{-iF}\Big)dt'\Big\|_{L_x^{6/5}L_T^{8/7}} \\
&\lesssim \|ue^{-iF}\|_{L^2_xL^{24}_T}\Big\|D_x^{1/2+s}(1-P_0)\int_{-\infty}^x u_xG(u,u)\Big\|_{L^3_xL^{6/5}_T} \\
&\lesssim \|u\|_{L^2_xL^{24}_T}\|u_xG(u,u)\|_{L^3_xL^{6/5}_T} \qquad (4.74)\\
&\lesssim \|u\|_{L^2_xL^{24}_T}\|u_x\|_{L^\infty_xL^2_T}\|D_x^{1/2}u\|_{L^6_xL^6_T} \\
&\lesssim T^{1/24}\|u\|_{L^2_xL^\infty_T}\|u_x\|_{L^\infty_xL^2_T}\|D_x^{1/2}u\|^2_{L^6_xL^6_T} \\
&\lesssim T^{1/24}\|u\|_{X_T^{1/2+}}\|u\|_{X_T^{1/2}}\|u\|^2_{X_T^{1/2}} \\
&\lesssim T^{1/24}\|u\|_{X_T^{1/2+}}\|u\|^3_{X_T^{1/2}}.
\end{aligned}
$$

Isto conclui a demonstração. □

4.4 Existência em $H^s(\mathbb{R})$

Para simplificar a exposição, apresentamos os argumentos para $k \geqslant 5$ e portanto $s \geqslant 1/2$. Os argumentos para $k=2,4$ são exatamente os mesmos. Um deles tem apenas que substituir $1/2$ por $1/2+$ na sequência (para $k=3$, o mesmo é verdadeiro substituindo $1/2$ por $3/4$).

Seja $u_0 \in H^\infty(\mathbb{R})$. De acordo com [1], existem $T = T\big(\|u_0\|_{H^{3/2+}}\big) > 0$ e uma única solução $u \in C\big([0,T];H^\infty\big)$ de (1.1) associada com dado inicial u_0. Usando a fórmula integral (4.1) e as estimativas lineares do Capítulo 3, vê-se que

$$u \in X_T^s, \quad \text{para qualquer } \; s \in \mathbb{R}_+. \tag{4.75}$$

Além disso, reunindo (4.8) e (4.43) obtemos para $s \geqslant 1/2$,

$$\|u\|_{X_T^s} \leqslant P_{s,k}\big(\|u_0\|_{H^{1/2}}\big)\|u_0\|_{H^s} + T^{\nu(k)}P_{s,k}\big(\|u\|_{X_T^{1/2}}\big)\|u\|_{X_T^s}, \tag{4.76}$$

onde $P_{s,k} \geqslant 1$ são funções polinomiais não decrescentes e $\nu(k) > 0$. Chamando T^* o tempo de existência máxima em $H^\infty(\mathbb{R})$ de u, deduzimos a partir de (4.76) que

$$T^* < \infty \Longrightarrow \lim_{t\nearrow T^*}\|u\|_{X_T^{1/2}} = +\infty. \tag{4.77}$$

Agora, seja $u_0 \in H^s(\mathbb{R}), s \geqslant 1/2$ e seja $\{u_0^n\}_{n\geqslant 0} \subset H^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_0^n \longrightarrow u_0$ em $H^s(\mathbb{R})$ e $\|u_0^n\|_{H^{1/2}} \leqslant \|u_0\|_{H^{1/2}}$. Seja u_n uma solução de (1.1) associada com u_0^n (onde a existência de tais soluções suaves são comprovada em [1] ou [8]). Como $u_0^n \in H^\infty(\mathbb{R})$, temos que

$$u_n \in C\big([0, T_n^*[; H^\infty\big), \tag{4.78}$$

onde $T_n^* \geqslant T_n\big(\|u_0^n\|_{H^{3/2+}}\big) > 0$ é o tempo de existência máximo de u_n em $H^\infty(\mathbb{R})$.

Provaremos o seguinte limite uniforme inferior para T_n^*:

$$\forall n \geqslant 0, \;\; T_n^* \geqslant T = T\big(\|u_0\|_{H^{1/2}}\big) > 0. \tag{4.79}$$

Fixando $n \geqslant 0$ podemos sempre assumir que $T_n^* < \infty$. Caso contrário, (4.79) é trivialmente satisfeito para n.

Então, de (4.77)

$$\lim_{t \nearrow T_n^*} \|u_n\|_{X_T^{1/2}} = +\infty. \tag{4.80}$$

A partir da regularidade de u_n (lembre-se de (4.75) e (4.78), tem-se $u_n \in C\big([0,T]; H^s(\mathbb{R})\big) \cap X_T^s$, para todo $0 < T < T_n^*$ e $s \geqslant 0$), segue que a aplicação $T \longmapsto \|u\|_{X_T^s}$ é contínua de $[0, T_n^*[$ para $\mathbb{R}_+$. Portanto, vai existir $0 < \tilde{T}_n < T_n^*$ tal que

$$\|u_n\|_{X_{\tilde{T}_n}^{1/2}} = 4P_{1/2,k}\big(\|u_0\|_{H^{1/2}}\big)\|u_0\|_{H^{1/2}}. \tag{4.81}$$

Afirmação 1.

$$\tilde{T}_n \geqslant T = \big[8P_{1/2,k}\big(4P_{1/2,k}\big(\|u_0\|_{H^{1/2}}\big)\|u_0\|_{H^{1/2}}\big)\big]^{-1/\nu(k)}. \tag{4.82}$$

De fato, assumindo que não é verdade, ou seja,

$$\tilde{T}_n < T = \big[8P_{1/2,k}\big(4P_{1/2,k}\big(\|u_0\|_{H^{1/2}}\big)\|u_0\|_{H^{1/2}}\big)\big]^{-1/\nu(k)},$$

de (4.76) com $s = 1/2$ e (4.81)-(4.82), teriamos que ter

$$\begin{aligned}\|u\|_{X_{\tilde{T}_n}^{1/2}} &\leqslant P_{1/2,k}\big(\|u_0^n\|_{H^s}\big)\|u_0^n\|_{H^s} + \big(\tilde{T}_n\big)^{\nu(k)} P_{1/2,k}\big(\|u\|_{X_{\tilde{T}_n}^{1/2}}\big)\|u\|_{X_{\tilde{T}_n}^s} \\ &\lesssim 2P_{1/2,k}\big(\|u_0\|_{H^{1/2}}\big)\|u_0\|_{H^{1/2}},\end{aligned}$$

o que contradiz (4.81).

Segue que $u_n \in C\big([0,T]; H^\infty(\mathbb{R})\big)$ com $T = T\big(\|u_0\|_{H^{1/2}}\big)$ e que $\|u_0\|_{X_T^{1/2}}$ é uniformemente limitado em n. De acordo com (4.76), $\|u_n\|_{X_T^s}$ é também uniformemente limitado em n e passando o limite em n, obtém-se a existência de uma solução $u \in X_T^s$ de (1.1) (GBO) satisfazendo (4.76).

4.5 Continuidade em $H^s(\mathbb{R})$

Para qualquer par $(t_1, t_2) \in [0, T]^2$, com $t_1 < t_2$, escrevendo $u(t)$ como

$$u(t) = V(t - t_1)u(t_1) - \int_{t_1}^{t} V(t - t')\big(u^k u_x\big)(t')dt', \tag{4.83}$$

obtemos de acordo com as Seções 4.2 e 4.3

$$\begin{aligned}
\|u(t_1) - u(t_2)\|_{H^s} &\leqslant \sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u(t) - u(t_1)\|_{H^s} \\
&= \sup_{t\in[t_1,t_2]} \left\| V(t - t_1)u(t_1) - \int_{t_1}^{t} V(t - t')\big(u^k u_x\big)(t')dt' - u(t_1)\right\|_{H^s} \\
&\lesssim \sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u(t_1) - V(t - t_1)u(t_1)\|_{H^s} \\
&\quad + \sup_{t\in[t_1,t_2]} \left\| \int_{t_1}^{t} V(t - t')\big(u^k u_x\big)(t')dt' \right\|_{H^s} \\
&\lesssim \sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u(t_1) - V(t - t_1)u(t_1)\|_{H^s} \\
&\quad + \left\| \int_{t_1}^{t} V(t - t')\big(u^k u_x\big)(t')dt' \right\|_{L^\infty(t_1,t_2;H^s)} \\
&\lesssim \epsilon[t_1 - t_2] + (t_1 - t_2)^\nu C\big(\|u\|_{X^s_T}\big) \\
&\lesssim \epsilon[t_1 - t_2],
\end{aligned} \tag{4.84}$$

onde $\epsilon[t_1 - t_2] \longrightarrow 0$ quando $t_2 \longrightarrow t_1$.

4.6 Unicidade e dependência Lispchitz com respeito ao dado inicial

Seja u_1 e $u_2 \in X^s_T$, duas soluções com $u_{0,1}$ e $u_{0,2}$ dados inicias, respectivamente. Lembremos que tomamos $s \geqslant 1/2$ se $k \geqslant 5$, $s > 1/2$ se $k = 2, 4$ e $s \geqslant 3/4$ se $k = 3$. O objetivo dessa seção é provar a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_{X^s_T} \lesssim & P_{s,k}\big(\|u_{0,1}\|_{H^s} + \|u_{0,2}\|_{H^s}\big)\|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{H^s} \\
& + T^{\nu(k)} P_{s,k}\big(\|u_1\|_{X^s_T} + \|u_2\|_{X^s_T}\big)\|u_1 - u_2\|_{X^s_T},
\end{aligned} \tag{4.85}$$

onde como (4.76), $P_{s,k} \geqslant 1$ são funções polinomiais positivas não decrescente e $\nu(k)$ são números reais positivos. Obviamente, a unicidade da solução de (1.1) e o fato da aplicação fluxo ser localmente Lipschitz de H^s em H^s segue-se diretamente de (4.85).

Seja $v = u_1 - u_2, F_i = F(u_i) = \int_{-\infty}^{x} u_i^k, w_i = P_+(e^{-iF_i}u_i), i = 1, 2$ e $z = w_1 - w_2$. A demonstração de (4.85) é exatamente similiar a demonstração de (4.76). Da mesma forma como na Seção 4, escrevemos

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_+v_t - i\tilde{P}_+v_{xx} &= \tilde{P}_+\big(v^k v_x\big)\\
&= \tilde{P}_+\big(v^k e^{iF_i}e^{-iF_i}v_x\big)\\
&= \tilde{P}_+\big(v^k e^{iF_i}\partial_x\big(e^{iF_i}v\big) + iv^{2k+1}\big)\\
&= \tilde{P}_+\big[u_1^k e^{iF_1}\partial_x\big(e^{-iF_1}u_1\big) - u_2^k e^{iF_2}\partial_x\big(e^{-iF_2}u_2\big)\big]\\
&\quad + i\tilde{P}_+\big(u_1^{2k+1} - u_2^{2k+1}\big)\\
&= \tilde{P}_+\big[u_1^k e^{iF_1}\partial_x\big(e^{-iF_1}u_1\big) - u_2^k e^{iF_2}\partial_x\big(e^{-iF_2}u_2\big)\\
&\quad + u_1^k e^{iF_1}\partial_x\big(e^{-iF_2}u_2\big) - u_1^k e^{iF_1}\partial_x\big(e^{-iF_2}u_2\big)\\
&\quad + u_1^k e^{iF_2}\partial_x\big(e^{-iF_2}u_2\big) - u_1^k e^{iF_2}\partial_x\big(e^{-iF_2}u_2\big)\big]\\
&\quad + i\tilde{P}_+\big(u_1^{2k+1} - u_2^{2k+1}\big)\\
&= \tilde{P}_+\big[e^{iF_1}u_1^k\partial_x\big(e^{-iF_1}u_1 - e^{-iF_2}u_2\big) + e^{iF_2}\big(u_1^k - u_2^k\big)\partial_x\big(e^{-iF_2}u_2\big)\\
&\quad + u_1^k\big(e^{iF_1} - e^{iF_2}\big)\partial_x\big(e^{-iF_2}u_2\big)\big]\\
&\quad + i\tilde{P}_+\big(u_1^{2k+1} - u_2^{2k+1}\big)\\
&= \tilde{P}_+\big[e^{iF_1}u_1^k z_x + \big(e^{iF_1} - e^{iF_2}\big)u_1^k\partial_x w_2 + e^{iF_2}\big(u_1^k - u_2^k\big)\partial_x w_2\big]\\
&\quad + \tilde{P}_+\big[u_1^k e^{iF_1}\partial_x P_-\big(e^{-iF_1}u_1 - e^{-iF_2}u_2\big)\\
&\qquad + \big(e^{iF_1} - e^{iF_2}\big)u_1^k\partial_x P_-\big(e^{-iF_2}u_2\big)\\
&\qquad + e^{iF_2}\big(u_1^k - u_2^k\big)\partial_x P_-\big(e^{-iF_2}u_2\big)\big]\\
&\quad + i\tilde{P}_+\Big[\big(u_1 - u_2\big)\sum_{j=0}^{2k} u_1^{2k-j}u_2^j\Big].
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Procedendo como na Seção 4.3, usando além disso que, para $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\|D_x^\alpha\big(\big(e^{iF_1} - e^{iF_2}\big)g\big)\|_{L_x^pL_T^q} &\lesssim \|u_1^k e^{-iF_1} - u_2^k e^{-iF_2}\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}}^k \|g\|_{L_x^{p_2}L_T^{q_2}}\\
&\quad + \|u_1 - u_2\|_{X_T^s}\Big(\|u_1\|_{X_T^{1/2}}^{k-1} + \|u_2\|_{X_T^{1/2}}^{k-1}\Big)J_x^\alpha g\|_{L_x^pL_T^q},
\end{aligned} \tag{4.87}$$

onde $1 < p_i, q_i < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p, 1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$ e que

$$\begin{aligned}\|e^{iF_1} - e^{iF_2}\|_{L^\infty_{x,T}} &\lesssim \|F_1 - F_2\|_{L^\infty_{x,T}} \\ &\lesssim \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}} |u_1^k - u_2^k| \\ &\lesssim \|u_1 - u_2\|_{L^\infty_T L^k_x} \Big(\|u_1\|^{k-1}_{L^\infty_T L^k_x} + \|u_2\|^{k-1}_{L^\infty_T L^k_x} \Big) \\ &\lesssim \|u_1 - u_2\|_{X^{1/2}_T} \Big(\|u_1\|^{k-1}_{X^{1/2}_T} + \|u_2\|^{k-1}_{X^{1/2}_T} \Big),\end{aligned} \tag{4.88}$$

fica claro que, para provar (4.85), é suficiente obter uma estimativa semelhante a (4.42), (4.43) e (4.44) de $\|D_x^{s+1/2} z\|_{L^\infty_x L^2_T}$. Escrevendo analogamente como em (4.41), obtemos

$$\begin{aligned}z_t - iz_{xx} =& -2kP_+\big(e^{-iF_1} u_1^k P_- v_x\big) - 2kP_+\big(\big(e^{-iF_1} u_1^k - e^{-iF_2} u_2^k\big)\partial_x P_- u_2\big) \\ & - 2iP_+\big(e^{-iF_1} P_- v_{xx}\big) - 2iP_+\big(\big(e^{-iF_1} - e^{-iF_2}\big)\partial_{xx} P_- u_2\big) \\ & - ik(k-1)P_+\Big(\big(e^{-iF_1} u_1 - e^{-iF_2} u_2\big) \int_{-\infty}^x u_1^{k-2} u_{1,x} \mathcal{H} u_{1,x}\Big) \\ & - ik(k-1)P_+\Big(e^{-iF_2} u_2 \int_{-\infty}^x \big(u_1^{k-2} - u_2^{k-2}\big) u_{1,x} \mathcal{H} u_{1,x}\Big) \\ & - ik(k-1)P_+\Big(e^{-iF_2} u_2 \int_{-\infty}^x u_2^{k-2} \big(u_{1,x} \mathcal{H} u_{1,x} - u_{2,x} \mathcal{H} u_{2,x}\big)\Big).\end{aligned} \tag{4.89}$$

Não é muito difícil perceber que uma boa estimativa de $\|D_x^{s+1/2} z\|_{L^\infty_x L^2_T}$ pode ser obtida seguindo as mesmas considerações da Seção 4.3. O único termo delicado é o último. Mas percebendo que

$$\begin{aligned}u_{1,x} \mathcal{H} u_{1,x} - u_{2,x} \mathcal{H} u_{2,x} &= \partial_x G(u_1, u_1) - \partial_x G(u_2, u_2) \\ &= \partial_x G(u_1, v) + \partial_x G(u_2, v),\end{aligned} \tag{4.90}$$

pode-se tratá-lo como a estimativa IV de $\|D_x^{s+1/2} z\|_{L^\infty_x L^2_T}$ em (4.52).

Referências Bibliográficas

[1] L. Abdelouhab, J. L. Bona, M. Felland, and J.-C. Saut, *Nonlocal models for nonlinear, dispersive waves*, Phys. D 40 (1989), no. 3, 360-392.

[2] T. B. Benjamin, *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid Mech. 29 (1967), 559-592.

[3] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics 29, AMS, Providence, 2000.

[4] Folland, G. B.,*Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*, Jonh Wiley & Sons, New York, 1984.

[5] Friedlander, F. G. and Joshi, M., *Introduction to the Theory of Distributions*, Second Edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[6] N. Hayashi and T. Ozawa, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Differential Integral Equations 7 (1994), no. 2, 453-461.

[7] Iorio, R.; Iorio, V. M., *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2001.

[8] R. J. Iório Jr., *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation*, Comm. Partial Differential Equations 11 (1986), no. 10, 1031-1081.

[9] C. E. Kenig and K. D. Koenig, *On the local equation in well-posedness of the Benjamin-Ono and modified Benjamin-Ono equations*, Math. Res. Lett. 10 (2003), no. 5-6. 879-895.

[10] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl.Math. 46 (1993), no. 4, 527-620.

[11] ——, *On the generalized Benjamin-Ono equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 342 (1994), no. 1, 155-172.

[12] Linares, F. and Ponce, G., *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Springer, New York, 2009.

[13] L. Molinet, F. Ribaud, *Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with arbitrary large initial data*, Int. Math. Res. Not. 2004, no. 70, 3757-3795.

[14] L. Molinet and F. Ribaud, *Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with small initial data*, J. Math. Pures Appl. (9) 83 (2004), no. 2, 277-311.

[15] F. Planchon, *Notes de course*, Cap. 2: Analyse de Littlewood-Paley, 9-25. (French).

[16] T. Tao, *Global well-posedness of the Benjamin-Ono* $\mathsf{H}^1(\mathbb{R})$, JHDE 1 (2004), no. 1, 27-49.

[17] Vento, S., *Well-posedness for the generalized Benjamin-Ono equations with arbitrary large initial data in the critical space*, Int. Math. Res. Not., Vol. 2010, No. 2, 297-319.